

VALEURS ZÊTA MULTIPLES

CLÉMENT DUPONT

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Valeurs zêta simples	2
3. L'algèbre des valeurs zêta multiples	4
4. Relations de double mélange	9
5. Périodes, cohomologie, motifs	13
6. Intégrales itérées et groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$	18
7. Applications des valeurs zêta multiples motiviques	21
8. Les valeurs zêta multiples comme amplitudes en physique	24
Références	26

1. INTRODUCTION

Les *valeurs zêta multiples* sont les sommes des séries multiples

$$(1) \quad \zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}$$

où les n_i sont des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 et $n_r \geq 2$, cette dernière condition assurant la convergence de la série. Pour $r = 1$ on retrouve les *valeurs zêta simples*

$$(2) \quad \zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

qui sont les valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann. Ces nombres ont été étudiés, notamment par Euler, bien avant que Riemann étudie $\zeta(s)$ comme fonction d'une variable s *complexe*, et ses liens avec la répartition des nombres premiers (voir à ce sujet les actes des Journées X-UPS 2002 [BS03]). Les valeurs zêta simples, et plus généralement les valeurs zêta multiples, ont une richesse arithmétique d'un autre ordre et jouent le rôle de *constantes fondamentales*. Elles se manifestent en effet dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, notamment par le biais des intégrales de Feynman qui gouvernent les interactions entre particules élémentaires.

Il y a donc un intérêt pratique à *organiser* la famille des valeurs zêta multiples et à comprendre les liens qu'elles entretiennent entre elles et avec d'autres constantes. C'est cette question, réactivée il y a à peine 30 ans, que nous abordons dans un premier temps par l'expérimentation en partant de l'étude entreprise par Euler des valeurs zêta simples. De manière surprenante, il en ressort des réponses incroyablement structurées, qui trouvent

leurs explications dans le domaine de la géométrie algébrique. Les valeurs zêta multiples s'avèrent alors être les incarnations tangibles de phénomènes profonds liés à la *théorie des motifs*, une théorie de l'obstruction universelle pour les variétés algébriques pensée par Grothendieck dans les années 1960. Nous nous efforcerons dans un second temps d'introduire ces idées modernes en mettant l'accent sur leurs implications arithmétiques.

Ces résultats sont un premier témoignage de la puissance de l'étude *géométrique* de certains nombres transcendants : les *périodes*, qui sont les valeurs des intégrales définies par des formules algébriques. Une idée centrale qu'on développera est que la théorie de Galois classique, qui organise la famille des nombres algébriques, devrait se généraliser à toutes les périodes et révéler des symétries cachées dans les constantes mathématiques. On décrira des résultats récents qui montrent que ces symétries se révèlent aussi dans les constantes physiques qui apparaissent dans le calcul des intégrales de Feynman.

2. VALEURS ZÊTA SIMPLES

2.1. Le problème de Bâle. Dans la deuxième moitié du XVII^e siècle se développent des techniques permettant de calculer des sommes de séries infinies. La quête d'une formule de forme fermée pour $\zeta(2)$, c'est-à-dire la somme des inverses des carrés des nombres entiers, est connue sous le nom de *problème de Bâle*, du nom de la ville des frères Bernoulli qui ont popularisé le problème (pourtant posé dès 1644 par Mengoli, originaire de Bologne). C'est Euler, un autre bâlois, qui en donnera la solution en 1735 [Eul40] :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} .$$

Plus généralement, Euler montre que les valeurs zêta paires sont des multiples rationnels de puissances de π :

$$(3) \quad \zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|}{2(2n)!} (2\pi)^{2n} ,$$

où les B_{2n} sont les nombres de Bernoulli, définis par leur série génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} .$$

Quelques années plus tôt, en 1731, Euler avait déjà accompli un exploit mathématique en calculant une valeur approchée $\zeta(2)$ avec 20 chiffres significatifs, qui lui a permis de vérifier sa solution au problème de Bâle¹. La série définissant $\zeta(2)$ convergeant très lentement (son reste est équivalent à $1/n$), elle donne lieu à des approximations médiocres de sa somme et Euler a dû inventer pour l'occasion ce qu'on appelle aujourd'hui la *formule d'Euler–Maclaurin* pour estimer la suite du développement asymptotique [Eul38]. Il

1. Stirling avait obtenu la même approximation par d'autres méthodes en 1730 [Sti30, p. 55].

obtient l'approximation suivante, dont l'erreur est majorée par $(10n^{11})^{-1}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \zeta(2) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + \frac{1}{30n^9} .$$

En calculant seulement $n = 100$ termes on obtient donc l'approximation souhaitée :

$$\zeta(2) \simeq 1.6449340668482264364724076 ,$$

qui est bien valable à 10^{-23} près :

$$\frac{\pi^2}{6} \simeq 1.6449340668482264364724152 .$$

Notons pour conclure que la formule (3) implique que les valeurs zêta paires sont des nombres transcendants, c'est-à-dire ne sont racines d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels. Cela résulte en effet de la transcendance de π , qui a été prouvée par Lindemann en 1882 [Lin82].

2.2. Valeurs zêta impaires. La recherche de formules de forme fermée pour les valeurs zêta impaires $\zeta(2n+1)$ fut moins fructueuse. Il est aujourd'hui communément admis que contrairement aux valeurs zêta paires, elles ne s'expriment *probablement* pas de manière algébrique en fonction de π et ne satisfont même *probablement* pas de relations algébriques entre elles : elles forment une nouvelle famille de constantes mathématiques. Plus explicitement, on a la conjecture suivante :

Conjecture 2.1. *Les nombres π et $\zeta(2n+1)$, pour $n \geq 1$, sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .*

Cette conjecture implique notamment que les valeurs zêta impaires sont des nombres transcendants. Aucun progrès n'a été fait dans la direction de cette conjecture avant Apéry, qui a montré l'irrationalité de $\zeta(3)$ en 1979 (voir aussi la jolie preuve alternative par Beukers du théorème d'Apéry [Beu79]) :

Théorème 2.2 (Apéry [Apé79]). $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

En 2001, Ball et Rivoal ont montré qu'une infinité de valeurs zêta impaires sont irrationnelles. Plus précisément :

Théorème 2.3 (Ball–Rivoal [Riv00, BR01]). *Pour $n \geq 1$, les nombres $1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(2n+1)$ engendrent un sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{R} de dimension au moins $\frac{1}{3} \log(2n+1)$. En particulier, il existe une infinité de valeurs zêta impaires irrationnelles.*

Comme $\frac{1}{3} \log(2n+1) \geq 3$ pour $2n+1 \geq 8105$, il existe une valeur zêta impaire \mathbb{Q} -linéairement indépendante de 1 et $\zeta(3)$, et donc irrationnelle, parmi $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(8105)$. Les bornes plus précises de Ball–Rivoal permettent d'arrêter cette liste à $\zeta(169)$. Le record de ce genre de résultat est détenu par Zudilin :

Théorème 2.4 (Zudilin [Zud01]). *Il existe au moins un irrationnel parmi les nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$.*

Nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Tanguy Rivoal dans ce volume pour une discussion des techniques employées dans les preuves de tels énoncés, et à l'exposé au séminaire Bourbaki de Fischler [Fis04] pour plus de détails. L'irrationalité de $\zeta(5)$ ou de $\zeta(3)/\pi^3$, ou encore la transcendance de $\zeta(3)$, sont des problèmes ouverts.

C'est l'expérimentation qui permet de donner du poids à la Conjecture 2.1. Une relation algébrique entre des nombres réels étant une relation linéaire entre des monômes formés de ces nombres, la conjecture revient à montrer qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers entre ces monômes. Les algorithmes de détection de relations entières comme PSLQ [BF91] permettent de trouver des combinaisons linéaires "petites" de certains nombres réels calculés avec une précision suffisante. Ils peuvent être utilisés de deux manières :

- 1) pour découvrir des relations entre ces nombres, qu'on peut ensuite essayer de démontrer mathématiquement (par exemple, trouver le polynôme minimal d'un nombre algébrique calculé avec une précision suffisante) ;
- 2) pour se convaincre de l'inexistence de relations en donnant des bornes inférieures sur la taille (degré et valeur absolue des coefficients) de relations potentielles entre ces nombres.

On trouvera une application de cette dernière stratégie au test de la transcendance de $\zeta(3)$ dans [BF89]. Nous verrons plus loin que la Conjecture 2.1 est impliquée par une conjecture très générale, la *conjecture des périodes* de Grothendieck, ce qui constitue une autre source, cette fois plus théorique, de certitude.

3. L'ALGÈBRE DES VALEURS ZÊTA MULTIPLES

3.1. Des valeurs zêta simples aux valeurs zêta multiples. La Conjecture 2.1 traite de relations *algébriques* entre valeurs zêta simples et nécessite donc de considérer des produits de tels nombres. On remarque alors que ces produits peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires de valeurs zêta multiples, par exemple :

$$(4) \quad \zeta(m)\zeta(n) = \zeta(m, n) + \zeta(n, m) + \zeta(m + n) .$$

Cette égalité se prouve aisément en décomposant le domaine de sommation :

$$(5) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} \right) = \left(\sum_{1 \leq k < l} + \sum_{1 \leq l < k} + \sum_{1 \leq k=l} \right) \frac{1}{k^m l^n} .$$

Ce calcul montre que l'étude des relations *algébriques* entre valeurs zêta simples est contenue dans l'étude de relations *linéaires* entre valeurs zêta multiples. Autre observation importante : le membre de droite de (4) fait intervenir trois valeurs zêta multiples dont les indices somment à $m + n$. Cela justifie la définition suivante :

Définition 3.1. Le *poids* d'une valeur zêta multiple (1) est la somme des indices $n_1 + \dots + n_r$.

