
GÉOMÉTRIES ÉNUMÉRATIVES COMPLEXE, RÉELLE ET TROPICALE

par

Erwan Brugallé

À Seal

1. Introduction

Notre objectif ici est d'expliquer comment résoudre simplement, par des méthodes combinatoires, un grand nombre de problèmes énumératifs grâce à la géométrie tropicale.

La géométrie énumérative est la branche des mathématiques qui tente de répondre à des questions comme

- « combien de droites passent par 2 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de coniques passent par 5 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de cubiques (*i.e.* courbes définies par un polynôme de degré 3) passent par 9 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de cubiques se recoupant une fois passent par 8 points dans le plan ? » (moins facile),...

Les problèmes énumératifs que nous considérons dans ce texte ont été posés en toute généralité au XIX^e siècle.

Si nous comptons les courbes définies par des polynômes à coefficients complexes, alors le nombre de courbes ne dépend pas de la configuration de points choisie, tout comme le nombre de racines complexes d'un polynôme en une variable à coefficients complexes est toujours égal à son degré. Cela facilite quelque peu l'énumération des courbes complexes, mais il aura tout de même fallu attendre les années 1990 et les travaux de Kontsevich puis de Caporaso et Harris pour obtenir une réponse complète.

En revanche, si l'on compte les courbes définies par des polynômes à coefficients réels, ce nombre dépend fortement des points choisis, ce qui complique singulièrement le problème... Nous pouvons toujours affirmer que le nombre de courbes réelles est plus petit que le nombre de courbes complexes, tout comme le nombre de racines réelles d'un polynôme réel en une variable est plus petit que le nombre de ses racines complexes, cela ne nous avance finalement pas beaucoup. Au début des années 2000, Welschinger a montré qu'en comptant avec un signe $+1$ ou -1 les courbes réelles se recoupant un nombre maximum de fois, nous obtenons un nombre indépendant de la configuration de points choisis. De plus, ce nombre, appelé *invariant de Welschinger*, nous donne une borne inférieure sur le nombre de courbes réelles quelle que soit la configuration de points! Ainsi, grâce à ces invariants, Itenberg, Kharlamov et Shustin ont pu démontrer que par $3d - 1$ points du plan, passait *toujours* une courbe algébrique réelle de degré d (*i.e.* définie par un polynôme en deux variables de degré d à coefficients réels) se recoupant un nombre maximum de fois.

La géométrie énumérative est un très joli domaine des mathématiques où de nombreux problèmes de base peuvent être résolus à l'aide de quelques idées astucieuses. Cependant, les techniques requises pour traiter un problème énumératif complexe ou réel plus général deviennent rapidement sophistiquées, et leur maîtrise demande beaucoup de temps et d'investissement.

Il est aussi possible de compter des courbes tropicales. Ces objets étant linéaires par morceaux, cela qui simplifie considérablement leur étude! En particulier, la géométrie énumérative tropicale est beaucoup plus simple que les géométries énumératives complexe ou réelle. De plus, un théorème très profond de Mikhalkin nous dit que l'on peut compter des courbes complexes ou réelles simplement en comptant des courbes tropicales. Ainsi, grâce à la géométrie tropicale et à un algorithme astucieux, Mikhalkin a pu calculer pour la première fois les invariants de Welschinger.

Ce texte est une introduction à la géométrie énumérative que j'espère compréhensible au niveau de première année de Master. Quelques notes de bas de page donnent des précisions sur certains termes employés, mais leur compréhension n'est absolument pas nécessaire à la compréhension du texte.

La section 2 est consacrée à l'initiation à la géométrie énumérative complexe et à la généralisation de la question « Combien de droites passent par 2 points du plan ? ». Dans la section 3, nous verrons que les choses se compliquent lorsque nous nous intéressons aux courbes réelles, et nous définirons les invariants de Welschinger. Les courbes tropicales et leur géométrie énumérative seront traitées à la section 4, puis nous expliquerons à la section 5 comment passer des courbes tropicales à des objets encore plus simples, les *diagrammes en étages*. Nous utiliserons ces diagrammes à la section 6 pour résoudre quelques problèmes énumératifs complexes et réels.

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement Lucia Lopez de Medrano, Assia Mahboubi, Gurvan Mével, Nicolas Puignau, Emmanuel Rey et Jean-Jacques Risler pour leur relecture attentive et leurs critiques constructives. Je remercie aussi le public des Journées Mathématiques X-UPS dont les commentaires ont contribué à améliorer le texte initial.

2. Géométrie énumérative complexe

2.1. Échauffement. C'est un fait admis de tout le monde, par 2 points distincts du plan passe une unique droite. Attardons-nous un instant sur la démonstration de cette proposition évidente.

Une droite du plan est donnée par un équation de la forme $aX + bY + c = 0$ où a, b et c sont 3 nombres (réels ou complexes, peu importe ici). Un point p du plan est donné par 2 coordonnées (x_p, y_p) , et ce point est sur la droite d'équation $aX + bY + c = 0$ si et seulement si ses coordonnées satisfont son équation, c'est-à-dire si et seulement si $ax_p + by_p + c = 0$. Si q est un deuxième point du plan, alors la droite d'équation $aX + bY + c = 0$ passe par p et q si et seulement si les 3 nombres a, b et c sont solutions du système d'équation

$$(1) \quad \begin{cases} ax_p + by_p + c = 0 \\ ax_q + by_q + c = 0 \end{cases}$$

Les points p et q étant donnés, nous avons donc un système linéaire de 2 équations en les variables a, b et c . De plus, si les points p et q sont distincts, alors ce système est de rang 2. L'ensemble des

triplets (a, b, c) solutions est donc infini, et l'ensemble des droites passant par p et q a l'air infini... En fait, ces solutions forment une droite vectorielle (2 équations et 3 inconnues), c'est-à-dire que tous les triplets solutions sont colinéaires. Or, si $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$ et si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors les deux équations $aX + bY + c = 0$ et $a'X + b'Y + c' = 0$ définissent la même droite. En d'autres termes, tous les triplets solutions du système (1) définissent la même droite ! Et par deux points distincts du plan passe donc une unique droite.

Qu'avons-nous utilisé dans notre preuve ? En passant de la droite à son équation, nous avons tout d'abord traduit un problème géométrique en un problème algébrique. Puis, pour montrer que 2 points sont nécessaires et suffisants pour déterminer une droite, nous avons simplement calculé la dimension de l'espace des droites du plan, et nous avons trouvé 2. En effet, une droite est déterminée par les 3 coefficients de son équation, mais 3 coefficients colinéaires définissent la même droite. La dimension de l'espace des droites est donc $3 - 1 = 2$.

Nous venons de résoudre un problème de géométrie énumérative à propos de polynômes en deux variables de degré 1. Mais en y réfléchissant bien, où avons-nous utilisé que nos polynômes étaient de degré 1 ? Cette hypothèse ne nous a finalement servi que pour identifier clairement l'espace dans lequel nous avons travaillé, afin de pouvoir calculer sa dimension. Ainsi, modulo quelques définitions, la même méthode doit marcher pour des polynômes en deux variables de n'importe quel degré.

2.2. Un problème simple de géométrie énumérative. Rappelons tout d'abord la définition du degré d'un polynôme en deux variables.

Définition 2.1. Soit $P(X, Y) = \sum a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$ un polynôme. Le degré de $P(X, Y)$ est le maximum de la somme $i + j$ lorsque $a_{i,j}$ est non nul.

Remarque 2.2. Bien sûr, le corps de base ne joue aucun rôle dans cette définition qui est la même pour un polynôme dans $\mathbb{K}[X, Y]$, quel que soit le corps \mathbb{K} .

Comme d'habitude, nous noterons $\mathbb{C}_d[X, Y]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d . Une droite du plan est donnée par une

équation de la forme $aX + bY + c = 0$, c'est donc l'ensemble solution d'un polynôme de degré 1. Plus généralement, un sous-ensemble de \mathbb{C}^2 définit par une équation polynomiale en deux variables est appelé une *courbe algébrique*.

Définition 2.3. Soit $P(X, Y)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X, Y]$ de degré au moins 1. Alors l'ensemble C des solutions de l'équation $P(X, Y) = 0$ dans \mathbb{C}^2 est appelé une courbe algébrique complexe.

On dit que la courbe C est irréductible si le polynôme P est irréductible. Le degré de C est le degré de $P(X, Y)$.

Afin d'alléger un peu le texte, nous utiliserons dans la suite l'expression « courbe algébrique » plutôt que « courbe algébrique complexe » lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

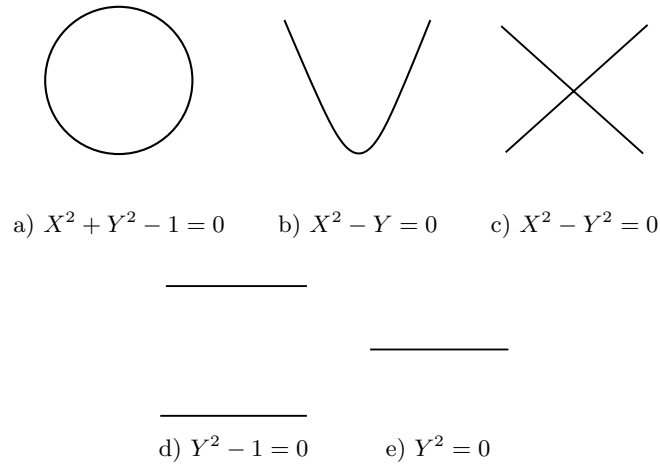
Une courbe algébrique irréductible est une courbe « minimale », en ce sens qu'elle n'est pas l'union de deux courbes algébriques. En effet, si $P(X, Y) = P_1(X, Y)P_2(X, Y)$, alors la courbe définie par $P(X, Y)$ est l'union des courbes définies par $P_1(X, Y)$ et $P_2(X, Y)$ ⁽¹⁾. Nous avons déjà étudié le cas des courbes algébriques de degré 1, regardons les courbes algébriques de degré 2 et 3.

Exemple 2.4. Les courbes algébriques de degré 2 sont appelées *coniques*, et à changement de coordonnées affine près de \mathbb{C}^2 , il n'existe que 5 coniques dont les équations sont $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, $X^2 - Y = 0$, $X^2 - Y^2 = 0$, $Y^2 - 1 = 0$ et $Y^2 = 0$. Les deux premières coniques sont irréductibles, mais pas les trois dernières. Ces cinq coniques sont représentées sur la Figure 1.

Évidemment, nous trichons un peu lorsque nous dessinons des courbes dans \mathbb{C}^2 , puisque nous ne dessinons en fait que ce qui se passe dans \mathbb{R}^2 ...

Exemple 2.5. Les courbes algébriques de degré 3 sont appelées *cubiques*. La cubique d'équation $Y^2 - X(X^2 + 1) = 0$ est représentée sur la Figure 2. Une grande majorité des cubiques possède une propriété assez extraordinaire : elles peuvent être munies d'une loi

⁽¹⁾On pourrait avoir $P_1(X, Y) = P_2(X, Y)$, on aurait dans ce cas-là une courbe *multiple*.

FIGURE 1. Classification des coniques dans \mathbb{C}^2

de groupe abélien! Cela fait des cubiques des objets très appréciés des géomètres algébristes et des cryptographes.

FIGURE 2. La cubique dans \mathbb{C}^2 d'équation $Y^2 - X(X^2 + 1) = 0$

Nous pouvons déjà faire deux remarques intéressantes. Tout d'abord, comme \mathbb{C} est algébriquement clos, une courbe algébrique C n'est jamais vide : pour tout nombre complexe x_0 , le polynôme $P(x_0, Y)$ est maintenant un polynôme en une variable à coefficients complexes et donc admet au moins une racine dans \mathbb{C} . Il existe donc un point de C de la forme (x_0, y_0) pour tout x_0 dans \mathbb{C} . Ensuite,

comme dans le cas des droites, deux polynômes non nuls multiples l'un de l'autre définissent la même courbe algébrique⁽²⁾.

Combien de points est-il nécessaire de fixer pour caractériser une courbe algébrique de degré d ? La réponse est encore une fois donnée par un calcul de dimension. Nous voyons apparaître dans la proposition suivante le mot *générique*. Ce mot reviendra constamment dans la suite de ce texte, sans être pourtant jamais vraiment défini. En effet, définir rigoureusement le mot *générique* nous demanderait un travail long et technique nous éloignant du sujet traité ici⁽³⁾. Heureusement, le sens « intuitif » du mot *générique* devrait parfaitement suffire à la compréhension de ce texte.

Proposition 2.6. *Par $d(d+3)/2$ points génériques de \mathbb{C}^2 passe une unique courbe algébrique de degré d .*

Démonstration. Calculons la dimension de l'espace $\mathbb{C}_d[X, Y]$. Un élément de cet espace s'écrit

$$\sum_{i+j \leq d} a_{i,j} X^i Y^j$$

la dimension de $\mathbb{C}_d[X, Y]$ est donc le nombre de couples (i, j) dans \mathbb{N}^2 vérifiant $i + j \leq d$. En faisant varier i de 0 à d et en comptant le nombre de j possibles nous obtenons

$$\dim(\mathbb{C}_d[X, Y]) = (d+1) + d + \dots + 2 + 1 = \frac{(d+2)(d+1)}{2}.$$

Chercher les polynômes $P(X, Y)$ qui s'annulent en un point (x_p, y_p) donné revient à résoudre l'équation $P(x_p, y_p) = 0$ qui est linéaire en les coefficients $a_{i,j}$ de $P(X, Y)$. Ainsi, si nous cherchons les polynômes $P(X, Y)$ qui s'annulent en $d(d+3)/2$ points fixés, nous nous ramenons à résoudre un système de $d(d+3)/2$ équations linéaires à $(d+2)(d+1)/2$ inconnues. Si les points sont en position générique dans le plan, alors ce système est de rang maximal et l'ensemble solution est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_d[X, Y]$ de dimension $\frac{(d+2)(d+1)}{2} - \frac{d(d+3)}{2} = 1$. Or deux polynômes multiples l'un de l'autre

⁽²⁾On peut donc voir l'espace des courbes algébriques comme le projectivisé de l'espace des polynômes.

⁽³⁾De manière générale, *générique* signifie « en dehors d'une sous-variété algébrique stricte d'une certaine variété algébrique ».

définissent la même courbe, la courbe algébrique de degré d passant par nos points est donc unique. \square

Exemple 2.7. D'après la Proposition 2.6, il existe une unique conique passant par 5 points en position générique dans le plan. Par exemple, la conique représentée sur la Figure 3b est l'unique conique passant par les 5 points représentés sur la Figure 3a.



FIGURE 3. Une unique conique par 5 points

En regardant de près la démonstration du fait que par deux points passe une unique droite, nous avons compris que nous pouvions généraliser sans trop d'efforts le problème et sa solution aux courbes algébriques de n'importe quel degré. Maintenant que nous avons résolu ce problème plus général, observons de plus près encore nos courbes algébriques. Puisque nous avons choisi des points génériques, les courbes solutions vont aussi être génériques : elles ne se « recourent » jamais. Or, il existe des courbes qui se recourent, mais ces courbes ne seront *jamais* solution... La raison à cela est que l'espace des courbes qui se recourent est beaucoup plus petit que l'espace de toutes les courbes de degré d . Plus précisément, il a une dimension de moins. Mais alors, si nous fixons un point de moins, pouvons-nous faire passer une courbe par les points restant et qui se recouperait ?

Comme on peut s'en douter à la lecture du paragraphe précédent, nous devons préalablement aller un peu plus loin dans l'étude des courbes algébriques avant de pouvoir poser rigoureusement notre nouveau problème.

2.3. Un problème énumératif plus général... et plus compliqué

Une courbe algébrique C est définie par une équation polynomiale $P(X, Y) = 0$. Comme toute courbe définie par une équation implicite,

les points de C sont naturellement séparés en deux ensembles : ceux pour lesquels la différentielle de $P(X, Y)$ ne s'annule pas, et les autres.

2.3.1. Courbes algébriques nodales. Les points p de C pour lesquels la différentielle de $P(X, Y)$ est non nulle en p sont dits *non singuliers*. Ce sont les points de C les plus simples possible. D'après le théorème des fonctions implicites, la courbe C ressemble à un graphe de fonction dans des coordonnées adéquates au voisinage d'un tel point. Les points p de C pour lesquels la différentielle de $P(X, Y)$ est nulle en p sont appelés les points *singuliers* de C . Au voisinage d'un tel point, la courbe C peut prendre des formes variées et être extrêmement compliquée ! Le plus simple des points singuliers est le *point double*.

Définition 2.8. Un point p d'une courbe algébrique C d'équation $P(X, Y) = 0$ est appelé point double de C si la différentielle de $P(X, Y)$ en p est nulle et si la différentielle seconde de $P(X, Y)$ en p est une forme quadratique non dégénérée.

Remarque 2.9. La différentielle et la différentielle seconde d'un polynôme en $(0, 0)$ se calculent très facilement : si $P(X, Y) = P_0(X, Y) + P_1(X, Y) + \dots + P_d(X, Y)$ où $P_i(X, Y)$ est un polynôme dont tous les monômes sont *exactement* de degré i , alors la différentielle de $P(X, Y)$ en l'origine est le polynôme $P_1(X, Y)$ et sa différentielle seconde est le polynôme $P_2(X, Y)$. Pour calculer les différentielles d'un polynôme en un point p quelconque du plan, il suffit de faire un changement de variables affine pour ramener p à l'origine et appliquer la recette précédente.

