
INITIATION À LA FONCTIONNELLE DE MUMFORD-SHAH

par

Antoine Lemenant

Résumé. Le but de ce texte est de montrer comment les outils de *théorie de la mesure géométrique* interviennent dans l'étude de la fonctionnelle de Mumford-Shah et de ses minimiseurs. Cette fonctionnelle sert à la résolution d'au moins deux problèmes bien concrets : la segmentation d'image (trouver les contours d'une image donnée), et la propagation de fissures en mécanique des milieux continus. Après une courte introduction de la fonctionnelle et de sa minimisation, on mettra en évidence certains problèmes mathématiques difficiles qu'elle soulève, dont notamment la fameuse « conjecture de Mumford-Shah ». On expliquera comment l'espace fonctionnel SBV sert à montrer l'existence d'un minimiseur. Dans une deuxième partie, on présentera une méthode numérique utile en pratique pour calculer un minimiseur approché. Celle-ci est basée sur une approximation dite « par champ de phase » qui est utilisée aussi pour d'autres problèmes d'optimisation (notamment en optimisation de forme comme le problème isopérimétrique, le problème à N-phases, etc.).

1. Introduction

La fonctionnelle de D. Mumford et J. Shah a été introduite en 1989 afin de résoudre le problème de segmentation d'image. Plus précisément, une image est vue comme une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est par exemple un rectangle, et g associe à chaque point $x \in \Omega$ de l'image une valeur $g(x)$ qui représente un niveau de gris (pour une image en noir et blanc). Disons par exemple que g prend ses valeurs dans $[0, 1]$, que 0 représente un « pixel » blanc, que 1 représente un « pixel » noir, et que les valeurs intermédiaires entre 0 et 1 représentent tous

les niveaux de gris possibles entre blanc et noir. Notons que la fonction g est, en général, loin d'être régulière. Il se peut, et c'est en fait le cas le plus courant, qu'elle soit discontinue. C'est justement l'ensemble des discontinuités qui nous intéresse.

En effet, le problème de segmentation d'image consiste à trouver, pour une image donnée $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble des « contours » des objets que représente l'image. Ces contours sont localisés, selon l'idée de Mumford et Shah, aux points où g est « très discontinue », c'est-à-dire là où se trouve une franche discontinuité de texture, qui se traduit par une franche discontinuité de tons dans les niveaux de gris.



FIGURE 1. Segmentation d'un cagou avec la fonctionnelle de Mumford-Shah.

Pour capturer l'ensemble de discontinuité, et donc résoudre le problème de segmentation d'image, Mumford et Shah ont l'idée d'introduire une fonctionnelle qui, par minimisation, va chercher les points de g les plus discontinus. Cette fonctionnelle est définie sur un ensemble de deux variables : la première est un ensemble fermé, traditionnellement noté K , qui est le candidat pour représenter les contours de l'image. La deuxième est une fonction régulière u , qui produira une version « régularisée » de l'image, définie dans $\Omega \setminus K$. Le problème de Mumford-Shah s'écrit

$$\min_{(u,K) \in \mathcal{A}(\Omega)} J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla u\|^2 dx + \mathcal{H}^1(K),$$

où le minimum est pris sur l'ensemble

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{(u, K) : K \subset \Omega \text{ est fermé et } u \in C^1(\Omega \setminus K)\}.$$

Ici, ∇u est le vecteur gradient de u , $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, dx est l'intégration contre la mesure de Lebesgue et $\mathcal{H}^1(K)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1 de l'ensemble K (voir le texte de Hervé Pajot dans ce volume pour la définition). En particulier, ce dernier terme force doré et déjà l'ensemble fermé K à être de dimension de Hausdorff 1, ce qui est bien l'intuition que l'on a d'un « contour ». Plus précisément, la fonctionnelle de Mumford-Shah $J(u, K)$ possède trois termes dont voici l'interprétation :

- Le premier terme $\int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx$ force u , par minimisation, à ressembler le plus possible à l'image de départ g .
- Le deuxième terme $\int_{\Omega \setminus K} \|\nabla u\|^2 dx$ pénalise les oscillations de u qui, par minimisation, forcera u à être la plus régulière possible (en réalité, elle sera C^∞ dans l'ouvert $\Omega \setminus K$, nous le verrons plus loin). Bien sûr, puisque g est au départ très peu régulière, on ne peut pas avoir $u = g$ partout dans Ω . D'où l'aide de l'ensemble K , qui, s'il est bien positionné sur les « singularités » de g , permettra de minimiser le plus possible le terme $\int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx$.
- Cet ensemble K devra être optimisé de sorte à couvrir le plus possible les singularités de g , mais le troisième terme $\mathcal{H}^1(K)$ pénalisant sa longueur totale, un choix stratégique devra s'opérer en positionnant K en priorité sur les singularités les plus « franches » de g seulement. Les autres singularités, plus minimes, laissées de côté et non couvertes par K , se paieront en terme d'oscillation $\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx$. Ce « coût » restera acceptable aux endroits où g elle-même, bien qu'étant discontinue à cet endroit, n'oscille pas trop, ce qui n'implique pas de l'inclure dans le contour K .

Pour comprendre le fonctionnement de la fonctionnelle plus en détails, regardons heuristiquement ce qui se passe en dimension 1. Le domaine Ω est alors un intervalle, disons $]0, 1[$, K est de dimension de Hausdorff 0 (donc un ensemble discret), et la fonctionnelle s'écrit

$$J_{1D}(u, K) = \int_{]0, 1[\setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{]0, 1[\setminus K} |u'|^2 dx + \mathcal{H}^0(K).$$

Supposons que g soit une « image » (1D) qui effectue une transition lisse entre 1 et 0, par exemple $g(x) = (e^{-x} - e^{-1}) / (1 - e^{-1})$.

Alors, l'oscillation de g est relativement petite sur l'intervalle $]0, 1[$, plus précisément,

$$\int_{]0,1[} |g'(x)|^2 dx = \frac{1}{(1 - e^{-1})^2} \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1 - e^{-2}}{2(1 - e^{-1})^2} < 1.$$

On en déduit que le minimiseur de J_{1D} associé à cette « image » g , aura forcément $K = \emptyset$, c'est-à-dire, « aucun contour ». En effet, en prenant (g, \emptyset) comme compétiteur on obtient

$$\min J_{1D} \leq J_{1D}(g, \emptyset) < 1,$$

alors que, si K est non vide, quelle que soit la fonction u associée, on aura toujours

$$J_{1D}(u, K) \geq \mathcal{H}^0(K) \geq 1 > \min J_{1D},$$

et donc (u, K) ne peut pas être un minimiseur.