Le calcul (4) a la généralisation suivante qu'on conseille au lecteur de prouver en anticipant le paragraphe 4 :

Proposition 3.2. *Le produit de deux valeurs zêta multiples de poids m et n peut s'écrire comme une combinaison \mathbb{Z} -linéaire de valeurs zêta multiples de poids $m + n$.*

Les 2^{n-2} valeurs zêta multiples de poids n ne sont pas linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , comme le montre l'égalité des deux valeurs zêta multiples de poids 3, déjà connue d'Euler :

$$\zeta(1, 2) = \zeta(3) .$$

De même, les quatre valeurs zêta multiples de poids 4 sont colinéaires sur \mathbb{Q} :

$$\zeta(1, 1, 2) = \zeta(4) , \quad \zeta(1, 3) = \frac{1}{4}\zeta(4) , \quad \zeta(2, 2) = \frac{3}{4}\zeta(4) .$$

Nous verrons au paragraphe 4 une manière systématique de produire des relations linéaires entre valeurs zêta multiples. Contentons-nous pour l'instant d'estimer le *nombre de relations* entre valeurs zêta multiples d'un poids donné. Pour cela, introduisons le sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathcal{Z}_n \subset \mathbb{R}$ engendré par les valeurs zêta multiples de poids n . Il est commode de poser $\zeta(\cdot) = 1$ dans le cas $r = n = 0$, de sorte que $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$. Soit \mathcal{Z} le sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{R} engendré par *toutes* les valeurs zêta multiples ; c'est la somme des \mathcal{Z}_n pour $n \geq 0$. La Proposition 3.2 implique que \mathcal{Z} est une sous- \mathbb{Q} -algèbre de \mathbb{R} .

Définition 3.3. On appelle \mathcal{Z} l'*algèbre des valeurs zêta multiples*.

C'est la structure de cette algèbre qu'on souhaite étudier afin d'*organiser* les constantes mathématiques fondamentales que sont les valeurs zêta multiples.

3.2. Dimensions des espaces de valeurs zêta multiples. En calculant des approximations suffisamment précises de toutes les valeurs zêta multiples de poids ≤ 12 et en s'appuyant sur un algorithme de détection de relations entières, Zagier est arrivé à la conjecture suivante :

Conjecture 3.4 (Zagier [Zag94]). 1) *On a une décomposition en somme directe :*

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{Z}_n .$$

Dit autrement, \mathcal{Z} est graduée par le poids : il n'y a pas de relations \mathbb{Q} -linéaires non triviales entre valeurs zêta multiples de poids différents.

2) *On a pour tout entier n :*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) = d_n ,$$

où (d_n) est la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} d_0 = 1 , d_1 = 0 , d_2 = 1 ; \\ d_n = d_{n-2} + d_{n-3} & (n \geq 3) . \end{cases}$$

La suite (d_n) est une variante "cubique" de la suite de Fibonacci et a un comportement asymptotique donné par $d_n \sim C\alpha^n$ où C est une constante et $\alpha \simeq 1,3247$ est la racine réelle du polynôme caractéristique $X^3 - X - 1$. Elle est donc bien inférieure au nombre 2^{n-2} de valeurs zêta multiples en

pois n , ce qui suggère un grand nombre de relations linéaires entre valeurs zêta multiples d'un poids donné.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d_n	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16
2^{n-2}	–	–	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

L'égalité $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) = d_n$ n'est connue que pour $n \leq 4$. Pour $n = 5$ on peut prouver (par exemple en utilisant les relations de double mélange présentées au paragraphe 4) que les 8 valeurs zêta multiples de poids 5 sont toutes des combinaisons \mathbb{Q} -linéaires de $\zeta(2, 3)$ et $\zeta(3, 2)$. On ne sait cependant pas si le quotient de ces deux nombres est irrationnel.

Un autre enseignement de ces calculs expérimentaux est qu'il y a conjecturalement bien plus dans l'algèbre des valeurs zêta multiples que des polynômes en les valeurs zêta simples $\zeta(n)$, qui ne contribuent au comptage des dimensions que par un facteur sous-exponentiel. La première occurrence d'une valeur zêta multiple qui ne s'exprime pas conjecturalement en fonction de valeurs zêta simples est en poids 8 : l'expérimentation suggère par exemple que $\zeta(3, 5)$ et $\zeta(5, 3)$ ne sont pas des combinaisons \mathbb{Q} -linéaires de $\zeta(2)^3$, $\zeta(3)^2$ et $\zeta(3)\zeta(5)$ – même si leur somme l'est par (4).

La borne supérieure dans la Conjecture 3.4 a été prouvée indépendamment par Goncharov et Terasoma :

Théorème 3.5 (Goncharov [Gon01c], Terasoma [Ter02]). *On a pour tout entier n :*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n .$$

De manière surprenante, la preuve de ce résultat ne consiste pas à produire suffisamment de relations \mathbb{Q} -linéaires entre valeurs zêta multiples, et ignore même complètement l'existence de familles remarquables de telles relations ! Elle s'appuie plutôt sur des idées venant de la géométrie algébrique et que nous introduirons dans la suite de ce texte, voir le paragraphe 3.4.

La conjecture suivante, due à Hoffman, propose une base conjecturale de l'espace des valeurs zêta multiples.

Conjecture 3.6 (Hoffman [Hof97]). *Les valeurs zêta multiples $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$ forment une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathcal{Z} .*

Elle implique la formule de dimension de Zagier (Conjecture 3.4) puisque d_n est le nombre de mots (n_1, \dots, n_r) de longueur quelconque formés de 2 et de 3 et vérifiant $n_1 + \dots + n_r = n$. Brown a montré que les "valeurs zêta multiples de Hoffman" (celles dont les arguments sont des 2 et des 3) engendrent l'espace des valeurs zêta multiples :

Théorème 3.7 (Brown [Bro12a]). *Les valeurs zêta multiples $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$ engendrent le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathcal{Z} .*

À l'instar du Théorème 3.5 de Goncharov et Terasoma, ce résultat est prouvé par des techniques sophistiquées issues de la géométrie algébrique. Remarquons que le théorème de Brown n'est pas effectif : il ne donne pas de formule, ni même d'algorithme, pour écrire une valeur zêta multiple comme

combinaison \mathbb{Q} -linéaire des valeurs zêta multiples de Hoffman. Cependant, les coefficients de telles combinaisons linéaires sont “petits” en pratique et peuvent être découverts expérimentalement. Mieux, la preuve du théorème de Brown permet de découvrir ces coefficients “un par un” en quelque sorte, c’est-à-dire en reconnaissant à chaque étape *un seul* nombre rationnel connu avec haute précision. Ce théorème est donc effectif “en pratique” et donne un outil pour écrire les valeurs zêta multiples dans la base de Hoffman, ou dans toute autre base (voir [Bro12b]).

3.3. La structure de l’algèbre des valeurs zêta multiples. La structure d’algèbre de \mathcal{Z} est conjecturalement très simple. Introduisons des symboles formels f_n pour $n \geq 3$ impair et l’espace

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, f_9, \dots \rangle$$

des polynômes non commutatifs en ces symboles, dont une base est donné par les mots dans l’alphabet $\{f_3, f_5, f_7, f_9, \dots\}$. On définit sur \mathcal{A} le *produit de mélange* \sqcup qui consiste comme son nom l’indique à mélanger les mots comme deux paquets de cartes, en gardant l’ordre des lettres dans chaque mot². Par exemple : $f_3 \sqcup (f_5 f_7) = f_3 f_5 f_7 + f_5 f_3 f_7 + f_5 f_7 f_3$. La formule générale est :

$$(6) \quad (f_{i_1} \cdots f_{i_r}) \sqcup (f_{i_{r+1}} \cdots f_{i_{r+s}}) = \sum_{\sigma \in \sqcup(r,s)} f_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots f_{i_{\sigma^{-1}(r+s)}} ,$$

où $\sqcup(r,s)$ est l’ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ qui sont strictement croissantes sur les r premiers indices et les s derniers indices. Ce produit fait de l’espace \mathcal{A} une algèbre *commutative* [Reu93]. Enfin, on introduit un nouveau symbole formel f_2 et on considère l’algèbre

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}[f_2]$$

des polynômes en f_2 avec coefficients dans l’algèbre de mélange \mathcal{A} . Une base de \mathcal{F} est donnée par les monômes $f_2^k f_{i_1} \cdots f_{i_r}$ avec les $i_j \geq 3$ impairs. On introduit un *degré* sur \mathcal{F} en décrétant qu’un symbole f_n a degré n pour $n = 2$ ou $n \geq 3$ impair.

Conjecture 3.8. *L’algèbre \mathcal{Z} est graduée par le poids et on a un isomorphisme d’algèbres graduées :*

$$\mathcal{Z} \simeq \mathcal{F} .$$

Un isomorphisme prédit par la conjecture n’a pas de raison d’être unique, mais il est naturel de le normaliser afin que $\zeta(n)$ corresponde au symbole f_n . Notons que cette conjecture implique la Conjecture 3.4 de Zagier puisque le nombre de monômes de poids n dans \mathcal{F} est exactement d_n . En effet, la série génératrice correspondante est

$$\sum_{n \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}_n) t^n = \frac{1}{1-t^2} \frac{1}{1-(t^3+t^5+t^7+t^9+\dots)} = \frac{1}{1-t^2-t^3} ,$$

où l’on reconnaît la série génératrice de la suite (d_n) .

². En anglais, mélange se dit *shuffle*, d’où le choix de la lettre \sqcup de l’alphabet cyrillique, qui se prononce *sha*.

La Conjecture 3.8 pourrait faire croire à une base “simple” de l’algèbre des valeurs zêta multiples, qui correspondrait à la base des monômes de \mathcal{F} et serait donnée par les

$$\zeta(2)^k \zeta(i_1, \dots, i_r)$$

avec les $i_j \geq 3$ impairs. Mais ces éléments ne sont pas linéairement indépendants, comme le montre la relation suivante en poids 12 :

$$28 \zeta(3, 9) + 150 \zeta(5, 7) + 168 \zeta(7, 5) = \frac{5197}{691} \zeta(12) = \frac{332\,608}{875\,875} \zeta(2)^6 .$$

Cette relation est la première d’une famille infinie de relations découverte par Gangl–Kaneko–Zagier et indexée par les formes modulaires cuspidales pour le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ [GKZ06].

