Théorie de Galois (MAT451)
Année 2007

FEUILLE D'EXERCICES n° 2

1

Soit A un anneau (commutatif et unitaire, comme d'habitude). Soit $S \subseteq A$ un sous-ensemble tel que $1 \in S$ et tel que $x \cdot y \in S$, si $\{x, y\} \subseteq S$. On dit que S est un *sous-ensemble multiplicatif* de A. Soit $\approx$ la relation sur l'ensemble $A \times S$ telle que $(a, s) \approx (a', s')$ ssi $a \cdot s' = a' \cdot s$.

(1) Démontrer que $\approx$ est un relation d'équivalence.

(2) On note A_S l'ensemble des classes d'équivalence de $\approx$. Soit $\cdot$ et $+$ les accouplements

$$(a, s) \cdot (a', s') := (a \cdot a', s \cdot s')$$

et

$$(a, s) + (a', s') := (a \cdot s' + a' \cdot s, s \cdot s')$$

sur $A \times S$. Démontrer que si $x \approx x'$ et $y \approx y'$, alors $x + y \approx x' + y'$ et $x \cdot y \approx x' \cdot y'$.

(3) Montrer que les accouplements définis au (2) induisent sur A_S une structure d'anneau commutatif unitaire. On appelle A_S la *localisation* de A en S.

(4) Montrer que l'application $\phi : A \to A_S$ définie par la formule $\phi(a) := (a, 1)$ est un morphisme d'anneaux. Montrer que $\phi(A) \subseteq U(A_S^*)$.

(5) Soit $\psi : A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi(S) \subseteq U(B^*)$. Démontrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\psi' : A_S \to B$ tel que $\psi = \psi' \circ \phi$.

(6) On suppose que A est intègre. Montrer que ϕ est injectif. Montrer que l'anneau $A_{A\setminus\{0\}}$ est un corps. On a l'appelle *corps des fractions* de A.

2

Soit A un anneau.

(1) Soit $S \subseteq A$ un ensemble multiplicatif. Démontrer que si A est un anneau principal, alors A_S est un anneau principal.

(2) Démontrer que si A est un anneau factoriel, alors A_S est un anneau factoriel.

(3) Soit $\mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal premier. Montrer que $A\setminus\mathfrak{p}$ est un ensemble multiplicatif. Montrer que l'anneau $A_\mathfrak{p} := A_{A\setminus\mathfrak{p}}$ a un unique idéal maximal.

(4) On suppose que $\mathfrak{p}$ est principal et que A est factoriel. Démontrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau principal.

3

(1) Soit $k \subset L$ une extension algébrique. Montrer que si k est dénombrable, il en est de même pour L. En déduire d'une part que la clôture algébrique d'un corps fini, ou de $\mathbb{Q}$, est un corps infini et dénombrable, et, d'autre part, qu'un corps algébriquement clos est infini.

(2) En déduire que l'ensemble des nombres complexes transcendants (c'est à dire les éléments de $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{Q}}$) forment un ensemble non dénombrable (en particulier non vide).

(3) Soit $k \subset L$ une extension quelconque. Prenons (à l'aide de Zorn) un ensemble $S \subset L$ d'éléments algébriquement indépendents sur k, maximal pour l'inclusion. Montrer que l'extension $k(X_s; s \in S) \subset L$, $X_s \mapsto s$ est algébrique. Montrer que si k et S sont dénombrables, il en est de même du corps des fractions rationnelles $k(X_s; s \in S)$.

(4) En déduire qu'il existe un ensemble non dénombrable S de nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

4

Trisection de l'angle.

Calculer le degré sur $\mathbb{Q}$ de $\cos\frac{2\pi}{9}$ (on vérifiera que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$). En déduire que le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\cos\frac{2\pi}{9}, \sin\frac{2\pi}{9})$ n'est pas constructible.

5

Montrer que $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$. On note $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ le corps quotient. Expliciter un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_8^\times$. Donner la liste des sous corps de $\mathbb{F}_8$.

6

(1) Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. N.B.: on pourra calculer ses facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer que, pour tout nombre premier p, le polynôme $X^4 + 1$ est réductible dans $\mathbf{F}_p$. N.B.: on vérifiera que, pour p premier impair, le corps $\mathbf{F}_{p^2}$ contient des racines primitives $8^{\text{ième}}$ de l'unité.