En revanche, considérons maintenant une fonction g effectuant une plus franche transition entre 1 et 0, par exemple :

$$g(x) = (e^{-100x} - e^{-100}) / (1 - e^{-100}).$$

Dans ce cas l'oscillation de g est beaucoup plus grande :

$$\int_{]0,1[} |g'(x)|^2 dx = \frac{100^2}{2(1 - e^{-100})^2} \int_0^1 e^{-100x} dx = 50 \frac{1 - e^{-200}}{(1 - e^{-100})^2} \geq 50,$$

de sorte que

$$J_{1D}(g, \emptyset) \geq 50.$$

Il est alors très avantageux de rajouter un « contour » pour faire décroître la valeur totale de la fonctionnelle. En effet, posons $K = \{1/2\}$, et choisissons u constante par morceaux, égale à 1 sur $]0, 1/2[$ et égale à 0 sur $]1/2, 1[$. Alors u est bien C^1 sur $]0, 1[\setminus K$, et l'oscillation de u est nulle car $u' = 0$ sur $]0, 1[\setminus K$. Le prix à payer est $\mathcal{H}^0(K) = 1$, qui est bien petit comparativement à 50. Et le terme $\int_{]0,1[\setminus K} |u - g|^2 dx$ est lui aussi bien petit, car g est, en moyenne, très proche de 1 sur $]0, 1/2[$ et très proche de 0 sur $]1/2, 1[$. On a donc bien gagné en rajoutant un point de singularité, et il est fort à parier que le minimiseur possède un ensemble K non vide.

Cette « compétition » entre les termes $\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx$ et $\mathcal{H}^1(K)$ est véritablement le cœur de la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Elle fonctionne plutôt bien en pratique (nous verrons plus loin une méthode pour l'implémenter numériquement), et a

soulevé de nombreuses questions mathématiques, dont certaines toujours non résolues aujourd'hui, notamment la célèbre conjecture de Mumford-Shah.

Conjecture 1.1 (Mumford-Shah (1989)). *Soit (u, K) un minimiseur de la fonctionnelle J . Alors K est composé d'une union finie de courbes simples de classe C^1 , se joignant éventuellement par trois en formant des angles de 120 degrés.*

Dans cet exposé nous n'aurons pas le temps de développer les outils et développements récents concernant la conjecture (nous renvoyons pour cela aux références [2, 4, 7]). En revanche, nous allons nous pencher sur un tout autre problème : celui de l'existence d'un minimiseur !

2. Existence d'un minimiseur

2.1. Méthode directe du calcul des variations

La « méthode directe » est un principe général pour obtenir l'existence d'un minimiseur en calcul des variations. Supposons que (E, d) soit un espace métrique et que $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonctionnelle définie sur cet espace qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

- (1) Les ensembles de type $\{u : F(u) \leq M\}$ sont relativement compacts.
- (2) F est semi-continue inférieure, i.e. $F(u) \leq \liminf F(u_n)$ quand $u_n \rightarrow u$.

Alors, le problème :

$$\min_{u \in E} F(u)$$

admet une solution. En effet, soit u_n une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \inf_{u \in E} F(u)$. Une telle suite existe toujours par définition de l'inf. Il s'ensuit que, pour n assez grand, $F(u_n) \leq M$, pour une certaine constante $M > 0$. Par compacité on peut donc extraire une sous-suite telle que u_{n_k} converge vers un certain $u \in E$. Par semi-continuité de F on obtient

$$F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(u_{n_k}) = \inf F,$$

donc u est un minimiseur.

2.2. Exemple 1 : les fonctions harmoniques

Soit B la boule unité de \mathbb{R}^N . Appliquons la méthode directe avec la fonctionnelle de Dirichlet :

$$F(u) = \int_B \|\nabla u\|^2 dx.$$

On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on définit F sur l'espace métrique suivant :

$$E = \{u \in C^1(\overline{B}) : u = f \text{ sur } \partial B\}.$$

Malheureusement, la topologie naturelle sur cet espace, c'est-à-dire la convergence uniforme sur u et ∇u , ne conviendra pas car les sous-ensembles de niveaux $\{F \leq M\}$ ne seront pas compacts. En revanche, en utilisant des outils d'analyse fonctionnelle, il est possible de munir E d'une autre topologie, plus faible qui, elle, conviendra.

Essayons de l'expliquer rapidement. Tout d'abord, E n'étant pas un espace vectoriel, il convient mieux d'écrire

$$E = f + E_0$$

où

$$E_0 = \{u \in C^1(\overline{B}) : u = 0 \text{ sur } \partial B\}.$$

et de minimiser

$$\tilde{F}(v) = \int_B \|\nabla(f + v)\|^2 dx,$$

sur $v \in E_0$ plutôt que sur E , car E_0 est maintenant un espace vectoriel.

Sur E_0 on peut considérer la norme

$$\|u\|_{H^1} := \left(\int_B u^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_B \|\nabla u\|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On peut vérifier que $\|u\|_{H^1}$ est bien une norme sur E_0 , elle provient même d'un produit scalaire, ce qui permet de dire que $(E_0, \|\cdot\|)$ est un espace pré-hilbertien.

Cet espace n'est pas complet. On peut donc considérer son complété (c'est-à-dire en quelque sorte, ajouter toutes les limites possibles des suites de Cauchy), que l'on note H_0^1 , et qui est un espace de Hilbert pour lequel l'espace E_0 est un sous-espace dense (en réalité H_0^1 n'est autre que l'espace de Sobolev $W^{1,2}(B)$ vu dans le texte

d'Emmanuel Russ (ce volume), avec en plus la contrainte de satisfaire $u = 0$ sur ∂B). En particulier,

$$\inf_{v \in E_0} \int_B \|\nabla(f + v)\|^2 dx = \inf_{u \in H_0^1} \int_B \|\nabla(f + v)\|^2 dx.$$

Sur le complété on peut utiliser la topologie faible : u_n converge vers u faiblement dans H_0^1 si, pour toute forme linéaire continue $\varphi : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ on a $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ dans \mathbb{R} . Cette topologie est métrisable sur l'ensemble $\{F \leq M\}$ et, de plus, un théorème fondamental en analyse fonctionnelle (le théorème de Banach-Alaoglu) stipule que $\{F \leq M\}$ est relativement compact pour cette topologie. Enfin, la fonctionnelle F est semi-continue inférieure pour la topologie faible (car c'est une fonctionnelle convexe). Par la méthode directe on en déduit qu'il existe $u = f + v$ avec $v \in H_0^1$ telle que

$$\int_B \|\nabla u\|^2 dx = \inf_{v \in H_0^1} \int_B \|\nabla(f + v)\|^2 dx.$$

Montrons que u n'est autre que la solution du problème dit « de Dirichlet » suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } B \\ u = f & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

où Δv désigne le laplacien de v , $\Delta v = \partial^2 v / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 v / \partial x_N^2$ (on dit alors que u est une fonction « harmonique »).