3.4. Valeurs zêta multiples motiviques et théorie de Galois. Un des ingrédients principaux dans les preuves des Théorèmes 3.5 et 3.7 est la notion de *valeur zêta multiple motivique* que nous décrivons dès maintenant afin d’éclairer les liens entre les conjectures et les résultats dont il a été question jusqu’ici – pour plus de détails, voir les paragraphes 5, 6, 7. Les valeurs zêta multiples motiviques sont des éléments

$$\zeta^{\mathrm{mot}}(n_1, \dots, n_r) \in \mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$$

d’une \mathbb{Q} -algèbre $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$ dont les éléments sont appelés *périodes motiviques*. Cette algèbre n’est pas constituée de nombres à proprement parler mais possède un morphisme de \mathbb{Q} -algèbres

$$\mathrm{per} : \mathcal{P}^{\mathrm{mot}} \rightarrow \mathbb{C} ,$$

appelé le *morphisme de période*, qui est tel que

$$\mathrm{per}(\zeta^{\mathrm{mot}}(n_1, \dots, n_r)) = \zeta(n_1, \dots, n_r) .$$

Les valeurs zêta multiples motiviques sont donc vues comme un *relèvement* des valeurs zêta multiples “ordinaires”. Une conjecture centrale, due à Grothendieck, veut que ces deux versions contiennent exactement la même information :

Conjecture 3.9 (Conjecture des périodes, cas particulier). *Le morphisme per est injectif.*

Cette conjecture affirme que toute relation algébrique entre valeurs zêta multiples est aussi vérifiée par les valeurs zêta multiples motiviques : il ne devrait donc pas y avoir de différence entre l’algèbre \mathcal{Z} et la sous-algèbre $\mathcal{Z}^{\mathrm{mot}} \subset \mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$ engendrée par les valeurs zêta multiples motiviques. Une grande force des idées motiviques est que contrairement à \mathcal{Z} , on sait dire beaucoup de choses sur la structure de $\mathcal{Z}^{\mathrm{mot}}$:

- (a) L’algèbre $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$ et sa sous-algèbre $\mathcal{Z}^{\mathrm{mot}}$ sont naturellement graduées et $\zeta^{\mathrm{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ est dans la partie homogène de degré $n = n_1 + \dots + n_r$.
- (b) On a un isomorphisme d’algèbres graduées $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}} \simeq \mathcal{F}$, qui peut être choisi de telle sorte à faire correspondre $\zeta^{\mathrm{mot}}(n)$ avec f_n pour $n = 2$ ou $n \geq 3$ impair.

La partie (a) implique que la deuxième partie de la Conjecture 3.4 de Zagier est connue pour les valeurs zêta multiples *motiviques*. La partie (b) prouve le Théorème 3.5 de Goncharov et Terasoma grâce aux d'inégalités :

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n^{\text{mot}}) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}^{\text{mot}}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_n) = d_n .$$

Inspiré par la Conjecture 3.6 de Hoffman, Brown prouve :

Théorème 3.10 (Brown [Bro12a]). *Les valeurs zêta multiples motiviques $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$ sont linéairement indépendantes dans \mathcal{P}^{mot} .*

Un argument de dimension montre alors que les valeurs zêta multiples motiviques de Hoffman forment une base de $\mathcal{Z}^{\text{mot}} = \mathcal{P}^{\text{mot}}$. En appliquant le morphisme de période on obtient donc le Théorème 3.7. De plus, l'algèbre graduée \mathcal{Z}^{mot} est isomorphe à l'algèbre abstraite \mathcal{F} et il résulte que la Conjecture 3.4 de Zagier, la Conjecture 3.6 de Hoffman et la Conjecture 3.8 sur la structure de l'algèbre \mathcal{Z} sont toutes les trois vérifiées au niveau des valeurs zêta multiples motiviques. Elles sont donc logiquement équivalentes à la Conjecture 3.9 des périodes, qui affirme que le morphisme des périodes induit un isomorphisme

$$\mathcal{Z}^{\text{mot}} \stackrel{?}{\simeq} \mathcal{Z} .$$

Notons au passage que la conjecture des périodes implique la Conjecture 2.1 sur les valeurs zêta impaires puisque celle-ci est vraie pour les valeurs zêta motiviques (en effet, dans \mathcal{F} , les éléments $f_2, f_3, f_5, f_7, \dots$ sont algébriquement indépendants).

La preuve du Théorème 3.10 utilise une structure fine de l'algèbre des valeurs zêta multiples motiviques :

- (c) Il existe une action très riche d'un groupe, le *groupe de Galois motivique*, sur l'algèbre \mathcal{P}^{mot} , dont l'effet sur les valeurs zêta multiples motiviques $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ peut être calculé explicitement.

Cet ingrédient doit être vu comme une *théorie de Galois* des valeurs zêta multiples motiviques, qui est analogue à la théorie de Galois classique des nombres algébriques, où les groupes de Galois finis sont remplacés par des groupes de matrices sur \mathbb{Q} . La différence est que le groupe de Galois motivique n'agit pas sur l'algèbre des valeurs zêta multiples \mathcal{Z} mais sur sa variante motivique \mathcal{Z}^{mot} – qui est la même chose si on croit à la Conjecture 3.9. Il s'agit d'une instance de l'idée générale d'une théorie de Galois des périodes, développée par André [And09, And17] d'après la philosophie des motifs de Grothendieck.

4. RELATIONS DE DOUBLE MÉLANGE

Comme promis, nous décrivons ici une manière systématique et combinatoirement très riche de produire des relations linéaires (conjecturalement *toutes* les relations linéaires) entre valeurs zêta multiples.

4.1. Produit de quasi-mélange. Commençons par expliciter la structure combinatoire derrière le calcul du produit (4) et la Proposition 3.2. On considère sur l'espace

$$\mathcal{Y} = \mathbb{Q}\langle y_1, y_2, y_3, \dots \rangle$$

des polynômes non commutatifs en une infinité de variables formelles y_i un produit $*$, dit produit de *quasi-mélange*, qui vérifie $\alpha * 1 = 1 * \alpha = \alpha$ pour tout monôme α , et la formule de récurrence (sur le degré des monômes) :

$$(\alpha y_m) * (\beta y_n) = ((\alpha y_m) * \beta) y_n + (\alpha * (\beta y_n)) y_m + (\alpha * \beta) y_{m+n} ,$$

où α et β sont des monômes. Par exemple, on vérifie qu'on a la formule suivante, censée rappeler (4) :

$$y_m * y_n = y_m y_n + y_n y_m + y_{m+n} .$$

Le produit $*$ consiste donc à mélanger les mots comme dans le produit de mélange de la section précédente, puis à fusionner certaines paires de lettres consécutives en ajoutant leurs indices³. Il fait de \mathcal{Y} une \mathbb{Q} -algèbre commutative, appelée *algèbre de quasi-mélange*, introduite par Hoffman [Hof00].

Associons un monôme dans \mathcal{Y} à un multi-indice par la correspondance :

$$\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \quad \leftrightarrow \quad Y_{\underline{n}} = y_{n_1} \cdots y_{n_r} .$$

Appelons \underline{n} ou $Y_{\underline{n}}$ *convergent* si $r = 0$ ou $n_r \geq 2$. Les monômes convergents forment une base d'une sous-algèbre $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$. Écrivons les coefficients du produit de quasi-mélange dans cette base sous la forme :

$$Y_{\underline{m}} * Y_{\underline{n}} = \sum_{\underline{p}} v_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} Y_{\underline{p}} \quad (v_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} \in \mathbb{N}) .$$

Proposition 4.1. *On a la formule de produit de quasi-mélange des valeurs zêta multiples, pour \underline{m} et \underline{n} convergents :*

$$\zeta(\underline{m})\zeta(\underline{n}) = \sum_{\underline{p}} v_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} \zeta(\underline{p}) .$$

Démonstration. La preuve de cette formule consiste à remarquer que le découpage du domaine de sommation dans un produit de séries multiples du type (1) est précisément modélisé par le produit de quasi-mélange, comme dans le cas particulier (5). \square

Dit autrement, l'application $Y_{\underline{n}} \mapsto \zeta(\underline{n})$ définit un morphisme d'algèbres de $(\mathcal{Y}_0, *)$ vers \mathbb{R} . On peut montrer qu'il existe une unique manière de l'étendre en un morphisme sur l'algèbre $(\mathcal{Y}, *)$ tout entière qui s'annule sur y_1 (cela revient à poser $\zeta(1) = 0$). Ce processus s'appelle la *régularisation de quasi-mélange* des valeurs zêta multiples.

4.2. Une formule intégrale pour les valeurs zêta multiples. Si les valeurs zêta multiples sont définies comme des sommes de *séries* multiples (1), il est avantageux de les interpréter comme des valeurs d'*intégrales* multiples. Pour cela introduisons deux formes différentielles :

$$\omega_0(x) = \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad \omega_1(x) = \frac{dx}{1-x} .$$

3. Dans la littérature anglo-saxonne on trouve parfois l'expression *shuffle* pour le produit de quasi-mélange, qui est un mot-valise formé sur *shuffle* (mélange) et *stuff* (choses) : le quasi-mélange, c'est "le mélange, plus des choses".

À un mot $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ on associe l'intégrale itérée :

$$(7) \quad I(a_1, \dots, a_n) = \int_{\Delta^n} \omega_{a_1}(t_1) \cdots \omega_{a_n}(t_n) ,$$

où $\Delta^n = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$ est le simplexe standard de dimension n . On remarque que l'intégrale (7) converge exactement quand $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 1$. La proposition suivante est attribuée à Kontsevich, où l'on utilise la notation $\{0\}^r$ pour une suite de r zéros consécutifs.

Proposition 4.2. *On a*

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = I(1, \{0\}^{n_1-1}, \dots, 1, \{0\}^{n_r-1}) .$$

Démonstration. On fait apparaître des séries géométriques dans l'intégrale itérée par le développement :

$$\omega_1(t) = \sum_{n \geq 0} t^n dt ,$$

puis on échange les sommes et les intégrales, et on calcule les intégrales dans l'ordre croissant des indices. Par exemple :

$$\begin{aligned} I(1, 0) &= \iint_{0 \leq x \leq y \leq 1} \frac{dx}{1-x} \frac{dy}{y} \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_0^1 \left(\int_0^y x^k dx \right) \frac{dy}{y} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} \int_0^1 y^{k+1} \frac{dy}{y} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) . \end{aligned}$$

□

Cette proposition montre que les valeurs zêta multiples sont des périodes au sens de Kontsevich–Zagier :

Définition 4.3 (Kontsevich–Zagier [KZ01]). Une *période* (effective) est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire peuvent s'écrire comme des intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles sur \mathbb{Q} sur des domaines de \mathbb{R}^n définis par des inégalités entre polynômes sur \mathbb{Q} .

