LE THÉORÈME D'ERGODICITÉ QUANTIQUE

par

Nalini Anantharaman

En mécanique quantique, la fonction d'onde $\psi_t(x)$ permet de calculer la densité de probabilité de présence $|\psi_t(x)|^2$ d'une particule au point $x \in \mathbb{R}^3$, à l'instant t. Celle-ci évolue selon l'équation de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \boldsymbol{H}\psi,$$

où $\boldsymbol{H}$ est l'opérateur hamiltonien, donné (selon Schrödinger et Heisenberg) par l'expression

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(x)$$

si la particule, de masse m, est soumise à une force dérivant d'un potentiel V. La notation Δ désigne le laplacien, et $\hbar$ est la constante de Planck. L'énergie *classique* du système admet l'expression *énergie cinétique* + *énergie potentielle* :

$$H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2m} + V(x)$$

si $\xi \in \mathbb{R}^3$ est la quantité de mouvement. L'opérateur $\boldsymbol{H}$ se déduit de la fonction H par les procédés de quantification introduits dans les textes de F. Faure et C. Fermanian (ce volume). La fonction d'onde au temps t s'exprime donc grâce à la fonction d'onde au temps 0,

$$\psi_t = e^{-it\boldsymbol{H}/\hbar}\psi_0$$

(il s'agit ici de l'exponentielle d'un opérateur non borné : cette exponentielle n'est pas définie par une série entière, mais en « diagonalisant » $\boldsymbol{H}$ à condition qu'il soit auto-adjoint). Les fonctions propres de $\boldsymbol{H}$, c'est-à-dire les solutions de

$$\boldsymbol{H}\psi_0 = E\psi_0$$

avec $E \in \mathbb{R}$, jouent un rôle particulier : si ψ_0 est fonction propre de $\boldsymbol{H}$, on a

$$\psi_t(x) = e^{-itE/\hbar}\psi_0(x),$$

et la probabilité de présence $|\psi_t(x)|^2$ ne dépend pas du temps. Si l'on peut trouver une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{R}^3)$, formée de fonctions propres de $\boldsymbol{H}$ (pour les valeurs propres $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$), toute donnée initiale se décompose alors selon cette base en une série convergente dans $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\psi_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi_n}\psi_0 \Big) \phi_n(x),$$

et donc

$$\psi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi_n}\psi_0 \Big) e^{-itE_n/\hbar}\phi_n(x).$$

Les différences de valeurs propres, $E_n - E_m$, jouent un rôle très important en physique, car elles sont liées aux énergies que le système peut absorber ou émettre lors d'interactions avec la lumière. Dans ce texte, nous ne parlerons pas beaucoup des valeurs propres ellesmêmes : les conjectures les concernant sont loin d'être démontrées mathématiquement (voir le § 3.2 du texte de F. Faure dans ce volume). Nous essaierons de comprendre les probabilités de présence $|\phi_n(x)|^2$ associées aux fonctions propres ϕ_n. L'étude mathématique est assez différente, selon que la particule reste confinée dans une région bornée de l'espace (*système fermé*) ou qu'elle peut s'échapper à l'infini (*système ouvert*). Ceci dépend des propriétés, confinantes ou non, du potentiel V (essentiellement, V est confinant si $V(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$).

Ici nous ne nous intéresserons qu'au cas des systèmes fermés, et nous essaierons de comprendre comment la géométrie du problème joue sur les probabilités de présence $|\phi_n(x)|^2$. Nous regarderons des cas où il n'y a pas de potentiel ($V = 0$, donc $\boldsymbol{H}$ est un multiple du laplacien Δ) mais où la particule est astreinte à se déplacer dans un espace compact, généralement une variété. Ceci n'est qu'un léger changement de point de vue (en effet, notre discussion pourrait s'adapter à des potentiels confinants sur $\mathbb{R}^3$) qui permet d'aborder des exemples géométriques de base : tores plats, sphère. Notre but principal est de démontrer le théorème d'ergodicité quantique : celui-ci fait le lien entre les propriétés du hamiltonien classique H et celles des fonctions propres de $\boldsymbol{H}$. L'hypothèse cruciale de ce théorème est l'ergodicité du système hamiltonien classique, ce qui signifie que les trajectoires visitent de manière uniforme leur couche d'énergie. Si le système hamiltonien classique est ergodique, le théorème dit que les fonctions propres quantiques ont tendance à être délocalisées : $|\phi_n(x)|^2$ est proche de la probabilité uniforme.

On donnera la preuve complète du théorème d'ergodicité quantique dans le cas des tores plats. Attention, l'hypothèse d'ergodicité n'est pas satisfaite dans ce cas ! On démontrera donc une version modifiée du théorème, valable seulement pour des observables de position $a(x)$. Ceci nous permettra d'avoir une preuve qui n'utilise pas de notions sur les variétés. À titre de comparaison, on décrira ensuite les fonctions propres de Δ sur la sphère. On verra, de manière pas très étonnante, qu'il y a des fonctions propres telles que $|\phi_n(x)|^2$ se concentre au voisinage de l'équateur (et donc la probabilité de présence n'est pas du tout uniforme). Enfin, on abordera le théorème d'ergodicité quantique sur les variétés. On ne rentrera pas dans les détails, mais on dira comment adapter la preuve donnée sur le tore. L'énoncé général concerne des observables $a(x, \xi)$ dépendant à la fois de x (position) et de ξ (quantité de mouvement, impulsion).

En conclusion, on évoque brièvement des recherches récentes sur le sujet, en particulier les travaux d'Elon Lindenstrauss [Lin06], médaillé Fields 2010.

1. Une version du théorème d'ergodicité quantique pour les tores plats

1.1. Laplacien et fonctions propres sur un tore plat

Dans toute cette section $\mathbb{R}^d$ sera muni de sa structure euclidienne usuelle $(x, y) \mapsto x \bullet y$, pour laquelle la base canonique est orthonormée, de la norme $\|\cdot\|$ associée, et de la distance d associée.

On appelle réseau de $\mathbb{R}^d$ un sous-groupe Λ de $(\mathbb{R}^d, +)$, discret pour la topologie induite, et tel que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(\Lambda)$

soit égal à $\mathbb{R}^d$. Si Λ est un réseau, considérons l'espace quotient $\mathbb{R}^d/\Lambda$ pour la relation d'équivalence ($x' \sim y' \iff x' - y' \in \Lambda$). Il peut-être muni de la topologie quotient, définie par la distance

$$d_\Lambda(x,y) = \min\{d(x',y') \mid x' \text{ représentant de } x, y' \text{ représentant de } y\}.$$

Cet espace est compact. En fait, si l'on considère une *base* $(e_1,\dots,e_d)$ de Λ, de sorte que $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_d$, l'application

$$\begin{aligned}[0,1]^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d/\Lambda \\ (y_1,\dots,y_d) &\longmapsto y_1e_1 + \cdots + y_de_d\end{aligned}$$

est une surjection continue (et c'est une bijection en restriction à $[0,1[^d$). L'espace $\mathbb{R}^d/\Lambda$, qui est homéomorphe à un parallélépipède $[0,1]^d$ dont on recolle les côtés par translation, s'appelle un tore. Si on le munit de la structure riemannienne héritée de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$, ce tore a une courbure nulle, d'où l'appellation *tore plat*.

Soit

$$p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d/\Lambda$$

la projection canonique. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^d/\Lambda$ dans $\mathbb{C}$, remarquons que $F = f \circ p$ est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$F(x+\lambda) = F(x)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$: autrement dit F est Λ-périodique. Inversement, si F est Λ-périodique elle s'écrit $F = f \circ p$ pour une unique fonction $f : \mathbb{R}^d/\Lambda \to \mathbb{R}$. Ainsi, on peut identifier les fonctions sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ aux fonctions Λ-périodiques sur $\mathbb{R}^d$. Par définition de la topologie quotient, f est continue si et seulement si F l'est. Nous dirons que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ si F est de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$.

Sur $\mathbb{R}^d$, le laplacien est l'opérateur qui s'exprime par la formule

$$\Delta_{\mathbb{R}^d} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

dans les coordonnées de la base canonique. Si A est une transformation affine de $\mathbb{R}^d$, de partie linéaire L, et si F est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, on a la formule

$$\Delta_{\mathbb{R}^d}(F \circ A) = \Big(\sum_{ij} \ell_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big) \circ A, \tag{1}$$

où ℓ est la matrice représentant $L\,{}^tL$. On voit que, si A est une isométrie affine, on a $\Delta_{\mathbb{R}^d}(F \circ A) = (\Delta_{\mathbb{R}^d} F) \circ A$, c'est-à-dire que $\Delta_{\mathbb{R}^d}$ commute avec les isométries affines.

On voit en particulier que si F est Λ-périodique et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, $\Delta_{\mathbb{R}^d} F$ est aussi Λ-périodique. Ceci permet de définir sans ambiguïté l'opérateur laplacien Δ_Λ sur les fonctions de classe C^2 sur le tore $\mathbb{R}^d/\Lambda$: si f est une fonction de classe C^2 sur le tore $\mathbb{R}^d/\Lambda$, on écrit $F = f \circ p$, et $\Delta_\Lambda f$ est l'unique fonction sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ telle que $\Delta_{\mathbb{R}^d} F = (\Delta_\Lambda f) \circ p$.

Définition 1.1. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$, à valeurs complexes, non identiquement nulle. On dira que f est une fonction propre de Δ_Λ s'il existe un nombre complexe μ tel que

$$\Delta_\Lambda f + \mu f = 0.$$

Avec ces notations, $-\mu$ est la valeur propre de Δ_Λ associée à f, on verra dans un instant la raison de cette convention de signe.

Dans la suite, pour simplifier, nous nous restreignons à $\Lambda = (2\pi\mathbb{Z})^d$ (mais tous les résultats peuvent s'étendre à des réseaux plus généraux) et on notera $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$, et $\Delta_\Lambda = \Delta_{\mathbb{T}^d}$. Comme on l'a vu, une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$ n'est rien d'autre qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ qui est 2π-périodique en chaque variable.

Pour f continue bornée sur $\mathbb{T}^d$, on définit $\int_{\mathbb{T}^d} f = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)dx$ comme étant

$$\int_{[a_1,a_1+2\pi]\times[a_2,a_2+2\pi]\times\cdots\times[a_d,a_d+2\pi]} F(x)dx,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $dx = (2\pi)^{-d} dx_1 \cdots dx_d$ est la mesure de Lebesgue normalisée. Par périodicité de F on vérifie que cette définition est indépendante du choix des réels $a_1, a_2, \ldots, a_d$.

En effectuant des intégrations par parties, et en utilisant la périodicité des fonctions considérées, on montre les identités suivantes :

Proposition 1.2. *Si f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{T}^d$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}^d} g\,\Delta_{\mathbb{T}^d} f = -\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{T}^d} f\,\Delta_{\mathbb{T}^d} g.$$

Si f et g sont à valeurs complexes, on a aussi

$$\int_{\mathbb{T}^d} \overline{g}\, \Delta_{\mathbb{T}^d} f = -\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \int_{\mathbb{T}^d} f\, \overline{\Delta_{\mathbb{T}^d} g}.$$

En appliquant ces identités à $f = g$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \overline{f}\, \Delta_{\mathbb{T}^d} f \leqslant 0$$

pour tout f, et donc que les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ sont des réels négatifs (c'est pourquoi on notera de préférence $-\lambda$, avec $\lambda \geqslant 0$, les valeurs propres). De plus, si f est fonction propre, $\mathrm{Ré}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi (si elles sont non nulles). Enfin, si f et g sont des fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes $-\mu$ et $-\lambda$, on a $\int_{\mathbb{T}^d} g\, \Delta_{\mathbb{T}^d} f = \int_{\mathbb{T}^d} f\, \Delta_{\mathbb{T}^d} g$ donc $\mu \int_{\mathbb{T}^d} f\, g = \lambda \int_{\mathbb{T}^d} f\, g$, donc

$$\int_{\mathbb{T}^d} f\, g = 0.$$

Tout ceci peut s'exprimer en disant que $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ est un opérateur symétrique (non borné, de domaine $C^2(\mathbb{T}^d)$) sur l'espace de Hilbert complexe $L^2(\mathbb{T}^d)$, qui est le complété de l'espace des fonctions C^0 pour la norme issue du produit hilbertien $\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f\, \overline{g}$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée :

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{T}^d} |f|^2\Big)^{1/2}.$$

Remarquons que dans le cas du tore, on peut utiliser la décomposition en séries de Fourier pour caractériser complètement les fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$. Pour $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, les fonctions $e_k : x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto e^{ik \bullet x}$ (avec $k \bullet x = k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d$) sont des fonctions propres du laplacien, on a en effet

$$\Delta_{\mathbb{T}^d} e_k = -\|k\|^2 e_k,$$

où $\|k\|^2 = k_1^2 + \cdots + k_d^2$. D'après la théorie des séries de Fourier, on sait que les fonctions e_k sont linéairement indépendantes, et qu'elles forment une *base hilbertienne* de l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$, ce qui signifie que $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Ceci est d'ailleurs un cas particulier du théorème de diagonalisation 3.7 énoncé plus bas.

Plus généralement, f est une fonction propre de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$, associée à la valeur propre $-\lambda$, si et seulement si sa décomposition en séries de

Fourier est de la forme

$$f(x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ \|k\|^2=\lambda}} c_k e^{ik\bullet x}, \tag{2}$$

où les c_k sont les coefficients de Fourier de f. On observe donc que

- Les valeurs propres λ sont exactement les entiers positifs qui peuvent s'écrire comme sommes de d carrés ;
- La multiplicité $m(\lambda)$ de la valeur propre λ, définie comme la dimension du sous-espace propre associé, est exactement le nombre de décompositions de λ comme somme de d carrés (si l'on compte toutes les décompositions, même celles qui ne diffèrent que par le signe ou par l'ordre).