Pour cela, on considère une fonction quelconque $\varphi \in C_c^\infty(B)$ (dite « fonction test »), et on remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $u + t\varphi$ appartient à E . La fonction u étant un minimiseur, on doit avoir

$$\begin{aligned} \int_B \|\nabla u\|^2 dx &\leq \int_B \|\nabla u + t\nabla\varphi\|^2 dx \\ &= \int_B \|\nabla u\|^2 dx + 2t \int_B \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle dx + t^2 \int_B \|\nabla\varphi\|^2 dx, \end{aligned}$$

soit

$$0 \leq 2t \int_B \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle dx + t^2 \int_B \|\nabla\varphi\|^2 dx.$$

Comme ceci est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, en divisant par $t > 0$ et faisant $t \rightarrow 0^+$ on obtient

$$\int_B \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle dx \geq 0.$$

Puis, en divisant par $t < 0$ et en faisant $t \rightarrow 0^-$ on obtient également

$$\int_B \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \leq 0,$$

ce qui finalement montre

$$\int_B \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(B)$ (on dit alors que u satisfait à $\Delta u = 0$ au sens faible), on a $\Delta u = 0$ dans B . En effet, un résultat non trivial d'analyse montre que si u satisfait à $\Delta u = 0$ au sens faible, alors u est une fonction de classe C^∞ dans B . En admettant ce résultat de régularité, et en utilisant la formule de la divergence dans une boule contenant le support de φ , on obtient

$$\int_B \varphi \Delta u dx = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(B)$, on en déduit aisément que $\Delta u = 0$ dans B , comme annoncé.

Conclusion. Pour obtenir l'existence d'un minimiseur $u \in E$ on a dû considérer un espace plus gros $f + H_0^1$ dans lequel la méthode directe s'applique. Un théorème de régularité montre ensuite que le minimiseur obtenu dans l'espace $f + H_0^1$ se trouve en réalité appartenir à l'espace E de départ. Ce qui montre finalement l'existence d'un minimiseur dans E . Ce procédé s'appelle, en calcul des variations, une méthode de « relaxation ». C'est une méthode générale pour démontrer l'existence d'un minimiseur, en introduisant un espace plus gros ayant de bonnes propriétés de compacité.

2.3. Exemple 2 : problème de Steiner

Voyons maintenant comment traiter l'existence de minimiseur pour $\mathcal{H}^1(K)$. Pour cela, nous allons définir une distance sur les parties compactes de \mathbb{R}^N , que l'on nomme distance de Hausdorff : pour A et B compacts dans \mathbb{R}^N on note

$$d_H(A, B) := \max \left(\sup_{x \in A} \text{dist}(x, B), \sup_{x \in B} \text{dist}(x, A) \right),$$

avec

$$\text{dist}(x, A) := \min_{y \in A} d(x, y).$$

En particulier, si $d_H(A, B) \leq \delta$, alors A se trouve dans le δ -voisinage de B , et vice versa. Le résultat suivant est couramment appelé le « principe de sélection de Blaschke ».

Proposition 2.1 (Blaschke). *Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts uniformément bornés dans \mathbb{R}^N . Alors il existe un compact K et une sous-suite pour laquelle $d_H(K_{n_k}, K) \rightarrow 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction 1-Lipschitz

$$f_n(x) := \text{dist}(x, K_n).$$

La famille f_n est totalement bornée et équicontinue, donc d'après Ascoli il existe une sous-suite f_{n_k} et une fonction f 1-Lipschitz telle que f_{n_k} converge uniformément vers f . On vérifie alors aisément que l'ensemble fermé $K := \{f = 0\}$ satisfait à $d_H(K_{k_n}, K) \rightarrow 0$. \square

Autrement dit, si B est une boule de \mathbb{R}^N , l'ensemble des parties compactes de B munies de la distance d_H est un espace métrique compact.

Dans le but d'appliquer la méthode directe du calcul des variations, on aimerait maintenant montrer que $K \mapsto \mathcal{H}^1(K)$ est semi-continue inférieurement pour cette distance. Mais ceci n'est pas vrai en général. Un contre-exemple simple en dimension 1 est donné par la suite de compacts suivante, pour $n \geq 2$:

$$K_n := \bigcup_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k}{n} - 2^{-n}, \frac{k}{n} + 2^{-n} \right]$$

Pour tout $x \in K_n$ on a $\text{dist}(x, [0, 1]) = 0$, et pour tout $x \in [0, 1]$ on a $\text{dist}(x, K_n) \leq 1/n$ de sorte que

$$d_H(K_n, [0, 1]) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\mathcal{H}^1(K_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{H}^1 \left(\left[\frac{k}{n} - 2^{-n}, \frac{k}{n} + 2^{-n} \right] \right) = (n-1) \frac{\delta}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

de sorte que

$$0 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(K_n) < \mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$$

et \mathcal{H}^1 n'est pas semi-continue.

En revanche, en ajoutant l'hypothèse de connexité sur la suite K_n on obtient le théorème suivant, dit « de Golab ».

Théorème 2.2 (Golab). *Soit K_n une suite de compacts connexes de \mathbb{R}^N et soit K un compact tel que $d_H(K_n, K) \rightarrow 0$. Alors K est également connexe et*

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(K_n).$$

Démonstration. La démonstration, bien que plutôt élémentaire, est malheureusement trop longue pour être décrite en détail ici. Voir par exemple le corollaire 15 page 219 de [4] pour une preuve complète. \square

En appliquant la méthode directe du calcul des variations, et en utilisant les théorèmes de Blaschke et Golab, on en déduit l'existence d'un minimiseur pour le problème de Steiner : soit $\{x_k\}_{k=1, \dots, k_0}$ une famille finie de points dans \mathbb{R}^N . Alors le problème

$$\min \{ \mathcal{H}^1(K) : K \text{ compact connexe et } \{x_i\} \subset K \}$$

admet une solution.

2.4. Un premier résultat d'existence

Proposition 2.3. *Soit*

$$\mathcal{A}'(\Omega) = \{(u, K) : K \subset \overline{\Omega} \text{ est fermé connexe et } u \in C^1(\Omega \setminus K)\}.$$

Alors le problème

$$\min_{(u, K) \in \mathcal{A}'(\Omega)} J(u, K)$$

admet une solution.