Exemple 2.10. La conique d'équation $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ (voir Figure 1a) n'a que des points non singuliers. Par contre, la conique d'équation $X^2 - Y^2 = 0$ (voir Figure 1c) a un point double à l'origine.

D'après le Lemme de Morse, au voisinage d'un point double, une courbe algébrique ressemble à la courbe définie par une forme quadratique non dégénérée. Le corps \mathbb{C} étant algébriquement clos, toutes les formes quadratiques non dégénérées sur \mathbb{C}^2 sont équivalentes à $X^2 - Y^2$. En particulier, il existe un unique modèle local pour un point double d'une courbe algébrique complexe : la courbe ressemble à l'union des droites d'équation $X - Y = 0$ et $X + Y = 0$. Ainsi, p est un point d'intersection de deux branches non singulières de C

à tangentes distinctes. Au voisinage d'un point double, une courbe algébrique ressemble donc à la Figure 1c.

Définition 2.11. Une courbe algébrique dont tous les points sont non singuliers est appelée courbe non singulière.

Une courbe algébrique dont les seuls points singuliers sont des points doubles est appelée une courbe nodale.

La majorité des courbes sont non singulières. Plus précisément, une courbe C *générique* est non singulière. Le mot *générique* veut dire ici *en dehors d'un fermé d'intérieur vide et de mesure nulle*⁽⁴⁾. Si l'on considère maintenant l'espace des courbes nodales, alors une courbe nodale générique n'a qu'un seul point double. Plus généralement, une courbe générique dans l'espace des courbes algébriques avec au moins n points doubles a exactement n points doubles.

Puisque les courbes génériques sont non singulières, lorsque nous cherchions à la section 2.2 les courbes algébriques de degré d passant par $d(d+3)/2$ points en position générique, nous trouvons toujours une courbe non singulière. Fixons maintenant 1 point de moins, c'est-à-dire prenons $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ points en position générique. Par le même raisonnement qu'à la section 2.2, il existe un espace de dimension 1⁽⁵⁾ de courbes algébriques de degré d passant par ces points. Génériquement, ces courbes sont non singulières, mais nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce que certaines d'entre elles soient nodales. De plus, par généralité, ces courbes nodales auront *exactement* un point double. Si nous fixons maintenant $\frac{d(d+3)}{2} - 2$ points en position générique, alors nous obtenons un espace de dimension 1 de courbes nodales passant par ces points, et ces courbes auront génériquement exactement 1 point double. Encore une fois, nous pouvons nous attendre à ce que quelques unes de ces courbes aient au moins 2 points doubles, et par généralité, ces courbes auront exactement 2 points doubles.

En continuant ainsi, nous voyons que moins nous fixons de points dans \mathbb{C}^2 , plus nous pouvons imposer de points doubles sur les courbes passant par ces points. De plus, une fois fixés un certain nombre

⁽⁴⁾Plus précisément, il faut prendre C en dehors d'une hypersurface algébrique dans l'espace des courbes, appelée *hypersurface discriminante*.

⁽⁵⁾C'est en fait une droite dans l'espace de courbes.

de points, nous voyons que le nombre maximum de points doubles est aussi fixé. Nous pouvons même espérer trouver un nombre fini de courbes ayant ce nombre maximum de points doubles et passant par les points fixés. Demandons-nous « *Combien ?* », et voilà notre problème énumératif posé.

Mais avant d'aller plus loin, nous devons savoir combien de points doubles une courbe algébrique peut avoir. Ce nombre est toujours fini, et la proposition suivante nous donne le nombre maximum.

Proposition 2.12. *Une courbe algébrique complexe nodale C de degré d a au plus $d(d-1)/2$ points doubles. De plus, si C est irréductible, alors elle ne peut avoir plus de $(d-1)(d-2)/2$ points doubles.*

Exemple 2.13. Une droite est toujours non singulière, donc n'a jamais de point double.

Exemple 2.14. Prouvons la Proposition 2.12 dans le cas du degré 2. Nous devons montrer qu'une conique a au maximum un unique point double et que toute conique nodale est réductible.

Soit C une conique nodale. Alors d'après la Remarque 2.9, quitte à faire un changement de coordonnées affine, nous pouvons supposer qu'un point double de C est le point $(0,0)$, et que C est définie par l'équation $X^2 - Y^2 = 0$. La conique C est donc réductible, plus précisément est l'union des deux droites d'équation $X - Y = 0$ et $X + Y = 0$ (voir Figure 1c). Comme une droite est non singulière, la conique C ne peut pas avoir d'autre point double.

Exemple 2.15. L'union de 3 droites non concourantes et non parallèles est une cubique avec 3 points doubles. L'union d'une conique et d'une droite est une cubique avec deux points doubles. Une cubique avec un point double est donnée par l'équation $Y^2 - X^2(X+1) = 0$, et une cubique sans point double est donnée par l'équation

$$Y^2 - X(X^2 + 1) = 0.$$

Toutes ces cubiques sont représentées à la Figure 4.

Exemple 2.16. Plus généralement, il est facile de voir qu'il existe effectivement une courbe algébrique nodale réductible de degré d avec $d(d-1)/2$ points doubles : il suffit de prendre l'union de d droites dont 3 ne sont jamais concourantes. En perturbant un peu l'équation

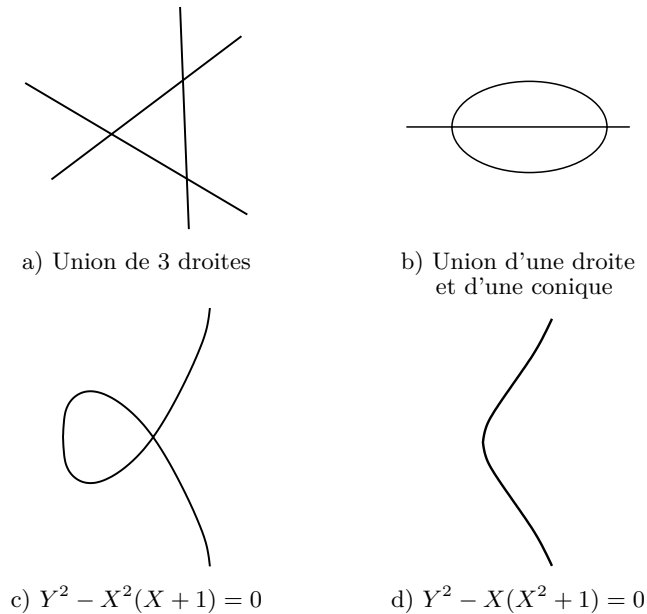
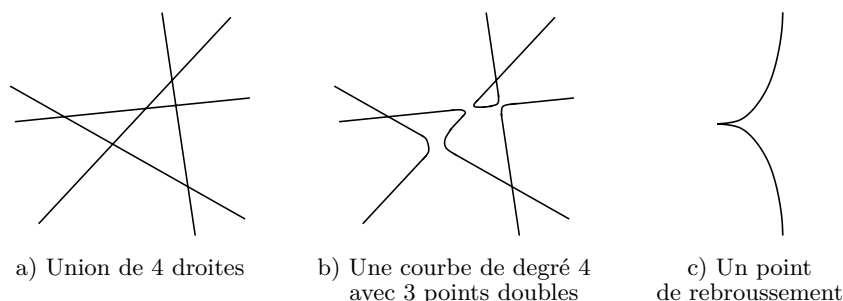


FIGURE 4. Cubiques avec 3, 2, 1 et 0 points doubles

de ces courbes, on peut construire des courbes algébriques nodales irréductibles de degré d avec $(d-1)(d-2)/2$ points doubles. Un exemple en degré 4 est représenté sur les Figures 5a et b⁽⁶⁾.

Précisons qu'il existe des courbes algébriques qui ne sont pas nodales, c'est-à-dire possédant des points singuliers qui ne sont pas des

⁽⁶⁾Voici une explication « avec les mains » du fait que la courbe de la Figure 5b est irréductible. On part de l'union des 4 droites de la Figure 5a, puis on perturbe un point double. On obtient ainsi l'union d'une courbe irréductible de degré 2 et de deux droites. Puis, en perturbant un point d'intersection de la conique et d'une des deux droites, on obtient l'union d'une courbe irréductible de degré 3 et d'une droite. Pour finir, on perturbe un point d'intersection de la cubique et de la droite restante, et on obtient une courbe de degré 4 irréductible avec $6 - 3 = 3$ points doubles. Pour pouvoir perturber n'importe quel point double d'une courbe algébrique tout en préservant d'autres points doubles éventuels, nous avons utilisé le Théorème de Brusotti qui affirme que les *strates* du discriminant correspondant aux courbes nodales s'intersectent *transversalement*.

FIGURE 5. D'autres exemples de courbes algébriques dans \mathbb{C}^2

points doubles. Par exemple, la courbe d'équation $Y^2 - X^3 = 0$ possède un point singulier en $(0,0)$ qui n'est pas un point double, mais un *point de rebroussement* (voir Figure 5c).

Pour des raisons qu'il est difficile d'expliquer dans ce texte, les géomètres préfèrent parler du nombre de points doubles qu'une courbe algébrique *n'a pas*, plutôt que du nombre de points doubles qu'elle a. Ce nombre est appelé *genre* de la courbe.

Définition 2.17. Soit C une courbe algébrique nodale irréductible de degré d avec r points doubles. On définit le genre⁽⁷⁾ de C , noté $g(C)$, par

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r.$$

Le genre d'une courbe nodale irréductible de degré d est donc toujours un nombre compris entre 0 et $(d-1)(d-2)/2$. Les courbes non singulières correspondent exactement aux courbes de genre $(d-1)(d-2)/2$. À l'opposé, nous verrons à la section 2.3.3 que les courbes de genre 0 sont aussi très particulières.

Nous avons déjà vu à la section 2.2 que pour pouvoir poser un problème énumératif, nous devons préalablement connaître la dimension de l'espace des courbes qui nous intéressent. Nous connaissons déjà la dimension de l'espace des courbes non singulières de degré d qui est $d(d+3)/2$. D'après la discussion qui suit la Définition 2.11, il semble

⁽⁷⁾Des points doubles peuvent se trouver « à l'infini », et en toute rigueur il faudrait en tenir compte dans notre définition du genre. Cependant, pour les problèmes énumératifs discutés dans ce texte, toutes les courbes solutions seront lisses à l'infini.

qu'imposer un point double fasse baisser la dimension de 1. Cela est effectivement vrai, et en remplaçant le nombre de points doubles par le genre, nous obtenons la proposition qui suit⁽⁸⁾.

Proposition 2.18. *L'espace⁽⁹⁾ des courbes algébriques nodales irréductibles de degré d et de genre g est de dimension $3d - 1 + g$.*

2.3.2. *Et bien, comptez maintenant!* Nous voici enfin prêt à poser notre problème énumératif dans toute sa généralité. Fixons-nous un degré $d \geq 1$, un genre $g \geq 0$, et $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$ une configuration de $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{C}^2 . Considérons alors l'ensemble $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ de toutes les courbes algébriques irréductibles nodales de degré d , de genre g , passant par tous les points de ω .

Proposition 2.19. *Pour une configuration ω générique, le cardinal de $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ est fini et ne dépend pas de ω .*

Essayons d'expliquer grossièrement pourquoi ce cardinal est indépendant de ω . En mettant ce problème géométrique sous une forme algébrique, on s'aperçoit que les courbes de $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ correspondent aux racines d'un certain polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. De plus, le degré de ce polynôme est le même pour toute configuration générique ω . Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, le nombre de solutions est égal à ce degré, c'est-à-dire que le nombre de courbes dans $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ est constant.

On pose alors

$$N(d, g) = \text{card}(\mathcal{C}(d, g, \omega)).$$

Le nombre $N(d, g)$ est donc le nombre de courbes algébriques irréductibles nodales⁽¹⁰⁾ de degré d , de genre g , passant par une configuration générique de $3d - 1 + g$ points.

Exemple 2.20. Si $g = (d - 1)(d - 2)/2$, alors nous calculons le nombre de courbes non singulières (avec 0 points doubles) passant

⁽⁸⁾C'est une conséquence du Théorème de Brusotti, voir note de bas de page (6).

⁽⁹⁾C'est une sous-variété algébrique irréductible de l'espace des courbes algébriques de degré d .

⁽¹⁰⁾Il existe une notion de genre pour n'importe quelle courbe algébrique, non nécessairement nodale, et on peut montrer que toutes les courbes algébriques irréductibles de degré d , de genre g et passant par $3d - 1 + g$ points génériques sont toutes des courbes nodales. Ainsi, on peut oublier de préciser nodale dans l'énoncé du problème.

par $d(d+3)/2$ points du plan. Nous retombons donc sur le problème traité à la section 2.2 :

Proposition 2.21. *Pour tout $d \geq 1$ on a $N(d, (d-1)(d-2)/2) = 1$.*

Cependant, calculer les nombres $N(d, g)$ en toute généralité s'avère être un problème beaucoup plus difficile que le cas où l'on a $g = (d-1)(d-2)/2$... Nous savons, d'après la « démonstration » de la Proposition 2.19, que le nombre $N(d, g)$ peut s'interpréter comme le degré d'un certain polynôme. Mais c'est seulement en théorie que nous connaissons l'existence de ce polynôme ! En particulier, nous ne connaissons pas a priori son degré. En fait, savoir que ce polynôme existe ne nous aide pas beaucoup à déterminer son degré, et il faudra trouver d'autres moyens pour calculer les nombres $N(d, g)$.

Problème 1. *Comment calculer les nombres $N(d, g)$?*

Sans aucun doute, les origines de la géométrie énumérative remontent à fort loin. Par exemple, les grecs savaient certainement déjà que par 5 points passe une unique conique. Cependant, à ma connaissance le Problème 1 n'est posé en toute généralité que depuis le XIX^e siècle⁽¹¹⁾ alors que la géométrie énumérative connaît un véritable essor grâce notamment aux travaux de Chasles, De Jonquieres, Schubert, Zeuthen... En 1900, Hilbert propose dans son 15^e problème (voir [Hil01]) de travailler à des bases rigoureuses du calcul énumératif de Schubert. Malgré les progrès de la géométrie énumérative au XIX^e siècle, peu des nombres $N(d, g)$ étaient finalement connus en 1900. Le tableau 1 résume à peu près ce que l'on savait à cette époque du Problème 1. Pour information, le nombre $N(4, 0) = 620$ a été calculé pour la première fois par Zeuthen (voir [Zeu73]).

En plus, de ces valeurs particulières de $N(d, g)$, la réponse au Problème 1 pour les courbes avec un unique point double était connue depuis longtemps. Nous donnerons une preuve tropicale de la formule suivante à la section 6.1.

⁽¹¹⁾ Les problèmes énumératifs posés alors sont même encore plus généraux ! Voici un exemple dont nous ne parlons pas ici : combien y a-t-il de droites dans l'espace intersectant 4 autres droites données ? La réponse est 2, et il existe une bien jolie démonstration due à Schubert.

$d \setminus g$	0	1	2	3
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	12	1	0	0
4	620	225	27	1

TABLE 1. Premiers nombres $N(d, g)$

Proposition 2.22. *Pour tout $d \geq 3$ on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) = 3(d-1)^2.$$

À partir des années 1970, les progrès de la géométrie algébrique contribuèrent à réveiller l'intérêt pour les questions énumératives, et de nouveaux nombres $N(d, g)$ furent calculés. Par exemple, la géométrie énumérative des courbes avec 2 points doubles était comprise. Une démonstration possible de la Proposition 2.23 est proposée à la section 7.

Proposition 2.23. *Pour tout $d \geq 4$ on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2 - 3d - 11).$$

Le Lecteur intéressé pourra trouver d'autres formules du même tonneau dans [DFI95]. Dans les années 90, une formule générale calculant tous les nombres $N(d, g)$ a été donnée par Caporaso et Harris (voir [CH98]). Le problème 1 était résolu.

La formule de Caporaso et Harris est assez compliquée et nous ne la donnerons pas ici. En revanche, nous proposons au Lecteur d'écrire lui-même cette formule à l'Exercice 6.2.

Avant l'apparition de la *géométrie tropicale*, les calculs des nombres $N(d, g)$ étaient, à part quelques exceptions, assez compliqués et demandaient un bagage technique assez important. La géométrie tropicale a fourni une nouvelle approche de ce domaine, simplifiant considérablement les calculs précédents. En effet, les objets tropicaux ont une nature combinatoire, beaucoup plus simple que les courbes algébriques! Le but de ce texte est de convaincre le Lecteur dans les sections 4, 5 et 6 que tout un chacun peut calculer n'importe quel nombre $N(d, g)$ et établir d'intéressantes relations entre ces nombres

par ses propres moyens s'il dispose de suffisamment de temps et de patience.

2.3.3. Courbes rationnelles. Les formules 2.21, 2.22 et 2.23 dénombrent des courbes ayant peu de points doubles. À l'inverse, les courbes ayant le nombre maximum de points doubles sont aussi très spéciales et peuvent être étudiées avec des techniques particulières. Précisons au passage que ces courbes intéressent aussi beaucoup les physiciens. Nous retrouverons les courbes de genre 0 à la section 3.3, car ce sont quasiment les seules courbes que l'on sache étudier en profondeur si nous prenons \mathbb{R} comme corps de base à la place de \mathbb{C} .