Pour $d = 2$, le théorème des deux carrés (dont il existe plusieurs démonstrations, dues à Fermat, Euler, Gauss...) dit que λ est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k+3$ intervient à une puissance paire. La multiplicité $m(\lambda)$ est une fonction non bornée de λ, mais étudier de manière fine sa dépendance en λ est une question très difficile en théorie des nombres.

C'est d'ailleurs ce qui donne un intérêt à l'étude, que nous présentons ci-dessous, des fonctions propres sur le tore : si $m(\lambda)$ était bornée, l'étude des sommes de la forme (2) n'aurait que peu d'intérêt. C'est parce que le nombre de termes dans la somme peut être arbitrairement grand qu'il y a des questions intéressantes à se poser.

1.2. Loi de Weyl

S'il est très difficile d'étudier les fluctuations de la multiplicité $m(\lambda)$, il est en revanche plus aisé de comprendre son comportement moyen : on note $N(E) = \sum_{\lambda\leqslant E} m(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$ inférieures à E. C'est aussi le nombre de points à coordonnées entières $k = (k_1, \ldots, k_d)$ contenus dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{E}$ de $\mathbb{R}^d$. Décrivons le comportement asymptotique de $N(E)$ quand $E \to +\infty$.

On peut remarquer que

$$N(E) = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} f(k/\sqrt{E}),$$

où f est la fonction qui vaut 1 sur la boule fermée $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}$ de $\mathbb{R}^d$, de centre 0 et de rayon 1, dont nous noterons Vol le volume, et 0 ailleurs. La fonction f étant intégrable, on a convergence des sommes de Riemann

$$\frac{1}{\sqrt{E}^d} \sum_{k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} f(k/\sqrt{E}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f = \mathrm{Vol}\,\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}.$$

On obtient donc l'asymptotique suivante, qui est un cas particulier de la loi de Weyl qui sera énoncée plus bas :

$$N(E) \sim \sqrt{E}^d\,\mathrm{Vol}\,\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)} \tag{3}$$

quand $E \to +\infty$. On montre de la même manière que pour toute fonction χ Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} \chi(\|k\|^2/E) \sim \sqrt{E}^d\,\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^{+\infty} \chi(r^2) r^{d-1} dr, \tag{4}$$

où $\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$ est la mesure $(d-1)$-dimensionnelle totale de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ (voir la section concernant la sphère pour une définition plus précise).

Remarque 1.3. Voici une méthode plus savante pour démontrer le même résultat, en faisant le lien avec les résultats sur les opérateurs pseudo-différentiels démontrés par C. Fermanian (ce volume). Si χ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact, notons $\chi(-\Delta_{\mathbb{T}^d})$ l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ par son action sur la base hilbertienne (e_k) :

$$\chi(-\Delta_{\mathbb{T}^d})e_k = \chi(\|k^2\|)e_k.$$

Comme conséquence de la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))e_k = \chi(\hbar^2\|k^2\|)e_k$$

et donc on a l'identité entre opérateurs

$$\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2)) = \chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d}).$$

(on a utilisé la notation abusive, mais pratique, $\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))$ pour désigner l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ où a est la fonction $(x,\xi) \mapsto \chi(\|\xi\|^2)$. On continuera par la suite à pratiquer ce genre d'abus de notation).

La loi de Weyl peut maintenant se démontrer ainsi : si l'on note (λ_n) les valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$, ordonnées de manière croissante et répétées avec leurs multiplicité, on utilise la définition de la norme de

Hilbert-Schmidt donnée par C. Fermanian dans son § 3.1 (ce volume), pour écrire

$$\sum_n \chi^2(\hbar^2\lambda_n) = \|\chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d})\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))\|_{\mathrm{HS}}^2$$

et on applique la proposition 6.6 du texte de C. Fermanian :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))\|_{\mathrm{HS}}^2 &\sim_{\hbar\to 0} (2\pi\hbar)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d}\chi^2(\|\xi\|^2)dx\,d\xi\\ &\sim (2\pi\hbar)^{-d}(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d}\chi^2(\|\xi\|^2)d\xi,\end{aligned}$$

ce qui est identique à la formule (4) en remplaçant χ par χ^2 et en posant $\hbar = E^{-1/2}$. L'avantage de cette preuve, plus compliquée, est qu'elle s'adapte à des situations où l'on ne connaît pas explicitement le spectre du laplacien. Le désavantage est qu'il faut supposer χ de classe C^∞ pour que les résultats prouvés par C. Fermanian s'appliquent (pour passer à des fonctions moins régulières, telles que des fonctions caractéristiques, il faut procéder par encadrements).

Il est difficile d'obtenir une estimation de l'erreur. Dans le cas présent, on peut faire le raisonnement suivant, qui ne donne cependant pas une estimation optimale de l'erreur. Restreignons-nous à la dimension $d = 2$.

Pour des raisons de symétrie, pour estimer $N(E)$ il suffit de multiplier par 4 le nombre de points de coordonnées entières dans le cadran

$$C(\sqrt{E}) = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant\sqrt{E}\}.$$

Si $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2$ est un vecteur entier dans $C(\sqrt{E})$, on note C_k le carré $[k_1,k_1+1)\times[k_2,k_2+1)$. Il est clair que

$$C(\sqrt{E}) \subset \bigcup_{k\in C(\sqrt{E})\cap\mathbb{Z}^2} C_k,$$

l'union étant disjointe. Comme chaque carré est d'aire 1, on en déduit en comparant les aires de ces deux ensembles que

$$\mathrm{Aire}(C(\sqrt{E})) = \frac{\pi E}{4} \leqslant \sum_{k\in C(\sqrt{E})\cap\mathbb{Z}^2} 1$$

On raisonne de même dans les 4 cadrans, on somme les 4 inégalités ainsi obtenues et on obtient

$$\pi E \leqslant N(E) + O(\sqrt{E})$$

où l'erreur $O(\sqrt{E})$ correspond aux points qui ont été comptés plusieurs fois, c'est-à-dire ceux qui sont sur les axes de coordonnées. Par ailleurs

$$\bigcup_{k \in C(\sqrt{E}) \cap \mathbb{Z}^2} C_k \subset C(\sqrt{E} + \sqrt{2}),$$

d'où, en comparant de nouveau les aires des deux ensembles,

$$N(E) \leqslant \pi E + O(\sqrt{E}).$$

En fin de compte on a donc $N(E) = \pi E + O(\sqrt{E})$.

Il est en fait conjecturé que $N(E) = \pi E + O(E^{1/4+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, et Huxley [Hux02] a démontré que $N(E) = \pi E + O(E^{131/416})$. Dennis Hejhal estimait en 1976 que cette conjecture était peut-être plus difficile encore que l'hypothèse de Riemann [Hej76].

1.3. *Ergodicité quantique* sur le tore

Nous démontrons maintenant le théorème suivant :

Théorème 1.4. *Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^d)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta_{\mathbb{T}^d} \phi_n = -\lambda_n \phi_n$$

que l'on supposera ordonnées de sorte que $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$. Soit $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$.

Alors

$$\lim_{E\to+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{\substack{n \\ \lambda_n \leqslant E}} \left| \langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx \right|^2 = 0.$$

Remarquons que le produit scalaire $\langle \phi_n, a\phi_n \rangle$ n'est rien d'autre que $\int_{\mathbb{T}^d} a(x)|\phi_n(x)|^2 dx$.

Nous utiliserons la notation

$$\varepsilon(E) = \frac{1}{N(E) - N(E/2)} \sum_{\substack{n \\ E/2 < \lambda_n \leqslant E}} \left| \langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx \right|^2.$$

D'après la loi de Weyl (3),

$$\frac{N(E)}{N(E) - N(E/2)} = O(1).$$

Le théorème implique donc que $\lim_{E\to+\infty}\varepsilon(E)=0$. De plus, on peut écrire

$$\sqrt{\varepsilon(E)}\,\#\left\{n\;\Big|\; E/2<\lambda_n\leqslant E,\left|\langle\phi_n,a\phi_n\rangle-\int_{\mathbb{T}^d}a(x)dx\right|^2\geqslant\sqrt{\varepsilon(E)}\right\}$$
$$\leqslant\sum_{\substack{n\\ E/2<\lambda_n\leqslant E}}\left|\langle\phi_n,a\phi_n\rangle-\int_{\mathbb{T}^d}a(x)dx\right|^2.$$

Si l'on appelle $A_E\subset\mathbb{N}$ l'ensemble

$$A_E=\left\{n\;\Big|\; E/2<\lambda_n\leqslant E,\left|\langle\phi_n,a\phi_n\rangle-\int_{\mathbb{T}^d}a(x)dx\right|^2\geqslant\sqrt{\varepsilon(E)}\right\},$$

on a donc, en divisant par $N(E)-N(E/2)$,

$$\frac{\sqrt{\varepsilon(E)}}{N(E)-N(E/2)}\cdot\#A_E\leqslant\varepsilon(E).$$

Finalement,

$$\#A_E\leqslant\sqrt{\varepsilon(E)}\,(N(E)-N(E/2))\,. \tag{5}$$

On a donc, en notant A_E^c le complémentaire de A_E,

$$\left(1-\sqrt{\varepsilon(E)}\right)(N(E)-N(E/2))<\#A_E^c\leqslant N(E)-N(E/2),$$

la deuxième inégalité étant évidente, et la première découlant de (5). Prenant $E=2^M$, on peut donc choisir une suite croissante d'entiers (n_k) telle que

$$\left|\langle\phi_{n_k},a\phi_{n_k}\rangle-\int_{\mathbb{T}^d}a(x)dx\right|^2\leqslant\sqrt{\varepsilon(2^M)} \tag{6}$$

dès que $\lambda_{n_k}\in[2^{M-1},2^M]$, et telle que

$$\#\{k\mid\lambda_{n_k}\in[2^{M-1},2^M]\}\geqslant\left(1-\sqrt{\varepsilon(2^M)}\right)(N(2^M)-N(2^{M-1})),$$

ce qui signifie que la proportion des k tels que $\lambda_{n_k}\in[2^{M-1},2^M]$ et qui vérifient (6) tend vers 1. On voit ainsi que le théorème est équivalent à l'énoncé suivant :

Corollaire 1.5. *Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^d)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta_{\mathbb{T}^d}\phi_n=-\lambda_n\phi_n$$

que l'on supposera ordonnées de sorte que $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$. *Soit* $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$. *Alors il existe une suite croissante d'entiers* (n_k) *telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \phi_{n_k}, a\phi_{n_k}\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx$$

et

$$\#\{k \mid \lambda_{n_k} \leqslant E\} \sim N(E).$$

En utilisant le fait qu'il existe une suite (dénombrable) dense dans $C^0(\mathbb{T}^d)$ et en utilisant un procédé d'extraction diagonale, on pourrait même s'arranger pour que la suite (n_k) soit indépendante de la fonction a. L'énoncé nous dit alors que les mesures $|\phi_{n_k}(x)|^2 dx$ convergent au sens faible vers la mesure de Lebesgue dx.

Ces énoncés ne rentrent pas, à strictement parler, dans le cadre du « véritable » théorème d'ergodicité quantique qui sera énoncé plus bas : en effet, le flot géodésique sur le tore, c'est-à-dire la famille d'applications

$$\phi^t : (x, \xi) \longmapsto (x + t\xi, \xi)$$

(où $t \in \mathbb{R}$) n'est pas ergodique, pour la raison simple qu'il laisse invariante la deuxième coordonnée. Rappelons que l'ergodicité signifierait l'identité des moyennes temporelles et spatiales

$$\lim_{|T|\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(x_0 + t\xi_0, \xi_0)dt = \int_{\substack{x\in\mathbb{T}^d\\ u\in\mathbb{S}^{d-1}}} a(x, \|\xi_0\|u)dx d\sigma_{d-1}(u) \tag{7}$$

pour *toute* fonction continue $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et pour *Lebesgue-presque-tout* couple de données initiales (x_0, ξ_0) (dans cette formule $d\sigma_{d-1}(u)$ est de nouveau la mesure de volume $(d-1)$-dimensionnel sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, voir sa définition dans la section sur les sphères, § 2). Il est clair par exemple que l'identité (7) ne peut avoir lieu si $a = a(\xi)$ est une fonction qui ne dépend que de la deuxième variable ξ.

Il est cependant classique (lemme 1.6) que si a ne dépend *pas* de la coordonnée ξ, autrement dit si on considère une fonction $a : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{|T|\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(x_0 + t\xi_0)dt = \int_{x\in\mathbb{T}^d} a(x)dx$$

pour presque tout ξ_0 (plus explicitement, si et seulement si l'hyperplan $\xi_0^\perp$ n'intersecte $\mathbb{Z}^d$ qu'en 0, autrement dit si les coordonnées de ξ_0 dans la base canonique sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$). On a donc, sur le tore, un phénomène d'*ergodicité restreinte* à la classe des fonctions ne dépendant que de x. Ceci explique qu'on puisse démontrer le théorème 1.4, *théorème d'ergodicité quantique restreint* aux opérateurs de multiplication par $a(x)$.