Démonstration. On applique la méthode directe du calcul des variations. On considère une suite minimisante (u_n, K_n) et l'on extrait d'abord une sous-suite (toujours indexée par n) par le critère de Blaschke selon laquelle K_n converge vers un certain ensemble fermé K et, d'après Golab, on a :

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf \mathcal{H}^1(K_n).$$

Reste à étudier la suite des fonctions u_n . Pour cela nous donnons uniquement une vague idée : puisque $\int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx \leq C$ on extrait une sous-suite de ∇u_n qui converge faiblement dans L^2 , vers une certaine fonction $w \in L^2(\Omega)$. D'autre part en retranchant des constantes dans chaque composante connexe de $\Omega \setminus K$ et en utilisant l'inégalité

de Poincaré, il en découle que $u_n - c_n$ converge fortement dans L^2 également vers une certaine fonction u , sur tout compact de $\Omega \setminus K$ (on pourra utiliser une exhaustion de compacts de l'ouvert $\Omega \setminus K$ et une suite diagonale). On en déduit que w n'est autre que le gradient de cette limite u , et par semi-continuité inférieure de $v \mapsto \int \|\nabla v\|^2$ relativement à la convergence faible, on trouve que (u, K) est le minimiseur cherché. \square

2.5. Espace SBV et existence pour Mumford-Shah

Nous souhaitons montrer qu'il existe un minimiseur dans $\mathcal{A}(\Omega)$, c'est-à-dire sans contrainte de connexité. Pour cela, nous avons vu l'obstacle principal venant du fait que $K \mapsto \mathcal{H}^1(K)$ n'est pas semi-continue inférieurement.

Pour contourner ce problème, nous allons utiliser une méthode de relaxation, c'est-à-dire définir la fonctionnelle sur un espace plus gros nommé $\text{SBV}(\Omega)$, dans lequel on pourra démontrer l'existence. Il restera ensuite à voir que le minimiseur obtenu dans l'espace $\text{SBV}(\Omega)$ est en fait dans $\mathcal{A}(\Omega)$. Ceci est l'objet d'un théorème du à De Giorgi, Carriero, et Leaci.

Ennio De Giorgi (1928-1996) est un mathématicien célèbre qui a beaucoup contribué au développement du calcul des variations moderne en Italie, dont il est l'un des pères fondateurs. Il avait une personnalité particulière : il aimait parler aussi bien de maths que de philosophie, et vivait dans une pièce qui lui était dédiée au sein de l'école normale supérieure à Pise. Il a formé de nombreux mathématiciens qui sont aujourd'hui reconnus dans ce domaine, tel que par exemple Luigi Ambrosio qui a développé l'espace SBV dans sa thèse, sous la direction de De Giorgi, et a démontré le théorème de compacité dans SBV qui nous servira dans la suite.

2.5.1. Présentation rapide de l'espace SBV . Pour ce paragraphe nous admettons les notions de rectifiabilité, de point de Lebesgue, et de mesure de Hausdorff qui sont évoquées dans le texte de Hervé Pajot. Nous renvoyons également au texte d'Emmanuel Russ pour la notion de dérivée faible et espace BV (ce volume).

Pour tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on note $\text{BV}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$ telles que Du (la dérivée faible de u) est une mesure finie. Si $u \in \text{BV}(\Omega)$ est dans BV , on dit que u admet la limite

approximative $z \in \mathbb{R}^N$ au point x si

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)|} \int_{B(x, \rho)} |u(y) - z| dy = 0.$$

L'ensemble S_u des points où cette propriété n'a pas lieu est appelé *ensemble de discontinuité* de u . Un théorème remarquable de Federer et Vol'pert dit que si $u \in \text{BV}(\Omega)$, alors S_u est un ensemble $(N - 1)$ -rectifiable et $D^s u$ (la partie singulière de Du par rapport à Lebesgue \mathcal{L}^N dans la décomposition de Radon-Nikodym $Du = D^a u + D^s u$) restreinte à S_u , est absolument continue par rapport à \mathcal{H}^{N-1} . On dit que $u \in \text{SBV}(\Omega)$ lorsque $D^s u$ est en réalité *concentrée* sur S_u , c'est-à-dire telle que $D^s u(\mathbb{R}^N \setminus S_u) = 0$.

La densité de la partie absolument continue $D^a u$ de Du par rapport à la mesure de Lebesgue, coïncide presque partout avec la dérivée approximative de u , notée ∇u (voir [2, Th. 3.83.]). Une fonction u est *approximativement différentiable* au point de Lebesgue x s'il existe un vecteur $\nabla u(x)$ telle que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)|} \int_{B(x, \rho)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)|}{\rho} dy = 0.$$

Pour une fonction dans SBV il existe une notion de *trace* sur l'ensemble singulier S_u . Puisque S_u est rectifiable, on peut fixer une orientation (\mathcal{H}^{N-1} -mesurable) $\nu_u : S_u \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ telle que pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \in S_u$, le plan tangent approximatif de S_u au point x est orthogonal à $\nu_u(x)$. Dans ce cas, pour tout $x \in S_u$ et $\rho > 0$ on définit

$$B(x, \rho)^+ := B(x, \rho) \cap \{y; \langle y, \nu_u(x) \rangle \geq 0\}$$

et

$$B(x, \rho)^- := B(x, \rho) \cap \{y; \langle y, \nu_u(x) \rangle \leq 0\}.$$

Pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \in S_u$, le Théorème 3.77. dans [2] donne l'existence de traces notées $u^+(x)$ et $u^-(x)$ définies par

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)^\pm|} \int_{B(x, \rho)^\pm} |u(y) - u^\pm(x)| dy = 0.$$

L'ensemble des points $x \in S_u$ où $u^\pm(x)$ existe est appelé *l'ensemble de saut* et est noté J_u . On peut montrer que $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ et pour $x \in J_u$ la quantité $u^+(x) - u^-(x)$ (dont le signe dépend de l'orientation choisie de ν_u) est appelée saut de u au point x .

En conclusion, pour tout $u \in \text{SBV}(\Omega)$ on a la représentation suivante :

$$Du = D^a u + D^s u = \nabla u \mathcal{L}^N + (u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u.$$

Exemple 1. Supposons que $u = \mathbf{1}_A$ où A est un ouvert à bord régulier. Alors $u \in \text{SBV}$. De plus si l'on considère la normale extérieure ν_A nous avons $u^+(x) = 0$ et $u^-(x) = 1$. Le saut vaut donc -1 et

$$D(\mathbf{1}_A) = -\nu_A \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial A.$$

Exemple 2. Un deuxième exemple qui a son importance concernant la fonctionnelle de Mumford-Shah, est la situation suivante : supposons que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ soit un fermé qui satisfait à $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ et soit $u \in C^1(\Omega \setminus K)$. Puisque K est de mesure (de Lebesgue) nulle, on peut considérer u comme fonction de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (i.e. les valeurs de u sur K ne comptent pas pour la classe de u dans L^1). On peut montrer alors que $u \in \text{SBV}(\Omega)$, et S_u est contenu dans K .

2.5.2. Relaxation dans SBV. Nous allons maintenant relaxer la fonctionnelle de Mumford-Shah dans l'espace SBV. C'est-à-dire qu'au lieu de minimiser $J(u, K)$ sur les couples K fermé, et $u \in C^1(\Omega \setminus K)$, on va minimiser une nouvelle fonctionnelle définie sur l'espace SBV, à savoir,

$$\tilde{J}(u) := \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} \|\nabla u\|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_u),$$

et on considère le nouveau problème « relaxé »

$$(2.1) \quad \min_{u \in \text{SBV}(\Omega)} \tilde{J}(u).$$

Nous avons le théorème suivant.