Les courbes de genre 0 sont aussi appelées *courbes rationnelles*, car elles sont *paramétrées* par \mathbb{C} .

Théorème 2.24. *Si C est une courbe algébrique de degré d et de genre 0, alors il existe trois polynômes en une variable et de degré d , $F(T)$, $G(T)$ et $H(T)$ tels que C soit l'image de l'application rationnelle*

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \text{pôles de } \frac{F(t)}{H(t)} \text{ et } \frac{G(t)}{H(t)} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$t \longmapsto \left(\frac{F(t)}{H(t)}, \frac{G(t)}{H(t)} \right).$$

Quelques années avant Caporaso et Harris, Kontsevich a donné une formule récursive calculant tous les nombres $N(d, 0)$.

Théorème 2.25 (Kontsevich [KM94]). *Les nombres $N(d, 0)$ sont données par la relation*

$$N(d, 0) = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 \geq 1}} N(d_1, 0)N(d_2, 0) \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{d_1-1} \right)$$

si $d \geq 2$, et par la valeur initiale $N(1, 0) = 1$.

Ainsi, tous les nombres $N(d, 0)$ se retrouvent à partir du fait que par deux points passe une unique droite! Notons que les approches de Kontsevich, et de Caporaso et Harris sont différentes. Ainsi, les formules obtenues sont différentes, en ce sens que la formule de Kontsevich *n'est pas* une sous-formule de la formule de Caporaso et Harris. Grâce au Théorème 2.25, nous pouvons calculer tous les nombres $N(d, 0)$. À peu près un siècle après Zeuthen, Vainsencher

(voir [Vai95]) a calculé $N(5, 0) = 87304$ pour la première fois. Quelque temps après, les nombres $N(d, 0)$ pour $d \geq 6$ sont calculés pour la première fois grâce à la formule de Kontsevich.

d	1	2	3	4	5	6	7
$N(d, 0)$	1	1	12	620	87304	26312976	14616808192

TABLE 2. Premières valeurs de $N(d, 0)$

À la lumière du tableau 2, nous pouvons constater que les nombres $N(d, 0)$ ont l'air de grandir assez vite. De fait nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.26 (Di Francesco & Itszykson [DFI95])

L'asymptotique de la suite $(\ln N(d, 0))_{d \geq 1}$ lorsque d tend vers l'infini est donnée par

$$\ln N(d, 0) \sim 3d \ln d.$$

3. Géométrie énumérative réelle

À la section 2, nous avons utilisé à deux endroits que notre corps de base \mathbb{C} était algébriquement clos. Nous avons d'abord invoqué le fait que toutes les formes quadratiques sur \mathbb{C} non dégénérées sont équivalentes pour écrire l'équation locale d'un point double d'une courbe algébrique. Puis, pour démontrer que les nombres $N(d, g)$ ne dépendaient pas de la configuration de points ω choisie, nous avons utilisé le fait qu'un polynôme générique de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ a exactement n racines.

Ces deux résultats sont faux sur \mathbb{R} , ce qui rend la géométrie réelle paradoxalement plus complexe que la géométrie complexe. Avant de nous lancer dans la géométrie énumérative réelle proprement dite, penchons-nous d'abord sur les courbes algébriques réelles.

3.1. Courbes algébriques réelles. Si $P(X, Y)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[X, Y]$, alors dans l'esprit la section 2, nous pouvons regarder l'ensemble des points (x, y) dans \mathbb{R}^2 tels que $P(x, y) = 0$. Maintenant, le fait que \mathbb{R} ne soit pas algébriquement clos change beaucoup de choses. En particulier, la courbe définie par $P(X, Y)$ peut être vide. Par exemple, aucun point de \mathbb{R}^2 ne vérifie $X^2 + Y^2 + 1 = 0$.

Nous arrivons ainsi à une petite contradiction : nous appelons courbe l'ensemble vide... Comme souvent, le problème vient de ce que nous ne regardons pas le bon objet. En effet, il ne faut pas voir une courbe algébrique réelle uniquement comme l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^2 de l'équation $P(X, Y) = 0$, mais toujours comme l'ensemble des solutions dans \mathbb{C}^2 de l'équation $P(X, Y) = 0$. Que vient donc faire le mot « réel » ici puisque nous considérons toujours les solutions d'une équation dans \mathbb{C}^2 ? Le fait que le polynôme P soit réel entraîne que si $P(x, y) = 0$, alors $P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, où \bar{x} désigne le nombre complexe conjugué à x . Ainsi, notre courbe algébrique C définie par $P(X, Y)$ est beaucoup plus « spéciale » qu'une courbe algébrique complexe quelconque, puisqu'elle admet une involution⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C \\ (x, y) &\longmapsto (\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

De plus, les zéros de $P(X, Y)$ dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire les points réels de C , ne sont autres que les points fixes de cette involution. Ceci motive la définition suivante.

Définition 3.1. Soit $P(X, Y)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[X, Y]$ de degré au moins 1. Alors l'ensemble C des solutions de $P(X, Y) = 0$ dans \mathbb{C}^2 est appelé une courbe algébrique réelle. De plus, l'ensemble $\mathbb{R}C = C \cap \mathbb{R}^2$ est appelé partie réelle de C .

Exemple 3.2. Une droite dont l'équation est à coefficients réels est une courbe algébrique réelle, et sa partie réelle est une droite telle que nous la dessinons depuis tout petits.

À la section 2, nous trichions un peu en dessinant les courbes algébriques dans \mathbb{C}^2 . Comme il est peu aisé de représenter $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$, nous considérons en fait des courbes algébriques réelles, et nous dessinons leur partie réelle. Mais ici, puisque nous parlons justement de courbes algébriques réelles, les dessins seront fidèles à la réalité⁽¹³⁾. Les courbes dessinées dans les Figures 1, 2, 3, 4 et 5 sont donc des exemples de parties réelles de courbes algébriques réelles.

⁽¹²⁾Plus précisément une involution antiholomorphe.

⁽¹³⁾Pour autant qu'une telle phrase ait un sens...

Exemple 3.3. La Figure 6 contient d'autres exemples de partie réelle de courbes algébriques réelles de degré 2, 3 et 4. Les équations des courbes représentées sur les Figures 6c et d sont un peu longues, nous ne les écrivons pas.

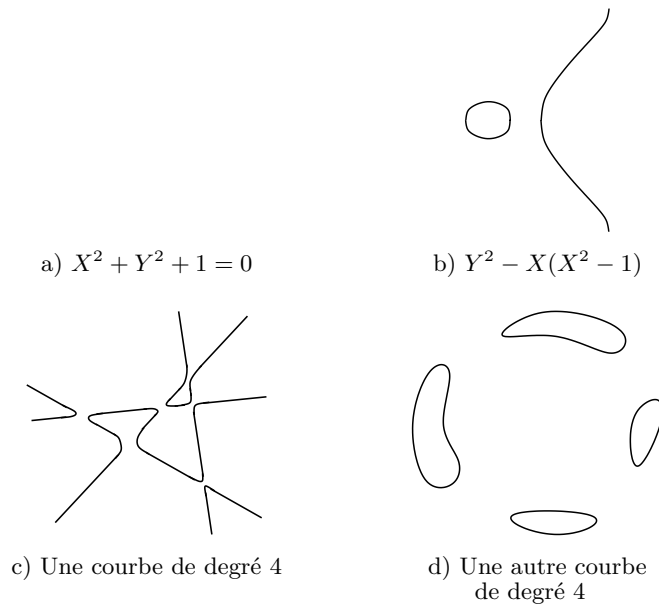


FIGURE 6. Courbes algébriques réelles de degré 2, 3 et 4

Pourquoi considérer tous les points dans \mathbb{C}^2 d'une courbe algébrique réelle au lieu de se contenter des points dans \mathbb{R}^2 ? Nous avons vu plus haut que considérer uniquement la partie réelle implique d'étudier des objets potentiellement vides. Mais il y a plus grave! Certaines informations concernant une courbe algébrique réelle peuvent être cachées dans ses points complexes. Par exemple, les points doubles d'une courbe algébrique réelle nodale n'ont aucune raison d'être tous réels. Ainsi, si nous voulons définir la bonne notion de genre d'une courbe algébrique réelle, nous devons prendre en compte *tous* les points doubles de la courbe, pas uniquement ceux qui se trouvent dans \mathbb{R}^2 .

Puisqu'une courbe algébrique réelle est avant tout une courbe algébrique complexe, nous pouvons parler de courbes algébriques réelles irréductibles, singulières...

Définition 3.4. Une courbe algébrique réelle C est irréductible (respectivement non singulière, nodale) si C est irréductible (respectivement non singulière, nodale) en tant que courbe algébrique complexe.

Le genre d'une courbe algébrique réelle irréductible nodale C est celui de C vue comme courbe algébrique complexe.

Remarque 3.5. Une courbe algébrique réelle définie par un polynôme $P(X, Y)$ dans $\mathbb{R}[X, Y]$ est irréductible si le polynôme $P(X, Y)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exemple 3.6. Toutes les courbes algébriques réelles représentées à la Figure 6 sont irréductibles et non singulières.

Exemple 3.7. Terminons de passer en revue toutes les coniques réelles possibles à changement de variables affine de \mathbb{R}^2 près. Les formes quadratiques $X^2 + Y^2$ et $X^2 - Y^2$ n'étant pas équivalentes sur \mathbb{R} , il y a plus de coniques réelles que de coniques complexes. Pour avoir toutes les coniques réelles en plus de celles dessinées sur les Figures 1 et 6a, nous devons ajouter les coniques d'équations $X^2 - Y^2 + 1 = 0$, $X^2 + Y^2 = 0$ et $X^2 + 1 = 0$. Ces trois coniques sont représentées à la Figure 7. Notons que les polynômes $X^2 + Y^2$ et $X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X, Y]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et définissent donc des courbes algébriques réelles réductibles.

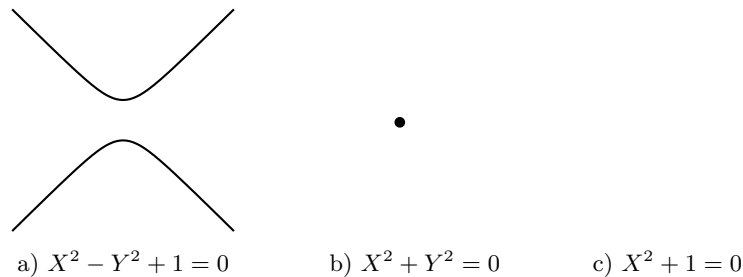


FIGURE 7. Fin de la classification des coniques dans \mathbb{R}^2

En regardant la classification des coniques réelles, nous remarquons un nouveau phénomène : il y a deux types de points doubles réels possibles pour une courbe algébrique réelle ! En effet, une conique réelle nodale est soit l'union de deux droites réelles, soit l'union de deux droites complexes conjuguées. Encore une fois, cela est dû

au fait qu'à changement de variables affine de \mathbb{R}^2 et à l'application $P(X, Y) \rightarrow -P(X, Y)$ près, il y a deux formes quadratiques non dégénérées distinctes : $X^2 + Y^2$ et $X^2 - Y^2$. Comme les formes quadratiques sont les équations locale d'un point double, nous voyons alors qu'il existe effectivement deux sortes de points doubles réels pour une courbe algébrique réelle. Nous aurons l'occasion de reparler de ces deux types de points doubles réels à la section 3.3.

Définition 3.8. Soit C une courbe algébrique réelle, et $p \in \mathbb{R}C$ un point double de C . On dit que p est un point double réel isolé de $\mathbb{R}C$ si la différentielle seconde de C en p est équivalente sur \mathbb{R} à $X^2 + Y^2$. On dit que p est un point double réel non isolé de $\mathbb{R}C$ si la différentielle seconde de C en p est équivalente sur \mathbb{R} à $X^2 - Y^2$.

Si p est un point double réel isolé de $\mathbb{R}C$, alors au voisinage de p , C ressemble à la courbe définie par l'équation $X^2 + Y^2 = 0$. En particulier, p est le seul point de $\mathbb{R}C$ dans ce voisinage, d'où le nom de point double isolé. De plus, comme $X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY)$, au voisinage de p la courbe C ressemble à l'union de deux droites complexes conjuguées, c'est-à-dire que p est le point d'intersection de deux branches complexes conjuguées de C . Cette situation est représentée à la Figure 8a où les pointillés représentent les deux branches complexes conjuguées de C .

Au voisinage d'un point double réel non isolé, la courbe C ressemble à la courbe définie par l'équation $X^2 - Y^2 = 0$, et donc à l'union de deux droites réelles (voir la Figure 8b).

Exemple 3.9. La cubique d'équation $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$ (voir Figure 4c) a un point double réel non isolé en $(0, 0)$. La cubique d'équation $Y^2 - X^2(X - 1) = 0$ (voir Figure 8c) a un point double réel isolé en $(0, 0)$.

3.2. Le réel, c'est compliqué. Maintenant que nous avons défini les courbes algébriques réelles nodales irréductibles, nous pouvons jouer au même jeu qu'à la section 2.3.2. Fixons-nous un degré $d \geq 1$, un genre $g \geq 0$, et une configuration générique⁽¹⁴⁾ $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$

⁽¹⁴⁾ *générique* comme configuration de points dans \mathbb{C}^2 . De telles configurations de points réels existent. En effet, il existe un polynôme f à coefficients complexes non tous nuls tel que les coordonnées des points des configurations ω non génériques

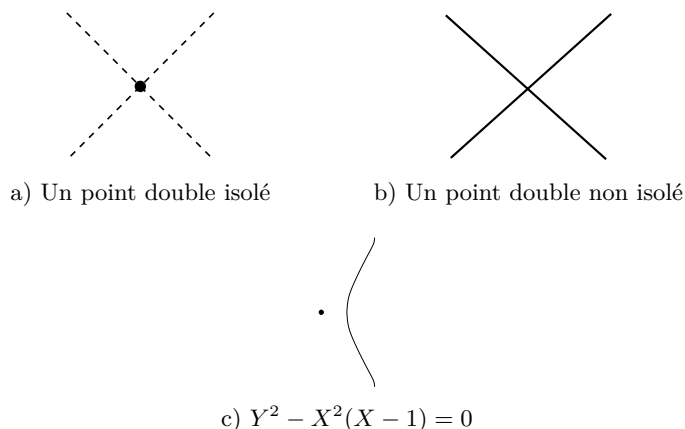


FIGURE 8. Points doubles réels

de $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{R}^2 . Considérons alors l'ensemble $\mathbb{R}\mathcal{C}(d, g, \omega)$ de toutes les courbes algébriques réelles irréductibles nodales de degré d , de genre g , passant par tous les points de ω . Comme $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, il est clair que $\mathbb{R}\mathcal{C}(d, g, \omega) \subset \mathcal{C}(d, g, \omega)$, où $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ est l'ensemble des courbes algébriques *complexes* de degré d et de genre g passant par les points de ω .

Nous avons vu à la section 2.3.2 que pour une configuration de points ω dans \mathbb{C}^2 , les courbes de $\mathcal{C}(d, g, \omega)$ sont données par les racines d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, dont le degré, et donc le nombre de racines, ne dépend pas du choix de la configuration générique ω . Si les points p_i sont dans \mathbb{R}^2 , alors ce polynôme est dans $\mathbb{R}[X]$. Maintenant, le nombre de racines réelles d'un polynôme réel ne dépend pas uniquement du degré du polynôme, mais aussi de ses coefficients. C'est-à-dire que la Proposition 2.19 a peu de chance d'être vraie dans le cas réel : le cardinal de $\mathbb{R}\mathcal{C}(d, g, \omega)$ dépend de la configuration ω choisie ! Par exemple, on peut facilement trouver une configuration de 8 points dans \mathbb{R}^2 par laquelle passent 12 cubiques réelles rationnelles, et une autre par laquelle passent seulement 8 cubiques réelles rationnelles (voir Proposition 3.12).

satisfont à $f = 0$. Lorsque ces coordonnées sont toutes réelles, elles satisfont aux deux équations réelles obtenues en remplaçant les coefficients de f par leur partie réelle, resp. imaginaire. L'une des deux est nécessairement non triviale, donc les configurations de points réels ne peuvent pas toutes être non génériques.

Les racines d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ sont soit réelles, soit naturellement associées en paires de racines complexes conjuguées. Puisque les solutions d'un problème énumératif réel sont les racines d'un polynôme réel, les solutions sont soit des courbes réelles, soit naturellement associées en paires de courbes complexes conjuguées. Reprenons l'exemple des 8 points de \mathbb{R}^2 par lesquels passent seulement 8 cubiques réelles rationnelles. Nous savons que par ces 8 points passent 12 cubiques complexes rationnelles, donc 4 de ces cubiques complexes rationnelles ne sont pas réelles et sont regroupées en deux paires de cubiques complexes conjuguées.

La géométrie énumérative réelle semble donc plus compliquée que la géométrie énumérative complexe... Il y a cependant un cas où la méthode employée pour compter les courbes complexes marche tout aussi bien pour compter les courbes réelles.

Proposition 3.10. *Pour tous $d \geq 1$ et ω générique, on a*

$$\text{card} \left(\mathbb{RC} \left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \omega \right) \right) = 1.$$

Démonstration. Nous pouvons reprendre mot pour mot la démonstration de la section 2.2 en remplaçant \mathbb{C} par \mathbb{R} . En effet, ce problème énumératif se traduit en un problème d'algèbre linéaire dont la résolution ne dépend pas du corps de base. \square

Mais pour l'énumération générale des courbes algébriques réelles nodales, savoir compter les courbes complexes ne nous aide pas beaucoup...