Les valeurs zêta multiples ont d'autres représentations intégrales utiles : par exemple, le changement de variables $t_i = x_i \cdots x_n$, pour $i = 1, \dots, n$, permet d'écrire une intégrale itérée (7) comme une intégrale sur l'hypercube $[0, 1]^n$, sur le modèle de

$$\zeta(2) = \iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} .$$

4.3. Produit de mélange. Les intégrales itérées (7) ont une structure multiplicative remarquable. Nous la modélisons de manière parallèle au produit de quasi-mélange en introduisant l'espace

$$\mathcal{X} = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$$

des polynômes non commutatifs en deux variables x_0, x_1 . Le *produit de mélange* \sqcup sur \mathcal{X} a déjà été introduit plus haut dans un autre contexte (6), et fait de \mathcal{X} une \mathbb{Q} -algèbre commutative. Par exemple, on a :

$$(8) \quad x_1 x_0 \sqcup x_1 x_0 = 2 x_1 x_0 x_1 x_0 + 4 x_1 x_1 x_0 x_0 .$$

Inspirés par la Proposition 4.2, associons un monôme dans \mathcal{X} à un multi-indice par la correspondance :

$$\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \quad \leftrightarrow \quad X_{\underline{n}} = x_1 x_0^{n_1-1} \cdots x_1 x_0^{n_r-1} .$$

Les monômes $X_{\underline{n}}$ pour \underline{n} convergent forment une base d'une sous-algèbre $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$. Écrivons les coefficients du produit de mélange dans cette base sous la forme :

$$X_{\underline{m}} X_{\underline{n}} = \sum_{\underline{p}} u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} X_{\underline{p}} ,$$

où les coefficients $u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}}$ sont des entiers naturels.

Proposition 4.4. *On a la formule de produit de mélange des valeurs zêta multiples, pour \underline{m} et \underline{n} convergents :*

$$\zeta(\underline{m}) \zeta(\underline{n}) = \sum_{\underline{p}} u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} \zeta(\underline{p}) .$$

Démonstration. On écrit les valeurs zêta multiples comme des intégrales itérées (Proposition 4.2) et on utilise le théorème de Fubini pour calculer un produit de telles intégrales :

$$I(a_1, \dots, a_r) I(a_{r+1}, \dots, a_{r+s}) = \int_{\Delta^r \times \Delta^s} \omega_{a_1}(t_1) \cdots \omega_{a_{r+s}}(t_{r+s}) .$$

Le produit de simplexes $\Delta^r \times \Delta^s$ est le polytope de \mathbb{R}^{r+s} défini par les inégalités $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r \leq 1$ et $0 \leq t_{r+1} \leq \cdots \leq t_{r+s} \leq 1$. Il peut donc être triangulé par des simplexes

$$0 \leq t_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq t_{\sigma(r+s)} \leq 1 ,$$

où $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ est une permutation qui est strictement croissante sur les r premiers indices et sur les s derniers indices, c'est-à-dire un élément de $\sqcup(r, s)$. Comme ces simplexes s'intersectent le long de sous-ensembles de mesure nulle, l'intégrale se décompose en

$$I(a_1, \dots, a_r) I(a_{r+1}, \dots, a_{r+s}) = \sum_{\sigma \in \sqcup(r, s)} I(a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(r+s)}) ,$$

ce qui correspond bien au produit shuffle des monômes $X_{\underline{n}}$. \square

Dit autrement, l'application $X_{\underline{n}} \mapsto \zeta(\underline{n})$ définit un morphisme d'algèbres de (\mathcal{X}_0, \sqcup) vers \mathbb{R} . On peut montrer qu'il existe une unique manière de l'étendre en un morphisme sur l'algèbre (\mathcal{X}, \sqcup) tout entière qui s'annule en x_0 et x_1 (cela revient à poser $\zeta(1) = 0$). Ce processus s'appelle la *régularisation de mélange* des valeurs zêta multiples.

4.4. Relations de double mélange. La comparaison des deux manières de calculer le produit de deux valeurs zêta multiples (Propositions 4.1 et 4.4) donne lieu à des relations linéaires :

Proposition 4.5. *Si \underline{m} et \underline{n} sont des multi-indices convergents on a l'égalité :*

$$(9) \quad \sum_p (u_{\underline{m}, \underline{n}}^p - v_{\underline{m}, \underline{n}}^p) \zeta(\underline{p}) = 0 .$$

Ces relations, dites *relations de double mélange*, sont en général non triviales ; par exemple, pour $\underline{m} = \underline{n} = (2)$, l'égalité entre le produit de mélange (8) et le produit de quasi-mélange (4) donne :

$$4\zeta(1, 3) = \zeta(4) .$$

Si $\underline{m} = (1)$ et \underline{n} est un multi-indice convergent, le lecteur remarquera que le membre de gauche de (9) ne fait intervenir que des multi-indices convergents (les deux occurrences de la valeur zêta multiple divergente $\zeta(\underline{n}, 1)$ se compensent), et on peut montrer que la relation correspondante est bien vérifiée. Dans le cas $\underline{n} = (2)$ on retrouve l'égalité $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$. (Celle-ci peut aussi se déduire de la représentation de $\zeta(3)$ comme intégrale itérée en dimension 3 et du changement de variable $t_i \leftrightarrow 1 - t_i$ dans l'intégrale.) Ces relations de double mélange qui font intervenir des multi-indices potentiellement divergents s'appellent *relations de double mélange étendu* et ont été introduites et étudiées par Ihara–Kaneko–Zagier [IKZ06]. On conjecture qu'elles contiennent toute l'information sur les relations linéaires entre valeurs zêta multiples :

Conjecture 4.6. *Les relations de double mélange étendu engendrent toutes les relations \mathbb{Q} -linéaires entre valeurs zêta multiples.*

Vu que les relations de double mélange étendu sont homogènes pour le poids, cette conjecture implique la première partie de la Conjecture 3.4 de Zagier. On ne sait malheureusement pas montrer qu'elle implique la formule des dimensions (deuxième partie de la Conjecture 3.4). La compatibilité entre la Conjecture 4.6 et les conjectures du paragraphe 3 a cependant été vérifiée expérimentalement en bas poids (voir par exemple [HNMJPO99] et [BBV10]).

5. PÉRIODES, COHOMOLOGIE, MOTIFS

Ce paragraphe constitue un aparté introductif aux idées nécessaires pour comprendre la notion de valeur zêta multiple motivique. Nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Javier Fresán dans ce volume pour plus de détails sur ces idées.

5.1. Logarithme complexe, intégrales elliptiques, et périodes. C'est un fait classique qu'il n'existe pas de fonction logarithme complexe, c'est-à-dire que l'équation différentielle

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

n'a pas de solution dans les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$. La preuve consiste à calculer une intégrale le long du chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ parcourant le cercle unité dans le sens positif, c'est-à-dire donné par $\gamma(t) = \exp(2i\pi t)$:

$$(10) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)} = \int_0^1 2i\pi dt = 2i\pi .$$

Or le théorème de Stokes implique que l'intégrale d'une dérivée le long du chemin *fermé* γ doit s'annuler :

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^1 d(f(\gamma(t))) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0 .$$

Dit autrement, la formule

$$\log(z) = \int_1^z \frac{dx}{x}$$

définit une fonction holomorphe *multivaluée* de la variable complexe $z \in \mathbb{C}^*$, dont la valeur dépend du choix de chemin d'intégration entre 1 et z ; si on change le chemin en ajoutant un tour de 0 dans le sens positif, on rajoute $2i\pi$ à la valeur de la fonction.

La théorie des résidus de Cauchy explique que ce phénomène est la *seule* obstruction au calcul de primitives de fonctions méromorphes avec singularité en $z = 0$. Parallèlement, la théorie des résidus est un énoncé sur la topologie de \mathbb{C}^* : un lacet (chemin continu fermé) tracé dans \mathbb{C}^* est contractile (c'est-à-dire peut être continûment contracté sur un point) si et seulement si l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ sur ce chemin est nulle : le cercle unité représente donc la *seule* obstruction à la déformation de lacets tracés dans \mathbb{C}^* . Remarquons que le nombre $2i\pi$ qui apparaît dans la comparaison entre ces deux notions d'obstruction via la formule (10) est une période au sens de la Définition 4.3. C'est aussi la période, au sens usuel, de la fonction exponentielle complexe, ce qui est une autre manière d'exprimer l'obstruction à l'existence d'un logarithme complexe.

Des considérations analogues sont au coeur de la théorie des intégrales elliptiques⁴, de la forme

$$F(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

où k est une constante. Elles apparaissent au XVIII^e siècle dans le calcul de la période du pendule simple, ou encore dans le calcul du périmètre des ellipses (d'où elles tirent leur nom). On les interprète de manière moderne comme des intégrales sur la *courbe elliptique*⁵

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\} .$$

La fonction $F(z)$ est alors une fonction multivaluée sur E , car elle dépend du choix d'un chemin d'intégration. Comme une courbe elliptique s'identifie topologiquement à la surface d'un tore, il y a à déformation près deux contours d'intégration fermés indépendants γ_1 et γ_2 sur E . Les intégrales

4. Il s'agit ici d'intégrales elliptiques dites de *première espèce*.

5. Le lecteur avisé notera qu'il s'agit en fait d'une courbe elliptique privée du point à l'infini, qui apparaît en compactifiant E dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

de la forme différentielle dx/y le long de γ_1 et γ_2 s'appellent les *périodes* de E jouent le même rôle que $2i\pi$ dans la théorie des résidus. (Ce sont des périodes, au sens usuel, de la réciproque de $F(z)$, qu'on appelle une *fonction elliptique* et qui joue le même rôle que la fonction exponentielle au paragraphe précédent. C'est dans ce contexte que s'est cristallisée l'utilisation du terme de "période" au sens plus général de la Définition 4.3.)

5.2. Cohomologie et périodes. Les discussions du paragraphe précédent s'interprètent dans le langage moderne comme une comparaison entre deux théories d'obstruction associées à une variété algébrique X définie par des équations polynomiales à coefficients dans un sous-corps $K \subset \mathbb{C}$. Dans le cas de la théorie des résidus, $X = \mathbb{C}^*$ correspond aux solutions de l'équation $xy = 1$ dans \mathbb{C}^2 et on peut prendre $K = \mathbb{Q}$. Dans le cas des intégrales elliptiques, $X = E$ et K est un sous-corps de \mathbb{C} qui contient le paramètre k^2 .

- (1) D'une part on peut mesurer l'obstruction *analytique* à calculer des primitives de formes différentielles sur X , mesurée par des groupes de *cohomologie de de Rham* $H_{\text{dR}}^n(X)$, où n est le degré des formes différentielles. Une découverte importante de Grothendieck est que toutes ces obstructions viennent de formes différentielles *algébriques* : les groupes de cohomologie de de Rham sont donc des espaces vectoriels définis sur le corps K [Gro66].
- (2) D'autre part on peut mesurer l'obstruction *topologique* à déformer des domaines tracés continûment sur X , mesurée par des groupes de *cohomologie de Betti* (ou singulière) $H_{\mathbb{B}}^n(X)$, où n est la dimension des domaines. Ce sont des espaces vectoriels définis sur \mathbb{Q} .