Proposition 2.4. *Le problème (2.1) admet une solution $u \in \text{SBV}(\Omega)$.*

Démonstration. Ceci découle directement de la méthode directe du calcul des variations en utilisant les théorèmes de fermeture et compacité d'Ambrosio (voir Théorèmes 4.7 et 4.8 page 216 de [2]). En effet, en utilisant ces théorèmes, lorsque $\tilde{J}(u_n)$ est bornée uniformément (en n), on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans BV. Et le théorème de fermeture dit que la limite faible dans BV d'une suite SBV (avec $\tilde{J}(u_n)$ borné) reste encore dans SBV. De plus,

\tilde{J} est également semi-continue le long de cette suite (voir [2] pour plus de détails). \square

Comme indiqué plus haut, pour tout couple $(u, K) \in \mathcal{A}(\Omega)$ avec $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ on a $u \in \text{SBV}(\Omega)$ et $S_u \subset K$. Donc

$$(2.2) \quad \min_{u \in \text{SBV}(\Omega)} \tilde{J}(u) \leq \inf_{(u, K) \in \mathcal{A}(\Omega)} J(u, K).$$

Pour montrer que les deux problèmes sont équivalents, il faut montrer l'inégalité inverse. Ceci est un résultat célèbre, dit de « régularité », démontré par De Giorgi, Carriero et Leaci.

Théorème 2.5 (De Giorgi, Carriero, Leaci, 1989)

Si $u_0 \in \text{SBV}(\Omega)$ est un minimiseur de \tilde{J} , alors S_{u_0} est essentiellement fermé. C'est-à-dire

$$\mathcal{H}^1(\overline{S_{u_0}} \setminus S_{u_0}) = 0.$$

Ainsi, le couple $(u_0, \overline{S_{u_0}})$ est admissible pour la fonctionnelle J , et il y a égalité dans (2.2). Ceci prouve l'existence d'un minimum.

3. Un modèle variationnel d'évolution de fissures

La fonctionnelle de Mumford-Shah introduite en premier lieu pour résoudre un problème de segmentation d'image, est apparue plus tard dans un modèle de propagation de fissures en mécanique des milieux continus.

En effet, un principe physique qui remonte à Griffith au début du XX^e siècle stipule que l'énergie requise pour créer une fissure dans un matériaux élastique, est proportionnelle à la longueur de la fissure, et que celle-ci est en compétition avec l'énergie élastique du matériaux.

Essayons de donner quelques détails. En élasticité linéarisée (nous raisonnons en 2D pour simplifier), si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un corps soumis à une déformation $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui vaut la donnée g sur son bord, $g = \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'énergie élastique produite est donnée par

$$(3.1) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{A}e(u) : e(u) \, dx,$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(Du + {}^tDu)$ est la partie symétrique du gradient de u . Nous avons utilisé la notation « : » pour le produit scalaire entre

matrices, et \mathbf{A} est le tenseur de Hooke

$$\mathbf{A}e = \lambda \operatorname{Tr}(e) \operatorname{Id} + 2\mu e.$$

Les constantes $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont appelées *coefficients de Lamé*, et les minimiseurs de l'énergie de type « Dirichlet » (3.1) sont solutions d'un système elliptique appelé *système de Lamé*. Pour une fissure donnée $K \subset \Omega$, la valeur de

$$E(K, g) := \min_{\substack{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u=g \text{ sur } \partial\Omega}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{A}e(u) : e(u) \, dx,$$

est appelée *énergie élastique* associée à la fissure K et la déformation g sur le bord.

Pour se ramener à Mumford-Shah, il faut considérer le cas particulier appelé « anti-plan », où l'énergie (3.1) se résume à l'énergie de Dirichlet classique, d'une fonction scalaire. Ceci est le cas lorsque le domaine est un cylindre $\Omega \times \mathbb{R}$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et en supposant que le déplacement agit uniquement dans la direction verticale. Sous ces hypothèses, l'énergie élastique se résume à

$$E(K, g) := \min_{\substack{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u=g \text{ sur } \partial\Omega}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx,$$

Maintenant, essayons de décrire le principe variationnel qui régit l'évolution de la fissure dans le temps. L'idée due à Francfort et Marigo [5] est de considérer, pour une charge $g(t)$ qui dépend du temps et qui est définie sur $\partial\Omega$, l'évolution dite « quasi-statique » de l'énergie de Mumford-Shah,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \kappa \mathcal{H}^1(K),$$

où la constante $\kappa > 0$ dépend des propriétés du matériaux considéré.

La construction est suivante : d'abord on discrétise le temps en $0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k_0}$. Ensuite, on construit (u_k, K_k) par récurrence. Si la paire est construite au temps t_k , on obtient (u_{k+1}, K_{k+1}) en minimisant

$$\min_{\substack{(u, K); K \supseteq K_k \\ u=g(t_{k+1}) \text{ sur } \partial\Omega}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \kappa \mathcal{H}^1(K) \right\}.$$

Puis, on fait tendre $\max_k |t_k - t_{k+1}|$ vers zéro et on passe à la limite. Ceci permet d'obtenir un couple $(u(t), K(t))$ qui dépend continument

du temps. Et par construction, on peut montrer que la fissure $K(t)$ obtenue satisfait à la plupart des propriétés souhaitées par Griffith dans son modèle de propagation de « rupture fragile ». La première démonstration rigoureuse de l'existence de $K(t)$ a été donnée par Dal Maso et Toader [3] dans ce cas simple (2D anti-plan) puis étendue plus tard à des cas plus généraux.

Nous verrons plus loin une application pratique de ce modèle pour étudier les fissures qui apparaissent dans les murs du Panthéon à Paris [6].

4. Approximation par champ de phase

La fonctionnelle de Mumford-Shah n'est pas facile à implémenter numériquement, notamment à cause du terme $\mathcal{H}^1(K)$ qu'il est difficile de coder et minimiser avec un ordinateur.

La pratique courante en calcul des variations pour minimiser une telle fonctionnelle compliquée, appelons-la F , consiste donc à minimiser une autre fonctionnelle plus « régulière », disons F_ε , qui est une « approximation » de la fonctionnelle de départ F , avec un paramètre ε suffisamment petit. Pour justifier le fait qu'un minimiseur de F_ε approche bien un minimiseur de F , on montre que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la fonctionnelle F_ε converge vers F en un sens particulier : au sens de la Γ -convergence. C'est une sorte de topologie sur les familles de fonctionnelles qui garantit la convergence des minimiseurs, vers un minimiseur. Voici la définition précise introduite par E. De Giorgi.