Il est légitime de s'interroger sur l'intérêt du théorème 1.4, étant donné que l'on connaît une base orthonormée explicite de fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ (les fonctions e_k) pour laquelle le résultat est évident : on constate en effet que

$$\int_{\mathbb{T}^d} a(x)|e_k(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx$$

pour tout k. Donnons deux réponses à cette objection : d'une part, à cause de la multiplicité des valeurs propres du laplacien, le choix d'une telle base orthonormée n'est pas unique, et il peut être intéressant d'avoir un résultat valable pour *n'importe quelle* base de fonctions propres (on verra d'ailleurs plus bas qu'il y a des questions intéressantes à se poser sur les fonctions propres générales du laplacien sur $\mathbb{T}^d$, c'est à-dire les fonctions de la forme (2)). Deuxième réponse : le théorème 1.4 dans le cas particulier du tore nous permet de donner une présentation relativement simple, en évitant le langage des variétés riemanniennes, de la preuve du théorème d'ergodicité quantique. La preuve présentée ci-dessous s'adaptera mot pour mot à des variétés plus générales, la difficulté supplémentaire étant surtout de savoir définir les objets.

Le lemme suivant est une version du lemme de Kronecker-Weyl :

Lemme 1.6. *Soit $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$ et soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ dont les coordonnées dans la base canonique sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors, quel que soit $x_0 \in \mathbb{T}^d$,*

$$\lim_{|T|\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(x_0+t\xi_0)dt = \int_{x\in\mathbb{T}^d} a(x)dx.$$

Démonstration. Par densité de $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans l'espace $C^0(\mathbb{T}^d)$ (muni de la norme de la convergence uniforme), il suffit de démontrer le lemme pour $a = e_k$. Pour $k = 0$ c'est évident, la fonction e_k étant constante. Pour $k \neq 0$, on sait par hypothèse que $k \bullet \xi_0 \neq 0$. On a

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\bullet(x_0+t\xi_0)}dt = \frac{e^{ik\bullet x_0}(e^{iTk\bullet x_0}-1)}{iTk\bullet\xi_0} \tag{8}$$

et donc

$$\lim_{|T|\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e_k(x_0+t\xi_0)dt = 0 = \int_{x\in\mathbb{T}^d} e_k(x)dx.$$

On voit aussi que la condition du lemme est nécessaire : si $k\bullet\xi_0=0$, on a convergence de la quantité (8), mais vers une quantité autre que $\int_{x\in\mathbb{T}^d} a(x)dx$. □

On commence à présent la preuve du théorème 1.4. On utilise les résultats énoncés par C. Fermanian (ce volume), portant sur la quantification $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ pour $a:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, $(2\pi\mathbb{Z})^d$-périodique en x.

On a vu à la remarque 1.3 que si $b(x,\xi)=\chi(\|\xi\|^2)$ on a $\mathrm{Op}_\hbar(b)=\chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d})$. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{Op}_\hbar(a(x,\xi))\circ\mathrm{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2)) = \mathrm{Op}_\hbar(a(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2)) + O(\hbar),$$

et cette relation est même exacte (sans $O(\hbar)$) si, au lieu de la quantification de Weyl, on utilise la quantification appelée *classique* au § 1.3 du texte de C. Fermanian – ce que l'on peut faire sans changer l'énoncé final du théorème.

Du texte de C. Fermanian, on rappelle le théorème d'Egorov :

$$e^{-it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2}\,\mathrm{Op}_\hbar(a(x,\xi))e^{it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2} = \mathrm{Op}_\hbar(a(x+t\xi,\xi)) + O(|t|\hbar)$$

valable pour toute fonction a de classe C^∞, dont chaque dérivée est uniformément bornée (l'estimation de l'erreur est moins bonne pour la quantification classique que pour la quantification de Weyl, mais cela n'aura aucune importance ici). L'estimée du reste est valable dans l'espace $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{T}^d))$ des endomorphismes continus de $L^2(\mathbb{T}^d)$.

En remplaçant a par $a-\int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx$, on se ramène au cas où $\int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx=0$.

On commence par écrire

$$\frac{1}{N(E)}\sum_{\substack{n\\ \lambda_n\leqslant E}} |\langle\phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leqslant \frac{1}{N(E)}\sum_{n=0}^{+\infty}\chi^2\left(\lambda_n/E\right)|\langle\phi_n, a\phi_n\rangle|^2$$

si χ est une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[0,1]$. Soient t et $\hbar$ quelconques. En utilisant le fait que les ϕ_n sont des fonctions propres du laplacien on a

$$\langle\phi_n, a\phi_n\rangle = \left\langle\phi_n, e^{-it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2}\,a\,e^{it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2}\phi_n\right\rangle$$

ou, en intégrant sur un intervalle $[0,T]$ quelconque,

$$\langle \phi_n, a\phi_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle \phi_n, e^{-it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2}\, a\, e^{it\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}/2}\phi_n\right\rangle dt.$$

Si l'on se souvient que la multiplication par a coïncide avec l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(a)$, le théorème d'Egorov permet ensuite de transformer cette dernière égalité en

$$\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a)\phi_n\rangle = \langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi))\phi_n\rangle + O(\hbar|T|),$$

où l'on a noté

$$a_T(x,\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T a(x+t\xi)dt.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N(E)}\sum_n \chi^2(\lambda_n/E)\,|\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a)\phi_n\rangle|^2 \\
&\qquad = \frac{1}{N(E)}\sum_n \chi^2(\lambda_n/E)\,|\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T)\phi_n\rangle|^2 \\
&\qquad\qquad + O(\hbar|T|)\frac{1}{N(E)}\sum_n \chi^2(\lambda_n/E) \\
&\qquad = \frac{1}{N(E)}\sum_n \chi^2(\lambda_n/E)\,|\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T)\phi_n\rangle|^2 + O(\hbar|T|).
\end{aligned} \tag{9}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on a utilisé la loi de Weyl, selon laquelle $N(E) \sim CE^{d/2}$, ce qui implique que $\sum_n \chi^2(\lambda_n/E) = O(E^{d/2})$.

À ce stade on prend $\hbar = \hbar(E) = E^{-1/2}$, et on remarque que

$$\begin{aligned}
\chi^2(\lambda_n/E)\,|\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T)\phi_n\rangle|^2 &= |\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T)\chi(\Delta/E)\,\phi_n\rangle|^2 \\
&= |\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Pour majorer la dernière ligne de (9), on utilise la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \phi_n, \mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle|^2 \leqslant \|\mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\|_{\mathrm{HS}}^2$$

et l'on a vu dans la proposition 6.6 du texte de C. Fermanian (ce volume) que

$$\|\mathrm{Op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\|_{\mathrm{HS}}^2 \sim (2\pi\hbar)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi.$$

Notons aussi que d'après la loi de Weyl, $N(E) \sim CE^{d/2} \sim \widetilde{C}(2\pi\hbar)^{-d}$ pour des constantes $C, \widetilde{C} > 0$.

Mettant bout à bout ces inégalités, faisant tendre E vers l'infini, et donc $\hbar$ vers 0, à T fixé, on constate que

$$\limsup_{E\to+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{n,\lambda_n\leqslant E} |\langle \phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leqslant \widetilde{C}^{-1} \int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi$$

pour T arbitraire.

On prend maintenant la limite $T \to +\infty$: le lemme 1.6 montre que $a_T^2(x,\xi) \to 0$ pour presque tout ξ, et par convergence dominée on a

$$\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où finalement

$$\limsup_{E\to+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{\substack{n\\ \lambda_n\leqslant E}} |\langle \phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leqslant 0$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

2. Fonctions propres de la sphère ronde

À titre de comparaison, décrivons le laplacien et ses fonctions propres sur la sphère. On renvoie au livre [Far08], Chap. 9, pour une présentation plus détaillée.

2.1. Laplacien et fonctions propres sur la sphère

La sphère de dimension d est la sous-variété de $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d = \{(x_1,\dots,x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 = 1\}.$$

La sphère $\mathbb{S}^d$ peut être munie de la structure riemannienne héritée de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^{d+1}$. Elle rentre donc dans le cadre général qui sera décrit au paragraphe 3.1. Nous donnons ici une construction *ad hoc* du laplacien sur $\mathbb{S}^d$ et décrivons une base de fonctions propres, les *harmoniques sphériques*.

Soit $a > 1$ arbitraire. Toute fonction f sur $\mathbb{S}^d$ peut être étendue de manière unique en une fonction f_0 sur

$$\mathbb{S}_a^d = \{(x_1,\dots,x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid 1 - a^{-1} \leqslant x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 \leqslant 1 + a\}$$

qui coïncide avec f sur $\mathbb{S}^d$, et qui soit 0-homogène, c'est-à-dire qui satisfasse

$$f_0(x) = f_0\left(x/\|x\|\right)$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d_a$. On dira que f est de classe C^k sur $\mathbb{S}^d$ si f_0 est de classe C^k sur $\mathbb{S}^d_a$. Si f est de classe C^2 sur $\mathbb{S}^d$, on définira $\Delta_{\mathbb{S}^d} f$ comme la restriction à $\mathbb{S}^d$ de $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_0$.

Soit $\alpha > 0$ et soit f_α une fonction α-homogène sur $\mathbb{S}^d_a$, c'est-à-dire que

$$f_\alpha(x) = \|x\|^\alpha f_\alpha\left(x/\|x\|\right). \tag{10}$$

Autrement dit, si l'on pose $g(r,u) = f_\alpha(ru)$ pour $1 - a^{-1} < r^2 < 1 + a$ et $u \in \mathbb{S}^d$, on a $g(r,u) = r^\alpha g(1,u)$. À l'aide de la formule (1), on calcule « à la main » l'expression

$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_\alpha)(x) \\ = \alpha(\alpha + d - 1)\|x\|^{\alpha-2} f_\alpha\left(x/\|x\|\right) + \|x\|^{\alpha-2}\Delta_{\mathbb{S}^d} f_\alpha\left(x/\|x\|\right),\end{aligned} \tag{11}$$

autrement dit

$$\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_\alpha(x) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^d}\Big) g(r,u).$$

Cette expression du laplacien $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ en coordonnées sphériques reste vraie pour des fonctions quelconques, car les combinaisons linéaires de fonctions homogènes sont denses dans $C^k(\mathbb{S}^d_a)$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d+1}$, $d\ell^{d+1}(x) = dx_1 \cdots dx_{d+1}$, est homogène de degré $d+1$, c'est-à-dire qu'elle est multipliée par λ^{d+1} sous l'action de l'homothétie linéaire de rapport $\lambda > 0$. Ceci implique qu'il existe une mesure positive σ_d sur $\mathbb{S}^d$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x) d\ell^{d+1}(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^d} f(ru) r^d dr d\sigma_d(u)$$

pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^{d+1}$ pour lesquelles ces intégrales sont absolument convergentes. On a, pour tout $A \subset \mathbb{S}^d$,

$$\sigma_d(A) = \ell^{d+1}\left(\left\{x \in \mathbb{S}^d_a \mid x/\|x\| \in A\right\}\right) \frac{d+1}{(1+a)^{d+1} - (1-a^{-1})^{d+1}}.$$

Notons que cette mesure $d\sigma_d$ est invariante par l'action de tous les éléments de $O(d, \mathbb{R})$, ce qui signifie que $\sigma_d(A) = \sigma_d(M(A))$ pour toute matrice $M \in O(d, \mathbb{R})$ (c'est pourquoi on l'appelle parfois *mesure uniforme* sur $\mathbb{S}^d$).

De la formule

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)g(x)d\ell^{d+1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} g(x)d\ell^{d+1}(x)$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \nabla f(x) \bullet \nabla g(x)d\ell^{d+1}(x)$$

valable pour f, g à supports compacts et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{d+1}$, on peut déduire la formule

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} \Delta_{\mathbb{S}^d} f(u)g(u)d\sigma_d(u) &= \int_{\mathbb{S}^d} f(u)\Delta_{\mathbb{S}^d} g(u)d\sigma_d(u) \\ &= -\int_{\mathbb{S}^d} \nabla f_0(u) \bullet \nabla g_0(u)d\sigma_d(u)\end{aligned} \tag{12}$$

valable pour f, g de classe C^2 sur $\mathbb{S}^d$; les fonctions f_0, g_0 sont, comme plus haut, les fonctions 0-homogènes qui coïncident avec f, g sur $\mathbb{S}^d$. Le gradient $\nabla f_0(u)$ est orthogonal à u.

Exactement comme dans le cas du tore, on en déduit que

- Les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ sont des réels $\leqslant 0$;
- si f et g sont des fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes, alors $\int_{\mathbb{S}^d} f(u)\overline{g(u)}d\sigma_d(u) = 0$, autrement dit, elles sont orthogonales pour le produit scalaire hermitien

$$\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{S}^d} f(u)\overline{g(u)}\, d\sigma_d(u).$$

Si $f \in C^0(\mathbb{S}^d)$ on notera

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

et on définit l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^d)$ comme le complété de $C^0(\mathbb{S}^d)$ pour cette norme.

Une fonction f sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$ est dite *harmonique* si $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f = 0$. De la formule (11), on déduit directement que si f est harmonique sur $\mathbb{S}^d_a$, et homogène de degré α (c'est-à-dire qu'elle satisfait à (10)), alors la fonction $F = u \mapsto f(u)$ définie sur $\mathbb{S}^d$ vérifie

$$\Delta_{\mathbb{S}^d} F = -\alpha(\alpha + d - 1)F.$$

Autrement dit, F est une fonction propre du laplacien sur la sphère. Ci-dessous on va montrer qu'en fait les restrictions à $\mathbb{S}^d$ des *polynômes* harmoniques sont denses dans $C^0(\mathbb{S}^d)$ et donc dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Il en découlera que l'on peut trouver une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^d)$, formée de restrictions à $\mathbb{S}^d$ de polynômes *homogènes* harmoniques. Ces polynômes nous fournissent une base hilbertienne de fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$, et comme le degré d'homogénéité d'un polynôme est un entier, les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ sont donc les $-m(m+d-1)$, où $m \in \mathbb{N}$ (on calculera aussi les multiplicités des valeurs propres).