Problème 2. *Que peut-on dire du cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$?*

Puisque ce cardinal est le nombre de racines réelles d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, on peut immédiatement dire deux choses : ce nombre est plus petit que le degré du polynôme et lui est congru modulo 2

Proposition 3.11. *Pour toute configuration de points ω , on a les inégalités suivantes*

$$0, 1 \leq \text{card}(\mathbb{RC}(d, g, \omega)) \leq N(d, g),$$

la borne inférieure étant 1 (resp. 0) si $N(d, g)$ est impair (resp. pair). De plus on a

$$\text{card}(\mathbb{RC}(d, g, \omega)) \equiv N(d, g) \pmod{2}.$$

Maintenant, quelles sont les valeurs possibles du cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ entre 0 et $N(d, g)$? Si tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentaient toutes les solutions de nos problèmes énumératifs, alors la réponse serait évidente : le cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ pourrait être n'importe quel nombre plus petit et de même parité que $N(d, g)$.

Cependant, nos polynômes à une variable proviennent de problèmes géométriques, et ne sont donc a priori pas du tout quelconques. Nous avons donc bien peu d'espoir de prouver l'énoncé ci-dessus. Et pour cause, la Proposition 3.12 ci-dessous nous montre que cet énoncé est faux!

À l'heure actuelle, peu de choses sont connues dans l'étude du Problème 2 comparé à ce que l'on sait du Problème 1. Si l'on connaît plusieurs moyens de calculer tous les nombres $N(d, g)$, on ne sait à peu près rien des valeurs possibles du cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ à part dans quelques cas particuliers. En fait, on ne sait répondre en toute généralité à cette question qu'en degré plus petit que 3... Le cas des degrés 1 et 2 est couvert par la Proposition 3.10, ainsi que le cas des cubiques réelles non singulières de degré 3. Le cas des cubiques réelles rationnelles a été traité par Degtyarev et Kharlamov il y a seulement quelques années.

Proposition 3.12 (Degtyarev & Kharlamov [DK00])

Les valeurs prises par le cardinal de $\mathbb{RC}(3, 0, \omega)$ quand ω parcourt les configurations génériques de 8 points dans \mathbb{R}^2 sont 8, 10 et 12.

La Proposition 3.12 fait apparaître le phénomène diablement intéressant suivant : quel que soit le choix de nos 8 points dans \mathbb{R}^2 , il existe toujours au moins 8 cubiques rationnelles réelles passant par ces 8 points! Ainsi, la borne inférieure 0 de la Proposition 3.11 est loin d'être optimale. Par contre, on constate aussi qu'il existe des configurations de 8 points pour lesquelles les 12 cubiques rationnelles complexe sont en fait réelles. Est-ce là un fait général? Peut-on améliorer les deux bornes de la Proposition 3.11? Les problèmes suivants sont des versions simplifiées du problème 2

Problème 3. *Quelle est la valeur minimale du cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ quand ω varie?*

Problème 4. *Quelle est la valeur maximale du cardinal de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ quand ω varie?*

Pour l'instant, ces deux problèmes sont encore largement ouverts. Par exemple, personne à ma connaissance ne sait s'il existe une configuration de 11 points dans \mathbb{R}^2 telle que les 620 courbes algébriques complexes rationnelles de degré 4 passant par ces points soient toutes réelles. Vers 2002, Welschinger a proposé une recette pour associer un signe ± 1 à toute courbe algébrique réelle et a montré un résultat surprenant : si on compte les courbes rationnelles de cette manière, alors le résultat ne dépend pas de la configuration ω choisie. Encore plus intéressant, cet invariant donne une nouvelle borne inférieure pour le cardinal de $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$!

3.3. Invariants de Welschinger. Nous avons déjà mentionné à la section 2.3.3 que les courbes rationnelles sont très spéciales parmi toutes les courbes algébriques, et que l'on disposait de techniques particulières pour les étudier. Nous allons ici expliquer comment compter « correctement » les courbes réelles rationnelles pour que le résultat ne dépende pas de la configuration ω choisie. Nous obtiendrons ainsi les *invariants de Welschinger*.

Nous avons vu à la section 3.1 qu'il existe deux types de points doubles réels pour une courbe algébrique réelle, les points doubles isolés et les points doubles non isolés. Un point double isolé est le point d'intersection de deux branches complexes conjuguées de la courbe. Un point double non isolé est le point d'intersection de deux branches réelles.

Définition 3.13. La masse d'une courbe algébrique réelle C , notée $m(C)$, est le nombre de points doubles isolés de C .

Exemple 3.14. La cubique d'équation $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$ (voir Figure 4c) est de masse 0, et la cubique d'équation $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$ (voir Figure 8c) est de masse 1.

Soit ω une configuration générique de $3d - 1$ points dans \mathbb{R}^2 . Posons

$$W(d) = \sum_{C \in \mathbb{RC}(d, 0, \omega)} (-1)^{m(C)}.$$

Le résultat suivant est un des théorèmes majeurs en géométrie énumérative réelle de ces dernières années.

Théorème 3.15 (Welschinger [Wel05a]). *Pour tout $d \geq 1$, le nombre $W(d)$ ne dépend pas de ω .*

Pour nous, l'intérêt principal de l'invariant $W(d)$ est qu'il donne une borne inférieure pour le cardinal de $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$ potentiellement meilleure que celle de la Proposition 3.11.

Proposition 3.16. *Pour tout $d \geq 1$ et toute configuration ω générique de $3d - 1$ points dans \mathbb{R}^2 , on a*

$$|W(d)| \leq \text{card}(\mathbb{RC}(d, 0, \omega)).$$

Démonstration. La proposition découle immédiatement du fait que les courbes de $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$ sont comptées avec un signe ± 1 . \square

Donc si nous arrivons à montrer que les nombres $W(d)$ ne sont pas nuls, nous aurons accompli un progrès dans l'étude du Problème 3 ! On voit facilement avec la Formule de Kontsevich (Théorème 2.25) que les nombres $N(d, 0)$ sont pairs dès que $d \geq 3$, de sorte que nous ne pouvons même pas affirmer immédiatement que par $3d - 1$ point génériques de \mathbb{R}^2 passe au moins une courbe algébrique réelle rationnelle de degré d .

Problème 5. *Les nombres $W(d)$ sont ils nuls ?*

Welschinger a montré que les nombres $W(d)$ ne dépendent pas de la configuration ω choisie, mais il restait à les calculer. Dans son article original, Welschinger a seulement pu démontrer que $W(d)$ était non nul pour $d \leq 5$. Ce n'est que grâce à la géométrie tropicale que les invariants de Welschinger ont pu être calculés pour la première fois par Mikhalkin dans [Mik05]. En se basant sur les travaux de Mikhalkin, Itenberg, Kharlamov et Shustin (voir [IKS03]) ont donné une borne inférieure non triviale pour les nombres $W(d)$ et ont ainsi établi l'existence d'une courbe algébrique réelle rationnelle de degré d passant par n'importe quelle configuration de $3d - 1$ points réels. Un peu plus tard, ils ont montré que les invariants de Welschinger satisfont une formule de type Caporaso-Harris (voir [IKS]). Encore une fois, cette formule est assez compliquée, nous ne la donnerons pas ici. Nous proposons toutefois au Lecteur d'écrire lui-même cette formule à l'Exercice 6.6.

Les premières valeurs de $W(d)$ sont données dans le tableau 3. Notons que pour démontrer la Proposition 3.12, Degtyarev et Kharlamov avaient en fait calculé $W(3)$, et ce avant que Welschinger ait défini ses invariants. Les valeurs de $W(d)$ pour $d \geq 4$ sont dues à Itenberg, Kharlamov et Shustin. Ces derniers ont aussi étudié quelques propriétés de la suite $(W(d))_{d \geq 1}$. Nous verrons ces résultats plus en détail à la section 6.2.

La Proposition 3.12 nous dit que $W(3)$ est la borne inférieure optimale pour $\text{card}(\mathbb{RC}(3, 0, \omega))$. En utilisant les diagrammes en étages (voir section 5), Rey a montré que l'invariant de Welschinger est aussi optimal en degré 4.

d	1	2	3	4	5	6	7
$W(d)$	1	1	8	240	18264	2845440	792731520

TABLE 3. Premières valeurs de $W(d)$

Proposition 3.17 (Rey). *Il existe une configuration générique de 11 points dans \mathbb{R}^2 par laquelle passent exactement 240 courbes algébriques réelles rationnelles de degré 4.*

À partir du degré 5, le problème de l'optimalité de $W(d)$ est toujours ouvert.

Problème 6. *Existe-t-il toujours une configuration générique⁽¹⁵⁾ ω de $3d - 1$ points dans \mathbb{R}^2 telle que le cardinal de $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$ soit exactement $W(d)$?*

Remarque 3.18. Rien ne nous empêche de compter les courbes de $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$ pour tout genre g avec les mêmes signes que pour les courbes rationnelles. Malheureusement, les nombres obtenus ne sont pas invariants par rapport à ω dès que $g \geq 1$ (voir [Wel05a] ou [IKS03])...

⁽¹⁵⁾ *générique* comme configuration de points dans \mathbb{C}^2 . De telles configurations de points réels existent. En effet, il existe un polynôme f à coefficients complexes non tous nuls tel que les coordonnées des points des configurations ω non génériques satisfont à $f = 0$. Lorsque ces coordonnées sont toutes réelles, elles satisfont aux deux équations réelles obtenues en remplaçant les coefficients de f par leur partie réelle, resp. imaginaire. L'une des deux est nécessairement non triviale, donc les configurations de points réels ne peuvent pas toutes être non génériques.

4. Géométrie énumérative tropicale

La géométrie tropicale est une géométrie algébrique comme aux sections 2 et 3, mais au lieu de se fixer un corps de base, on se fixe à la place un *semi-corps* (c'est-à-dire que nous ne disposons pas de la soustraction) de base. Les objets tropicaux que l'on obtient ont alors une nature combinatoire, ce qui facilite la résolution de certains problèmes. Par exemple, la géométrie énumérative tropicale est beaucoup plus simple que ses homologues réelle ou complexe ! La suite de ce texte est destinée à convaincre le Lecteur que la géométrie énumérative tropicale, c'est facile.

L'intérêt majeur de la géométrie tropicale est qu'elle permet de résoudre des problèmes de géométrie classique. Les Théorèmes de Correspondance de Mikhalkin que nous verrons à la section 4.2 en sont de beaux exemples : compter des courbes tropicales revient à compter des courbes algébriques.

4.1. Courbes tropicales nodales. Rappelons (voir la partie 3.3 du texte d'Ilya Itenberg, ce volume), qu'une courbe tropicale dans \mathbb{R}^2 est un graphe équilibré dans \mathbb{R}^2 dont les arêtes sont des intervalles à pente rationnelle et auxquelles nous attribuons un nombre entier appelé *poids*. Une courbe tropicale est *irréductible* si elle n'est pas l'union de deux courbes tropicales, et elle est de *degré* d si son polygone de Newton est le triangle Δ_d de sommets $(0, 0)$, $(0, d)$ et $(d, 0)$. Comme en géométrie complexe, nous appellerons *droite* (resp *conique*, *cubique*) tropicale une courbe tropicale de degré 1 (resp. 2, 3).

Exemple 4.1. Les courbes tropicales des Figures 9b, c et d sont irréductibles. La courbe tropicale de la Figure 9a est réductible, et est l'union d'une droite et d'une conique tropicale. Les courbes tropicales des Figures 9a, c et d sont des cubiques, et celle de la Figure 9b est une conique.

Dans les dessins, on ne précise le poids d'une arête uniquement si celui-ci est au moins 2.

Soient C une courbe tropicale et s un sommet adjacent à une arête a . Comme l'arête a est incluse dans une droite L dont la direction est d'équation à coefficients dans \mathbb{Z} , il existe un vecteur \vec{v} dans \mathbb{Z}^2 tel que $s + \vec{v}$ soit dans L . De plus, si nous demandons que

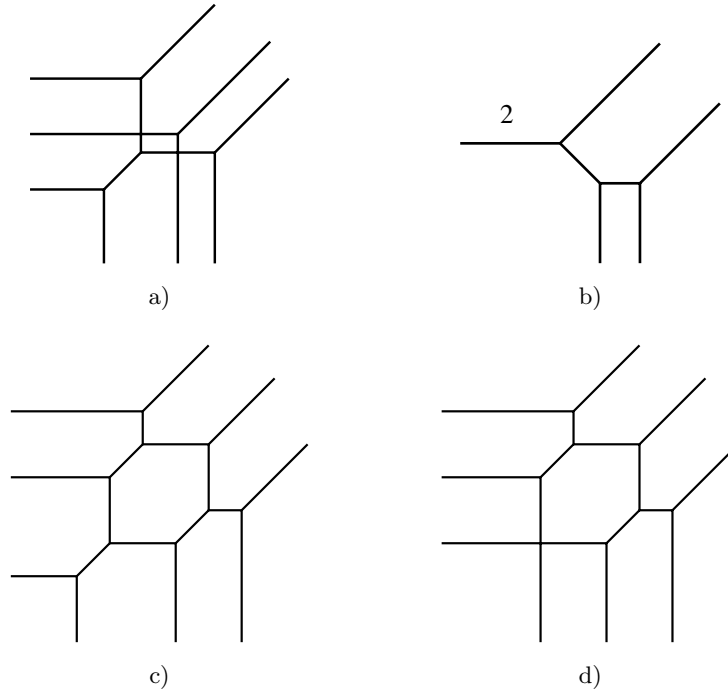


FIGURE 9. Quelques courbes tropicales

les coordonnées de \vec{v} soient premières entre elles, il n'y a plus que deux choix possibles pour \vec{v} suivant sa direction. Nous pouvons fixer cette direction en demandant que le point $s + \varepsilon\vec{v}$ soit dans a pour un nombre réel positif ε assez petit. Nous avons ainsi défini de manière unique un vecteur \vec{v} dans \mathbb{Z} à partir de s et de a .

Définition 4.2. Le vecteur \vec{v} est appelé le vecteur primitif sortant du sommet s suivant l'arête a .

Exemple 4.3. Si s est le sommet d'une droite tropicale, alors les trois arêtes sont contenues dans trois droites d'équations $Y = \beta$, $X = \alpha$ et $X - Y = \alpha - \beta$. Les trois vecteurs primitifs sortant de s sont donc les vecteurs $(-1, 0)$, $(0, -1)$ et $(1, 1)$.

Le nombre maximal de sommets et d'arêtes d'une courbe tropicale s'exprime facilement en fonction du degré de la courbe. Nous aurons besoin dans la suite de la proposition suivante.

Proposition 4.4. Une courbe tropicale C de degré d a au plus d^2 sommets.

Démonstration. D'après la section 3.2 du texte d'Ilia Itenberg, chaque sommet de la courbe C est dual à un polygone de la subdivision de Δ_d duale de C . Un polygone à sommets entiers est d'aire au moins $1/2$ et Δ_d est d'aire $d^2/2$, d'où le résultat. \square

Une courbe tropicale peut être assez compliquée, et comme à la section 2 nous allons travailler avec les plus simples, les courbes nodales.

Définition 4.5. Une courbe tropicale C est nodale si chaque arête non bornée de C est de poids 1 et si chaque sommet de C est trivalent ou quadrivalent. De plus, si s est un sommet quadrivalent adjacent aux arêtes a_1, \dots, a_4 de vecteurs primitifs sortants correspondants $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ alors, quitte à renuméroter les a_i et \vec{v}_i , on a $w(a_1) = w(a_2)$, $w(a_3) = w(a_4)$, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3 = -\vec{v}_4$.

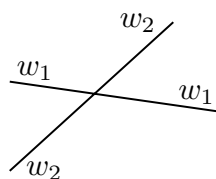


FIGURE 10. Un sommet quadrivalent d'une courbe tropicale nodale

En d'autres termes, une courbe tropicale C est nodale si tous ses sommets qui sont adjacents à au moins 4 arêtes sont en fait adjacents à exactement 4 arêtes et, sur un voisinage de ce sommet, C est l'union de deux intervalles (voir Figure 10). Nous retrouvons la notion de point d'intersection de deux branches de C comme à la section 2.

Exemple 4.6. La courbe tropicale de la Figure 9b n'est pas nodale car une de ses arêtes infinies est de poids 2. Les courbes tropicales des Figures 9a, c, d sont nodales.

Pour calculer le genre d'une courbe algébrique complexe, il suffit de compter le nombre de points doubles de la courbe. En géométrie tropicale, l'idée est toujours la même mais la définition est un peu

différente car un sommet quadrivalent peut compter pour plusieurs points doubles, et un sommet trivalent peut aussi « cacher » des points doubles.

Définition 4.7. Soit C une courbe tropicale irréductible nodale de degré d avec σ sommets trivalents. Le genre de C , noté $g(C)$ est défini par

$$g(C) = \frac{\sigma - 3d + 2}{2}.$$

Comme dans le cas des courbes algébriques, le genre est un entier compris entre 0 et $(d-1)(d-2)/2$.

Exemple 4.8. La courbe tropicale de la Figure 9d est de genre 0. La courbe tropicale de la Figure 9c est de genre 1.

Comme en géométrie complexe, nous appellerons *courbe tropicale rationnelle* une courbe tropicale de genre 0.