4.1. La notion de Γ -convergence

Definition 4.1. Soit (E, d) un espace métrique et soit

$$F_\varepsilon : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

une famille de fonctionnelles. On dit que F_ε Γ -converge vers F (et on note $F_\varepsilon \rightarrow^\Gamma F$) si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) pour tout $x \in E$ et pour tout $x_\varepsilon \rightarrow x$ on a $F(x) \leq \liminf F_\varepsilon(x_\varepsilon)$,
- (2) pour tout $x \in E$ il existe $x_\varepsilon \rightarrow x$ telle que $\limsup F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq F(x)$.

Les propriétés (1) et (2) sont communément appelées « inégalité de Γ -liminf » et « inégalité de Γ -limsup ». La suite du (2) s'appelle

communément la « suite de récupération » (ou « recovery sequence » en anglais). On a la proposition facile suivante.

Proposition 4.2. *Si $F_\varepsilon \rightarrow^\Gamma F$ et si x_ε est un minimiseur pour F_ε pour tout ε tel que $x_\varepsilon \rightarrow x$, alors x est un minimiseur pour F .*

Démonstration. Soit x_ε une famille de minimiseurs tels que $x_\varepsilon \rightarrow x$. Alors par l'inégalité de Γ -liminf on a déjà

$$F(x) \leq \liminf F_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Maintenant, soit y un élément quelconque de E , et soit y_ε la suite « de récupération » associée. Alors en utilisant que x_ε minimise F_ε et donc que $F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(y_\varepsilon)$ on trouve

$$F(x) \leq \liminf F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \limsup F_\varepsilon(y_\varepsilon) \leq F(y).$$

Ainsi, x minimise F . □

Remarque 4.3. En général les théorèmes de type Γ -convergence s'appliquent pour des fonctionnelles F_ε définies sur des espaces métriques (E, d) qui ne sont pas compacts, ni même localement compacts (typiquement, des espaces fonctionnels). Donc dans la proposition 4.2, l'hypothèse $x_\varepsilon \rightarrow x$, même à sous-suite près, n'est pas évidente. C'est pourquoi les résultats de Γ -convergence sont souvent accompagnés d'un résultat de compacité pour les suites « d'énergie bornée », c'est-à-dire vérifiant $\sup_\varepsilon F_\varepsilon(x_\varepsilon) < +\infty$. Ceci permet en général d'extraire des sous-suites convergentes de x_ε , sans lesquelles la proposition 4.2 n'est d'aucune utilité.

Remarque 4.4. Dans la proposition 4.2 on voit que toutes les fonctionnelles (F_ε , mais aussi F) doivent être définies sur le même espace (E, d) , ce qui n'est pas toujours évident en pratique. C'est pourquoi dans la définition 4.1 on autorise la valeur $+\infty$ dans l'espace d'arrivée pour F_ε . Si les fonctionnelles sont définies sur des espaces différents E_ε , on cherche en général un espace plus gros E qui les contient tous (et dont la distance associée est compatible avec celle de E_ε). Ensuite on met la valeur arbitraire $+\infty$ pour F_ε sur $E \setminus E_\varepsilon$. Ainsi, le minimiseur x_ε pour F_ε dans E_ε reste un minimiseur dans E , et on peut appliquer la proposition 4.2 dans ce cadre.

4.2. Le théorème de Modica et Mortola

La méthode dite de « champ-de-phase » est un moyen efficace pour traiter numériquement des problèmes d'optimisation faisant intervenir la « longueur » d'un ensemble, ou un « périmètre ». L'origine de cette méthode provient de certains modèles de transitions de phase introduits en premier lieu par des physiciens. C'est en détournant des énergies introduites en physiques que nous allons approcher un périmètre !

Par exemple, l'un des modèles les plus simples et des plus utilisés est celui de Cahn et Hilliard, où deux phases différentes d'un même liquide sont contenues dans un récipient Ω , représentés par une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow [-1, 1]$. L'ensemble $\{\varphi = 1\}$ est le lieu de la première phase pure, l'ensemble $\{\varphi = -1\}$ de la seconde, et l'ensemble $\{\varphi \in]-1, 1[\}$ est la région de « transition », où le liquide est ni purement en phase 1, ni purement en phase -1 . Dans la version la plus simple du modèle de Cahn et Hilliard, cette région de transition tend à minimiser l'énergie suivante

$$\text{MM}_\varepsilon(\varphi) := \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - \varphi^2)^2 dx,$$

sous la contrainte $\int_{\Omega} \varphi = c$, où $c > 0$ est une constante fixée.

Un théorème célèbre de Modica et Mortola [9] établit la Γ -convergence de MM_ε . Ils démontrent en effet que la limite lorsque ε converge vers zéro des minimiseurs de MM_ε consistent en les phases pures $\varphi : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ qui sont dans $\text{BV}(\Omega)$ et minimisent (à constante multiplicative près)

$$\text{Per}(\{\varphi = 1\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* \{\varphi = 1\}).$$

Il est donc intéressant, au niveau numérique, de considérer l'énergie MM_ε de type « elliptique » (donc facile à implémenter), en lieu et place du terme plus singulier \mathcal{H}^{N-1} . Le théorème de Modica et Mortola garantie qu'elle en est une bonne approximation. Cette idée a été utilisée dans de nombreux problèmes, comme par exemple en optimisation de forme pour un problème de partition optimale.

Essayons de comprendre l'énergie de Cahn et Hilliard et sa Γ -convergence en remarquant tout d'abord que, de part l'inégalité

$$\varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \geq 2ab$$

on obtient (en supposant que $\varphi \in [0, 1]$)

$$\begin{aligned} \text{MM}_\varepsilon(\varphi) &:= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - \varphi^2)^2 \, dx \\ &\geq 2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \varphi^2) |D\varphi| = \int_{\Omega} |D(P(\varphi))|, \end{aligned}$$

où P est une primitive de $t \mapsto (1 - t^2)$. Donc la fonctionnelle MM_ε borne la « variation totale » de $P(\varphi)$, ce qui permet d'avoir de la compacité de type BV pour la suite $P(\varphi_\varepsilon)$, où φ_ε est une suite de minimiseurs. Cette remarque est le point clé pour la preuve de l'inégalité de Γ -liminf.

Concernant la Γ -limsup, il faut construire une suite φ_ε à partir d'un ensemble A donné, tel que $\text{MM}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)$ approche $\text{Per}(A)$. Pour cela on regarde d'abord le problème en dimension 1, que l'on peut résoudre explicitement.

En effet, un minimiseur de MM_ε résout l'équation (semilinéaire) dit d'Allen-Cahn suivante :

$$(4.1) \quad \varepsilon^2 \Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 = 0.$$

Ceci motive l'introduction du problème de dimension 1 suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + u - u^3 = 0 \\ \varphi(+\infty) = 1, \quad \varphi(-\infty) = -1 \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$(4.2) \quad u(t) = \tanh(t/\varepsilon\sqrt{2}).$$

De là nous pouvons générer plein de solutions à l'équation (4.1), en posant, pour tout vecteur directeur $\nu \in \mathbb{R}^N$ fixé, $\|\nu\| = 1$,

$$\varphi(x) = u(x \cdot \nu).$$

Une conjecture célèbre de De Giorgi stipule que, en petite dimensions, toutes les solutions de (4.1) sont de cette forme (voir paragraphe si dessous).