La comparaison entre ces deux théories se fait par intégration des formes différentielles sur les domaines et donne lieu à l'isomorphisme suivant qui combine l'isomorphisme de de Rham [DR31] et la comparaison, établie par Grothendieck, entre cohomologie de de Rham analytique et algébrique :

$$(11) \quad \int : H_{\text{dR}}^n(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H_{\mathbb{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} .$$

On l'appelle *l'isomorphisme des périodes* et une matrice correspondante (relative à une K -base de $H_{\text{dR}}^n(X)$ et une \mathbb{Q} -base de $H_{\mathbb{B}}^n(X)$) une *matrice des périodes*. Ses coefficients sont certaines intégrales de formes différentielles algébriques sur des cycles tracés sur X et sont des périodes au sens de la Définition 4.3 si K est un corps de nombres (une extension finie de \mathbb{Q}). Réciproquement, on peut montrer que si on s'autorise à considérer des groupes de cohomologie *relative* associés à des paires de variétés (X, Y) , toute période au sens de la Définition 4.3 apparaît dans une matrice des périodes pour une paire définies sur un corps de nombres [HMS17].

Les exemples étudiés au paragraphe précédent concernent des intégrales le long de chemins, c'est-à-dire le cas $n = 1$. La théorie des résidus nous apprend que les groupes de cohomologie $H_{\text{dR}/\mathbb{B}}^1(\mathbb{C}^*)$ sont de dimension 1. La matrice des périodes contient la constante $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi$. Dans le cas d'une courbe elliptique, les groupes de cohomologie $H_{\text{dR}/\mathbb{B}}^1(E)$ sont de dimension

2. La matrice des périodes contient notamment les intégrales de dx/y le long des chemins γ_1 et γ_2 .⁶

5.3. La philosophie des motifs. L’isomorphisme des périodes (11) est un phénomène intrigant puisqu’il fait le lien entre deux notions d’obstruction *a priori* très différentes. D’autres théories cohomologiques, mesurant d’autres obstructions encore, ont été définies au cours du XX^e siècle et s’avèrent être toutes comparables entre elles au sens où elles sont reliées par des isomorphismes canoniques sur le modèle de (11). La cohomologie étale, qui joue un rôle important dans la preuve des conjectures de Weil par Grothendieck et Deligne, en est un exemple important [Wei49, Gro68, Del74, Del80]. Dans ce cas, la comparaison avec la cohomologie singulière permet de relier le comptage des solutions à un système d’équations polynomiales sur des corps finis à la topologie de la variété complexe correspondante.

Ces “coïncidences” ont poussé Grothendieck à considérer la possibilité que les différentes cohomologies associées à une variété algébrique X n’étaient que des “projections” d’un objet plus primitif, le *motif* de X . Contrairement à la cohomologie, ce motif n’est pas un objet algébrique comme un espace vectoriel, mais se manipule essentiellement de la même manière (par exemple, on peut parler de noyau ou d’image d’un morphisme entre motifs, prendre des produits cartésiens ou tensoriels, etc.).⁷ Les différentes théories de cohomologie sont alors vues comme des opérateurs⁸ qui permettent d’associer un espace vectoriel à un motif, par exemple

$$M \mapsto M_{\text{dR}} \quad \text{et} \quad M \mapsto M_{\text{B}}$$

pour la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Betti. Une distinction fondamentale est qu’un morphisme entre motifs est toujours “d’origine géométrique” (par exemple induit par un morphisme entre variétés algébriques, ou plus généralement par des cycles algébriques).

La mise en place de la théorie des motifs rêvée par Grothendieck a occupé les mathématiciens depuis maintenant un demi-siècle et les outils et techniques qu’ils ont mis en place à cette fin ont indéniablement bouleversé la géométrie algébrique et arithmétique. La théorie des valeurs zêta multiples motiviques dont il est question ici n’en est qu’une des nombreuses manifestations. Il y a plusieurs approches à la théorie des motifs et nous renvoyons le lecteur aux livres [And04] et [HMS17] pour plus de détails sur les développements récents. Dans la suite de ce texte, nous nous affranchirons de ces difficultés en supposant fixée une théorie des motifs avec les propriétés attendues. Nous serons particulièrement intéressés par la famille de motifs qui s’obtiennent (en un sens précis) à partir du motif correspondant au groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{C}^*)$, qui est noté $\mathbb{Q}(-1)$ et est appelé le *motif de Lefschetz*. Ces motifs sont dits *de Tate mixtes* et constituent une partie minuscule, mais déjà extrêmement riche, de la théorie des motifs.

6. Elle contient aussi deux autres périodes appelées intégrales elliptiques de *seconde espèce*, ou *quasi-périodes* de E .

7. Les motifs sont, selon l’idée de Grothendieck, des objets d’une catégorie *tannakienne*.

8. Ces opérateurs sont appelées des *foncteurs de réalisation*.

5.4. Périodes motiviques. On peut maintenant donner une définition (à faible degré d'imprécision) d'une période motivique :

Définition 5.1. Une *période motivique* est un triplet (M, φ, ω) avec M un motif, $\omega \in M_{\text{dR}}$ un élément de sa réalisation de de Rham et $\varphi \in M_{\text{B}}^{\vee}$ une forme linéaire sur sa réalisation de Betti. On considère que deux périodes motiviques (M, φ, ω) et (M', φ', ω') sont égales s'il existe un morphisme de motifs $f : M \rightarrow M'$ tel que $f_{\text{dR}}(\omega) = \omega'$ et $f_{\text{B}}^{\vee}(\varphi') = \varphi$.

La *période* associée à (M, φ, ω) est le nombre complexe

$$\text{per}(M, \varphi, \omega) = \langle \varphi, \text{comp}(\omega) \rangle ,$$

où comp est l'isomorphisme de comparaison (11).

Les périodes motiviques forment une algèbre⁹ $\tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$ et on a alors un morphisme d'algèbres, appelée le morphisme de période :

$$(12) \quad \text{per} : \tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{C} .$$

En pratique, M est le motif d'une variété X (ou plus généralement d'une paire de variétés), ω est la classe d'une forme différentielle algébrique sur X et φ est la classe d'un domaine tracé sur X . La période correspondante est alors tout simplement l'intégrale de ω sur φ . Il est donc aisé de construire des périodes motiviques correspondant à des périodes *concrètes* données, comme $2i\pi$ ou les intégrales elliptiques étudiées plus haut. Par exemple, la version motivique de $2i\pi$ est

$$(2i\pi)^{\text{mot}} = (\mathbb{Q}(-1), [\gamma], [dx/x]) .$$

Une classe de morphismes entre motifs est donnée par les morphismes entre variétés algébriques, auquel cas l'égalité entre périodes motiviques prévue par la définition est une version abstraite de la formule de changement de variables du calcul intégral.

Une première intuition est donc qu'une période motivique est l'*ingrédient géométrique* derrière une période. Une distinction fondamentale est que par définition, les relations entre périodes motiviques sont toutes *de nature géométrique* car contrôlées par des morphismes entre motifs. La conjecture des périodes de Grothendieck affirme que c'est aussi le cas pour les périodes :

Conjecture 5.2 (Conjecture des périodes de Grothendieck, cas général). *Le morphisme de période (12) est injectif.*

C'est une conjecture très forte : elle affirme essentiellement que toute relation algébrique entre périodes peut être démontrée en n'utilisant que des outils algébriques. Dit autrement, il ne devrait faire aucune différence de travailler avec les périodes ou leurs versions motiviques. La Conjecture 5.2 est du même goût que la conjecture plus explicite suivante¹⁰ :

9. On utilise ici un symbole tilde pour éviter la confusion avec l'algèbre \mathcal{P}^{mot} définie plus haut dans ce texte, qui est une sous-algèbre de $\tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$.

10. La conjecture de Kontsevich–Zagier est essentiellement équivalente à la conjecture des périodes pour l'approche de la théorie des motifs due à Nori [HMS17]. On ne sait pas si cette approche donne la même théorie que d'autres approches, dont celle, due à Voevodsky, avec laquelle nous travaillons implicitement dans ce texte [Voe00].

Conjecture 5.3 (Conjecture de Kontsevich–Zagier, [KZ01]). *Toutes les relations linéaires entre périodes sont des conséquences de :*

- 1) la bilinéarité de l'intégration ;
- 2) la formule de changement de variable ;
- 3) la formule de Stokes.

Remarquons que les relations de double mélange entre valeurs zêta multiples ne sont pas directement de nature géométrique puisque le produit de quasi-mélange résulte de la manipulation de séries. On peut cependant les démontrer en ne manipulant que des intégrales itérées [Sou10], ce qui montre qu'elles vérifient les prédictions des deux conjectures ci-dessus.

6. INTÉGRALES ITÉRÉES ET GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

On a vu à la Proposition 4.2 que les valeurs zêta multiples ont des représentations intégrales. Nous développons maintenant cette idée en faisant intervenir le groupe fondamental de l'espace $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. C'est ce point de vue géométrique qui permet de définir et manipuler les valeurs zêta multiples motiviques.

6.1. Intégrales itérées et polylogarithmes. On étudie l'espace $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On rappelle les deux formes différentielles élémentaires de degré 1 sur X :

$$\omega_0 = \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dx}{1-x} .$$

Pour deux points-base $a, b \in X$, considérons des chemins continus $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble de tels chemins modulo la relation d'homotopie (qui identifie deux chemins qui peuvent être déformés continûment l'un en l'autre) est noté $\pi_1(X, a, b)$. La composition des chemins induit une application

$$(13) \quad \pi_1(X, a, b) \times \pi_1(X, b, c) \rightarrow \pi_1(X, a, c) .$$

Cela fait notamment de $\pi_1(X, a, a) =: \pi_1(X, a)$ un groupe, appelé le *groupe fondamental* de X basé en a . Plus généralement, la collection de tous les ensembles $\pi_1(X, a, b)$ munie des opérations de composition (13) forme le *groupoïde fondamental* de X . On montre facilement que le groupe fondamental ne dépend pas du point-base et est isomorphe à un groupe libre sur deux générateurs γ_0 et γ_1 , qui sont les (classes des) lacets autour de 0 et 1 respectivement. Par exemple, pour $a = \frac{1}{2}$ on peut choisir $\gamma_0(t) = \frac{1}{2} \exp(2i\pi t)$ et $\gamma_1(t) = 1 - \frac{1}{2} \exp(2i\pi t)$.