4.2. Théorèmes de correspondance. Nous avons maintenant toutes les définitions requises pour pouvoir faire de la géométrie énumérative tropicale. Fixons-nous un degré $d \geq 1$, un genre $g \geq 0$, et une configuration générique $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$ de $3d-1+g$ points dans \mathbb{R}^2 . Considérons alors l'ensemble $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ de toutes les courbes tropicales irréductibles nodales⁽¹⁶⁾ de degré d , de genre g , passant par tous les points de ω .

Proposition 4.9 (Mikhalkin, [Mik05]). *Si la configuration de points ω est générique, alors l'ensemble $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ est fini.*

Exemple 4.10. Si nous prenons $d = 1$ (et donc $g = 0$), nous regardons alors les droites tropicales passant par deux points de \mathbb{R}^2 . Si les deux points sont sur une même droite (habituelle!) d'équation $X = \alpha$ ou $Y = \alpha$ ou $X = Y + \alpha$, alors il existe une infinité de droites tropicales passant par ces deux points (voir la Figure 11a). Dans ce cas, les deux points ne sont pas en position générique. Par contre, si les deux points ne sont pas sur une telle droite, alors il existe une unique droite

⁽¹⁶⁾Comme dans le cas algébrique, il existe une notion de genre pour toute courbe tropicale, et pour une configuration générique ω , toutes les courbes de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ seront nodales. On peut donc encore une fois oublier de préciser « nodales » dans l'énoncé du problème.

tropicale passant par ces deux points, comme nous le voyons sur les Figures 11b, c et d pour différentes paires de points. Nous retrouvons ainsi le même résultat que pour les droites algébriques !

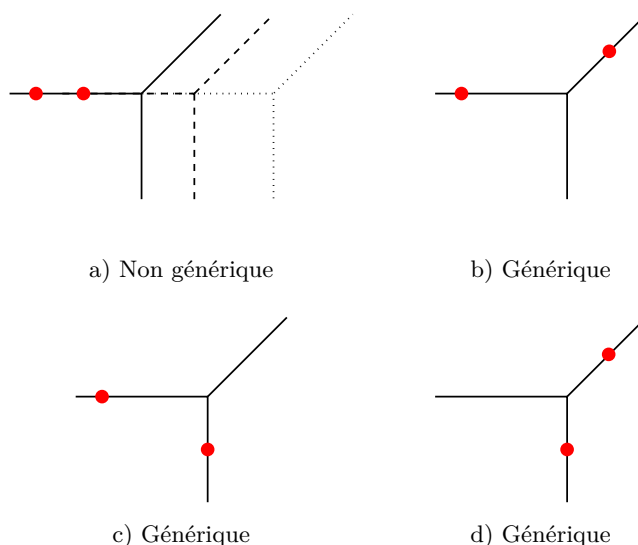


FIGURE 11. Deux points dans \mathbb{R}^2 et les droites les contenant

Exemple 4.11. Fixons-nous maintenant $d = 2$ (et donc $g = 0$). Nous comptons les coniques tropicales passant par 5 points en position générique, et dans ce cas encore nous en trouvons une unique. Comme pour les courbes algébriques ! Nous pouvons voir cette conique tropicale pour un exemple de configuration sur la Figure 12a. La preuve que cette conique est la seule sera donnée à la section 5.

Exemple 4.12. Pour $d = 3$, le genre peut être 0 ou 1. Si nous fixons $g = 1$, alors comme aux Exemples 4.10 et 4.11, nous trouvons une unique cubique de genre 1 passant par 9 points génériques (voir Figure 12b). Regardons maintenant les cubiques tropicales rationnelles passant par une configuration de 8 points. La Figure 13 nous donne toutes les cubiques tropicales rationnelles passant par une telle configuration. La preuve que toutes les cubiques rationnelles passant par les 8 points choisis sont bien représentées sur la Figure 13 sera donnée à la section 5. Nous avons alors beau compter et recompter, nous ne trouvons que 9 cubiques tropicales rationnelles passant par nos 8

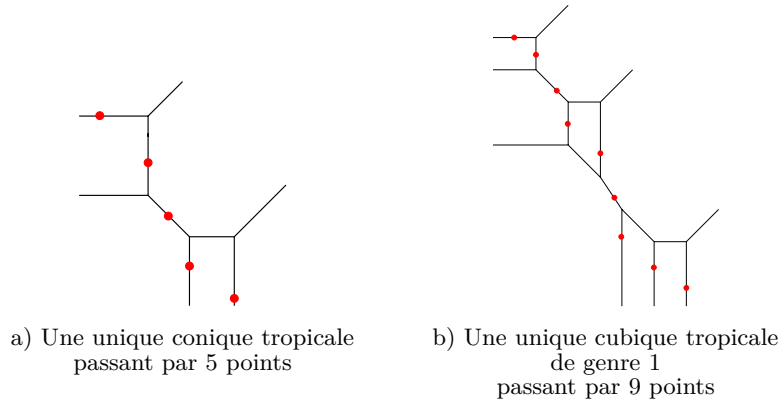


FIGURE 12. Deux solutions de problèmes énumératifs tropicaux

points, rien à voir avec le nombre $N(3, 0)$ égal à 12... La similitude entre la géométrie tropicale et la géométrie complexe s'arrêterait-elle ici ?

En fait, nous trouvons 9 dans l'exemple précédent car nous comptons mal. Nous avons déjà vu à la Définition 4.7 du genre d'une courbe tropicale nodale qu'un point d'intersection de deux branches pouvait en fait compter pour plusieurs points doubles. La situation est analogue ici : il peut arriver, et il arrive souvent, que l'on doive compter une courbe tropicale de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ plusieurs fois. En d'autres termes, il faut attribuer à chaque courbe une *multiplicité*, et compter les courbes de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ avec cette multiplicité.

Quelle est donc cette multiplicité ? Soit C une courbe tropicale nodale, et s un sommet trivalent de C adjacent aux arêtes a_1, a_2 et a_3 de vecteurs primitifs sortants correspondants \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 . La multiplicité complexe de s est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(s) = w(a_1)w(a_2)|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|.$$

Grâce à la condition d'équilibre, le nombre $\mu_{\mathbb{C}}(s)$ ne dépend pas de la numérotation des a_i . Une définition équivalente de la multiplicité du sommet v est $\mu_{\mathbb{C}}(s) = 2\mathcal{A}(v^\nu)$ où $\mathcal{A}(v^\nu)$ désigne l'aire euclidienne du triangle dual v^ν de v dans la subdivision de Δ_d duale de C (voir la partie 3.2 du texte d'Ilya Itenberg) Notons $\Gamma_{0,3}$ l'ensemble des sommets trivalents de C .

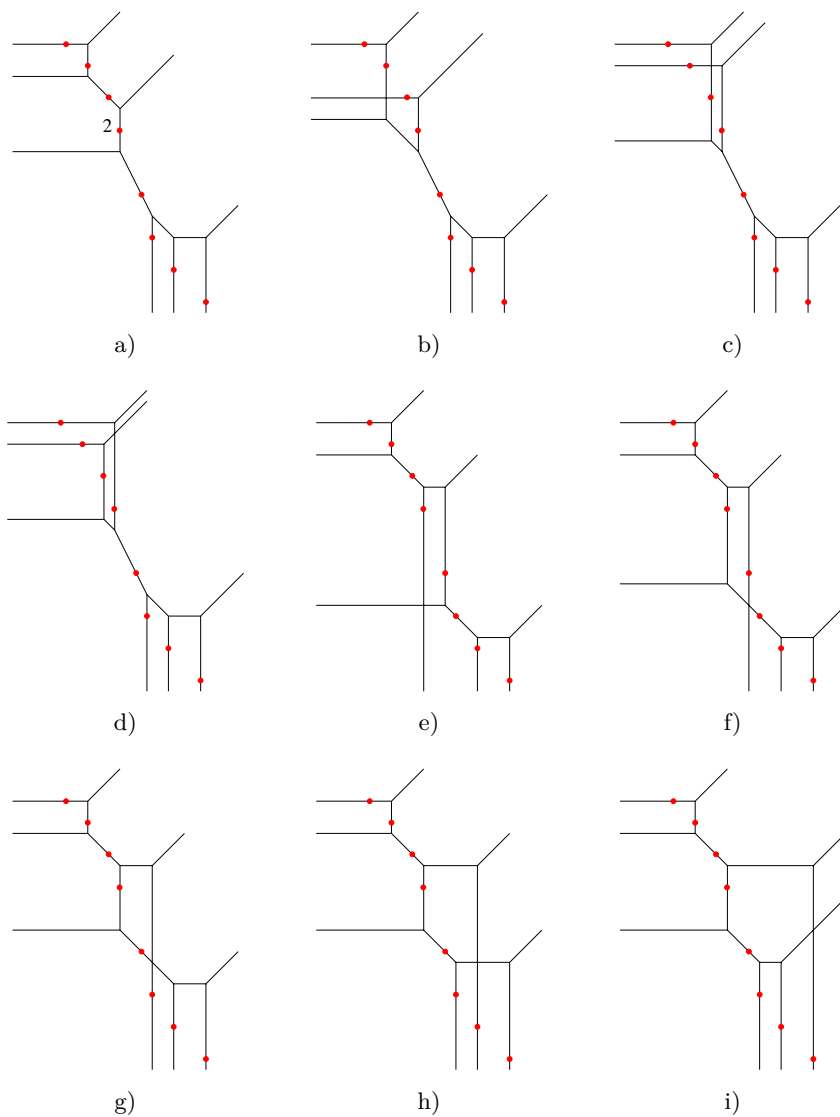


FIGURE 13. Cubiques tropicales rationnelles passant par 8 points

Définition 4.13. La multiplicité complexe d'une courbe tropicale nodale C , notée $\mu_{\mathbb{C}}(C)$, est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(C) = \prod_{s \in \Gamma_{0,3}} \mu_{\mathbb{C}}(s).$$

Quelle est la signification de cette multiplicité? Pour $t \geq e = 2,71828\dots$, notons Φ_t le difféomorphisme de $(\mathbb{C}^*)^2$ défini par

$$(z, w) \mapsto \left(\frac{z}{|z|} |z|^{1/\ln t}, \frac{w}{|w|} |w|^{1/\ln t} \right).$$

En particulier, $\Phi_e = \text{Id}$, et $\text{Log} \circ \Phi_t \circ \text{Log}^{-1} = F_t$ (voir les parties 4 et 5 du texte d'Ilia Itenberg, et la partie 7 du texte de Bernard Teissier, ce volume). Prenons une configuration générique ω de $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{R}^2 , et ω_0 une configuration générique de $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{C}^2 telle que $\text{Log}(\omega_0) = \omega$. Dans son article [Mik05], Mikhalkin montre que lorsque t tend vers l'infini, les images par F_t des amibes des courbes algébriques dans $\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$ tendent vers les courbes tropicales de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$. La multiplicité d'une courbe tropicale C dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ est alors précisément le nombre de courbes algébriques dans $\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$ dont l'image par F_t de l'amibe tend vers C . Pour faire le lien entre les explications précédentes et les amibes non archimédiennes, on peut se reporter au Théorème 12 du texte d'Ilia Itenberg, ou au Théorème 7.1 du texte de Bernard Teissier.

Avec ces précisions, il devient clair que c'est avec la multiplicité $\mu_{\mathbb{C}}(C)$ qu'il faut compter les courbes tropicales.

Théorème 4.14 (Mikhalkin [Mik05]). *Pour tous $d \geq 1$, $g \geq 0$, et ω générique, on a l'égalité*

$$N(d, g) = \sum_{C \in \mathbb{TC}(d, g, \omega)} \mu_{\mathbb{C}}(C).$$

Il n'est pas difficile de voir que le cardinal de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ dépend de ω . Un corollaire immédiat du Théorème 4.14 est que le nombre de courbes tropicales dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ comptées avec multiplicité ne dépend pas de ω .

Exemple 4.15. Toutes les courbes tropicales des Figures 11, 12 et 13 sont de multiplicité complexe 1 sauf la courbe de la Figure 13a qui est de multiplicité complexe 4. Nous retrouvons ainsi $N(1, 0) = N(2, 0) = N(3, 1) = 1$ et $N(3, 0) = 12$.

Ainsi, la géométrie énumérative tropicale donne les mêmes résultats que la géométrie énumérative complexe. Qu'en est-il de la géométrie énumérative réelle? Dans la démonstration du Théorème 4.14,

il est possible de choisir $\omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ et donc de considérer les ensembles $\mathbb{R}\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$. Mikhalkin montre alors que lorsque t tend vers l'infini, la somme des signes de Welschinger des courbes algébriques réelles dans $\mathbb{R}\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$ peut se calculer très facilement à partir de la seule connaissance de C et est égale à $-1, 0$ ou 1 . C'est-à-dire qu'il existe une multiplicité réelle d'une courbe tropicale rationnelle telle qu'en comptant les courbes tropicales dans $\mathbb{T}\mathcal{C}(d, 0, \omega)$ avec cette multiplicité, on retrouve l'invariant de Welschinger. Soit C une courbe tropicale rationnelle nodale, et s un sommet trivalent de C . Si $\mu_{\mathbb{C}}(s)$ est pair, alors la multiplicité réelle de C sera 0. Si $\mu_{\mathbb{C}}(s)$ est impair, sa valeur modulo 4 est soit 1 soit 3. Posons

$$o(C) = \text{card}(\{s \text{ sommet trivalent de } C \text{ tel que } \mu_{\mathbb{C}}(s) = 3 \pmod{4}\}).$$

Définition 4.16. La multiplicité réelle d'une courbe tropicale nodale irréductible C , notée $\mu_{\mathbb{R}}(C)$, est définie par

$$\mu_{\mathbb{R}}(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{C}}(C) \text{ est pair,} \\ (-1)^{o(C)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 4.17 (Mikhalkin [Mik05]). Pour tous $d \geq 1$ et ω générique, on a l'égalité

$$W(d) = \sum_{C \in \mathbb{T}\mathcal{C}(d, 0, \omega)} \mu_{\mathbb{R}}(C).$$

Exemple 4.18. Toutes les courbes tropicales rationnelles sur les Figures 11, 12a et 13 sont de multiplicité réelle 1 sauf la courbe de la Figure 13a qui est multiplicité réelle 0. Nous retrouvons ainsi $W(1) = W(2) = 1$ et $W(3) = 8$.

Remarque 4.19. Nous pouvons très bien attribuer avec les mêmes règles une multiplicité réelle à une courbe tropicale nodale irréductible de *n'importe quel* genre. Une surprise nous attend alors (voir [IKS]) : contrairement à ce qui se passe pour les courbes algébriques réelles, ces nombres tropicaux ne dépendent pas de ω ! On ne comprend toujours pas les raisons profondes de cette invariance tropicale.

5. Décomposition en étages de courbes tropicales

Les Théorèmes 4.14 et 4.17 réduisent déjà nos problèmes énumératifs en géométrie algébrique à des problèmes combinatoires : il suffit de

compter certains graphes rectilignes dans \mathbb{R}^2 . Les décompositions en étages sont une étape supplémentaire dans la simplification du calcul des nombres $N(d, g)$ et $W(d)$. L'idée est de prendre une configuration quelconque de points, et d'éloigner les points les uns des autres dans la direction verticale. À mesure que les points s'éloignent, nos courbes tropicales se « cassent » en morceaux très simples, et le tour est joué. Cette méthode peut être vue comme une variante tropicale de la méthode de Caporaso et Harris en géométrie énumérative complexe.

5.1. Étages d'une courbe tropicale. Puisque nous distinguons une direction particulière dans \mathbb{R}^2 , les arêtes d'une courbe tropicale se trouvent naturellement divisées en deux catégories. Assez logiquement, nous appelons arêtes *verticales* d'une courbe tropicale celles qui sont parallèles à la droite d'équation $X = 0$.

Définition 5.1. Un étage d'une courbe tropicale C est une composante connexe de C privée de ses arêtes verticales.

Les mathématiques étant basées sur le monde observé, deux étages seront naturellement reliés par un *ascenseur*.

Définition 5.2. Une composante connexe d'une courbe tropicale C privée de ses étages est appelée un ascenseur.

Remarque 5.3. Pour être totalement rigoureux, il faudrait écrire *une composante connexe de l'adhérence de...* dans les deux définitions précédentes.

En général, les ascenseurs sont une union d'arêtes verticales, mais ne sont pas eux même des arêtes verticales comme on peut le voir sur les Figures 13d, e, ..., i. Puisqu'un sommet quadrivalent d'une courbe tropicale nodale est l'intersection de deux intervalles, la Définition 4.5 nous permet de parler du poids d'un ascenseur d'une courbe tropicale nodale.

Exemple 5.4. Les ascenseurs, qui sont aussi des arêtes verticales ici, des courbes tropicales de la Figure 14 sont dessinées en pointillés, leurs étages sont dessinés en traits pleins. Leur poids est à chaque fois 1.

