

Étude du système dynamique de N tourbillons ponctuels

Evelyne Miot, Journées XUPS
Version préliminaire

5 mai 2015

Résumé

Le but de ces exposés est de présenter un système d'équations différentielles ordinaires appelé système des points vortex, qui intervient en physique en tant que modèle pour l'évolution de certains fluides incompressibles bidimensionnels. On étudie les premières propriétés de ce système ainsi que le comportement des solutions, en mettant l'accent sur le cas de trois points vortex.

1 Le système des points vortex

L'objet d'étude de ces deux exposés est un système d'équations différentielles ordinaires appelé système des points vortex :

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = \sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{(z_i(t) - z_j(t))^\perp}{|z_i(t) - z_j(t)|^2}, & t \in [0, T) \\ z_i(0) = z_{i,0}, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici, on a $z_i \in C^1([0, T), \mathbf{R}^2)$ et $\gamma_i \in \mathbf{R}^*$ pour $i = 1, \dots, N$, et, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, le vecteur x^\perp désigne $x^\perp = (-x_2, x_1)$. Plus précisément, nous nous intéresserons aux questions d'existence et d'unicité de solutions pour ce système et étudierons leur comportement qualitatif dans des cas particuliers.

1.1 Le système des points vortex à partir des équations d'Euler

Avant d'initier notre étude du système (1.1) en tant que tel, nous allons faire une brève incursion dans le domaine des Équations aux dérivées partielles et de la physique afin d'en expliquer la provenance.

Le système des points vortex apparaît notamment dans le contexte de la mécanique des fluides incompressibles bidimensionnels, décrits par l'équation qu'Euler a introduite en 1755

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad u = (\nabla \Psi)^\perp, \quad \Delta \Psi = \omega, \quad \omega(0, x) = \omega_0(x), \quad (1.2)$$

où $\omega : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est la fonction tourbillon associée au fluide. Cette célèbre équation est l'un des objets du cours de Yann Brenier [6]. En effet, le système des points vortex se veut un modèle simplifié pour l'évolution de fluides en rotation rapide autour de points $z_i(t)$, ce que l'on peut exprimer en terme de tourbillon comme

$$\omega(t) \simeq \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{z_i(t)}. \quad (1.3)$$

Les points $z_i(t)$ sont appelés tourbillons ponctuels - ou points vortex - et les réels γ_i leurs circulations - ou intensités.

D'un point de vue historique, le système des points vortex a été introduit par Helmholtz [11] au dix-neuvième siècle. Ses premières propriétés ont ensuite été analysées dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle par Kirchhoff [8], qui a notamment mis en évidence sa structure hamiltonienne, par Poincaré [18], qui a démontré le caractère intégrable du système des trois points vortex, et en 1910 par Lord Kelvin [7]. Une étude systématique et très complète dans le cas des trois points vortex avait été réalisée de façon indépendante par Gröbli [17] pendant son travail de thèse en 1877; malheureusement, la dissertation de Gröbli a longtemps été ignorée ou dédaignée des autres mathématiciens, avant d'être remise à l'honneur par Aref dans les années 1980.

D'un point de vue mathématique, la validité du système des points vortex comme approximation de l'équation d'Euler a été démontrée de façon rigoureuse dans les années 1990 par Marchioro et Pulvirenti [14], tant que les points vortex sont bien séparés. En revanche, le « sens contraire », qui consiste à retrouver l'équation d'Euler à partir d'un très grand nombre de points vortex (c'est-à-dire en faisant $N \rightarrow +\infty$ dans (1.3)) est un problème encore ouvert de nos jours et s'inscrit dans un domaine de recherche très actif. On l'appelle problème de champ moyen.

La suite de ce paragraphe est dédiée à l'obtention formelle de (1.1) à partir de (1.2) selon l'hypothèse (1.3) lorsque le nombre N de points vortex est fixé.