On notera $\mathscr{P}$ l'algèbre des fonctions polynomiales à plusieurs variables sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Une base de cette algèbre est donnée par les fonctions

$$x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \longmapsto x^\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ est un multi-indice, et la notation x^α désigne $x_1^{\alpha_1} \ldots x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}$. On notera $\mathscr{P}_m$ l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré m, engendré par les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1} = m$. La dimension δ_m de $\mathscr{P}_m$ est

$$\delta_m = \frac{(m+d)!}{d!m!},$$

c'est le nombre de manières d'écrire $m = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1}$ avec les α_i entiers positifs. Remarquons que $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ envoie $\mathscr{P}_m$ dans $\mathscr{P}_{m-2}$. On notera

$$\mathscr{H}_m = \{p \in \mathscr{P}_m \mid \Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} p = 0\}$$

et $\mathscr{H}\mathscr{S}_m \subset C^\infty(\mathbb{S}^d)$ les restrictions à $\mathbb{S}^d$ des fonctions de $\mathscr{H}_m$. On sait que les éléments de $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ sont des fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ pour la valeur propre $-m(m+d-1)$ (on les appelle *harmoniques sphériques*) et ceci implique que pour $m \neq m'$, les espaces $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ et $\mathscr{H}\mathscr{S}_{m'}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Le but de ce qui suit est de montrer que $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{H}\mathscr{S}_m$ est dense dans $L^2(\mathbb{S}^d)$, afin de montrer qu'on a exhibé ainsi toutes les fonctions propres.

Notons Q l'élément de $\mathscr{P}_2$, $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2$.

Proposition 2.1.

(1) *Pour toute application polynomiale $p \in \mathscr{P}_m$, il existe des applications polynomiales harmoniques $h_k \in \mathscr{H}_{m-2k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant m/2$) telles que*

$$p = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m/2} h_k Q^k.$$

(2) *$\bigoplus_m \mathscr{H}\mathscr{S}_m$ est dense dans $C^0(\mathbb{S}^d)$ et donc dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Par conséquent, l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^d)$ est somme hilbertienne des $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ (ces sous-espaces étant deux à deux orthogonaux).*

(3) *La dimension* d_m *de* $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ *vaut*

$$d_m = \delta_m - \delta_{m-2} = (2m+d-1)\frac{(m+d-2)!}{(d-1)!m!}.$$

Démonstration. On va montrer que $\mathscr{P}_m = \mathscr{H}_m \oplus Q\mathscr{P}_{m-2}$ pour tout $m \geqslant 2$. Le (3) en découlera, ainsi que le (1) en faisant une récurrence.

On introduit sur $\mathscr{P}$ le produit scalaire hermitien défini par

$$(\!(p, q)\!) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} \alpha!\, \overline{p_\alpha} q_\alpha$$

si $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} p_\alpha x^\alpha$ et $q = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} q_\alpha x^\alpha$. On a noté $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_{d+1}!$.

On vérifie qu'on a $(\!(\partial_{x_k} p, q)\!) = (\!(p, x_k q)\!)$, d'où

$$(\!(\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} p, q)\!) = (\!(p, Qq)\!),$$

autrement dit, l'adjoint de $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ est l'opérateur M_Q de multiplication par Q. La formule annoncée résulte alors de l'identité

$$\mathscr{P}_m = \operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} \oplus (\operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}})^\perp$$

(on utilise ici l'orthogonal au sens du produit scalaire $(\!(\bullet, \bullet)\!)$) et

$$(\operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}})^\perp = \operatorname{Im}\Delta^*_{\mathbb{R}^{d+1}} = \operatorname{Im} M_Q = Q\mathscr{P}_{m-2}.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass implique que l'ensemble des restrictions à $\mathbb{S}^d$ d'éléments de $\mathscr{P}$ est dense dans $C^0(\mathbb{S}^d)$, lui-même dense dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Le (1) implique alors que tout élément de $\mathscr{P}_m$ coïncide sur $\mathbb{S}^d$, avec un élément de $\oplus_{k\leqslant m/2}\mathscr{H}_k$, et ceci démontre le point (2). □

En utilisant la formule de Stirling, on montre que la multiplicité d_m de la valeur propre $-m(m+d-1)$ est donnée, asymptotiquement quand $m \to +\infty$, par la formule

$$d_m \sim \frac{2m^{d-1}}{(d-1)!}.$$

On en déduit la loi de Weyl : soit $N(E) = \sum_{m(m+d-1)\leqslant E} d_m$; alors pour $E \to +\infty$ on a

$$N(E) \sim \sum_{m\leqslant E^{1/2}} \frac{2m^{d-1}}{(d-1)!}.$$

Grâce à une comparaison avec l'intégrale $\int_1^{E^{1/2}} \frac{2x^{d-1}}{(d-1)!} dx$, on obtient

$$N(E) \sim \frac{2E^{d/2}}{d!}.$$

2.2. Suite de fonctions propres se concentrant sur l'équateur

Considérons la suite de fonctions ϕ_n sur $\mathbb{R}^{d+1}$ définie par $\phi_n(x_1, \ldots, x_{d+1}) = (x_1 + ix_2)^n$. Pour tout entier n, ϕ_n est un polynôme n-homogène sur $\mathbb{R}^{d+1}$, et l'on vérifie aisément qu'il est harmonique. La restriction de ϕ_n à $\mathbb{S}^d$ est donc une fonction propre du laplacien, de valeur propre $-n(n+d-1)$. Sa norme dans $L^2(\mathbb{S}^d)$ est $(\int_{\mathbb{S}^d} |u_1 + iu_2|^{2n} d\sigma_d(u))^{1/2}$, quantité que nous n'avons pas besoin de calculer explicitement pour ce qui suit.

On constate que sur $\mathbb{S}^d$ le maximum de $u \mapsto |u_1 + iu_2|$ est 1, atteint si et seulement si $u_3 = u_4 = \cdots = u_{d+1} = 0$. Un argument standard(1) montre alors que, si a est une fonction continue sur $\mathbb{S}^d$, qui s'annule au voisinage du cercle $\mathscr{C} = \{u \in \mathbb{S}^d \mid u_3 = u_4 = \cdots = u_{d+1} = 0\}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} a(u) |u_1 + iu_2|^{2n} d\sigma_d(u)}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} |u_1 + iu_2|^{2n} d\sigma_d(u)} = 0.$$

Autrement dit, toute la « masse » des fonctions propres ϕ_n se concentre sur le cercle $\mathscr{C}$.

Soit maintenant a une fonction continue quelconque sur $\mathbb{S}^d$. En remarquant que $\phi_n \circ R_\theta = e^{-in\theta} \phi_n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, où R_θ est la rotation des deux premières coordonnées définie par

$$R_\theta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{d+1}) \\ = (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3, \ldots, x_{d+1}),$$

et en utilisant l'invariance de σ_d par les isométries, on montre que

$$\lim_n \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} a(u) |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)} = \lim_n \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} a \circ R_\theta(u) |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}.$$

(1)Sur le support de a, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|u_1 + iu_2| < 1 - 2\delta$. En revanche, il existe un voisinage Ω_δ de la courbe $\mathscr{C}$ tel que $|u_1 + iu_2| > 1 - \delta$ sur Ω_δ. Ainsi,

$$\left| \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a(u) |u_1 + iu_2|^{2n} d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d} |u_1 + iu_2|^{2n} d\sigma_d(u)} \right| \leqslant \Big(\frac{1 - 2\delta}{1 - \delta} \Big)^{2n} \frac{\int_{\mathbb{S}^d} |a(u)| d\sigma_d(u)}{\int_{\Omega_\delta} d\sigma_d(u)}.$$

Autrement dit, la limite est invariante par la transformation $a \mapsto a \circ R_\theta$.

Comme le cercle $\mathscr{C}$ porte une unique mesure de probabilité invariante par toutes les rotations R_θ, on a nécessairement

$$\lim_n \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a(u)|\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\cos\theta, \sin\theta, 0, \dots, 0) d\theta$$

pour toute fonction a continue sur $\mathbb{S}^d$.

Nous verrons au paragraphe 4.3 que ce phénomène de concentration de fonctions propres sur des courbes marque une grande différence entre le tore et la sphère : en effet, sur le tore, Bourgain et Jakobson ont démontré à partir du développement en série de Fourier (2) que cela n'est pas possible.

3. Ergodicité quantique sur les variétés riemanniennes

3.1. Structures riemanniennes et opérateur de Laplace-Beltrami

Pour simplifier la présentation, nous considérons uniquement des *sous-variétés* de $\mathbb{R}^n$ (ceci n'est en fait pas une restriction, si l'on connaît le théorème de plongement de Nash (1956, [Nas56]), selon lequel toute variété riemannienne abstraite peut se réaliser de manière isométrique comme sous-variété d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec n assez grand).

***Définition 3.1* (sous-variété).** Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d et de classe C^k si, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, et une application Φ de classe C^k de Ω dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\Phi(0) = x$, $d\Phi(0)$ est injective, et Φ est un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$ (muni de la topologie induite).

On renvoie, par exemple, au livre de Berger–Gostiaux [BG92]. La sous-variété M est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$. Les applications Φ de la caractérisation (3) s'appellent des *cartes*. Une application $f : M \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^k si $f \circ \Phi$ est de classe C^k, pour toute carte Φ. L'espace tangent T_yM à M en un point y est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$$T_yM = d\Phi(a) \cdot \mathbb{R}^d \quad \text{si } y \in M \cap U \text{ et } y = \Phi(a).$$

De manière plus intuitive : $v \in T_yM$ si et seulement si il existe une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\gamma(t) \in M$ pour tout t, $\gamma(0) = y$, $\gamma'(0) = v$.

Le *fibré tangent* de M est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini comme suit :

$$TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in M,\ v \in T_xM\}$$

(c'est une sous-variété de dimension $2d$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$).

Le produit scalaire défini par la base canonique de $\mathbb{R}^n$ permet d'identifier $\mathbb{R}^n$ à $(\mathbb{R}^n)^*$ et l'espace dual T_y^*M du sous-espace $T_yM \subset \mathbb{R}^n$ à l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ s'annulant sur l'orthogonal $T_yM^{\perp}$. Soit $P(y) : \mathbb{R}^n \to T_yM$ le projecteur orthogonal. Alors l'espace cotangent T_y^*M est plongé comme un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}_n)^*$ par l'application

$$\xi \in T_y^*M \longmapsto \xi \circ P(y) \in (\mathbb{R}_n)^*. \tag{13}$$

Le *fibré cotangent* T^*M est la sous-variété de dimension $2d$ de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ définie par

$$T^*M = \{(x, \xi \circ P(x)) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \mid x \in M, \xi \in T_x^*M\}. \tag{14}$$

Structure riemannienne induite sur M, et distance associée

Pour $y \in M$ et $v, v' \in T_yM$, on peut définir leur produit scalaire $v \bullet v'$ comme étant celui qui provient de la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$. La donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent T_yM (dépendant de manière C^k de y) est ce qu'on appelle *structure riemannienne* de classe C^k sur M. Ici, par souci de simplicité, on ne parlera pas de structures riemanniennes abstraites et on ne regardera que le cas de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ avec la structure riemannienne induite.

On définit la longueur $\ell(\gamma)$ d'une courbe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tracée sur M :

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

et son énergie $E(\gamma)$,

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt.$$

On vérifie que la longueur ne dépend pas du paramétrage, alors que l'énergie en dépend. Ceci permet de définir une distance sur M

$$d_M(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma(0) = x,\, \gamma(1) = y\}.$$

Cette distance définit sur M la même topologie que la topologie induite.

Gradient d'une fonction

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $y \in M$. La différentielle $df(y)$ est une forme linéaire sur T_yM : pour tout $v \in T_yM$,

$$df(y)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(y)}{t}$$

où γ est une courbe tracée sur M telle que $\gamma(0) = y$ et $\gamma'(0) = v$.

Comme le produit scalaire définit une forme bilinéaire non dégénérée sur T_yM, il existe un unique vecteur de T_yM, noté $\nabla f(y)$, tel que

$$df(y)v = \nabla f(y) \bullet v$$

pour tout $v \in T_yM$.

Géodésiques

Soit $\gamma_s : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une famille de courbes tracées sur M, indexées par $s \in\,]-\varepsilon, \varepsilon[$. Plus précisément, on demande que $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ soit de classe C^2 sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\, \times [a,b]$. L'application énergie, $s \mapsto E(\gamma_s)$ est dérivable, et par dérivation sous le signe $\int$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E(\gamma_s) &= \int_a^b \gamma_s'(t) \bullet \frac{d}{ds}\gamma_s'(t)dt \\
&= \int_a^b \gamma_s'(t) \bullet \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\gamma_s(t)dt \\
&= \int_a^b \gamma_s'(t) \bullet \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\gamma_s(t)dt \\
&= -\int_a^b \gamma_s''(t) \bullet \frac{d}{ds}\gamma_s(t)dt + \gamma_s'(b) \bullet \frac{d}{ds}\gamma_s(b) - \gamma_s'(a) \bullet \frac{d}{ds}\gamma_s(a)
\end{aligned}$$

(intégration par parties). On dira qu'une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ est une *géodésique* de M si l'on a $\frac{d}{ds}_{|s=0}E(\gamma_s) = 0$ pour toute famille C^2 de courbes $\gamma_s : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tracées sur M, telles que $\gamma_0 = \gamma$ et telle que

$$\gamma_s(a) = \gamma(a), \qquad \gamma_s(b) = \gamma(b)$$

pour tout $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ (c'est à-dire que les extrémités sont fixes). En particulier, on a $\frac{d}{ds}\gamma_s(a) = 0$ et $\frac{d}{ds}\gamma_s(b) = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que γ soit une géodésique est donc que

$$\int_a^b \gamma''(t) \bullet \frac{d}{ds}_{|s=0}\gamma_s(t)dt = 0$$

pour toute famille C^2 de courbes $\gamma_s : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tracées sur M, telles que $\gamma_0 = \gamma$ et d'extrémités fixes. Comme $\frac{d}{ds}_{|s=0}\gamma_s(t)$ est un élément quelconque de $T_{\gamma(t)}M$, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante est que

$$\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M \tag{15}$$

pour tout t : l'accélération doit être normale à M.