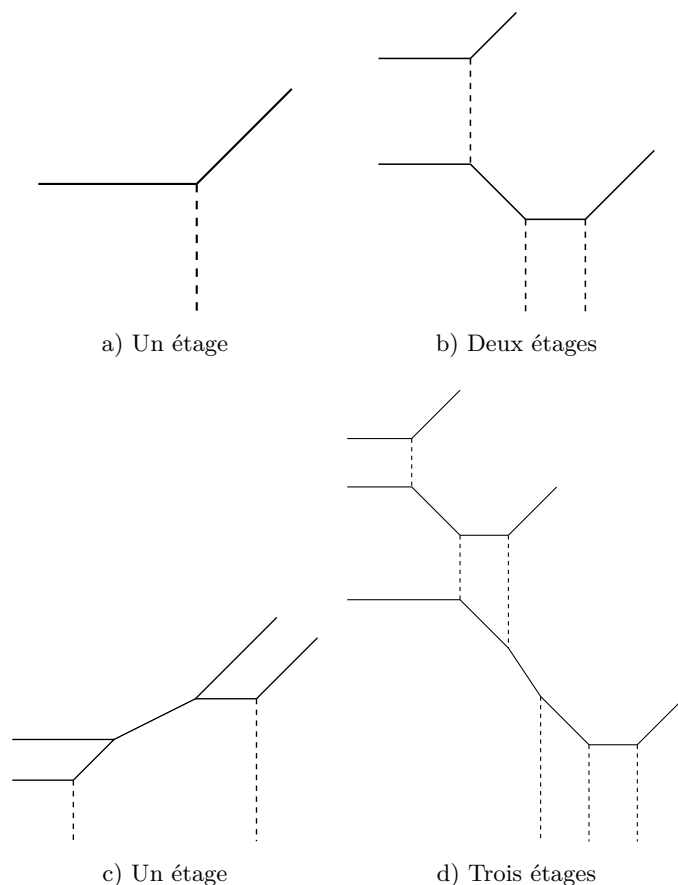


FIGURE 14. Étages de courbes tropicales

Comme d'habitude, on se fixe un degré d , un genre g , une configuration $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$ de $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{R}^2 , et on considère l'ensemble $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$. Maintenant, envoyons un par un les points p_i « très haut », et observons ce qui se passe.

Exemple 5.5. Supposons que $d = 1$ et que nous partons de la configuration de la Figure 15a. Lorsque nous déplaçons le point p_2 vers le haut, le sommet de la droite tropicale passant par p_1 et p_2 se déplace vers la gauche (Figure 15b) jusqu'à coïncider avec p_1 (Figure 15c, notons que la configuration $\{p_1, p_2\}$ n'est alors pas générique), puis le sommet de la droite se déplace vers le haut et p_1 se trouve désormais

sur l'ascenseur (Figure 15b). Si nous continuons à déplacer p_2 vers le haut, le sommet de la droite continue à monter, mais rien d'autre ne se passe.

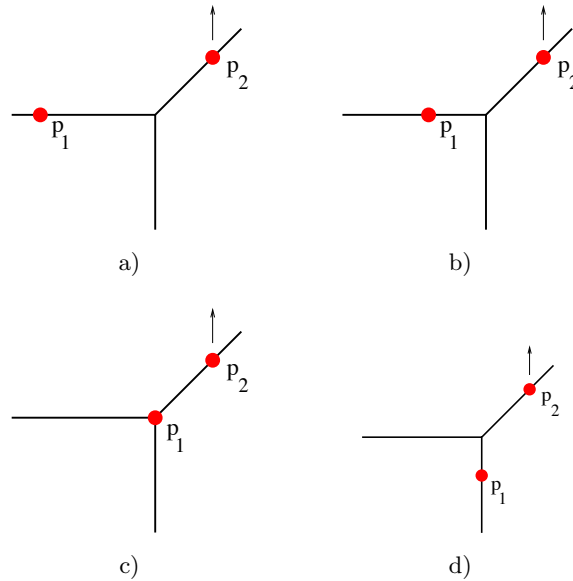


FIGURE 15. On monte le point p_2

Exemple 5.6. Prenons maintenant $d = 2$ et la configuration de la Figure 16a. Lorsque nous déplaçons le point p_5 vers le haut, comme à l'Exemple 5.5 nous arrivons à la courbe tropicale de la Figure 16b. Puis, si nous montons le point p_4 , celui-ci se déplace le long de l'ascenseur, et si nous gardons la distance entre p_5 et p_4 très grande, rien ne se passe. De même, en montant à présent le point p_3 , alors nous arrivons au bout d'un moment à la courbe tropicale de la Figure 16c, et plus rien ne se passe lorsque nous montons les points p_2 puis p_1 tout en gardant une distance très grande entre les points p_i .

Dans les deux exemples précédents, on observe le même phénomène. Si les points p_i sont suffisamment éloignés les uns des autres, alors chaque étage et chaque ascenseur contient *exactement* un point de ω . Ainsi, la répartition des points de ω sur les courbes tropicales devient très simple! Étudions maintenant ce qui se passe dans le cas général.

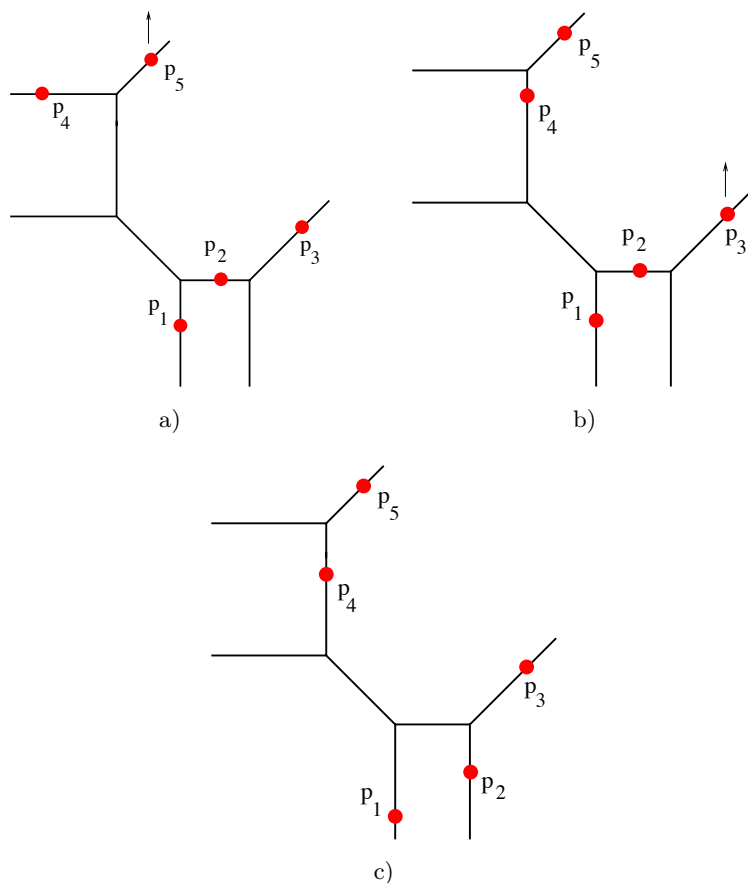


FIGURE 16. On monte les points un par un

Revenons à une configuration générique ω quelconque, et soit $[u; v]$ un segment de \mathbb{R} . La proposition suivante nous dit que si $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$, alors toute l'information intéressante à propos des courbes de $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$ se trouve aussi dans le ruban $[u; v] \times \mathbb{R}$.

Lemme 5.7. *Si tous les points de ω sont dans $[u; v] \times \mathbb{R}$, alors tous les sommets de toutes les courbes tropicales de $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$ sont aussi dans $[u; v] \times \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde : s'il existe une courbe de $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$ ayant un sommet dans le demi-plan $\{(x, y) \mid x < u\}$, nous allons alors montrer qu'il existe un nombre

infini de courbes tropicales dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ en contradiction avec la Proposition 4.9. Le cas d'une courbe ayant un sommet dans le demi-plan $\{(x, y) \mid x > v\}$ se traite de la même manière, nous ne le ferons pas ici.

Supposons donc qu'il existe une courbe tropicale C dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ ayant un sommet dans le demi-plan $\{(x, y) \mid x < u\}$. Soit $s = (x_0, y_0)$ un sommet de C dont l'abscisse est la plus petite parmi les sommets de C . Par hypothèse, $x_0 < u$. Puisqu'il n'existe pas d'autres sommets de C strictement à gauche de s , toutes les arêtes strictement à gauche de s sont infinies dans la direction $(-1, 0)$, s est adjacent à l'une d'entre elles et nous pouvons choisir s trivalent. De plus, par la condition d'équilibre, les deux autres arêtes adjacentes à s sont de vecteurs primitifs sortant $(0, \pm 1)$ et $(1, \alpha)$ (on ne sait rien sur les poids a priori). Puisque aucun point de ω ne se trouve à gauche de s , nous pouvons alors construire facilement un nombre infini de courbes tropicales dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$, simplement en translatant l'arête verticale dans la direction $(-1, 0)$. Le cas où l'arête verticale est adjacente à un autre sommet de C est représenté sur la Figure 17. \square

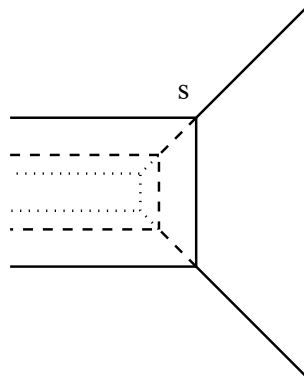


FIGURE 17. Une famille infinie de courbes tropicales

Gardons maintenant le segment $[u; v]$ fixe, et éloignons tous les points les uns des autres comme dans les Exemples 5.5 et 5.6. Au bout d'un moment, pour aller d'un point p_i à un autre en restant sur une courbe tropicale de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$, nous sommes obligés de passer par une arête verticale.

Corollaire 5.8. *Pour tout segment $[u; v]$, il existe un nombre réel A tel que si $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$ et $|y_i - y_j| > A$ pour tout couple de points distincts (x_i, y_i) et (x_j, y_j) de ω , alors chaque étage de chaque courbe de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ contient exactement un point de ω .*

Démonstration. Soit C une courbe de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$. Tout d'abord, pour toute configuration ω , chaque étage de C contient au moins un point de ω . Dans le cas contraire, on pourrait alors translater un étage vide de point de ω dans la direction $(0, 1)$ et construire ainsi une famille infinie de courbes dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ en contradiction avec la Proposition 4.9.

En raison du théorème de Bézout tropical (voir la partie 3.5 du texte d'Ilya Itenberg), toute arête a de vecteur primitif \vec{v} d'une courbe tropicale de degré d vérifie $w(a)\vec{v} = (\alpha, \beta)$ avec $|\alpha|$ et $|\beta|$ plus petits que d . Cela entraîne qu'il existe un nombre $M(d)$ qui majore la pente de toute arête non verticale d'une courbe tropicale de degré d .

Prenons maintenant une configuration $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$. Soient C une courbe tropicale de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ et γ un chemin dans C reliant deux points (x_i, y_i) et (x_j, y_j) de ω . Supposons que γ ne contienne pas d'arête verticale de C . Les deux points sont donc sur le même étage de C . D'après le Lemme 5.7, tous les sommets de C sont dans le ruban $[u; v] \times \mathbb{R}$. Or, d'après la Proposition 4.4 le nombre de sommets de C est plus petit que d^2 , et les pentes des arêtes non verticales de C sont uniformément bornées par $M(d)$, donc la quantité $|y_i - y_j|$ est bornée par un nombre A qui ne dépend que du degré d . Ainsi, si $|y_i - y_j| > A$ pour tous les couples de points de ω , chaque étage de C ne peut contenir plus d'un point de ω . \square

Rappelons que si C est une courbe tropicale nodale, alors le nombre de sommets trivalents de C est noté σ (Définition 4.7).

Corollaire 5.9. *Si la distance entre les points de ω est assez grande, alors chaque courbe de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ a exactement d étages et $2d - 1 + g$ ascenseurs. De plus, toute arête d'un étage d'une courbe de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ est de vecteur directeur primitif $(1, \alpha)$, avec α dans \mathbb{Z} , et est de poids 1.*

Démonstration. Soit C une courbe tropicale dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$, soient e le nombre d'étages de C et v son nombre d'ascenseurs. Tout d'abord,

comme C a exactement d arêtes infinies dans la direction $(-1, 0)$ et que chaque étage contient au moins une de ces arêtes, nous avons $e \leq d$. Nous allons maintenant montrer que $v \leq 2d - 1 + g$. Les extrémités d'un ascenseur sont soit deux sommets trivalents de C (si l'ascenseur est borné), soit un sommet trivalent de C (si l'ascenseur n'est pas borné). Comme C a exactement d ascenseurs infinis, nous avons l'inégalité $2v \leq \sigma + d$. Mais par définition du genre d'une courbe tropicale $\sigma = 2g + 3d - 2$, donc $v \leq 2d - 1 + g$ comme annoncé.

Comme ω est une configuration générique, un ascenseur de C ne peut pas contenir deux points de ω . Sinon, cela voudrait dire que deux points de ω ont la même abscisse, ce que l'on peut toujours éviter. Donc, d'après le Corollaire 5.8, la courbe C ne peut pas contenir plus de $3d - 1 + g$ points de ω . Mais comme par hypothèse C contient exactement $3d - 1 + g$ points de ω , nous avons forcément les égalités $e = d$ et $v = 2d - 1 + g$.

Une droite verticale ne contenant pas d'ascenseur a une multiplicité d'intersection avec chaque étage au moins égale à 1. Or, le nombre d'intersection total d'une courbe tropicale de degré d et d'une droite verticale est exactement d d'après le théorème de Bézout (voir la partie 3.5 du texte d'Ilya Itenberg), donc si C contient d étages, la multiplicité d'intersection de chacun de ces étages avec une droite verticale est exactement égale à 1. Si une arête est de vecteur primitif (α, β) et de poids w , sa multiplicité d'intersection de 1 avec une droite verticale est $w\alpha$, d'où la dernière assertion du corollaire. \square

Le Corollaire 5.9 implique qu'une courbe tropicale dans $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ est entièrement déterminée par la répartition des points de ω sur les ascenseurs et les étages de C ! Dans l'énumération des courbes tropicales de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$, nous pouvons donc finalement oublier les courbes tropicales, et uniquement nous rappeler comment les ascenseurs relient les étages et comment les points de ω se répartissent. Le codage de ces informations est appelé un *diagramme en étages marqué*.

5.2. Énumération de diagrammes en étages. Pour définir les diagrammes en étages, nous avons besoin de quelques définitions abstraites préalables.

Définition 5.10. Un graphe Γ connexe orienté est la donnée d'un ensemble fini de points Γ_0 , d'une liste finie Γ_1 d'éléments de $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ et d'une liste finie Γ_1^∞ d'éléments de Γ_0 , tels qu'étant donnés deux points distincts t_1 et t_2 de Γ_0 , il existe une suite d'éléments $s_1 = t_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k = t_2$ de Γ_0 vérifiant $(s_i, s_{i+1}) \in \Gamma_1$ ou $(s_{i+1}, s_i) \in \Gamma_1$ pour tout i .

Les éléments de Γ_0 (resp. $\Gamma_1, \Gamma_1^\infty$) sont appelés les sommets (resp. arêtes bornées, arêtes non bornées) de Γ .

Les graphes définis ici sont *abstrait*, c'est-à-dire qu'ils ne vivent pas a priori dans \mathbb{R}^2 ou dans n'importe quel autre espace. On peut cependant, et c'est ce que nous ferons dans ce texte, se représenter un graphe géométriquement : les sommets s sont des points (en fait des ellipses ici), les arêtes bornées (s_i, s_j) sont des segments joignant les sommets s_i et s_j et orientés de s_i vers s_j , et les arêtes non bornées sont des demi-droites dont l'extrémité est s et orientées vers s . La condition de la Définition 5.10 signifie que le dessin ainsi obtenu doit être connexe.

Remarque 5.11. Γ_1^∞ est une liste d'éléments de Γ_0 , et non pas un sous-ensemble de Γ_0 ! Certains sommets de Γ_0 peuvent très bien se répéter dans Γ_1^∞ , c'est-à-dire que plusieurs arêtes non bornées peuvent arriver sur le même sommet. De même, Γ_1 est une liste d'éléments de $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ et pas un sous-ensemble de $\Gamma_0 \times \Gamma_0$.

Exemple 5.12. Des exemples de graphes orientés avec 3 sommets sont représentés sur la Figure 18.

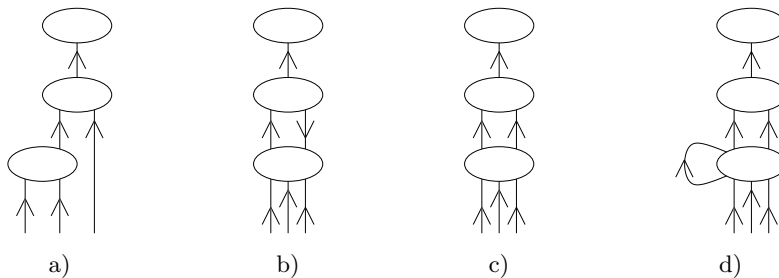


FIGURE 18. Quelques graphes orientés

Évidemment, les graphes que nous allons considérer dans la suite vont représenter comment une courbe tropicale C peut se décomposer en étages. Les sommets d'un graphe correspondent aux étages de C et les arêtes correspondent aux ascenseurs.

Certains graphes orientés peuvent avoir des *cycles*, c'est-à-dire qu'il est possible à partir d'un sommet du graphe, de parcourir les arêtes suivant l'orientation et de revenir au même point. Pour la suite, nous ne devons pas considérer ce type de graphe.

Définition 5.13. Un graphe orienté est acyclique s'il ne contient pas de suite d'arêtes $(s_1, s_2), (s_2, s_3), \dots, (s_{k-1}, s_k), (s_k, s_1)$.