Revenons maintenant a notre Γ -limsup. Si A est un ouvert donné, on pose

$$\varphi_\varepsilon(x) = u(\text{dist}(x, \partial A)).$$

On peut montrer, à l'aide d'outils de théorie géométrique de la mesure (tel que l'égalité de la co-aire par exemple), que si A est suffisamment

régulier (et on peut se ramener à ce cas par « densité »), alors

$$\limsup_{\varepsilon} \text{MM}_{\varepsilon}(\varphi_{\varepsilon}) \leq \text{Per}(A).$$

4.3. La conjecture de De Giorgi

Au risque de s'éloigner un peu du sujet, profitons-en pour faire une petite parenthèse sur la fameuse conjecture de De Giorgi.

Conjecture 4.5 (De Giorgi (1978)). *Soit φ une solution bornée de l'équation d'Allen-Cahn (4.1) dans \mathbb{R}^N . Supposons que φ est monotone dans une direction, par exemple $\partial\varphi/\partial x_N > 0$. Alors si $N \leq 8$, φ est forcément de la forme*

$$\varphi(x) = u(x_N),$$

où u est la solution 1D donnée par (4.2).

En utilisant le changement de variable $v = u(\varepsilon x)$, la conjecture peut s'énoncer de manière équivalente sur les solutions de l'équation

$$\Delta v + v - v^3 = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N.$$

On sait également que la conjecture est équivalente à montrer que les ensembles de niveaux de v sont des hyperplans.

Cette conjecture a été démontrée par Ghoussoub-Gui (1998) et Ambrosio-Cabré (2000) pour les dimension $N = 2$ et $N = 3$, mais la preuve ne s'étend pas aux dimensions plus grandes. Plus tard Savin (2009) a démontré partiellement la conjecture pour les dimensions $4 \leq N \leq 8$ en ajoutant une hypothèse technique supplémentaire. Il a été confirmé par del Pino, Kowalczyk et Wei (2011) que la conjecture n'était plus vraie pour les dimensions $N \geq 9$. Donc bien que partiellement démontrée, la conjecture est toujours ouverte en toute généralité pour les dimensions $3 \leq N \leq 8$.

La raison pour laquelle $N = 8$ est la dimension critique vient de la théorie des surfaces minimale (c'est-à-dire ensemble à courbure moyenne nulle). En effet, l'hypothèse de monotonie dans une direction $\partial_{x_N} u > 0$ force les ensemble de niveaux d'une solution à être des graphes. De plus, puisque la fonction est solution de l'équation d'Allen-Cahn, on peut penser intuitivement que ces graphes sont des surfaces minimales (de dimension $N - 1$ donc). Or nous savons que

les seules surfaces minimales qui existent (et qui sont « entières », c'est-à-dire dans tout l'espace), sont des hyperplans. Ceci est vrai jusqu'à la dimension 7. À partir de la dimension 8, il existe un cône minimal appelé le « cône de Simons » qui est minimal et n'est pas un graphe. C'est cette observation intuitive qui a motivé la conjecture.

4.4. Le problème de partitions optimales

De façon à illustrer comment le théorème de Modica et Mortola peut être utilisé pour faire du numérique, prenons un exemple simple, celui des partitions optimales : dans un ouvert donné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on cherche une partition de Ω en n domaines ($n \in \mathbb{N}$ étant fixé) A_1, A_2, \dots, A_n tous inclus dans Ω et d'intersection deux à deux disjoints, tels que les volumes des A_i soient tous égaux à $|\Omega|/n$ et minimisant le périmètre total

$$\text{Per}(A_1) + \text{Per}(A_2) + \dots + \text{Per}(A_n).$$

Un problème célèbre souvent citée sous le nom de « Honeycomb conjecture » (conjecture du nid d'abeille, datant de plusieurs siècles) démontrée par Thomas C. Hales (1999) stipule que la forme « asymptotique » optimale (c'est-à-dire quand le nombre n de partitions tend vers l'infini), est un hexagone.

Les simulations numériques suivantes ont été réalisées par Élie Bretin (maître de conférences à l'INSA de Lyon) par méthode de champ de phase en utilisant une approximation de type Modica-Mortola. Ici, au lieu de n'avoir qu'une seule phase on utilise n fonctions (u_1, u_2, \dots, u_n) qui satisfont à la condition $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1$ de sorte d'avoir une partition du domaine, et on minimise l'énergie de Modica-Mortola de chacune des fonctions.

En dimension 3, la forme asymptotique optimale n'est pas connue ! Il existe une conjecture analogue, appelée conjecture de Kelvin (1887), qui prétendait qu'un certain pavage régulier formé d'octaèdre tronqué à 14 faces serait optimal. Or en 1993, à l'aide d'ordinateurs, Weaire et Phelan on démontré qu'on pouvait obtenir mieux que le pavage de Kelvin, en utilisant deux formes différentes que l'on alterne de façon astucieuse sur une structure formée de 8 éléments. Aujourd'hui encore, la question de savoir si cette nouvelle structure est optimale, reste ouverte.

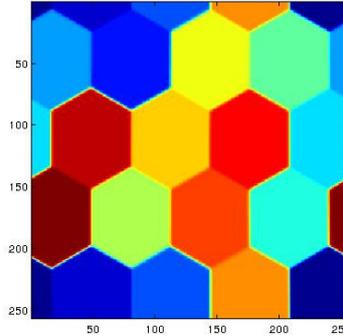


FIGURE 2. Partition du carré en 16 morceaux de volume égaux et de périmètre minimal par méthode de champ de phase, avec conditions périodique. Simulation Numérique réalisée par Élie Bretin (INSA Lyon).

4.5. Le théorème d'Ambrosio et Tortorelli

Revenons maintenant à la fonctionnelle Mumford-Shah. Une méthode connue pour l'approcher consiste à utiliser une variante de Modica-Mortola.

En effet, la fonctionnelle MM_ε n'est *a priori* utile que pour approcher des périmètres. Or dans la fonctionnelle de Mumford-Shah, la quantité à minimiser est $\mathcal{H}^1(K)$ (où K est un ensemble) qui n'est pas forcément le périmètre d'un ensemble.