1.1.1 Loi de Biot-Savart

Supposons que (u, ω) soit une solution *régulière globale* de (1.2)^a, c'est-à-dire ω appartient à $C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$ et u est bornée sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$, $u(t, x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ et enfin $\omega(t)$ est à support compact^b pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. Puisque $\Delta \Psi(t, \cdot) = \omega(t, \cdot)$ dans \mathbf{R}^2 , on a

$$\Psi(t, \cdot) = G * \omega(t, \cdot) + H(t, \cdot),$$

où $H(t, \cdot)$ est une fonction harmonique par rapport à x et où G est la solution fondamentale du Laplacien sur \mathbf{R}^2 ,

$$\forall x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \quad G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|.$$

a. Voir par exemple le Théorème 4.1 de [13] pour un énoncé et une démonstration de l'existence et l'unicité de telles solutions.

b. Cette hypothèse peut être affaiblie.

Alors

$$u(t, \cdot) = (\nabla G)^\perp * \omega(t, \cdot) + (\nabla H(t, \cdot))^\perp.$$

Puisque $\omega(t, \cdot)$ est à support compact, la fonction $(\nabla G)^\perp * \omega(t, \cdot)$ tend vers zéro lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Par hypothèse sur u , on en déduit qu'il en est de même pour $\nabla H(t, \cdot)$. Comme cette dernière est harmonique, le théorème de Liouville nous assure qu'elle est nulle.

Finalement, on a établi la *formule de Biot-Savart*

$$\forall x \in \mathbf{R}^2, \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(t, y) dy = \left(\frac{K}{2\pi} * \omega(t, \cdot) \right) (x).$$

1.1.2 Formulation lagrangienne

L'équation d'Euler a, en dimension 2, la structure remarquable d'une équation de transport. Plus précisément, supposons que (u, ω) soit une solution régulière de (1.2) et définissons le *flot de u* , c'est-à-dire l'application $X : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t, s, x) = u(t, X(t, s, x)), & t, s \in \mathbf{R}_+, \\ X(s, s, x) = x \in \mathbf{R}^2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Les hypothèses de régularité de u impliquent l'existence et l'unicité de $X(\cdot, s, x)$ dans $C^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$ pour $s \in \mathbf{R}_+$ et $x \in \mathbf{R}^2$. De plus, $X(t, s, \cdot)$ est inversible sur \mathbf{R}^2 , d'inverse $X(t, s, \cdot)^{-1} = X(s, t, \cdot)$. Enfin, puisque u est à divergence nulle, le théorème de Liouville (voir par exemple l'annexe 1.1 de [13]) implique que $\det(D_x X(t, s, \cdot)) = 1$ c'est-à-dire $X(t, s, \cdot)$ préserve la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 .

En utilisant (1.2), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\omega(t, X(t, 0, x))) &= \partial_t \omega(t, X(t, 0, x)) + \frac{dX}{dt}(t, 0, x) \cdot \nabla \omega(t, X(t, 0, x)) \\ &= (\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega)(t, X(t, 0, x)) = 0, \end{aligned}$$

donc ω est constant le long des courbes intégrales du flot de u :

$$\omega(t, x) = \omega_0(X(0, t, x)),$$

ce qui est équivalent (puisque $X(t, 0, \cdot)$ préserve la mesure de Lebesgue) à

$$\omega(t) = X(t, 0, \cdot)_* \omega_0, \quad (1.5)$$

c'est-à-dire $\int_A \omega(t) = \int_{X(t, 0)^{-1}(A)} \omega_0$ pour tout borélien A de \mathbf{R}^2 .

1.1.3 Dérivation formelle du système des points vortex

Supposons que (u, ω) soit une solution de (1.2) telle que $\omega(t)$ soit « proche » d'une somme de masses de Dirac comme dans (1.3). En accord avec la formule de Biot-Savart, le champ de vitesse total doit se comporter comme

$$u(t, x) \simeq \sum_{i=1}^N u_i(t, x), \quad u_i(t, x) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2} * (\gamma_i \delta_{z_i(t)})(x) = \frac{(x - z_i(t))^\perp}{2\pi|x - z_i(t)|^2}.$$

De plus, d'après la formulation lagrangienne (1.5), on doit avoir $z_i(t) = X(t, 0, z_{i,0})$ et donc d'après (1.4)

$$\dot{z}_i(t) = u(t, z_i(t)) = \sum_{j \neq i} u_j(t, z_i(t)), \quad z_i(0) = z_{i,0},$$

autrement dit (1.1) à un facteur d'échelle près. Notons que l'on a ôté le terme $u_i(t, z_i(t))$ qui n'est pas défini : ceci revient à considérer qu'un point vortex ne ressent pas le champ de vitesse créé par lui-même.