Exemple 5.14. Les graphes orientés des Figures 18a et c sont acycliques, mais pas ceux des Figures 18b et d.

Il ne reste plus qu'à identifier les conditions pour qu'un graphe acyclique code une décomposition en étages d'une courbe tropicale.

Définition 5.15. Soient $d \geq 1$ et $g \geq 0$. Un diagramme en étages \mathcal{D} de degré d et de genre g est la donnée d'un graphe acyclique Γ et d'une application appelée poids $w : \Gamma_1 \cup \Gamma_1^\infty \rightarrow \mathbb{N}^*$ tels que

- le graphe Γ a d sommets, $d - 1 + g$ arêtes bornées et d arêtes non bornées,
- pour tout sommet s de Γ , si a_1, \dots, a_k (resp. b_1, \dots, b_ℓ) sont les arêtes entrantes (resp. sortantes) adjacentes à s , alors

$$\sum_{i=1}^k w(a_i) - \sum_{i=1}^{\ell} w(b_i) = 1.$$

Remarque 5.16. Cette définition implique que toutes les arêtes non bornées d'un diagramme en étages sont de poids 1.

Afin d'alléger un peu les notations, nous confondrons dans la suite un diagramme en étage \mathcal{D} et le graphe acyclique Γ sous-jacent. Comme pour les courbes tropicales on ne marque le poids d'une arête d'un diagramme en étages uniquement lorsque celui-ci est au moins 2. De plus, comme les diagrammes en étages sont acycliques, on les oriente implicitement dans les dessins du bas vers le haut.

Exemple 5.17. Les graphes orientés des Figures 18a et c sont des diagrammes en étages. Leur degré est 3 et leur genre est respectivement 0

et 1. D'autres diagrammes en étages sont représentés à la Figure 19 (l'orientation est implicite du bas vers le haut).

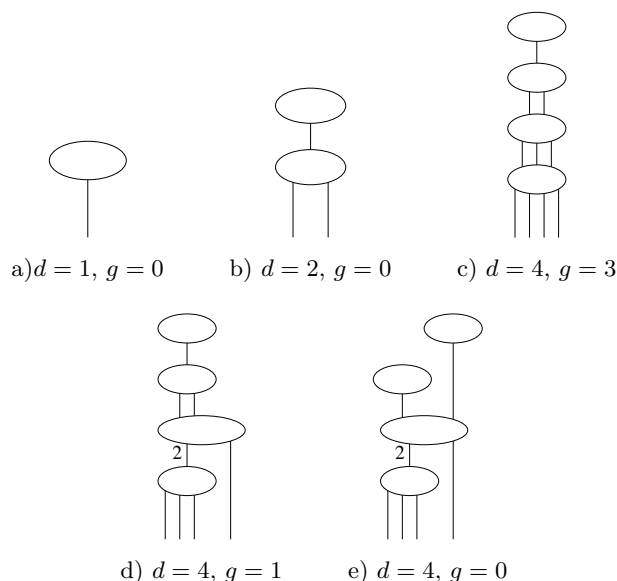


FIGURE 19. Quelques diagrammes en étages

Pour terminer, il ne nous reste plus qu'à coder la répartition des points de ω sur un diagramme en étages. L'orientation d'un diagramme en étages \mathcal{D} nous induit un ordre partiel sur celui-ci : étant donné deux points p et q de \mathcal{D} , on dit que q est plus grand que p si on peut aller de p à q en « suivant les flèches ». Plus précisément, s'il existe un chemin orienté dans \mathcal{D} allant de p à q .

Exemple 5.18. Sur la Figure 20a, le point 2 est plus grand que 1. Sur la Figure 20b, le point 1 est plus grand que 2. Sur la Figure 20e, les points 1 et 5 ne sont pas comparables.

Nous dirons qu'une application $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$ est croissante si $m(i) \geq m(j)$ implique que $i \geq j$.

Définition 5.19. Un diagramme en étages marqué de degré d et de genre g est la donnée d'un diagramme en étages \mathcal{D} de degré d et de genre g muni d'une bijection croissante $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$.

Exemple 5.20. La Figure 20 représente des diagrammes en étages munis d'une bijection $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$. La Figure 20b n'est pas un diagramme en étages marqué car l'application m n'est pas croissante. Les Figures 20a, c, d, e et f sont des diagrammes en étages marqués.

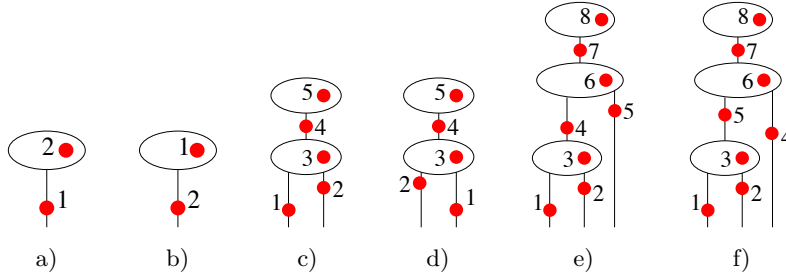


FIGURE 20. Marquages

Enfin, pour être vraiment rigoureux, il faut considérer les diagrammes en étages marqués à *isomorphisme près*.

Définition 5.21. Deux diagrammes en étages marqués (\mathcal{D}, m) et (\mathcal{D}', m') sont dits isomorphes s'il existe une bijection $\phi : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ telle que

- l'application $(s_1, s_2) \mapsto (\phi(s_1), \phi(s_2))$ est une bijection de Γ_1 dans Γ'_1 ,
- l'application $s \mapsto \phi(s)$ est une bijection de Γ_1^∞ dans $\Gamma_1^{\infty'}$,
- $w = w' \circ \phi$,
- $m = m' \circ \phi$.

Malgré son apparente aridité, cette définition sert juste à identifier les diagrammes en étages marqués que l'on a intuitivement envie d'identifier.

Exemple 5.22. Les diagrammes en étages marqués des Figures 20c et d sont isomorphes, mais pas ceux des Figures 20e et f.

On note $\mathcal{E}(d, g)$ l'ensemble des classes d'équivalence des diagrammes en étages marqués de degré d et de genre g . Dans la suite, nous confondrons un diagramme en étages marqué et sa classe d'équivalence. Afin d'alléger les notations, nous noterons aussi simplement

par \mathcal{D} un diagramme en étages marqué lorsque cela ne prêterait pas à confusion.

De même que dans le cas des courbes tropicales, il faut associer une multiplicité réelle et complexe à un diagramme en étages marqué.

Définition 5.23. Soit \mathcal{D} un diagramme en étages marqué. Alors la multiplicité complexe de \mathcal{D} , notée $\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D})$, est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) = \prod_{a \text{ arête de } \mathcal{D}} w(a)^2.$$

La multiplicité réelle de \mathcal{D} , notée $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D})$, est définie par

$$\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = \mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) \pmod{2}.$$

C'est-à-dire que $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = 0$ si $\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D})$ est pair, et $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = 1$ sinon. Notons que les multiplicités d'un diagramme en étages marqué ne dépendent en fait que du diagramme en étages sous-jacent et sont toujours positives ou nulles.

Théorème 5.24 (Brugallé & Mikhalkin, [BM07])

Pour tous $d \geq 1$ et $g \geq 0$, on a

$$N(d, g) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{E}(d, g)} \mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad W(d) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{E}(d, 0)} \mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}).$$

Démonstration. Soit ω une configuration générique de $3d-1+g$ points de \mathbb{R}^2 . D'après les Corollaires 5.8 et 5.9, si les distances entre les points de ω sont assez grandes il y a une bijection naturelle entre les éléments de $\mathcal{E}(d, g)$ et les courbes tropicales de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$. Il reste à déterminer la multiplicité d'une courbe tropicale décomposée en étages. Soient C une courbe tropicale de $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ et s un sommet trivalent de C . D'après le Corollaire 5.9, le sommet s se situe sur un étage de C et est adjacent à un ascenseur de poids w_1 et à une arête a de poids 1 et de vecteur primitif sortant $(1, \alpha)$. On a donc $\mu_{\mathbb{C}}(s) = w_1$. Comme tous les ascenseurs bornés sont adjacents à deux sommets, et que tous les ascenseurs non bornés sont de poids 1, on a bien que $\mu_{\mathbb{C}}(C)$ est égale au produit des carrés des poids des ascenseurs.

Si un des ascenseurs de C est de poids pair, alors $\mu_{\mathbb{R}}(C) = 0$. Sinon, pour la même raison que dans le calcul de $\mu_{\mathbb{C}}(C)$, la multiplicité réelle $\mu_{\mathbb{R}}(C)$ est positive.

Le théorème découle maintenant des Théorèmes 4.14 et 4.17. \square

Exemple 5.25. Les seuls diagrammes en étages marqués en degrés 1 et 2 sont ceux des Figures 20a et c. Comme ils sont de multiplicité complexe 1, nous retrouvons bien $N(1,0) = N(2,0) = W(1) = W(2) = 1$.

Exemple 5.26. Tous les diagrammes en étages de degré 3 sont représentés à la Figure 21. Celui de la Figure 21a est de genre 1 et il n'en existe qu'un marquage. Nous retrouvons bien $N(3,1) = 1$. Tous les autres diagrammes en étages de la Figure 21 sont de genre 0. Il existe respectivement 1, 5 et 3 marquages possibles pour les diagrammes des Figures 21b, c et d. Nous retrouvons bien $N(3,0) = 12$ et $W(3) = 8$.

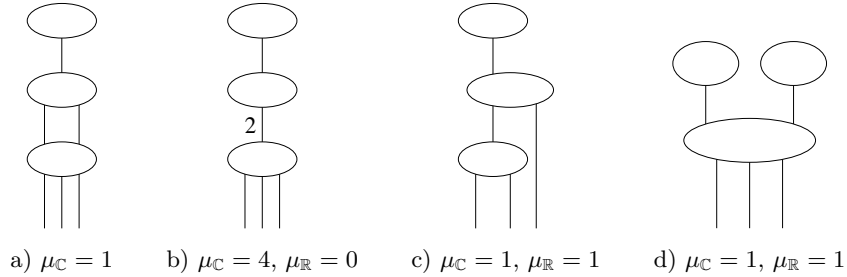


FIGURE 21. Diagrammes en étages de degré 3

Exercice 5.27. Montrer que pour tout $d \geq 1$, le diagramme en étages de la Figure 22 est l'unique diagramme en étages de degré d et de genre $(d-1)(d-2)/2$ et qu'il en existe un unique marquage. En déduire

$$N(d, (d-1)(d-2)/2) = 1.$$

Exercice 5.28. Calculer les nombres $N(4,2) = 27$, $N(4,1) = 225$, $N(4,0) = 620$ et $W(4) = 240$ à l'aide des diagrammes en étages.

6. Applications

Nous allons maintenant appliquer le Théorème 5.24 pour démontrer de manière combinatoire quelques résultats sur les nombres $N(d,g)$ et $W(d)$.



FIGURE 22. Diagramme en étages de degré d de genre maximal

6.1. En géométrie énumérative complexe. Démontrons la formule non triviale la plus simple sur les nombres $N(d, g)$.

Proposition 6.1. *Pour tout $d \geq 3$, on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) = 3(d-1)^2.$$

Démonstration. Le point de départ est l'unique diagramme en étages de degré d et de genre maximal. Pour baisser le genre de ce diagramme en étages de 1, nous avons deux possibilités représentées sur la Figure 23. De plus, il n'est pas difficile de voir que tous les diagrammes en étages de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1$ s'obtiennent de cette manière. Il ne nous reste plus qu'à compter de combien de manières nous pouvons marquer ces nouveaux diagrammes en étages.

Nous avons $i - 1$ possibilités pour le marquage dans le cas de la Figure 23a, et $2i + 1$ possibilités dans le cas de la Figure 23b. De plus, dans les deux cas i varie de 1 à $d - 1$ et il ne nous reste plus qu'à faire un petit calcul :

$$\begin{aligned} N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) &= \sum_{i=1}^{d-1} 4(i-1) + \sum_{i=1}^{d-1} (2i+1) \\ &= 6 \sum_{i=1}^{d-1} (i-1) + 3(d-1) \\ &= 3(d-1)(d-2) + 3(d-1) \\ &= 3(d-1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

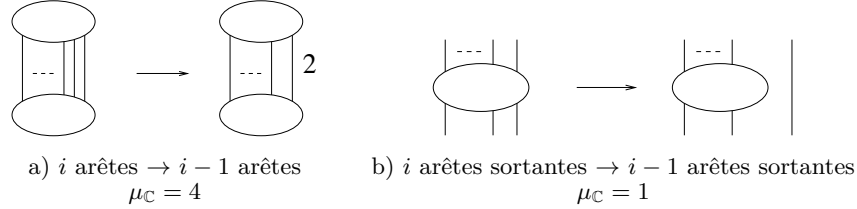


FIGURE 23. Diminuer de 1 le genre du diagramme en étages de genre maximal

Exercice 6.2. Il est possible de démontrer la formule de Caporaso et Harris grâce aux diagrammes en étages de la manière suivante. Tout d'abord, il est nécessaire de considérer des diagrammes en étages plus généraux. Les arêtes infinies peuvent être de n'importe quel poids, et l'application m peut envoyer des points à l'infini. Ensuite, il faut associer une multiplicité complexe à de tels diagrammes en étages marqués de telle sorte qu'en envoyant un par un les points à l'infini, une formule de récurrence apparaisse.

Pour s'inspirer, on pourra se reporter à la preuve tropicale de la formule de Caporaso et Harris par Gathmann et Markwig dans [GM07].

6.2. Comportement des invariants de Welschinger. De par leur définition, les nombres $N(d, 0)$ et $W(d)$ sont trivialement égaux modulo 2. En fait, Mikhalkin a observé que cette égalité est vraie modulo 4.

Proposition 6.3 (Mikhalkin). *Pour tout $d \geq 1$ on a*

$$W(d) = N(d, 0) \pmod{4}.$$

Démonstration. C'est la conséquence immédiate de

$$a = b \pmod{2} \implies a^2 = b^2 \pmod{4}$$

appliqué aux poids des arêtes d'un diagramme en étages et $b = 0$ ou 1. \square

Terminons par quelques résultats sur la suite $(W(d))_{d \geq 1}$.

Théorème 6.4 (Itenberg, Kharlamov, Shustin [IKS03] [IKS04])

La suite $(W(d))_{d \geq 1}$ des invariants de Welschinger vérifie les propriétés suivantes :

- *c'est une suite de nombres strictement positifs,*
- *la suite est croissante, et strictement croissante à partir de $d = 2$,*
- *$\ln W(d) \sim \ln N(d, 0) \sim 3d \ln d$ lorsque d tend vers l'infini.*

Démonstration. Comme la multiplicité réelle d'un diagramme en étages est positive ou nulle, les nombres $W(d)$ sont tous positifs ou nuls. De plus, comme $W(1) = 1$, la positivité des nombres $W(d)$ découlera de la croissance de la suite $(W(d))_{d \geq 1}$.

Soit (\mathcal{D}_0, m_0) un diagramme en étages marqué de degré d . Pour rendre notre raisonnement plus transparent, supposons que le marquage m_0 va non pas de $\{1, \dots, 3d-1\}$ dans \mathcal{D}_0 , mais de $\{4, \dots, 3d+2\}$ dans \mathcal{D}_0 . Notons que le point 4 est forcément envoyé sur une arête infinie de \mathcal{D}_0 . À partir de \mathcal{D}_0 , nous pouvons construire un nouveau diagramme en étages marqué \mathcal{D} de degré $d+1$ comme indiqué à la Figure 24a. Les multiplicités réelles de \mathcal{D}_0 et \mathcal{D} sont les mêmes et deux diagrammes en étages marqués différents \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}'_0 donnent évidemment deux diagrammes en étages marqués différents \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Nous avons donc montré que $W(d+1) \geq W(d)$. De plus, si $d \geq 2$, alors le point 5 est aussi forcément sur une arête infinie de \mathcal{D}_0 . Nous voyons qu'il existe alors un diagramme en étages marqué de degré $d+1$ qui n'est pas obtenu à partir d'un diagramme en étages marqué de degré d (voir les Figures 24b et c), et donc $W(d+1) > W(d)$.