Pour un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, et pour tout mot $\omega_{i_1} \cdots \omega_{i_n}$ avec $i_k \in \{0, 1\}$, on peut considérer l'*intégrale itérée*

$$(14) \quad \int_{\gamma} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_n} = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \omega_{i_1}(\gamma(t_1)) \cdots \omega_{i_n}(\gamma(t_n)) .$$

Pour $n = 1$ ce sont simplement des intégrales de 1-formes le long de chemins, et on obtient des valeurs spéciales de la fonction logarithme :

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \log(b/a) .$$

Un exemple d'intégrale itérée de longueur $n = 2$ est :

$$\int_{\gamma} \omega_0 \omega_1 = \int_{\gamma} \frac{dx}{1-x} \log(x/a) .$$

Après changement de variable, elle peut s'exprimer en fonction d'une valeur spéciale de la fonction *dilogarithme* :

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = - \int_0^z \frac{dx}{x} \log(1-x) .$$

Cette fonction est bien définie sur le disque unité $\{|z| < 1\}$ et s'étend en une fonction *multivaluée* sur X . Les intégrales itérées de longueur quelconque contiennent des valeurs spéciales des fonctions *polylogarithmes*

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} = \int_0^z \frac{dx}{x} \text{Li}_{n-1}(z) ,$$

et plus généralement des *polylogarithmes multiples* :

$$(15) \quad \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}} .$$

6.2. L'isomorphisme de Chen. La théorie des intégrales itérées de Chen suit la même philosophie que les travaux de de Rham [DR31] sur l'homologie singulière ayant mené à l'isomorphisme des périodes (11) : elle vise à comprendre le groupe fondamental de X en termes de formes différentielles via les intégrales itérées. Le groupe fondamental étant un objet profondément "non abélien", la théorie de Chen ne concerne qu'une approximation linéaire du groupe fondamental, appelée sa *complétion pro-unipotente* ou *complétion de Malcev*. Pour la définir, notons $G = \pi_1(X, a)$ et soit $\mathbb{C}[G]$ son algèbre de groupe, dont une base est donnée par l'ensemble G et la multiplication est donnée par l'extension linéaire de la loi de groupe. On a un idéal $I \subset \mathbb{C}[G]$, l'*idéal d'augmentation*, engendré par les différences de deux éléments de G . On considère ses puissances I^{n+1} , qui sont des idéaux de plus en plus petits dans $\mathbb{C}[G]$. Quitte à choisir un chemin de a vers b , on a une bijection $\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X, a, b)$ et on peut voir les idéaux I^{n+1} comme des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]$.¹¹ Les quotients $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]/I^{n+1}$ sont des approximations linéaires de plus en plus fidèles de $\pi_1(X, a, b)$.

Notons $\mathbb{C}\langle \omega_0, \omega_1 \rangle$ l'espace des polynômes non commutatifs en les symboles ω_0, ω_1 , et $\mathbb{C}\langle \omega_0, \omega_1 \rangle_{\leq n}$ le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$, engendré par les mots (monômes) de longueur $\leq n$. L'intégrale itérée (14) est invariante par homotopie et induit donc, pour chacun de ces mots, une forme linéaire sur l'espace $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]$, dont on peut montrer qu'elle s'annule sur le sous-espace I^{n+1} .

Théorème 6.1 (Chen [Che77]). *Les intégrales itérées induisent un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels :*

$$(16) \quad \int : \mathbb{C}\langle \omega_0, \omega_1 \rangle_{\leq n} \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]/I^{n+1})^{\vee} .$$

11. Ces sous-espaces vectoriels ne dépendent pas du choix du chemin de a vers b .

Dans la version la plus générale du théorème, X peut être remplacé par n'importe quelle variété différentielle. Le terme de gauche de l'isomorphisme de Chen doit être alors remplacé par un objet qui sélectionne les intégrales itérées qui sont invariantes par homotopie (cette condition est automatiquement vérifiée dans le cas qu'on étudie ici).

6.3. Groupe fondamental motivique et valeurs zêta multiples motiviques. L'isomorphisme de Chen (16) est d'apparence analogue à l'isomorphisme des périodes (11) puisqu'il compare un espace vectoriel de formes différentielles algébriques à un invariant topologique de X . Cette analogie peut être rendue précise par un théorème attribué par Goncharov à Beilinson [Gon01b, Theorem 4.1], qui affirme que l'isomorphisme de Chen est un cas particulier de l'isomorphisme des périodes pour un certain groupe de cohomologie (relative). On peut alors considérer le motif qui correspond à ce groupe de cohomologie puis faire tendre n vers $+\infty$; l'objet obtenu est abusivement appelé le *groupe fondamental motivique* de X avec points base a, b . Le slogan est donc : les intégrales itérées sont les périodes du groupe fondamental motivique. La théorie des groupes fondamentaux motiviques a été développée par Goncharov et Deligne–Goncharov [Gon01a, Gon05, DG05] et fait écho à des travaux plus anciens de Hain et Hain–Zucker sur les structures de Hodge sur le groupe fondamental [Hai86, Hai87a, Hai87b, HZ87].

Afin d'étudier les valeurs zêta multiples, il faut d'après la Proposition 4.2 considérer des intégrales itérées (14) pour le choix de chemin $\gamma = [0, 1]$. Or les extrémités de ce chemin ne sont pas contenues dans $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ et la théorie que nous venons d'esquisser ne s'applique pas. On a alors besoin d'une variante où les points-base a et b ne sont plus des points de X mais des *points-base tangentiels à l'infini*, c'est-à-dire des directions tangentes en un point $0, 1$ ou ∞ qui est “à l'infini” du point de vue de l'espace X . Les intégrales itérées peuvent alors être divergentes et pour donner un sens à l'isomorphisme de Chen (16) il faut les *régulariser* : on retrouve alors la régularisation de mélange déjà évoquée au paragraphe 4.3.

Une fois ces constructions réalisées, on est alors muni d'un motif M vérifiant :

- La réalisation de de Rham de M est l'espace $M_{\text{dR}} = \mathbb{C}\langle\omega_0, \omega_1\rangle$. On a pour tout multi-indice $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$, convergent ou non, un élément

$$\Omega_{\underline{n}} = \omega_1 \omega_0^{n_1-1} \dots \omega_1 \omega_0^{n_r-1} \in M_{\text{dR}} .$$

- La réalisation de Betti M_{B} est l'espace des fonctions sur le complété pro-unipotent du groupe fondamental de X avec les points-base tangentiels adéquats en 0 et en 1 . Le segment unité définit un élément

$$[0, 1] \in M_{\text{B}}^{\vee} .$$

En suivant la recette du paragraphe 5.4, on peut alors donner la définition des valeurs zêta multiples motiviques :

Définition 6.2. On définit la *valeur zêta multiple motivique*

$$\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r) = (M, \Omega_{\underline{n}}, [0, 1]) \in \tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}} .$$

La période associée à $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ est par définition l'intégrale itérée de $\Omega_{\underline{n}}$ entre 0 et 1, c'est-à-dire le nombre $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ par la Proposition 4.2. Dans le cas où \underline{n} est un multi-indice divergent, ce nombre s'interprète via la régularisation de mélange.

L'image du segment unité $[0, 1] \in M_{\mathbb{B}}^{\vee}$ par l'isomorphisme de comparaison de M s'appelle l'*associateur de Drinfel'd*. C'est une série formelle en deux variables dont les coefficients sont toutes les valeurs zêta multiples, qui est un des points de départ de la théorie (pro-unipotente) de Grothendieck–Teichmüller [Dri91].

7. APPLICATIONS DES VALEURS ZÊTA MULTIPLES MOTIVIQUES

Nous expliquons maintenant comment les idées motiviques permettent de prouver le Théorème 3.5 de Goncharov et Terasoma et le Théorème 3.7 de Brown.

7.1. Des nombres algébriques aux périodes. Les nombres algébriques sont des périodes particulières au sens de la Définition 4.3, par exemple on peut écrire $\sqrt{2} = \int_{x^2 \leq 2} \frac{1}{2} dx$. D'un point de vue plus cohomologique, une racine d'un polynôme irréductible $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ apparaît dans la matrice des périodes du groupe de cohomologie $H^0(X)$ avec $X = \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) = 0\}$. La cohomologie de de Rham est simplement l'espace des fonctions $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ et la cohomologie de Betti a pour base les points de X . Une matrice des périodes est donc la matrice de Vandermonde associée aux racines de f . En résumé, les nombres algébriques sont les périodes des variétés algébriques sur \mathbb{Q} qui sont de dimension 0.

La théorie de Galois étudie les *symétries* des équations polynomiales en une variable. Au corps de nombres $K = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ est associé son *groupe de Galois* G qui est par définition le groupe des automorphismes du corps K . C'est un groupe fini qui se plonge dans le groupe des permutations de l'ensemble des racines complexes de f . Un élément de G est uniquement déterminé par son action sur le générateur x et le cardinal de G est au plus le degré de l'extension $[K : \mathbb{Q}] = \deg(f)$. On dit que l'extension est *galoisienne* si on a l'égalité $|G| = [K : \mathbb{Q}]$. Dans ce cas, la *correspondance de Galois* établit une bijection entre les sous-corps de K et les sous-groupes de G .

Une partie de cette théorie se généralise (conjecturalement) aux périodes de la manière suivante [And09]. Pour un motif quelconque M on peut définir un groupe G_M , dit *groupe de Galois motivique*, dont les éléments sont les automorphismes linéaires de l'espace vectoriel $M_{\mathbb{R}}$ qui "respectent toutes les constructions algébriques entre motifs".¹² On montre que c'est un groupe algébrique, c'est-à-dire un groupe de matrices carrées défini par des équations algébriques. Il agit sur les périodes motiviques de M par la formule

$$g \cdot (M, \varphi, \omega) = (M, \varphi, g \cdot \omega) ,$$

¹². On a besoin du *formalisme tannakien* pour donner un vrai sens mathématique à l'expression entre guillemets.

dit autrement il agit “par multiplication à gauche de la matrice des périodes”. Si on croit à la conjecture des périodes de Grothendieck (Conjecture 5.2), alors cette action descend à une action sur les périodes de M . Sans cette conjecture, on n’a donc accès qu’à une théorie de Galois des périodes motiviques. Notons qu’une reformulation de la conjecture des périodes est que la dimension de G_M est égale au degré de transcendance de l’algèbre engendrée par les périodes de M .

Toute l’intuition liée aux nombres algébriques ne se transfère pas au cas des périodes, mais notons tout de même deux principes généraux que nous revisiterons par la suite :

- Principe de finitude. Soit K un sous-corps de \mathbb{C} engendré par un nombre fini de nombres algébriques. Alors K est de dimension finie sur \mathbb{Q} .
- Principe de reconnaissance. Supposons que l’extension K/\mathbb{Q} est galoisienne et soit G son groupe de Galois. Si $x \in K$ est un point fixe de l’action de G , alors $x \in \mathbb{Q}$.