Définition 3.2. Plus généralement, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dira que $\gamma : I \to M$ est une géodésique si γ est de classe C^2 et si on a $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$ (alors $\|\gamma'(t)\| = \text{cste}$).

Montrons que l'équation des géodésiques (15) peut se mettre sous forme hamiltonienne, afin de faire le lien avec les exposés précédents. Cela peut paraître artificiel ici, mais le caractère hamiltonien de l'équation joue en fait un rôle très important quand on veut faire le lien avec la mécanique quantique. Cela dit, comme nous ne donnerons pas de preuves détaillées concernant les opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés, il est tout-à-fait possible de passer à la définition 3.4 sans lire les calculs ci-dessous. On notera toujours $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, et on utilisera la même notation $\|\cdot\|$ pour la norme sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$. L'usage de la même notation est justifié par la remarque que l'identification de $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$ grâce au produit scalaire est une isométrie. Néanmoins, quand on voudra souligner la différence entre ces deux normes, on les notera $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ et $\|\cdot\|_{(\mathbb{R}^n)^*}$.

Pour $v \in \mathbb{R}^n$ on note $\xi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire $x \mapsto v \bullet x$ sur $\mathbb{R}^n$ (produit scalaire par v). L'application $v \mapsto \xi_v$ est donc l'identification usuelle entre $\mathbb{R}^n$ et son dual. Rappelons que, pour $x \in M$, $P(x)$ désigne le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur l'espace tangent T_xM. C'est en particulier un endomorphisme de T_xM, et pour tout vecteur $v \in T_xM$, on a $P(x)(v) = v$. Sa matrice dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sera notée $(P_{ij}(x))$. Puisque la variété M est différentiable, l'application $x \mapsto P(x)$ est différentiable de M dans l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $v = \sum_j v_j \varepsilon_j \in T_x M$, on a donc $\sum_j P_{ij}(x) v_j = v_i$ pour tout i. Les matrices des dérivées $\partial P(x)/\partial x_k$ satisfont aussi à une propriété de symétrie que nous allons détailler. Soit x_o un point quelconque de M et soit $\gamma(t)$ une courbe différentiable tracée sur M issue de x_o. On a donc $\gamma(0) = x_o$ et $v := \gamma'(0) \in T_{x_o} M$. Pour tout t on a ainsi $\sum_j P_{ij}(\gamma(t))\, \gamma'(t)_j = \gamma'(t)_i$. En dérivant par rapport à t on obtient pour tout i, par dérivation composée,

$$\sum_{j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t))\, \gamma'(t)_j\, \gamma'(t)_k + \sum_j P_{ij}(x)\, \gamma''(t)_j = \gamma''(t)_i,$$

et en $t = 0$ on en déduit

$$\sum_{j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o)\, v_j v_k = \gamma''(0)_i - \sum_j P(x_o)_{ij}\, \gamma''(0)_j,$$

formule qui montre que, quelque soit $v \in T_{x_o} M$, le vecteur

$$\sum_i \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o) v_j v_k \Big) \varepsilon_i$$

est dans l'image de $\mathrm{Id} - P(x_o)$, donc est orthogonal à $T_{x_o} M$. Par conséquent, pour tout $w \in T_{x_o} M$, la forme quadratique sur $T_{x_o} M$ définie par

$$Q_w(v, v) = \sum_i w_i \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o) v_j v_k \Big)$$

est nulle. Par polarisation on en déduit que, pour tous $u, v \in T_{x_o} M$, on a $Q_w(u, v) + Q_w(v, u) = 0$. Nous n'utiliserons l'annulation de cette forme tri-linéaire que pour les triplets u, v, w avec $w = v$, ce qui donne

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o) v_i v_j u_k = - \sum_{i,j,k} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_j}(x_o) v_i v_j u_k \tag{16}$$

pour tout $x_o \in M$ et pour tous $u, v \in T_{x_o} M$.

Revenons maintenant aux géodésiques. L'équation des géodésiques signifie que la forme linéaire composée $\xi_{\gamma''(t)} \circ P(\gamma(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est nulle pour tout $t \in I$. On considère sur le fibré cotangent T^*M (défini par (14) et muni de la métrique induite par celle de $(\mathbb{R}^n)^*$) la fonction (*hamiltonien*)

$$H_M(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2_{T^*M}.$$

On peut aussi l'écrire sous la forme

$$H_M(x,\xi) = \frac{1}{2}\|\xi \circ P(x)\|^2_{(\mathbb{R}^n)^*}$$

C'est donc la fonction $(y,\eta) \mapsto \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{(\mathbb{R}^n)^*}$ sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ que l'on induit sur le sous-ensemble T^*M.

Proposition 3.3. *On peut écrire l'équation des géodésiques* (15) *sous la forme du couple d'équations vectorielles de Hamilton*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H_M}{\partial \xi}(x,\xi), \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{\partial H_M}{\partial x}(x,\xi) \end{cases} \tag{17}$$

Démonstration. La difficulté principale de cet énoncé vient de ce qu'il faut interpréter ces équations comme étant des équations sur la sous-variété T^*M et non comme des équations sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, ce qui était le cas à la proposition 1.4 du texte de F. Faure (ce volume).

En considérant une carte locale, il est clair que le vecteur $\partial H_M(x,\xi)/\partial\xi$ n'est autre que ξ. En particulier, par l'identification de T_xM et T_x^*M par $v \mapsto \xi_v = v \bullet$ (produit scalaire avec v), on a $\partial H_M(x,\xi_v)/\partial\xi = v$. Par cette identification on a aussi

$$H_M(x,\xi_v) = \frac{1}{2}\|P(x)(v)\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

L'équation des géodésiques (15) peut se récrire comme un système d'équations portant sur la courbe $(x(t) = \gamma(t), \xi_{\gamma'(t)})$ dans T^*M, pour tout $u \in T_{\gamma(t)}M$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma'(t) = \dfrac{\partial H_M}{\partial \xi}(x, \xi_{\gamma'(t)}), \\ \dfrac{d\xi_{\gamma'(t)}}{dt}(u) = \dfrac{d}{dt}(\xi_{\gamma'(t)} \circ P(\gamma(t))(u)) \\ \qquad = \dfrac{d}{dt}(\gamma'(t) \bullet P(\gamma(t))(u)) \\ \qquad = \gamma''(t) \bullet P(\gamma(t))(u) + \gamma'(t) \bullet \dfrac{d}{dt}P(\gamma(t))(u) \\ \qquad = 0 + \gamma'(t) \bullet \dfrac{d}{dt}P(\gamma(t))(u). \end{cases} \tag{18}$$

Ce dernier terme s'écrit

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)_i \cdot \gamma'(t)_k \cdot u_j. \tag{19}$$

Pour faire apparaître ceci comme une équation de Hamilton, il reste à voir que ce terme s'identifie à $-\partial H_M/\partial x(u)$, en particulier il faut comprendre ce que veut dire cette dérivée partielle en x « à ξ fixé ». Plaçons-nous au voisinage du temps $t = 0$ (par exemple) et identifions tous les T_x^*M avec $T_{\gamma(0)}M$, par l'application $v \in T_{\gamma(0)}M \mapsto \xi_v|_{T_x^*M}$. Une variation de x « à ξ constant » signifiera que l'élément v de $T_{\gamma(0)}M$ reste constant. Calculons alors, en $x_o = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$,

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H_M}{\partial x}(x_o,\xi_v)(u) &= -\sum_k u_k \frac{\partial H_M}{\partial x_k}(x_o,\xi_v)\\ &= -\sum_k u_k \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\|P(x)(v)\|^2_{|x=x_o}\\ &= -\sum_k u_k P(x_o)(v) \bullet \Big(\frac{\partial P}{\partial x_k}(x_o)(v)\Big).\end{aligned}$$

Puisque $v \in T_{x_o}M$, on a $P(x_o)(v) = v$, donc

$$P(x_o)(v) \bullet \Big(\frac{\partial P}{\partial x_k}(x_o)(v)\Big) = \sum_{i,j} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o) v_i v_j,$$

de sorte que, finalement,

$$-\frac{\partial H_M}{\partial x}(x_o,\xi_v)(u) = -\sum_{i,j,k} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}(x_o) \cdot v_i v_j u_k. \tag{20}$$

Par ailleurs, en $t = 0$, (19) s'écrit (en permutant la notation)

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_j}(x_o) \cdot v_i v_j u_k. \tag{21}$$

L'identité voulue (21) = (20) n'est autre que l'identité (16) déjà observée. □

Définition 3.4. Le *flot géodésique* est la famille de difféomorphismes $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}} : T^*M \to T^*M$ telle que, pour tout $(x_0,\xi_0) \in T^*M$, $t \mapsto \phi^t(x_0,\xi_0)$ est la solution du système d'équations différentielles (17) avec $\phi^0(x_0,\xi_0) = (x_0,\xi_0)$.

La propriété de *flot* signifie que

$$\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, et ϕ^0 est l'identité ; ceci provient simplement du fait que $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot des solutions d'une équation différentielle à coefficients indépendants du temps.

Exemple 3.5. Supposons que $M = \mathbb{R}^d$. L'équation (15) s'écrit $\gamma''(t) = 0$, les géodésiques sont donc les droites parcourues à vitesse constante (on omet ici le cas trivial où la vitesse est nulle, et où bien sûr l'image géométrique de la courbe est réduite à un point). Le système (17) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi, \\ \dfrac{d\xi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Le flot géodésique admet donc l'expression très simple

$$\phi^t(x, \xi) = (x + t\xi, \xi).$$

On reconnaît d'ailleurs l'expression que l'on a utilisée dans le cas du tore, après passage au quotient.

Exemple 3.6. Supposons que $M = \mathbb{S}^d$. Les courbes tracées sur $\mathbb{S}^d$, dont l'accélération est normale à $\mathbb{S}^d$, sont des cercles de rayon 1, parcourus à vitesse constante (on omet ici encore le cas trivial où la vitesse est nulle, et où l'image géométrique de la courbe est réduite à un point). Si $x \in \mathbb{S}^d$ et $\xi \neq 0$ est cotangent à $\mathbb{S}^d$ en x, la géodésique issue de (x, ξ) est l'intersection de $\mathbb{S}^d$ avec le plan contenant ξ et passant par l'origine. Sur la sphère, on voit donc que toutes les géodésiques sont des courbes fermées. Les variétés qui ont cette propriété s'appellent *variétés de Zoll.*

Forme volume et structure hilbertienne

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert borné de M. Pour $\varepsilon > 0$, notons $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des points qui sont à distance inférieure à ε de Ω. Pour ε assez petit, pour tout $x \in \Omega^\varepsilon$, il existe un unique $y \in M$ tel que $x - y \perp T_y M$ (si M est un sous-espace affine, y est le projeté orthogonal de x sur M, et si M est une sous-variété quelconque, cela se démontre grâce au théorème des fonctions implicites). On notera $y = P_M x$.

Soit f une fonction $M \to \mathbb{R}$, continue à support compact contenu dans Ω. Considérons la fonction $f_0 = f \circ P_M$ sur Ω^ε. On peut montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-(n-d)} \int_{\Omega^\varepsilon} f_0 d\ell^n$$

existe (avec $d\ell^n = dx_1 \cdots dx_n$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle). Cette limite est notée

$$\int_M f(y) d\,\mathrm{Vol}(y),$$

et $d\,\mathrm{Vol}(y)$ s'appelle la mesure de volume riemannien sur M (dans le cas où M est une sphère, cet objet a été noté $d\sigma_d$ plus haut).

On introduit le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_M \overline{f(x)} g(x) d\,\mathrm{Vol}(x)$$

et la norme associée,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}\,.$$

Le complété de $C^0(M)$ pour cette norme est noté $L^2(M)$, c'est un espace de Hilbert.

Laplacien

Il existe un unique opérateur différentiel Δ_M d'ordre 2 sur M tel que

$$\int_M \Delta_M f(x) g(x) d\,\mathrm{Vol}(x) = -\int_M \nabla f(x) \bullet \nabla g(x)\, d\,\mathrm{Vol}(x)$$

pour toutes fonctions f, g sur M, de classe C^2 et nulles en dehors d'un compact de M. On l'appelle le *laplacien* sur M ou *opérateur de Laplace-Beltrami*. La preuve de l'existence et de l'unicité peut se faire en calculant l'expression de Δ_M dans des cartes. Plus intuitivement, le laplacien peut aussi être défini ainsi : si f est à support compact, on pose $f_0 = f \circ P_M$, fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\Delta_M f$ est défini comme la restriction à M de la fonction $\Delta_{\mathbb{R}^n} f_0$.