Dans un article célèbre [1], Ambrosio et Tortorelli ont proposé une fonctionnelle pour approcher la fonctionnelle de Mumford-Shah. Rappelons que la fonctionnelle de Mumford-Shah s'écrit

$$MS(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \mathcal{H}^1(K),$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $K \subset \Omega$ est fermé, $u \in C^1(\Omega \setminus K)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$ est donnée. Dans ce problème, K est considéré comme l'ensemble de saut de la fonction u . En s'inspirant de Modica et Mortola, Ambrosio et Tortorelli ont proposé l'approximation suivante de MS,

$$(4.3) \quad AT_\varepsilon(u, \varphi) = \int_{\Omega \setminus K} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx \\ + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (\varphi - 1)^2 dx.$$

C'est-à-dire que K est représenté par une fonction de phase $\varphi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ qui, par minimisation, souhaite s'annuler là où u est singulière, mais souhaite aussi valoir 1 presque partout à cause du dernier terme. La transition est pénalisée par le terme en $|\nabla\varphi|^2$ qui contribue comme la longueur \mathcal{H}^1 à la limite. Ambrosio et Tortorelli ont en effet démontré la Γ -convergence de AT_ε vers MS lorsque ε tend vers 0 (et ceci est vrai quelle que soit la dimension).

Numériquement, cette fonctionnelle a été utilisée en segmentation d'image et en propagation de fracture. Nous verrons deux exemple d'application, l'un en chimie, et l'autre concernant l'étude de la propagation des fissures sur les briques du Panthéon à Paris.

4.6. Approximation du problème de Steiner

Nous avons déjà rencontré le problème de Steiner précédemment. Étant donné des points $D := \{x_i\} \subset \mathbb{R}^2$ en nombre fini, le problème de Steiner consiste à minimiser

$$\min \{ \mathcal{H}^1(K) : K \subset \mathbb{R}^2 \text{ compact, connexe, et contenant } D \}.$$

Nous savons qu'il existe un minimiseur, il n'est pas forcément unique, et il est constitué d'un graphe composé de segments se joignant par deux (éventuellement sur un point de D) ou par trois, auquel cas en formant des angles de 120 degrés. En revanche, le calcul d'un minimum est un problème complexe en théorie des graphes, faisant partie de la liste des problèmes (NP)-complets de Karp.

Il est apparu récemment une méthode d'approximation du problème de Steiner par une fonctionnelle elliptique à la manière de Modica-Mortola ou Ambrosio-Tortorelli, mais avec un terme nouveau permettant de gérer la contrainte de connexité sur les minimiseurs.

L'idée n'est pas de calculer un vrai minimum, mais un minimum approché.

Pour ce faire, nous ajoutons un terme dans la fonctionnelle de Modica-Mortola, reposant sur la distance géodésique d_φ , définie ainsi. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pour $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$ on définit

$$d_\varphi(x, y) := \inf \left\{ \int_\gamma \varphi(x) d\mathcal{H}^1(x) : \gamma \text{ courbe connectant } x \text{ et } y \right\}.$$

Étant donné une fonction φ , la distance d_φ peut être traitée numériquement par l'algorithme de « fast marching ». Une méthode pour

approcher le problème de Steiner est de minimiser la fonctionnelle suivante

$$(4.4) \quad \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - \varphi)^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{c_\varepsilon} \sum_{i=1}^N d_\varphi(x_i, x_1),$$

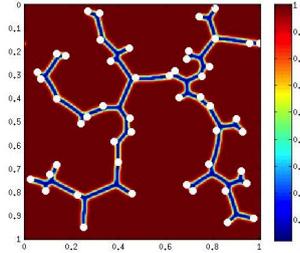
où $c_\varepsilon \rightarrow 0$ de façon arbitraire. Les deux premier termes sont les termes de type Modica-Mortola qui approchent la longueur \mathcal{H}^1 de même façon que dans Ambrosio-Tortorelli [1]. Le dernier terme est de type nouveau, et incite φ à s'annuler sur une ensemble connexe contenant les points x_i . Le point-clé étant que lorsque

$$\sum_{i=1}^N d_\varphi(x_i, x_1) = 0,$$

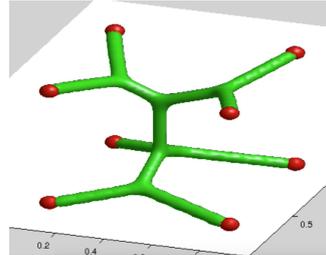
alors l'ensemble $\{\varphi = 0\}$ doit être connexe et contenir les $\{x_i\}$.

Théorème 4.6 (A. Lemenant, F. Santambrogio [8])

Soit $\{x_i\}_{i=1\dots N}$ un ensemble fini de points de \mathbb{R}^2 et Ω un ouvert contenant l'enveloppe convexe des $\{x_i\}$. Soit φ_ε une suite de minimiseurs de (4.4). Soit $\varepsilon_n \rightarrow 0$ une suite telle que la famille de fonctions 1-Lipschitz $d_{\varphi_{\varepsilon_n}}(\cdot, x_0)$ converge uniformément dans Ω vers une fonction d . Alors l'ensemble $\{d = 0\}$ est connexe et est solution du problème de Steiner associé aux points x_i .



Approximation de la solution de Steiner qui connecte 50 points par méthode de champ de phase.



Approximation de la solution de Steiner en 3D qui connecte les sommets d'un cube régulier par méthode de champ de phase.

FIGURE 3. Simulations réalisées par Élie Bretin (INSA Lyon)

Références

- [1] L. AMBROSIO & V. M. TORTORELLI – « On the approximation of free discontinuity problems », *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)* **6** (1992), no. 1, p. 105–123.
- [2] L. AMBROSIO, N. FUSCO & D. PALLARA – *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press; Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] G. DAL MASO & R. TOADER – « A model for the quasi-static growth of brittle fractures : existence and approximation results », *Arch. Rational Mech. Anal.* **162** (2002), no. 2, p. 101–135.
- [4] G. DAVID – *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, Progress in Math., vol. 233, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [5] G. A. FRANCFORT & J.-J. MARIGO – « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids* **46** (1998), no. 8, p. 1319–1342.
- [6] G. LANCIONI & G. ROYER-CARFAGNI – « The variational approach to fracture mechanics. A practical application to the French *panthéon* in Paris », *J. Elasticity* **95** (2009), no. 1-2, p. 1–30.
- [7] A. LEMENANT – « A selective review on Mumford-Shah minimizers. », *Boll. Un. Mat. Ital.* **9** (2016), no. 1, p. 69–113.
- [8] A. LEMENANT & F. SANTAMBROGIO – « A Modica-Mortola approximation for the Steiner problem », *Comptes Rendus Mathématique* **352** (2014), no. 5, p. 451–454.
- [9] L. MODICA & S. MORTOLA – « Il limite nella Γ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici », *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)* **14** (1977), no. 3, p. 526–529.

ANTOINE LEMENANT, Université Paris Diderot – Paris 7, CNRS, UMR 7598,
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005, France
E-mail : lemenant@ljl1.univ-paris-diderot.fr
Url : <https://www.ljl1.math.upmc.fr/~lemenant/>