Le premier principe est essentiellement tautologique puisqu’un nombre est algébrique exactement quand ses puissances engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{Q} . Une application triviale mais parlante du second principe est la suivante : considérons le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ constitué des nombres $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. C’est une extension galoisienne de \mathbb{Q} dont le groupe de Galois est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par la “conjugaison” $\tau : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. Comme τ est un morphisme de corps, il respecte somme et produit et agit trivialement sur le nombre $x_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$. On en déduit, sans faire aucun calcul, que x_n est un nombre rationnel.

7.2. Le principe de finitude et la borne de Goncharov–Terasoma.

L’application du principe de finitude au cas des valeurs zêta multiples permet de prouver le Théorème 3.5 de Goncharov et Terasoma. Soit M le motif défini au paragraphe 6.3 dont les périodes contiennent les valeurs zêta multiples. Il fait partie d’une famille de motifs qui s’appellent *motifs de Tate mixtes sur \mathbb{Z}* et qui sont très particuliers pour deux raisons :

- 1) Ils peuvent tous s’obtenir (en un sens précis) à partir du motif de Lefschetz $\mathbb{Q}(-1)$. Cela exclut les motifs des courbes elliptiques, par exemple.
- 2) Ils sont à *bonne réduction* en chaque nombre premier p , c’est-à-dire que la réduction modulo p ne change pas la géométrie sous-jacente au motif. Cela exclut les groupes fondamentaux motiviques de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ à points-base finis ; par exemple, le point-base $a = 2$ se comporte mal vis-à-vis de la réduction modulo $p = 2$.

Ces motifs sont “très rares” et cela explique qu’on puisse borner la taille de cette famille. Concrètement, les périodes motiviques de ces motifs vivent dans une sous-algèbre \mathcal{P}^{mot} de l’algèbre $\tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$ de toutes les périodes motiviques, qui est *petite* au sens où elle est de dimension finie en tout poids. On peut quantifier sa taille et même sa structure abstraite grâce à des résultats profonds, notamment le calcul par Borel de la K -théorie rationnelle de l’anneau des entiers [Bor77]. On obtient l’isomorphisme

$$\mathcal{P}^{\text{mot}} \simeq \mathcal{F}$$

promis au paragraphe 3.4, qui donne les dimensions de \mathcal{P}^{mot} en tout poids, et le Théorème 3.5 après application du morphisme de période.¹³

7.3. Le principe de reconnaissance et le théorème de Brown. L'action du groupe de Galois motivique G_M sur les valeurs zêta multiples motiviques est étonnamment simple à calculer explicitement par une formule combinatoire due à Goncharov [Gon05]. Les valeurs zêta (motiviques) simples jouent un rôle spécial vis-à-vis de cette action au sens où elles ont un espace de conjugués minimal. Plus précisément on a la formule, pour $n \geq 2$:

$$g \cdot \zeta^{\text{mot}}(n) = a_g^{(n)} \zeta^{\text{mot}}(n) + b_g^{(n)}$$

où $a_g^{(n)}$ et $b_g^{(n)}$ sont des fonctions sur G_M et $b_g^{(n)} = 0$ pour n pair. (Cette annulation est une manifestation de la solution d'Euler au problème de Bâle qui dit que les valeurs zêta paires sont des multiples rationnels de puissances de π .) Une remarque importante est que cette formule caractérise les valeurs zêta (motiviques) simples, ce qui est une variante du principe de reconnaissance :

Proposition 7.1. *Soit $\xi \in \mathcal{P}^{\text{mot}}$ une période motivique de poids $n \geq 2$ telle que $G \cdot \xi \subset \mathbb{Q}\xi \oplus \mathbb{Q}$. Alors ξ est un multiple rationnel de $\zeta^{\text{mot}}(n)$.*

Une découverte de Brown est que cette remarque permet de montrer l'existence de relations entre valeurs zêta multiples par voie galoisienne [Bro12b]. Par exemple, partant de la formule

$$g \cdot \zeta^{\text{mot}}(2, 3) = a_g^{(5)} \zeta^{\text{mot}}(2, 3) + 3 a_g^{(2)} b_g^{(3)} \zeta^{\text{mot}}(2) + c_g^{(5)}$$

pour la théorie de Galois de $\zeta^{\text{mot}}(2, 3)$, on déduit que la combinaison linéaire

$$\zeta^{\text{mot}}(2, 3) - 3 \zeta^{\text{mot}}(2) \zeta^{\text{mot}}(3)$$

satisfait aux hypothèses de la Proposition 7.1 et est donc un multiple rationnel de $\zeta^{\text{mot}}(5)$:

$$\zeta^{\text{mot}}(2, 3) - 3 \zeta^{\text{mot}}(2) \zeta^{\text{mot}}(3) = \lambda \zeta^{\text{mot}}(5) \quad (\lambda \in \mathbb{Q}) .$$

Le coefficient de proportionnalité exact ne peut pas être déterminé par cette méthode mais peut être calculé empiriquement en appliquant le morphisme de période :

$$\lambda = \frac{\zeta(2, 3) - 3 \zeta(2) \zeta(3)}{\zeta(5)} ,$$

qui peut se calculer avec une précision arbitraire.¹⁴ Cette stratégie est au centre de la preuve du Théorème 3.7 de Brown.

13. *Stricto sensu*, ce qu'on note \mathcal{P}^{mot} est l'algèbre des périodes motiviques *effectives* et *réelles* de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur \mathbb{Z} .

14. On trouve alors $\lambda \simeq -11/2$. Dans ce cas simple, on peut évidemment montrer la relation en question grâce aux relations de double mélange.

8. LES VALEURS ZÊTA MULTIPLES COMME AMPLITUDES EN PHYSIQUE

8.1. Amplitudes et intégrales de Feynman. À la fin des années 1940, Feynman révolutionne la physique en introduisant une méthode pour calculer l'amplitude de probabilité des interactions entre particules élémentaires, qui a très rapidement fait ses preuves et est encore utilisée aujourd'hui. Ces probabilités se calculent comme des séries entières dont le paramètre est appelé *constante de couplage*, et dont les coefficients sont des intégrales (de Feynman) indexées par des graphes (de Feynman). Chaque graphe témoigne d'un scénario de collision, où les arêtes représentent des particules et les sommets des interactions. La précision du résultat augmente au fur et à mesure que l'on calcule des intégrales de Feynman associées à des graphes de plus en plus complexes. (La complexité est mesurée par le nombre de cycles indépendants dans le graphe.) On peut alors vérifier que ces calculs décrivent fidèlement la réalité en comparant leurs prédictions aux mesures issues des accélérateurs de particules, par exemple le LHC (*Large Hadron Collider* ou Grand collisionneur de hadrons, gigantesque accélérateur du CERN situé sous la frontière franco-suisse). Les intégrales de Feynman sont notoirement difficiles à calculer, même dans le cas d'interactions simples, mais dans les cas abordables, décrivent la réalité de manière suprenamment bonne.

Un de ces cas est la théorie ϕ^4 non massive, qui correspond à des graphes (au sens usuel) où chaque sommet est adjacent à au plus 4 arêtes. Pour un tel graphe G , supposé connexe, soient e_1, \dots, e_{N_G} ses arêtes et définissons un polynôme

$$\Psi_G = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e .$$

La somme est prise sur les arbres couvrants T de G (ensembles d'arêtes maximaux sans cycles), et où x_e est une variable formelle (appelée *paramètre de Schwinger*) associée à chaque arête e . Ce polynôme est d'abord apparu dans les travaux de Kirchhoff sur les circuits électriques. On définit alors une intégrale

$$(17) \quad I_G = \int_{\sigma} \frac{\Omega_G}{\Psi_G^2} ,$$

où σ est le domaine $\{x_e \geq 0 (\forall e)\}$ de l'espace projectif \mathbb{P}^{N_G-1} et

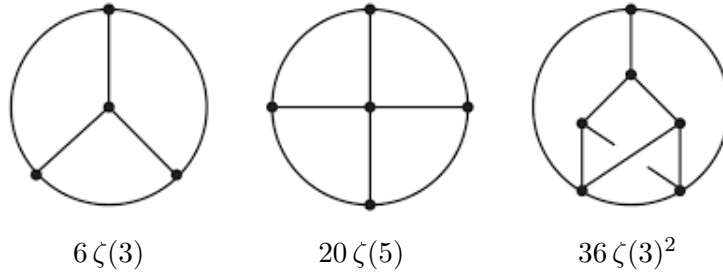
$$\Omega_G = \sum_{i=1}^{N_G} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{N_G}$$

est la forme volume canonique. Il est facile de caractériser les graphes, appelés log-divergents primitifs, pour lesquels l'intégrale ci-dessus converge. Dans ce cas sa valeur est une période au sens de la Définition 4.3 et est une contribution à une amplitude de la théorie ϕ^4 . On ne sait essentiellement pas calculer les intégrales (17) pour des graphes avec plus de 12 cycles indépendants.

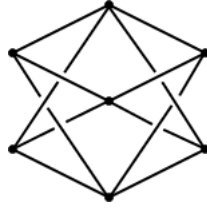
L'étude géométrique des amplitudes (17) a été initiée par Bloch–Esnault–Kreimer [BEK06], qui associent à G un groupe de cohomologie relative dont

la matrice des périodes contient I_G . La compréhension de ce groupe de cohomologie passe par l'étude de l'*hypersurface de graphe* $X_G = \{\Psi_G = 0\}$ et relève notamment de la théorie des singularités.

8.2. Apparition des valeurs zêta multiples. Les intégrales (17) ont été calculées de manière systématique dans les années 1990, notamment par Broadhurst et ses collaborateurs, voir par exemple Broadhurst–Kreimer [BK97]. Pour certains graphes, les amplitudes s'expriment en termes de valeurs zêta simples :



On trouve aussi des valeurs zêta multiples qui (conjecturalement) ne sont pas des polynômes en les valeurs zêta simples :



$$\frac{27}{5} \zeta(5, 3) + \frac{45}{4} \zeta(5) \zeta(3) - \frac{261}{20} \zeta(8)$$

Des variantes *cyclotomiques* des valeurs zêta multiples apparaissent aussi ; ce sont les évaluations aux racines de l'unité des polylogarithmes multiples (15). On ne sait pas quelles classes de périodes apparaissent comme des amplitudes de la forme (17) mais il est aujourd'hui communément admis que contrairement à ce que montrent les calculs pour des petits graphes, la géométrie sous-jacente à ces amplitudes peut être “aussi compliquées que possible” [BB03, BS12]. On s'attend donc à rencontrer des périodes de plus en plus riches à mesure que les techniques de calcul se développeront.