Si f n'est pas à support compact, on peut définir en chaque $x \in M$ la valeur $\Delta_M f(x)$ comme étant $\Delta_M(\chi f)(x)$, où χ est une fonction C^∞ à support compact, constante égale à 1 au voisinage de x.

Théorème de diagonalisation du laplacien

Le théorème de diagonalisation du laplacien, que l'on a énoncé sur le tore et sur la sphère, en donnant explicitement les valeurs propres et les vecteurs propres, s'étend à toute variété compacte (voir, par exemple, [Eva10]) :

Théorème 3.7. *Soit M une variété riemannienne compacte. Alors les valeurs propres ordonnées de $-\Delta_M$ forment une suite (λ_n) de réels* *positifs tendant vers $+\infty$. De plus, il existe une famille $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de $-\Delta_M$ qui forme une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(M)$ (de manière équivalente, les combinaisons linéaires finies des $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont denses dans $C^0(M)$).*

3.2. Le théorème d'ergodicité quantique pour les fonctions propres du laplacien

Dans le théorème ci-dessous, on note

$$N(E) = \#\{n \mid \lambda_n \leqslant E\}$$

le nombre de valeurs propres de Δ_M inférieures à E, comptées avec leur multiplicité. Pour $x \in M$, on note $S_x^*M \subset T_x^*M$ la sphère unité,

$$S_x^*M = \{\xi \in T_x^*M \mid \|\xi\| = 1\}$$

et $d\sigma_x$ la mesure de volume sur la sphère S_x^*M. À partir de maintenant on normalise $d\,\mathrm{Vol}(x)$ et $d\sigma_x$ en les multipliant par des constantes positives, choisies de sorte que

$$\int_M d\,\mathrm{Vol}(y) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{S_x^*M} d\sigma_x(\omega) = 1$$

pour tout x. La mesure $d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$ $(x \in M, \omega \in S_x^*M)$, appelée mesure de Liouville, est la mesure uniforme sur les couples (x,ω).

Théorème 3.8 **([Šni74, Zel87, CdV85]).** *Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$.

Soit $a \in C_c^\infty(T^*M)$. ***Supposons le flot géodésique ergodique****. Alors*

$$\lim_{E\to+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{\substack{n\\ \lambda_n\leqslant E}} \Big| \langle \phi_n, \mathrm{Op}_{E^{-1/2}}(a)\phi_n\rangle - \int_{x\in M,\omega\in S_x^*M} a(x, E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)\Big|^2 = 0.$$

L'hypothèse absolument cruciale de ce théorème est l'ergodicité du flot géodésique ; nous définirons ce terme dans un instant (rappelons aussi que des exemples de flots ergodiques ont été introduits dans le texte de F. Faure, au § 2, dans ce volume). Mais auparavant, essayons de donner à cet énoncé une allure un peu plus sympathique. Pour cela, pour $\delta > 0$ fixé, on peut appliquer le théorème à une fonction $\widetilde{a}$, à support dans l'ensemble

$$\{(x,\xi) \mid x \in M, \xi \in T_x^*M, \|\xi\| \in [1/2 - 2\delta, 3/2 + 2\delta]\},$$

et qui vérifie la propriété

$$\widetilde{a}(x, t\omega) = a(x, \omega)$$

pour tout $t \in [1/2 - \delta, 3/2 + \delta]$ et ω de norme 1. Remarquons que les expressions se simplifient un peu :

$$\int \widetilde{a}(x, E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\omega) d\,\mathrm{Vol}(x) d\sigma_x(\omega) = \int a(x,\omega) d\,\mathrm{Vol}(x) d\sigma_x(\omega)$$

dès que $E^{-1/2}\lambda_n^{1/2} \in [1/2 - \delta, 3/2 + \delta]$, et on pourrait montrer que

$$\langle \phi_n, \mathrm{Op}_{E^{-1/2}}(\widetilde{a})\phi_n\rangle = \langle \phi_n, \mathrm{Op}_{\lambda_n^{-1/2}}(a)\phi_n\rangle + o(1)$$

dès que $E^{-1/2}\lambda_n^{1/2} \in [1/2, 3/2]$. Ainsi le théorème admet la variante suivante, peut-être plus agréable à lire :

Théorème 3.9 **([Šni74, Zel87, CdV85]).** *Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n,$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$.

Soit $a \in C_c^\infty(T^*M)$. Supposons le flot géodésique ergodique. Alors

$$\lim_{E\to+\infty} \frac{1}{N(3E/2) - N(E/2)} \sum_{\substack{n \\ E/2 \leqslant \lambda_n \leqslant 3E/2}} \Big| \Big\langle \phi_n, \mathrm{Op}_{\lambda_n^{-1/2}}(a)\phi_n \Big\rangle - \int_{\substack{x\in M \\ \omega \in S_x^*M}} a(x,\omega) d\,\mathrm{Vol}(x) d\sigma_x(\omega)\Big|^2 = 0. \tag{22}$$

Comme cas particulier, en appliquant le théorème 3.9 à des symboles du type $a(x)\chi(\|\xi\|^2)$, on obtient :

Théorème 3.10. *Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n,$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$.

Soit $a \in C^\infty(M)$. Supposons le flot géodésique ergodique. Alors
$$\lim_{E\to+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{\substack{n \\ \lambda_n \leqslant E}} \Big| \langle \phi_n, a\phi_n\rangle - \int_M a(x) d\operatorname{Vol}(x)\Big|^2 = 0.$$

Nous définirons ici l'ergodicité par l'égalité (presque sûre) des moyennes temporelles et spatiales : pour $(x,\xi) \in T^*M$ et $T > 0$, définissons
$$\langle a\rangle_T(x,\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T a(\phi^t(x,\xi))dt.$$
On dira que le flot géodésique est ergodique si, pour *Lebesgue presque tout* $(x_0,\xi_0) \in T^*M$, et pour toute fonction a continue sur T^*M, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \langle a\rangle_T(x_0,\xi_0) = \int_{\substack{x\in M \\ \omega\in S_x^*M}} a(x, \|\xi_0\|\omega) d\operatorname{Vol}(x) d\sigma_x(\omega). \tag{23}$$

On remarque que l'intégrale (23) porte sur les vecteurs de même vitesse que la condition initiale ξ_0, ce qui est naturel puisque les trajectoires de ϕ^t sont à vitesse constante.

On parle d'*unique ergodicité* quand l'identité (23) est valable pour *tous* les (x_0,ξ_0) tels que $\xi_0 \neq 0$. Cependant l'étude d'exemples montre que cette propriété plus forte n'est pas aussi intéressante qu'il n'y paraît : les systèmes dynamiques dits *chaotiques*, qui nous intéressent ici en premier lieu, ne sont pas uniquement ergodiques car ils possèdent une infinité de trajectoires périodiques.

La preuve du théorème 3.8 est à peu près identique à celle du théorème 1.4 une fois que l'on parle le langage des variétés. Contentons-nous d'en rappeler les principaux ingrédients. Ce sont les règles du calcul pseudo-différentiel qu'il faut adapter aux variétés, en particulier :

- le théorème d'Egorov reliant le laplacien Δ_M et le flot géodésique :

$$e^{it\boldsymbol{H}/\hbar} \operatorname{Op}_\hbar(a) e^{-it\boldsymbol{H}/\hbar} = \operatorname{Op}_\hbar(a\circ\phi^t) + O_t(\hbar), \tag{24}$$

où $\boldsymbol{H} = -\hbar^2\Delta/2$.

- le calcul fonctionnel : plus précisément, le fait que l'opérateur $\chi(-\hbar^2\Delta_M)$, défini par
$$\chi(-\hbar^2\Delta_M)\phi_n = \chi(\hbar^2\lambda_n)\phi_n,$$
pour $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, est un opérateur pseudo-différentiel qui coïncide avec $\operatorname{Op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))$ à $O(\hbar)$ près.

Remarquons la dépendance du reste $O_t(\hbar)$ dans le théorème d'Egorov. Dans le cadre euclidien, cette dépendance était linéaire $O_t(\hbar) = O(|t|\hbar)$. Sur une variété compacte quelconque, il faut plutôt s'attendre à une dépendance exponentielle, $O_t(\hbar) = O(e^{\lambda|t|}\hbar)$, où $\lambda > 0$ est un *exposant de Lyapounov* qui mesure la sensibilité aux conditions initiales des solutions de l'équation des géodésiques (17). Cette dépendance exponentielle ne pose aucun problème dans notre preuve, car nous commençons par considérer la limite $\hbar \to 0$ à t fixé. Cependant, dès que l'on veut attaquer des questions plus fines, telles que la vitesse de convergence vers 0 dans le théorème d'ergodicité quantique, ou l'*unique ergodicité quantique* abordée plus bas, la dépendance exponentielle en temps des restes est un problème majeur.

On utilise encore les points suivants :

• Si $a \in C_c^\infty(T^*M)$, alors $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et on a

$$\|\mathrm{Op}_\hbar(a))\|_{\mathrm{HS}}^2 \sim_{\hbar\to 0} (2\pi\hbar)^{-d} \int_{T^*M} |a(x,\xi)|^2 d\,\mathrm{Vol}(x) d\ell_x(\xi), \tag{25}$$

où ℓ_x est la mesure de Lebesgue sur T_x^*M.

• (Loi de Weyl)

$$N(E) \sim_{E\to+\infty} (2\pi)^{-d}\,\mathrm{Vol}(M)\,\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^d}(B(0,1))E^{d/2}.$$

La loi de Weyl peut être obtenue comme corollaire de la formule (25), appliquée à $\mathrm{Op}_\hbar(a) = \chi^2(-\hbar^2\Delta)$, avec $\hbar = E^{-1/2}$, et en raisonnant comme dans la remarque 1.3.

Une fois ces ingrédients réunis, la preuve des théorèmes 3.8 ou 3.9 est identique à celle du théorème 1.4, à ceci près qu'elle s'applique à des fonctions a dépendant à la fois de x et de ξ, parce que l'on a supposé l'ergodicité du flot géodésique (qui n'était pas vérifiée dans le cas du tore).

Remarque 3.11. On peut voir assez facilement qu'un énoncé tel que celui du théorème 3.9 est impossible sur le tore. Ceci est lié au fait que le laplacien commute avec les opérateurs $\partial/\partial x_j$ ($j = 1,\dots,d$). Considérons la base des fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ($e_k(x) = e^{ik\bullet x}$), qui sont en fait des fonctions propres communes à tous les opérateurs $\partial/\partial x_j$ ($j = 1,\dots,d$). Les valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$ sont les $\lambda_n = \|k\|^2$, et donc $\lambda_n^{-1/2} = \|k\|^{-1}$. Comme $\mathrm{Op}_\hbar(a)e_k(x) = a(x,\hbar k)e_k(x)$, on constate que l'on a la formule exacte

$$\begin{aligned}\langle e_k, \mathrm{Op}_{\|k\|^{-1}}(a(x,\xi))e_k\rangle &= \left\langle e_k, \mathrm{Op}_{\|k\|^{-1}}(a(x,k/\|k\|))e_k\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} a\left(x, k/\|k\|\right) dx.\end{aligned}$$

On n'a aucune chance de trouver une suite de vecteurs k_l tels que

$$\int_{\mathbb{T}^d} a\left(x, k_l/\|k_l\|\right) dx \longrightarrow \int a(x,\omega)dxd\sigma_x(\omega)$$

pour toute fonction a, où $\sigma_x = \sigma_{d-1}$ est la mesure de volume $(d-1)$-dimensionnel sur $\mathbb{S}^{d-1}$. En effet, dès que $k_l/\|k_l\| \to k_\infty \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a $\int_{\mathbb{T}^d} a(x, k_l/\|k_l\|)dx \to \int_{\mathbb{T}^d} a(x,k_\infty)dx$.

Cette remarque est aussi valable pour le laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^d$. On remarque que $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ commute avec tous les opérateurs $\boldsymbol{J}_{kl} = \frac{1}{i}\left(x_l\partial/\partial x_k - x_k\partial/\partial x_l\right)$ $(k,l = 1,\ldots,d+1,\ k\neq l)$. Ces opérateurs sont ceux qui engendrent les rotations, au sens suivant : prenant par exemple $(k,l) = (1,2)$, pour une fonction a de classe C^1, on a

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{J}_{12}a(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{d+1}) \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial\theta}|_{\theta=0}a(\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3,\ldots,x_{d+1}).\end{aligned}$$

L'opérateur $\boldsymbol{J}_{12}$ est celui qui correspond à l'observable classique

$$J_{12}(x,\xi) = x_2\xi_1 - x_1\xi_2 \quad (x = (x_1,\ldots,x_{d+1}),\ \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_{d+1})).$$

Prenons alors pour (ϕ_n) une suite de fonctions propres communes à $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ et à $\boldsymbol{J}_{12}$:

$$-\Delta_{\mathbb{S}^d}\phi_n = \lambda_n\phi_n, \qquad \boldsymbol{J}_{12}\phi_n = \mu_n\phi_n.$$

On montre que $\mu_n/\sqrt{\lambda_n}$ est une quantité bornée, à partir du fait que la fonction $(x,\xi)\mapsto J_{12}(x,\xi)/\|\xi\|$ est bornée pour $x\in\mathbb{S}^d$, $\xi\in T_x^*\mathbb{S}^d$. Ainsi, en extrayant une sous-suite, on peut supposer que $\mu_n/\sqrt{\lambda_n}$ a une limite quand $n\to+\infty$.