1.1.4 3D versus 2D

La notion de point vortex pour les fluides bidimensionnels admet un analogue tridimensionnel appelé tourbillon filamentaire. Dans la nature, ces filaments sont fréquemment observés sous forme d'anneau : ronds de fumée dans les airs émises par les cigarettes ou les volcans ; ou anneaux dans les liquides créés par les poissons. Des arguments similaires à ceux du paragraphe 1.1.3, décrits dans [12], permettent d'obtenir un système d'EDO décrivant la propagation de plusieurs tourbillons annulaires concentriques $\mathcal{C}_i(t)$, de rayon $y_i(t) > 0$, et situés dans des plans affines parallèles d'équation $x = x_i(t)$:

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{(z_i(t) - z_j(t))^\perp}{|z_i(t) - z_j(t)|^2} + C \gamma_i \vec{e}_1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

où $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$. En particulier, un seul anneau se propage à vitesse constante le long de l'axe des abscisses ; deux anneaux de même rayon et de circulations opposées entrent en collision en temps fini (contrairement au cas de deux points vortex, comme on le verra plus loin) ; d'autres dynamiques (telles que le mouvement « de saute-mouton ») peuvent encore être observées.

Contrairement au cas de la dimension 2, l'obtention rigoureuse d'un système d'EDO du type (1.6) à partir des équations d'Euler en dimension 3 constitue un problème encore largement ouvert.

1.2 Un premier résultat d'existence

Venons-en maintenant à l'analyse du système (1.1). D'emblée, remarquons que le membre de droite de (1.1) n'est pas défini si $(z_1(t), \dots, z_N(t)) \in \Delta$, où

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^2)^N \mid \exists i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j\}.$$

Par ailleurs, la fonction

$$K(x) = \frac{x^\perp}{|x|^2}$$

est localement bornée et localement lipschitzienne sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure ainsi un premier résultat général :

Théorème 1. *Soit $(z_{1,0}, \dots, z_{N,0}) \in \mathbf{R}^{2N} \setminus \Delta$. Il existe $T > 0$ et une unique solution maximale $(z_1, \dots, z_N) \in C^1([0, T], \mathbf{R}^{2N} \setminus \Delta)$ au système des points vortex. De plus, ou bien $T = +\infty$, ou bien $T < +\infty$ et dans ce cas*

$$\liminf_{t \rightarrow T} \left(\min_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)| \right) = 0.$$

Ainsi, les problématiques d'existence et d'unicité pour (1.1) sont directement reliées à celle de *collisions* - dans un sens à définir - entre les trajectoires des points vortex.

1.3 Écriture hamiltonienne, quantités conservées

Le système des points vortex peut être réécrit sous la forme d'un système hamiltonien : définissons la fonction

$$H : \mathbf{R}^{2N} \setminus \Delta \rightarrow \mathbf{R}, \quad H(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{2} \sum_{m \neq k=1}^N \gamma_m \gamma_k \ln |z_k - z_m|.$$

Alors, avec la notation $z_i = (z_{i_1}, z_{i_2})$, la première ligne de (1.1) est équivalente à

$$\begin{cases} \gamma_i \dot{z}_{i_1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial z_{i_2}} \\ \gamma_i \dot{z}_{i_2}(t) = \frac{\partial H}{\partial z_{i_1}}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.7)$$

ou encore, sous forme plus condensée, à

$$\gamma_i \dot{z}_i(t) = (\nabla_{z_i} H)^\perp(z_1(t), \dots, z_N(t)) \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Une conséquence immédiate de cette écriture est la

Proposition 1. *Soit (z_1, \dots, z_N) une solution de (1.1) sur $[0, T]$. Alors*

$$H(z_1(t), \dots, z_N(t)) = H(z_1(0), \dots, z_N(0)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour (z_1, \dots, z_N) une solution de (1.1) sur $[0, T]$, définissons les quantités suivantes :

- La circulation totale

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \gamma_i,$$

- Lorsque $\Gamma \neq 0$, le centre d'inertie

$$c(t) = \frac{1}{\Gamma} \sum_{i=1}^N \gamma_i z_i(t),$$

- La quantité

$$M(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i z_i(t) = \Gamma c(t) \quad \text{si } \Gamma \neq 0,$$