8.3. Vers une théorie de Galois cosmique. Il est notable que les amplitudes de la théorie ϕ^4 qui sont des combinaisons linéaires de valeurs zêta multiples engendrent un petit sous-espace \mathcal{Z}_{ϕ^4} de l'algèbre \mathcal{Z} . Par exemple, on est amené à penser que ni $\zeta(2)$ ni aucun produit $\zeta(2)\zeta(2n+1)$ n'appartient à ce sous-espace. Il y a donc une tension entre la richesse de ces amplitudes que nous venons d'évoquer et leur *rareté*. Ce phénomène reste encore mystérieux mais pourrait avoir une origine galoisienne. En effet, les calculs de Panzer–Schnetz suggèrent que la version motivique $\mathcal{Z}_{\phi^4}^{\text{mot}}$ est stable par l'action du groupe de Galois motivique des valeurs zêta multiples [PS16]. Plus ambitieusement, Panzer et Schnetz proposent la conjecture suivante, qui va bien au-delà du cadre des valeurs zêta multiples :

Conjecture 8.1 (Conjecture de coaction). *L’espace engendré par toutes les amplitudes (motiviques) de la théorie ϕ^4 est stable par l’action du groupe de Galois motivique.*

Cette conjecture affirme que les contraintes sur les périodes qui apparaissent en théorie ϕ^4 se propagent par l’action du groupe de Galois motivique.¹⁵ Elle suggère donc des symétries cachées dans les calculs d’amplitudes en physique des particules et donne du poids à l’idée, popularisée par Cartier, d’une “théorie de Galois cosmique” de certaines constantes physiques [Car01].

Pour aller plus loin. L’étude des valeurs zêta multiples est à l’intersection de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Nous ne pouvions donc aborder que certains des aspects de la théorie et laisser de côté des sujets aussi passionnants que les liens avec les associateurs et la théorie de Grothendieck–Teichmüller, ou encore les développements récents liés aux phénomènes modulaires dans les valeurs zêta multiples. Le lecteur curieux pourra trouver des pistes de réflexion et une bibliographie plus étoffée dans le livre de référence [BGF17].

RÉFÉRENCES

- [And04] Y. ANDRÉ : *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 de *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [And09] Y. ANDRÉ : Galois theory, motives and transcendental numbers. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 165–177. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [And17] Y. ANDRÉ : Groupes de Galois motiviques et périodes. *Astérisque*, (390): Exp. No. 1104, 1–26, 2017. Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposés 1104–1119.
- [Apé79] R. APÉRY : Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque*, 61:11–13, 1979.
- [BB03] P. BELKALE et P. BROSNAN : Matroids motives, and a conjecture of Kontsevich. *Duke Mathematical Journal*, 116(1):147–188, 2003.
- [BBV10] J. BLÜMLEIN, D. J. BROADHURST et J. A. M. VERMASEREN : The multiple zeta value data mine. *Computer Physics Communications*, 181(3):582–625, 2010.
- [BEK06] S. BLOCH, H. ESNAULT et D. KREIMER : On motives associated to graph polynomials. *Comm. Math. Phys.*, 267(1):181–225, 2006.
- [Beu79] F. BEUKERS : A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bull. London Math. Soc.*, 11(3):268–272, 1979.
- [BF89] D. H. BAILEY et H. R. P. FERGUSON : Numerical results on relations between fundamental constants using a new algorithm. *Mathematics of Computation*, 53(188):649–656, 1989.
- [BF91] D. H. BAILEY et H. R. P. FERGUSON : A polynomial time, numerically stable integer relation algorithm. Report SRC-TR-92-066, Supercomputing Research Center, 1991. Also issued as RNR Technical Report RNR-91-032 (16 December 1991 ; 14 July 1992), NASA Ames Research Center, MS T045-1, Moffett Field, CA 94035-1000.

¹⁵ Reste encore à prouver que des contraintes existent, ce qui peut se faire par un nombre fini de calculs d’après le *principe des petits graphes* de Brown [Bro15], qui affirme que des périodes de poids “petit” doivent apparaître comme des amplitudes de graphes “petits”.

- [BGF17] J. I. BURGOS GIL et J. FRESÁN : *Multiple zeta values : from numbers to motives*. Clay Mathematics Proceedings, 2017.
- [BK97] D. J. BROADHURST et D. KREIMER : Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops. *Physics Letters B*, 393(3-4):403–412, 1997.
- [Bor77] A. BOREL : Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 4(4):613–636, 1977.
- [BR01] K. BALL et T. RIVOAL : Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. *Invent. Math.*, 146(1):193–207, 2001.
- [Bro12a] F. BROWN : Mixed Tate motives over \mathbb{Z} . *Ann. of Math. (2)*, 175(2):949–976, 2012.
- [Bro12b] F. BROWN : On the decomposition of motivic multiple zeta values. In *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, volume 63 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–58. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.
- [Bro15] F. BROWN : Feynman amplitudes and cosmic Galois group. *arXiv preprint arXiv :1512.06409*, 2015.
- [BS03] N. BERLINE et C. SABBAH, éditeurs. *La fonction zêta*. Editions Ecole Polytechnique, 2003.
- [BS12] F. BROWN et O. SCHNETZ : A K3 in ϕ^4 . *Duke Math. J.*, 161(10):1817–1862, 2012.
- [Car01] P. CARTIER : A mad day’s work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 38(4):389–408, 2001.
- [Che77] K.-T. CHEN : Iterated path integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(5):831–879, 09 1977.
- [Del74] P. DELIGNE : La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43):273–307, 1974.
- [Del80] P. DELIGNE : La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52):137–252, 1980.
- [DG05] P. DELIGNE et A. B. GONCHAROV : Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(1):1–56, 2005.
- [DR31] G. DE RHAM : *Sur l’analysis situs des variétés à n dimensions*. Doctorat d’état, 1931.
- [Dri91] V. G. DRINFEL’D : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningr. Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [Eul38] L. EULER : De summatione innumerabilium progressionum. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 91–105, 1738.
- [Eul40] L. EULER : De summis serierum reciprocarum. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 123–134, 1740.
- [Fis04] S. FISCHLER : Irrationalité de valeurs de zêta (d’après Apéry, Rivoal, ...). *Astérisque*, (294):vii, 27–62, 2004.
- [GKZ06] H. GANGL, M. KANEKO et D. ZAGIER : Double zeta values and modular forms. In *Automorphic forms and zeta functions*, pages 71–106. World Sci. Publi. Hackensack, NJ, 2006.
- [Gon01a] A. B. GONCHAROV : The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$. *Duke Math. J.*, 110(3):397–487, 2001.
- [Gon01b] A. B. GONCHAROV : Multiple polylogarithms and mixed Tate motives. *Preprint : arXiv :math/0103059*, 2001.
- [Gon01c] A. B. GONCHAROV : Multiple ζ -Values, Galois Groups, and Geometry of Modular Varieties. In Carles CASACUBERTA, Rosa Maria MIRÓ-ROIG, Joan VERDERA et Sebastià XAMBÓ-DESCAMPS, éditeurs : *European Congress of Mathematics : Barcelona, July 10–14, 2000, Volume I*, pages 361–392. Birkhäuser Basel, Basel, 2001.

- [Gon05] A. B. GONCHAROV : Galois symmetries of fundamental groupoids and non-commutative geometry. *Duke Math. J.*, 128(2):209–284, 2005.
- [Gro66] A. GROTHENDIECK : On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29):95–103, 1966.
- [Gro68] A. GROTHENDIECK : Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L . In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–45. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [Hai86] R. M. HAIN : Mixed Hodge structures on homotopy groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 14(1):111–114, 1986.
- [Hai87a] R. M. HAIN : The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I. *K-Theory*, 1(3):271–324, 1987.
- [Hai87b] R. M. HAIN : The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 46, pages 247–281, 1987.
- [HMS17] A. HUBER et S. MÜLLER-STACH : *Periods and Nori motives*, volume 65 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, 2017. With contributions by B. Friedrich and J. von Wangenheim.
- [HNMJPO99] V. HOANG NGOC MINH, G. JACOB, M. PETITOT et N. E. OUSSOUS : Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d’Euler-Zagier. *Sém. Lothar. Combin.*, 43:Art. B43e, 29, 1999.
- [Hof97] M. E. HOFFMAN : The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, 194(2):477–495, 1997.
- [Hof00] M. E. HOFFMAN : Quasi-shuffle products. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 11(1):49–68, 2000.
- [HZ87] R. M. HAIN et S. ZUCKER : Unipotent variations of mixed Hodge structure. *Invent. Math.*, 88(1):83–124, 1987.
- [IKZ06] K. IHARA, M. KANEKO et D. ZAGIER : Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compos. Math.*, 142(2):307–338, 2006.
- [KZ01] M. KONTSEVICH et D. ZAGIER : Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001.
- [Lin82] F. LINDEMANN : Ueber die Zahl π . *Mathematische Annalen*, 20(2):213–225, 1882.
- [PS16] E. PANZER et O. SCHNETZ : The Galois coaction on ϕ^4 periods. *Commun. Num. Theor. Phys.*, 11:657–705, 2016.
- [Reu93] C. REUTENAUER : *Free Lie algebras*, volume 7 de *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.
- [Riv00] T. RIVOAL : La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(4):267–270, 2000.
- [Sou10] I. SOUDÈRES : Motivic double shuffle. *International Journal of Number Theory*, 06(02):339–370, 2010.
- [Sti30] J. STIRLING : *Methodus differentialis, sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*. 1730.
- [Ter02] T. TERASOMA : Mixed Tate motives and multiple zeta values. *Invent. Math.*, 149(2):339–369, 2002.
- [Voe00] V. VOEVODSKY : Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [Wei49] A. WEIL : Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:497–508, 1949.

- [Zag94] D. ZAGIER : Values of Zeta Functions and Their Applications. In Anthony JOSEPH, Fulbert MIGNOT, François MURAT, Bernard PRUM et Rudolf RENTSCHLER, éditeurs : *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992 : Vol. II : Invited Lectures (Part 2)*, pages 497–512. Birkhäuser Basel, Basel, 1994.
- [Zud01] W. ZUDILIN : One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational. *Uspekhi Mat. Nauk*, 56(4(340)):149–150, 2001.