Par ailleurs, si a et b sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de l'ensemble

$$\left\{(x,\xi) \mid \|\xi\| = 1, J_{12}(x,\xi) = \mu_n/\sqrt{\lambda_n}\right\},$$

on montre pour la suite (ϕ_n) introduite ci-dessus que

$$\langle\phi_n, \mathrm{Op}_{\lambda_n^{-1}}(a)\phi_n\rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \langle\phi_n, \mathrm{Op}_{\lambda_n^{-1}}(b)\phi_n\rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)} + o(1)_{n\to+\infty}.$$

Ceci suffit à conclure qu'on ne peut pas extraire de sous-suite telle que

$$\langle \phi_n, \mathrm{Op}_{\lambda_n^{-1}}(a)\phi_n\rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)} \longrightarrow \int a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$$

pour tout a.

4. La conjecture d'unique ergodicité quantique

4.1. Énoncé de la conjecture et des résultats de Lindenstrauss

Grâce à l'argument déjà utilisé pour démontrer le corollaire 1.5 dans le cas du tore, le théorème 3.9 peut se reformuler en disant qu'il existe un sous-ensemble $S \subset \mathbb{N}$ tel que

- $\dfrac{\#\{n \in S \mid \lambda_n \leqslant E\}}{N(E)} \underset{E\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
- Si l'on pose $h_n = \lambda_n^{-1/2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty, n\in S} \langle \phi_n, \mathrm{Op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \int_{\substack{x\in M\\ \omega\in S_x^*M}} a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega).$$

Un procédé d'extraction diagonale permettrait en fait de choisir l'ensemble S indépendant de la fonction a.

Une question tout-à-fait naturelle est de savoir si

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \phi_n, \mathrm{Op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \int a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega) \tag{26}$$

pour tout a (sans avoir à extraire de sous-suite), ou, au contraire, s'il existe des suites croissantes d'entiers (n_k) telles que $\langle \phi_{n_k}, \mathrm{Op}_{h_{n_k}}(a)\phi_{n_k}\rangle$ converge vers une limite autre. Il est certain que la réponse dépend des caractéristiques géométriques de la variété M, et en particulier de propriétés du flot géodésique plus fines que l'ergodicité, mais on est loin d'une compréhension satisfaisante de cette question.

On parle d'*unique ergodicité quantique* si la limite (26) a lieu sans avoir à extraire de sous-suite. Selon la conjecture de Rudnick et Sarnak (*conjecture d'unique ergodicité quantique*), cette propriété devrait être satisfaite quand M est une variété compacte de courbure négative [RS94]. L'intuition sur laquelle s'appuie cette conjecture ? Ce seraient les très fortes propriétés de mélange du flot géodésique (voir le § 2.2 du texte de F. Faure, dans ce volume) qui empêcheraient les fonctions d'ondes de se localiser dans de petites régions de l'espace des phases. Cet argument reste vague : le problème est que la propriété d'Egorov (24), qui fait le lien entre la dynamique quantique et le flot géodésique, n'est pas uniforme en temps, et que l'utilisation de la propriété de mélange nécessiterait l'interversion des deux limites $h \to 0$ et $t \to +\infty$.

Tout le monde n'est en fait pas convaincu de la validité de cette conjecture, qui reste ouverte à l'heure actuelle. Une avancée importante est due à Elon Lindenstrauss (médaille Fields 2010) dans le cas des *surfaces de congruences arithmétiques* [Lin06]. C'est ce cas particulier de la conjecture qui avait motivé Rudnick et Sarnak, spécialistes de théorie analytique des nombres plutôt que de systèmes dynamiques et d'équations aux dérivées partielles.

Nous nous contenterons d'évoquer superficiellement les travaux de Lindenstrauss [Lin06], qui utilisent des techniques tout autres que l'analyse micro-locale développée dans ce texte. Ceci illustre bien la richesse de ce sujet, motivé par la mécanique quantique et situé à la confluence de domaines très variés des mathématiques. Les surfaces de congruences arithmétiques sont des surfaces de courbure constante -1, obtenues en quotientant le *demi-plan de Poincaré* par des groupes d'isométries très particuliers, construits à partir d'algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$ (on renvoie au livre récent de N. Bergeron [Ber11] pour la construction explicite, et pour une introduction plus détaillée aux techniques utilisées par Lindentrauss). Ces surfaces arithmétiques peuvent être compactes ou non compactes (c'est le cas notamment de la surface modulaire). Dans ce texte, nous avons traité uniquement le cas des variétés compactes, mais les questions se posent aussi, avec des difficultés différentes, dans le cas non compact.

Les surfaces arithmétiques présentent la particularité de posséder une famille dénombrable d'opérateurs *de Hecke* (T_p), indexée par les nombres premiers p, agissant sur $L^2(M)$ de façon auto-adjointe, qui commutent entre eux ainsi qu'avec Δ_M. L'opérateur T_p est en fait le laplacien associé à la structure p-adique sur M qui vient de sa construction arithmétique. Tous ces opérateurs commutant entre eux, on peut restreindre l'étude de l'ergodicité quantique aux fonctions propres communes à toute la famille. C'est pour de telles fonctions propres que Lindenstrauss a démontré (26) (c'est ce qu'on appelle l'*unique ergodicité quantique arithmétique*). Plus récemment, Brooks et Lindenstrauss ont affaibli les hypothèses en supposant simplement que les ϕ_n sont fonctions propres de Δ_M et d'un seul opérateur T_p.

Ceci pose de nouveau la question de la multiplicité des valeurs propres de Δ_M. Si la multiplicité est 1, toute fonction propre de Δ_M est automatiquement fonction propre des opérateurs de Hecke, et il n'est pas restrictif de considérer des fonctions propres communes. Mais si la multiplicité des valeurs propres n'est pas bornée, on peut imaginer qu'en changeant de base de fonctions propres on observe un comportement différent de la limite (26). La meilleure borne connue sur la multiplicité est

$$m(\lambda) = O\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\log \lambda}\right),$$

borne générale pour les surfaces de courbure négative ; pour les surfaces arithmétiques on ne sait guère mieux.

Le lecteur intéressé par le cas des surfaces de courbure négative, et tout particulièrement par les aspects arithmétiques, pourra consulter les articles de survol [Sar03, Sar11] de Peter Sarnak.

4.2. Résultats plus généraux

Soit M une variété riemannienne compacte, et soit (ϕ_n) une suite de fonctions propres de Δ_M, normalisées dans $L^2(M)$. Un argument de compacité permet d'affirmer, quitte à extraire une sous-suite, que la limite de $\langle \phi_{n_k}, \mathrm{Op}_{h_{n_k}}(a)\phi_{n_k}\rangle$ existe pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$ et qu'elle est de la forme

$$\int a(x,\omega)\mu(dx,d\omega),$$

où μ est une mesure de probabilité sur

$$S^*M = \{(x,\omega) \mid x \in M, \omega \in S_x^*M\}.$$

Dans la littérature, ces mesures μ sont désignées, selon les auteurs, par le terme de *mesures semi-classiques*, *mesures de Wigner*, *mesures de défaut*, *limites quantiques* associées à la suite de fonctions propres (ϕ_{n_k}). Certaines de leurs propriétés ont été discutées au § 4.3 du texte de C. Fermanian (ce volume).

Le théorème d'Egorov, associé à la remarque selon laquelle

$$\langle \phi_n, \mathrm{Op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \langle \phi_n, e^{-ith_n\Delta_M/2}\,\mathrm{Op}_{h_n}(a)e^{ith_n\Delta_M/2}\phi_n\rangle$$

pour tout t, implique que

$$\int a \circ \phi^t(x,\omega)\mu(dx, d\omega) = \int a(x,\omega)\mu(dx, d\omega)$$

pour tout a et pour tout t. Autrement dit, le mesure μ est *invariante* par transport par le flot géodésique. Selon la conjecture d'unique ergodicité quantique, sur une variété compacte de courbure négative, la seule mesure μ qu'on puisse obtenir de la sorte est la mesure uniforme, $d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$. Mais sans nécessairement chercher à démontrer la conjecture, on peut simplement vouloir comprendre certaines propriétés de ces mesures μ. Par exemple, il y a beaucoup de géodésiques périodiques, est-ce que μ peut-être concentrée sur une telle géodésique ? Cette question, qui reste bien en deçà de la conjecture d'unique ergodicité quantique, était ouverte jusqu'en 2005.

Les travaux de Anantharaman et Nonnenmacher [Ana08, AN07] démontrent que l'*entropie de Kolmogorov-Sinai* d'une telle mesure μ est nécessairement non nulle, ce qui a pour conséquence que μ ne peut pas être concentrée sur un ensemble de dimension de Hausdorff 1. Par exemple, μ ne peut pas être concentrée sur une géodésique périodique (notre résultat donne en fait une borne inférieure explicite sur la dimension du support de μ).

Dans son texte, F. Faure a exposé le modèle du *chat*(2) qui constitue le prototype du système dynamique chaotique ; du point de vue de la dynamique classique, ce système partage beaucoup de propriétés avec le flot géodésique des variétés de courbure négative : la principale différence réside dans le fait que c'est un modèle à temps discret, alors que le flot géodésique est un modèle à temps continu. Afin de tester les conjectures sur un modèle simple, plusieurs auteurs ont construit une version quantique du *chat* et ont montré une version du théorème d'ergodicité quantique dans ce cas (voir par exemple [BDB96]). Faure, Nonnenmacher et De Bièvre [FNDB03] ont démontré que, pour ce modèle, la conjecture d'unique ergodicité quantique n'est pas satisfaite : ils ont pu exhiber des suites de fonctions propres explicites dont la répartition asymptotique n'est pas donnée par la mesure uniforme. Il est intéressant de constater que, sur ces contre-exemples, la

(2)Ce nom fantaisiste n'a rien à voir avec l'expérience du chat de Schrödinger. Il vient d'un dessin paru dans le livre d'Arnold et Avez [AA67], qui représente l'action de ce système dynamique sur une tête de chat.

mesure μ possède une entropie qui est exactement la borne inférieure du théorème de Anantharaman-Nonnenmacher [AN07].

Finalement, comment concilier le contre-exemple de Faure, Nonnenmacher et De Bièvre [FNDB03] et l'envie de croire à la conjecture de Rudnick et Sarnak ? On peut dire que la construction du modèle quantique du *chat* paraît un peu spéciale, et croire que la conjecture est valable pour des systèmes *génériques*, ce qui autorise des exceptions un peu spéciales.

4.3. Retour sur le cas du tore

Résumons la situation : sur la sphère on a une suite de fonctions propres qui se concentre sur l'équateur. Sur une surface de courbure négative une suite de fonctions propres ne peut pas se concentrer complètement sur une géodésique fermée [AN07], et sur le tore une suite de fonctions propres ne peut pas se concentrer du tout sur une géodésique fermée.

Pour revenir au le cas du tore traité au § 1, on rappelle qu'on a énoncé un théorème de type *ergodicité quantique*, valable seulement pour des observables $a(x)$ (théorème 1.4). Ce théorème nous donne un comportement limite pour « la plupart » des fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$. On peut à côté de cela poser la question de la description du comportement asymptotique de suites *quelconques* de fonctions propres : soit (ϕ_n) une suite quelconque de fonctions propres, vérifiant donc $\Delta_{\mathbb{T}^d}\phi_n = -\lambda_n\phi_n$, $\lambda_n \to +\infty$, normalisées de sorte que $\int_{\mathbb{T}^d} |\phi_n(x)|^2 dx = 1$. Un argument de compacité permet de trouver une suite croissante d'entiers n_k, et une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{T}^d$, tels que

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \phi_{n_k}, a\phi_{n_k}\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} a(x)d\nu(x)$$

pour toute fonction $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$. Que peut-on dire d'une telle mesure ν ? est-ce que ν est nécessairement la mesure uniforme dx ?

La réponse est non : il suffit pour le voir de considérer des fonctions propres de la forme

$$\phi(x) = \frac{e^{ik\bullet x} + e^{i(k-m)\bullet x}}{\sqrt{2}}$$

avec m fixé, $\|k\| \to +\infty$, $\|k\| = \|k-m\|$ (par exemple, si l'on choisit k dont la première coordonnée est 1, ces relations sont vérifiées avec

$m = (2, 0, 0, \ldots, 0))$. On a $|\phi(x)|^2 = 1 + \cos(m \bullet x)$ qui ne dépend pas de k, et donc la mesure ν correspondant à une telle famille est $d\nu(x) = (1 + \cos(m \bullet x))dx$.

Bourgain et Jakobson [Jak97] ont démontré plus généralement qu'une telle mesure ν avait nécessairement une densité,

$$d\nu(x) = \rho(x)dx,$$

où ρ est une fonction positive d'intégrale 1. De plus, si l'on note $\widehat{\rho}(k)$ les coefficients de Fourier de ρ, on a

$$\sum_k |\widehat{\rho}(k)|^{d-2} < +\infty.$$

Ainsi, en dimension $d = 2$, ρ est un polynôme trigonométrique, en dimension $d = 3$, ρ est une fonction continue... De plus, un résultat de Jaffard dit que $\int_\Omega \rho(x)dx > 0$ pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{T}^d$. Ces résultats reposent sur la décomposition en série de Fourier (2) et une étude fine des propriétés des points entiers sur les sphères. Les articles [Mac10, AM14] donnent une nouvelle preuve de ces résultats, qui s'appuie sur l'analyse micro-locale.