Regardons maintenant l'asymptotique logarithmique de la suite $(W(d))_{d \geq 1}$. Soit (\mathcal{D}_k) la suite de diagrammes en étages construite de la manière suivante : \mathcal{D}_1 est le diagramme en étages de degré 1 et \mathcal{D}_k est obtenu à partir de \mathcal{D}_{k-1} en recollant à chaque arête infinie de \mathcal{D}_{k-1} le morceau représenté à la Figure 25a. Les diagrammes en étages $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ et \mathcal{D}_4 sont représentés sur les Figures 25b, c, d et e. Le diagramme en étages \mathcal{D}_k est de degré 2^{k-1} et est de multiplicité 1. Notons $\nu(\mathcal{D}_k)$ le nombre de marquages possibles de \mathcal{D}_k . Si nous oublions les 3 points les plus haut, nous voyons apparaître la relation

$$\forall k \geq 2 \quad \nu(\mathcal{D}_k) = \frac{\nu(\mathcal{D}_{k-1})^2}{2} C_{3 \times 2^{k-1} - 4}^{3 \times 2^{k-2} - 2}$$

et il ne nous reste plus qu'à calculer

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{D}_k) &= \frac{\nu(\mathcal{D}_{k-1})^2 (3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2 ((3 \times 2^{k-2} - 2)!)^2} \\ &= \frac{(3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2^{2^{k-1} - 1}} \prod_{i=2}^k \frac{1}{((3 \times 2^{k-i} - 2)(3 \times 2^{k-i} - 3))^{2^{i-1}}} \end{aligned}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$\frac{(3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2^{2k} \prod_{i=1}^k (3 \times 2^{k-i})^{2^i}} \leq \nu(\mathcal{D}_k) \leq (3 \times 2^{k-1} - 4)!$$

D'après la formule de Stirling, nous avons l'équivalence $\ln k! \sim k \ln k$ et donc $\ln(3 \times 2^{k-1})! \sim 3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1})$. Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \ln(2^{2k} \prod_{i=1}^k (3 \times 2^{k-i})^{2^i}) &= 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + \ln 2 \sum_{i=1}^k 2^i (k - i) \\ &\leq 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + k \ln 2 \sum_{i=1}^k 2^i \\ &\leq 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + k(2^{k+1} - 1) \ln 2 \\ &= o\left(3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1})\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement que

$$\ln \nu(\mathcal{D}_k) \sim 3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1}).$$

Comme $\ln \nu(\mathcal{D}_k) \leq \ln W(2^{k-1}) \leq \ln N(2^{k-1}, 0)$ et que la suite $(W(d))_{d \geq 1}$ est croissante, le théorème découle maintenant de la Proposition 2.26 \square

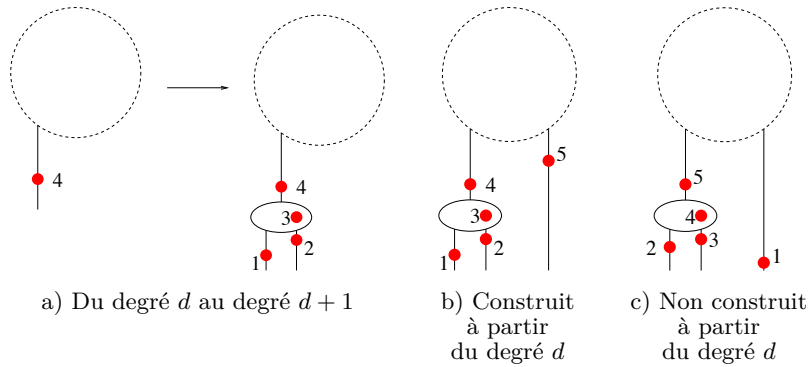
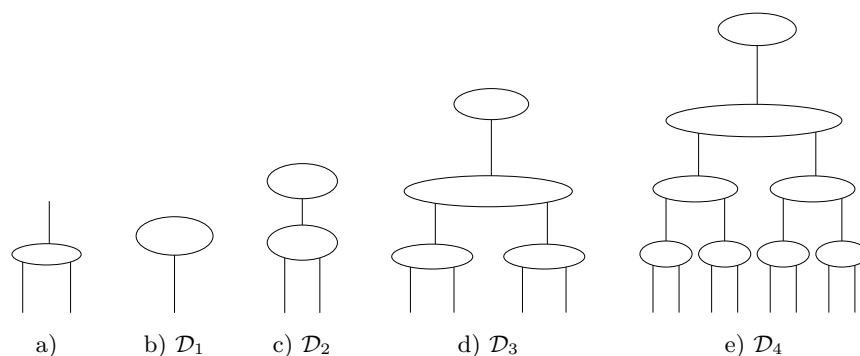


FIGURE 24. Croissance des nombres $W(d)$

Corollaire 6.5. *Par $3d - 1$ points de \mathbb{R}^2 passe toujours une courbe algébrique réelle rationnelle de degré d .*

FIGURE 25. Étude asymptotique des nombres $W(d)$

Exercice 6.6. Il est possible de démontrer une formule de type Caporaso et Harris pour les nombres $W(d)$ grâce aux diagrammes en étages. Cette formule a été démontrée pour la première fois par Itenberg, Kharlamov et Shustin dans [IKS]. La méthode est la même qu'à l'Exercice 6.2. Il faut considérer les mêmes diagrammes en étages marqués qu'à l'Exercice 6.2 puis leur attribuer une multiplicité réelle de telle sorte qu'en envoyant un par un les points à l'infini, une nouvelle formule de récurrence apparaisse.

Pour s'inspirer, on pourra se reporter à l'article correspondant d'Itenberg, Kharlamov et Shustin.

7. Exercices dont je ne connais pas la solution

Pour finir, voici trois exercices dont j'aimerais connaître la solution. N'hésitez pas à m'écrire si vous résolvez l'un d'entre eux !

Exercice 7.1. Montrer, en utilisant les diagrammes en étages, que pour tout d

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2 - 3d - 11).$$

Exercice 7.2. Montrer la Formule de Kontsevich (Théorème 2.25) en utilisant les diagrammes en étages.

Exercice 7.3. En utilisant la Formule de Kontsevich, on voit facilement que $2^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}$ divise $N(d, 0)$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Qu'en est-il des nombres $W(d)$?

8. Pour aller plus loin

Il est possible de généraliser dans de nombreuses directions les problèmes énumératifs que nous avons discutés dans ce texte. Par exemple, on peut compter les courbes algébriques dans \mathbb{C}^n , avec $n \geq 3$, passant par une certaine configuration de points donnée. On peut même remplacer les points par des droites, des plans,... Par exemple, combien de droites dans \mathbb{C}^3 intersectent 4 autres droites données ? Combien de coniques dans \mathbb{C}^3 passent par 2 points et intersectent 4 droites données ?

Comme dans le cas du plan, il existe des formules récursives reliant certains de ces nombres. De telles formules ont été obtenues dans les années 90 par Kontsevich (voir [KM94]) et Vakil (voir [Vak00]). Pour une introduction à ce sujet, nous renvoyons au très bon livre [KV06]. Ces mêmes problèmes énumératifs se posent aussi en géométrie tropicale, et les diagrammes en étages s'avèrent encore une fois utiles (voir [BM07], [BM]).

On peut aussi ajouter des conditions de tangence, c'est-à-dire regarder les courbes passant par des points et tangentes à des droites. Il existe des formules récursives en géométrie complexe pour les courbes de genre plus petit que 2, obtenues par Pandharipande, Vakil, puis Graber, Kock et Pandharipande (voir [GKP02]). Il est possible de définir une notion de tangence entre deux courbes tropicales, et dans un travail en cours avec Bertrand et Mikhalkin (voir le futur [BBM]), nous cherchons à utiliser les diagrammes en étages pour calculer ces nombres.

Les invariants de Welschinger existent aussi dans des contextes plus généraux. Dans son article original [Wel05a], Welschinger ne les a pas définis pour des courbes rationnelles passant uniquement par des configurations de points réels, mais aussi par des *configurations réelles de points*. C'est-à-dire que l'on se fixe des points réels et des paires de points complexes conjugués. Plus tard, Welschinger a aussi défini des invariants pour les courbes rationnelles dans \mathbb{R}^3 (voir [Wel05b]). Encore une fois, la géométrie tropicale et les diagrammes en étages sont des moyens pratiques de calculer ces invariants (voir par exemple [BM07], [BM], [ABLdM], [IKS04], [IKS], [Shu06]).

Pour terminer, précisons que la géométrie tropicale n'est pas le seul moyen connu pour calculer les invariants de Welschinger. En utilisant la géométrie symplectique, Welschinger ([**Wel07**]) et Solomon ([**Sol**]) ont pu aussi calculer certains de ces invariants.

Appendice : Preuve du Théorème 6.4, errata (en collaboration avec Gurvan Mével)

La preuve de l'asymptotique logarithmique du Théorème 6.4 donnée plus haut n'est pas satisfaisante car elle ne traite en fait que la sous-suite $(W(2^k))_{k \geq 0}$. Nous corrigeons ce défaut dans ce qui suit.

Preuve de l'asymptotique logarithmique de la suite $(W(d))_{d \geq 1}$.

On considère $(A_d)_{d \geq 1}$ la suite d'ensembles de diagrammes en étages de degré d construite récursivement de la façon suivante :

- A_1 est constitué de l'unique diagramme en étages de degré 1,
 - les diagrammes de A_{d+1} sont obtenus à partir de ceux de $A_d = \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k\}$ en recollant le tripode représenté à la Figure 25a à une arête infinie de \mathcal{D}_i , et ce pour chaque \mathcal{D}_i et chaque arête infinie de \mathcal{D}_i .
- L'ensemble A_2 est constitué de l'unique diagramme en étages de degré 2, l'ensemble A_3 est constitué du diagramme en étages représenté à la Figure 21c, et les diagrammes en étages constituant l'ensemble A_4 sont représentés à la Figure 26.

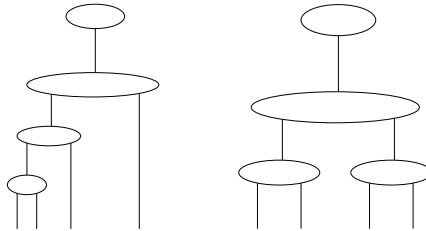


FIGURE 26. Diagrammes en étages constituant l'ensemble A_4

On note λ_d le nombre de marquages possibles pour l'ensemble des diagrammes de A_d . Si nous oublions les 3 points les plus haut, nous voyons apparaître la relation

$$\forall d \geq 2 \quad \lambda_d = \frac{1}{2} \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 \geq 1}} \binom{3d-4}{3d_1-2} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}.$$

De la même manière que nous avons montré la croissance de la suite $(W(d))_{d \geq 1}$, nous obtenons que la suite $(\lambda_d)_{d \geq 1}$ est aussi croissante. En ne considérant que le terme de droite pour $d_1 = [d/2]$ dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons alors l'inégalité

$$\lambda_d \geq \frac{1}{2} \binom{3d-4}{3[d/2]-2} \lambda_{[d/2]} \lambda_{d-[d/2]} \geq \frac{1}{2} \binom{3d-4}{3[d/2]-2} \lambda_{[d/2]}^2.$$

On pose $\ell = [\log_2 d]$, et on définit les entiers k_0, k_1, \dots, k_ℓ par $k_0 = d$ et $k_{i+1} = [k_i/2]$. Remarquons que $k_\ell = 1$. On obtient alors de proche en proche

$$\lambda_d \geq \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2^{2^{i-1}}} \binom{3k_{i-1}-4}{3k_i-2}^{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{2^\ell-1}} \prod_{i=1}^{\ell} \binom{3k_{i-1}-4}{3k_i-2}^{2^{i-1}}.$$

Comme $k_i \leq k_{i-1} - k_i \leq k_i + 1$ et $2^\ell \leq d$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_d &\geq \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{(3k_{i-1}-4)!}{(3k_i-2)!(3(k_{i-1}-k_i)-2)!} \right)^{2^{i-1}} \\ &\geq \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{(3k_{i-1}-4)!}{(3k_i+1)!^2} \right)^{2^{i-1}} \\ &\geq \frac{(3k_0-4)!}{2^d} \prod_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{(3k_i-4)!}{(3k_i+1)!} \right)^{2^i} \times \frac{1}{(3k_\ell+1)!^{2^\ell}} \\ &\geq \frac{(3d-4)!}{48^d} \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{1}{(3k_i+1)^{5 \times 2^i}} \\ &\geq \frac{(3d-4)!}{48^d} \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{1}{(3\frac{n}{2^i}+1)^{5 \times 2^i}}. \end{aligned}$$

En passant au logarithme, on obtient

$$\ln \lambda_d \geq \ln(3d-4)! - d \ln 48 - 5 \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3n/2^i + 1).$$

D'après la formule de Stirling, nous avons l'équivalence $\ln k! \sim k \ln k$, et donc

$$\ln(3d-4)! \sim (3d-4) \ln(3d-4) \sim 3d \ln d.$$

Comme $n \leq 2^{\ell+1}$, nous avons aussi

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3n/2^i + 1) &\leq \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3 \times 2^{\ell+1-i} + 1) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3 \times 2^{\ell+2-i}) \\
 &\leq \ln 6 \times \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i + \ln 2 \times \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell + 1 - i) 2^i \\
 &\leq \ln 6 \times 2^\ell + \ln 2 \times 2^\ell \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{(\ell - i + 1)}{2^{\ell-i}} \\
 &\leq d \ln 6 + d \ln 2 \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+1)}{2^j} \\
 &\leq d \ln 6 + d \ln 2 \times \frac{1}{(1 - 1/2)^2} \\
 &\leq d(\ln 6 + 4 \ln 2).
 \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$d \ln 48 + 5 \times \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3n/2^i + 1) = o(3d \ln d),$$

et donc

$$\ln(3d - 4)! - d \ln 48 - 5 \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3n/2^i + 1) \sim 3d \ln d.$$

D'après le Théorème 5.24, on a

$$\forall d \geq 1 \quad N(d, 0) \geq W(d) \geq \lambda_d,$$

et donc, pour tout $d \geq 1$,

$$\ln N(d, 0) \geq \ln W(d) \geq \ln(3d - 4)! - d \ln 48 - 5 \sum_{i=1}^{\ell-1} 2^i \ln(3 \frac{n}{2^i} + 1).$$

Le théorème découle maintenant de la Proposition 2.26. \square

Références

- [ABLdM] A. ARROYO, E. BRUGALLÉ & L. LOPEZ DE MEDRANO – « Recursive formula for welschinger invariants », [arXiv:0809.1541](https://arxiv.org/abs/0809.1541).
- [BBM] B. BERTRAND, E. BRUGALLÉ & G. MIKHALKIN – « Computing characteristic numbers of $\mathbb{C}P^2$ via floor diagrams », en préparation.
- [BM] E. BRUGALLÉ & G. MIKHALKIN – « Floor decompositions of tropical curves », en préparation.
- [BM07] ———, « Enumeration of curves via floor diagrams », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **345** (2007), no. 6, p. 329–334.
- [CH98] L. CAPORASO & J. HARRIS – « Counting plane curves of any genus », *Invent. Math.* **131** (1998), no. 2, p. 345–392.
- [DFI95] P. DI FRANCESCO & C. ITZYKSON – « Quantum intersection rings », in *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, Progress in Math., vol. 129, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, p. 81–148.
- [DK00] A. DEGTYAREV & V. KHARLAMOV – « Topological properties of real algebraic varieties : Rokhlin’s way », *Uspekhi Mat. Nauk* **55** (2000), no. 4(334), p. 129–212, English transl. : *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), no. 4, p. 735–814.
- [GKP02] T. GRABER, J. KOCK & R. PANDHARIPANDE – « Descendant invariants and characteristic numbers », *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 611–647.
- [GM07] A. GATHMANN & H. MARKWIG – « The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry », *Math. Ann.* **338** (2007), p. 845–868.
- [Hil01] D. HILBERT – « Mathematische Probleme », *Arch. Math. Phys.* (1901), no. 1, p. 43–63, (en allemand).
- [IKS] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV & E. SHUSTIN – « A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces », [arXiv:math.AG/0608549](https://arxiv.org/abs/math/0608549), to appear in *Comment. Math. Helv.*
- [IKS03] ———, « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves », *Int. Math. Res. Not.* **49** (2003), p. 2639–2653.
- [IKS04] ———, « Logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants », *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (2004), no. 6, p. 85–110, (en russe). Trad. anglaise : [arXiv:math.AG/0407188](https://arxiv.org/abs/math/0407188).
- [KM94] M. KONTSEVICH & Y. MANIN – « Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry », *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no. 3, p. 525–562.
- [KV06] J. KOCK & I. VAINSENER – *An invitation to quantum cohomology : Kontsevich’s formula for rational plane curves*, Progress in Math., Birkhäuser, 2006.

- [Mik05] G. MIKHALKIN – « Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 2, p. 313–377.
- [Shu06] E. SHUSTIN – « A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces », *J. Algebraic Geom.* **15** (2006), p. 285–322, version corrigée : [arXiv:math/0406099](https://arxiv.org/abs/math/0406099).
- [Sol] J. SOLOMON – en préparation.
- [Vai95] I. VAINSENER – « Enumeration of n -fold tangent hyperplanes to a surface », *Journ. of Alg. Geom.* **4** (1995), p. 503–526.
- [Vak00] R. VAKIL – « The enumerative geometry of rational and elliptic curves in projective space », *J. reine angew. Math.* **529** (2000), p. 101–153.
- [Wel05a] J.-Y. WELSCHINGER – « Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry », *Invent. Math.* **162** (2005), no. 1, p. 195–234.
- [Wel05b] ———, « Spinor states of real rational curves in real algebraic convex 3-manifolds and enumerative invariants », *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 1, p. 89–121.
- [Wel07] ———, « Optimalité, congruences et calculs d’invariants des variétés symplectiques réelles de dimension quatre », 2007, [arXiv:0707.4317](https://arxiv.org/abs/0707.4317).
- [Zeu73] H.G. ZEUTHEN – « Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver », *Kongelige Danske Vidensk abernes Selskabs Skrifter - Naturvidenskabelig og Matematisk* **10** (1873), p. 285–393.

E. BRUGALLÉ, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 175 rue du Chevaleret,
75013 Paris, France • Université de Nantes, Laboratoire de Mathéma-
tiques Jean Leray, 2 rue de la Houssinière, F-44322 Nantes Cedex 3,
France • *E-mail* : erwan.brugalle@math.cnrs.fr
Url : <http://erwan.brugalle.perso.math.cnrs.fr>