En dimension $d = 2$, il est assez aisé de démontrer l'existence d'une densité $\rho \in L^2(\mathbb{T}^d)$ telle que $d\nu(x) = \rho(x)dx$. Nous donnons ci-dessous l'argument, dû à Zygmund [Zyg74]. Repartons de l'expression (2) des fonctions propres :

$$f(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|k\|^2 = \lambda}} c_k e^{ik \bullet x}, \tag{27}$$

avec ici $d = 2$. On a alors

$$|f(x)|^2 = \sum_{\substack{k, m \in \mathbb{Z}^2 \\ \|k\|^2 = \|m\|^2 = \lambda}} \overline{c_k} c_m e^{i(m-k) \bullet x}.$$

Rappelons la notation

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et introduisons aussi

$$\|f\|_4 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^4 dx \right)^{1/4} = \||f|^2\|_2^{1/2}.$$

On a

$$\|f\|_4^4 = \||f|^2\|_2^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \Big| \sum_{\substack{(k,m)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2 \\ m-k=j \\ \|k\|^2=\|m\|^2=\lambda}} \overline{c_k} c_m \Big|^2$$

en appliquant la formule de Parseval à la fonction $x \mapsto |f(x)|^2$. Or, on remarque qu'à $j \neq 0$ donné, l'ensemble

$$\{(k,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \mid m-k=j,\ \|k\|^2 = \|m\|^2 = \lambda\}$$

a au plus deux éléments, et ceci quel que soit λ. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\|f\|_{L^4}^4 \leqslant \Big| \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2 \\ \|k\|^2=\lambda}} \overline{c_k} c_k \Big|^2 + 2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{0\}} \sum_{\substack{(k,m)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2 \\ m-k=j \\ \|k\|^2=\|m\|^2=\lambda}} |\overline{c_k} c_m|^2,$$

le premier terme provenant du cas $j = 0$. Enfin, toujours par Parseval

$$\Big| \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2 \\ \|k\|^2=\lambda}} \overline{c_k} c_k \Big|^2 = \|f\|_{L^2}^4$$

et $$2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{0\}} \sum_{\substack{(k,m)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2 \\ m-k=j \\ \|k\|^2=\|m\|^2=\lambda}} |\overline{c_k} c_m|^2 \leqslant 2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |c_k|^2\Big)^2 = 2\|f\|_{L^2}^4.$$

On a ainsi prouvé que, pour toute fonction propre f du laplacien sur $\mathbb{T}^2$, on a

$$\|f\|_4^4 \leqslant 3\|f\|_2^4.$$

Supposons, comme d'habitude, que (ϕ_n) est une suite de fonctions propres normalisées dans L^2 : $\|\phi_n\|_{L^2} = 1$. Les fonctions $(|\phi_n|^2)$ sont alors elles-mêmes de norme L^2 inférieure à $3^{1/4}$, de sorte que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Big| \int_{\mathbb{T}^2} a(x)|\phi_n(x)\Big|^2 dx| \leqslant 3^{1/4} \Big(\int_{\mathbb{T}^2} |a(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

pour toute fonction a continue. Ainsi, si

$$\int_{\mathbb{T}^2} a(x)|\phi_n(x)|^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^2} a(x) d\nu(x),$$

où ν est une mesure positive sur $\mathbb{T}^2$, on obtient par passage à la limite l'inégalité

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} a(x)d\nu(x)\right| \leqslant 3^{1/4}\left(\int_{\mathbb{T}^2} |a(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

pour toute fonction a continue. Ceci implique (théorème de Riesz) qu'il existe une fonction ρ telle que $d\nu(x) = \rho(x)dx$, qui vérifie de plus

$$\int_{\mathbb{T}^2} |\rho(x)|^2 dx \leqslant 3^{1/2}.$$

La preuve du résultat de Bourgain et Jakobson [Jak97], selon lequel ρ est en fait un polynôme trigonométrique, passe par des arguments de théorie des nombres autrement plus élaborés.

4.4. Le stade

Terminons par quelques images de fonctions propres du *stade*, sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé d'un rectangle auquel on accole deux demi-disques. Pour les ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$, dont le bord est suffisamment régulier (et plus généralement, pour les variétés riemanniennes compactes *à bord*), le théorème 3.7 de diagonalisation reste valable, mais il faut imposer une condition aux limites. Les plus courantes sont la condition de Dirichlet,

$$\phi_n|_{\partial M} = 0$$

(on demande aux fonctions de s'annuler sur le bord de M) ou la condition de Neumann

$$\partial_\nu \phi_n|_{\partial M} = 0$$

(on demande à la dérivée normale de s'annuler sur le bord de M).

Le théorème d'ergodicité quantique 3.9 a été étendu à cette situation par Gérard et Leichtnam [GL93]. Pour un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le flot géodésique est le flot géodésique euclidien $((x,\xi) \mapsto (x+t\xi,\xi))$ tant que la trajectoire ne touche pas le bord. Quand elle touche le bord, elle se réfléchit à angle égal : c'est ce qu'on appelle en mathématiques un *billard*. Des exemples de billards ergodiques, les billards dispersifs, ont été décrits au § 2.1 du texte de F. Faure (ce volume). Le billard en forme de stade n'est pas dispersif, néanmoins Sinai et Bunimovich ont pu démontrer à la fin des années 70 qu'il était ergodique. Ainsi, le théorème 3.9 s'y applique.

!htb

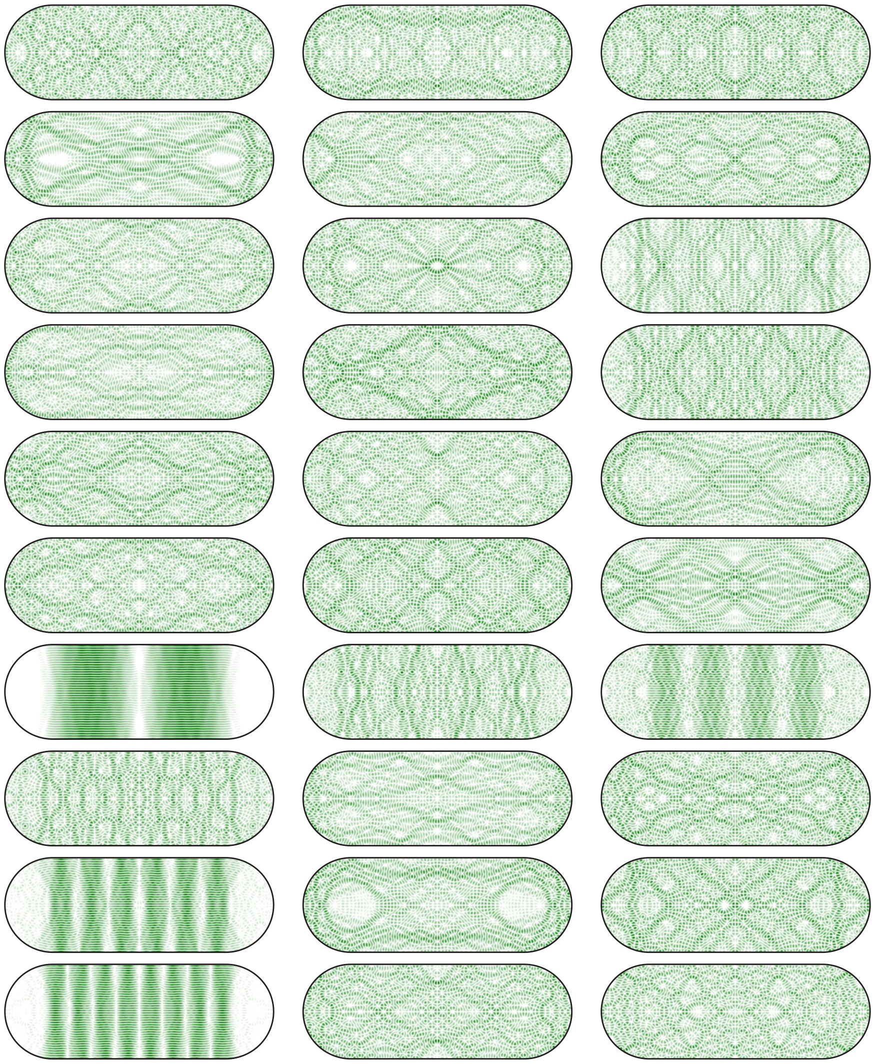

FIGURE 1. Représentation de $|\phi_n(x,y)|^2$ pour le stade avec symétrie impaire, pour 30 valeurs propres consécutives à partir de $n = 758$. Illustration produite par Arnd Bäcker.

Les images de la figure 1 ont été créées par Arnd Bäcker. Elles montrent trente fonctions propres impaires successives du stade (avec condition de Dirichlet), à partir de la 758ème valeur propre. En couleurs foncées, les endroits où le module de la fonction propre est grand, en couleurs claires, là où il est petit. On y vérifie effectivement (du moins, visuellement) la conclusion du théorème 3.9 : la plupart des fonctions propres présentent une coloration à peu près uniforme. Cependant, il semble que l'on n'ait pas *unique ergodicité quantique* : certaines fonctions propres, rares certes, mais apparemment persistantes pour des fréquences arbitrairement grandes, ne présentent pas une distribution uniforme.

De manière surprenante (pour une géométrie aussi simple !), ceci est très difficile à démontrer, et ne l'est pas encore tout à fait à l'heure actuelle. Précisons qu'il n'est pas possible, même pour un exemple aussi simple, de calculer explicitement valeurs propres et fonctions propres. Il a fallu attendre 2008 pour le seul résultat rigoureux sur l'absence d'unique ergodicité quantique sur le stade. À cette date, Andrew Hassell a démontré qu'effectivement, il existe une suite de fonctions propres dont la distribution asymptotique n'est pas uniforme [Has10]. Mais il ne le démontre que pour *presque tout stade*. Qu'est-ce que cela veut dire ? Si l'on fixe le diamètre des demi-disques à 1, on peut encore faire varier l'autre longueur ℓ du rectangle. On a donc en fait toute une famille de stades. Hassell ne démontre son résultat que pour ℓ *en dehors d'un ensemble de mesure nulle* de $\mathbb{R}^+$ (non explicite toutefois). Cela veut dire que son résultat est démontré pour l'immense majorité des stades, mais que je ne peux pas vous dire s'il s'applique pour $\ell = 3$.

On renvoie à l'article en ligne [AB13] pour plus d'images.

Références

[Ana08] N. Anantharaman – « Entropy and the localization of eigenfunctions », *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), no. 2, p. 435–475.

[AB13] N. Anantharaman & A. Bäcker – « Quantum ergodicity and beyond – with a gallery of pictures », *IAMP News Bulletin* (April 2013).

[AM14] N. Anantharaman & F. Macià – « Semiclassical measures for the Schrödinger equation on the torus », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16** (2014), no. 6, p. 1253–1288.

[AN07] N. Anantharaman & S. Nonnenmacher – « Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), no. 7, p. 2465–2523.

[AA67] V. I. Arnold & A. Avez – *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, No. 9, Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1967.

[BG92] M. Berger & B. Gostiaux – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2e éd., Presses Universitaires de France, Paris, 1992.

[Ber11] N. Bergeron – *Le spectre des surfaces hyperboliques*, Savoirs Actuels, EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2011.

[BDB96] A. Bouzouina & S. De Bièvre – « Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus », *Comm. Math. Phys.* **178** (1996), no. 1, p. 83–105.

[Eva10] L. C. Evans – *Partial differential equations*, 2e éd., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[Far08] J. Faraut – *Analysis on Lie groups. An introduction*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 110, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[FNDB03] F. Faure, S. Nonnenmacher & S. De Bièvre – « Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods », *Comm. Math. Phys.* **239** (2003), no. 3, p. 449–492.

[GL93] P. Gérard & É. Leichtnam – « Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 2, p. 559–607.

[Has10] A. Hassell – « Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, p. 605–619.

[Hej76] D. A. Hejhal – *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2, R)$*. Vol. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 548, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[Hux02] M. N. Huxley – « Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function », in *Number theory for the millennium, II (Urbana, IL, 2000)*, A K Peters, Natick, MA, 2002, p. 275–290.

[Jak97] D. Jakobson – « Quantum limits on flat tori », *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), no. 2, p. 235–266.

[Lin06] E. Lindenstrauss – « Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity », *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), no. 1, p. 165–219.

[Mac10] F. Macià – « High-frequency propagation for the Schrödinger equation on the torus », *J. Funct. Anal.* **258** (2010), no. 3, p. 933–955.

[Nas56] J. Nash – « The imbedding problem for Riemannian manifolds », *Ann. of Math. (2)* **63** (1956), p. 20–63.

[RS94] Z. Rudnick & P. Sarnak – « The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds », *Comm. Math. Phys.* **161** (1994), no. 1, p. 195–213.

[Sar03] P. Sarnak – « Spectra of hyperbolic surfaces », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **40** (2003), no. 4, p. 441–478.

[Sar11] ———, « Recent progress on the quantum unique ergodicity conjecture », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **48** (2011), no. 2, p. 211–228.

[Šni74] A. I. Šnirel′man – « Ergodic properties of eigenfunctions », *Uspehi Mat. Nauk* **29** (1974), no. 6(180), p. 181–182.

[CdV85] Y. Colin de Verdière – « Ergodicité et fonctions propres du laplacien », *Comm. Math. Phys.* **102** (1985), no. 3, p. 497–502.

[Zel87] S. Zelditch – « Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces », *Duke Math. J.* **55** (1987), no. 4, p. 919–941.

[Zyg74] A. Zygmund – « On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables », *Studia Math.* **50** (1974), p. 189–201.

Nalini Anantharaman, Université Paris-Sud 11, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay cedex • *E-mail :* `Nalini.Anantharaman@math.u-psud.fr`
Url : `http://www.math.u-psud.fr/~anantharaman/`