- Le moment d'inertie

$$I(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i |z_i(t)|^2,$$

- La quantité

$$T(t) = \sum_{m \neq k} \gamma_k \gamma_m |z_k(t) - z_m(t)|^2.$$

Proposition 2. Soit (z_1, \dots, z_N) une solution de (1.1) sur $[0, T)$. Alors

$$c(t) = c(0), \quad M(t) = M(0), \quad I(t) = I(0), \quad T(t) = T(0), \quad \forall t \in [0, T).$$

Démonstration. Elle découle essentiellement des deux relations

$$x \cdot K(x) = 0, \quad K(-x) = -K(x). \quad (1.9)$$

En effet, calculons la dérivée

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \dot{z}_i(t) = \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j K(z_i(t) - z_j(t)) \\ &= - \sum_{j \neq i} \gamma_j \gamma_i K(z_j(t) - z_i(t)) = 0, \end{aligned}$$

où l'on a échangé les indices i et j dans la deuxième ligne puis utilisé le fait que $K(-x) = -K(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Par les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i z_i(t) \cdot \dot{z}_i(t) = 2 \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j z_i(t) \cdot K(z_i(t) - z_j(t)) \\ &= -2 \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j z_j(t) \cdot K(z_i(t) - z_j(t)). \end{aligned}$$

Puisque $K(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on aboutit à

$$\dot{I}(t) = \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j (z_i(t) - z_j(t)) \cdot K(z_i(t) - z_j(t)) = 0.$$

Enfin, remarquons que

$$\begin{aligned} T(t) &= \sum_{k,m=1}^N \gamma_k \gamma_m (|z_k(t)|^2 + |z_m(t)|^2 - 2z_k(t) \cdot z_m(t)) \\ &= 2(\Gamma I(t) - |M(t)|^2), \end{aligned}$$

par conséquent $T(t)$ est également constante sur $[0, T)$.

□

1.4 Circulations de même signe : existence globale

Si toutes les circulations sont de même signe, la conservation du moment et de l'énergie assurent que le système des points vortex admet une unique solution globale quelle que soit la configuration initiale.

Théorème 2. *Si toutes les circulations γ_i sont de même signe, la solution (z_1, \dots, z_N) donnée par le Théorème 1 vérifie $T = +\infty$. En outre, il existe $\lambda, \Lambda > 0$ tel que*

$$\inf_{t \in \mathbf{R}_+} \min_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)| \geq \lambda$$

et

$$\sup_{t \in \mathbf{R}_+} \max_{i=1, \dots, N} |z_i(t)| \leq \Lambda.$$

Démonstration. Supposons par exemple que tous les γ_i sont positifs. Posons

$$\begin{aligned} J(t) &= T(t) - 2H(z_1(t), \dots, z_N(t)) \\ &= \sum_{m \neq k} \gamma_k \gamma_m (|z_k(t) - z_m(t)|^2 - \ln |z_k(t) - z_m(t)|). \end{aligned}$$

D'une part, la quantité $J(t)$ est constante sur $[0, T)$ en vertu des Propositions 1 et 2. D'autre part, soit $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$ tel que $i \neq j$. Puisque $|x|^2 - \ln |x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, l'hypothèse de signe sur les circulations implique que chaque terme de la somme est positif. Ainsi,

$$J(t) = J(0) \geq \gamma_i \gamma_j (|z_i(t) - z_j(t)|^2 - \ln |z_i(t) - z_j(t)|) \geq \gamma_i \gamma_j (-\ln |z_i(t) - z_j(t)|),$$

dont l'on déduit que

$$|z_i(t) - z_j(t)| \geq \exp\left(-\frac{J(0)}{\gamma_i \gamma_j}\right).$$

Puis, on a pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$

$$I(t) = I(0) \geq \gamma_i |z_i(t)|^2,$$

et il s'ensuit que

$$|z_i(t)| \leq \left(\frac{I(0)}{\gamma_i}\right)^{1/2}.$$

□

1.5 Le cas de deux points vortex

Concluons cette présentation par la construction de la solution du système des points vortex lorsque $N = 2$. Nous sommes ramenés à l'étude de

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \gamma_2 \frac{(z_1(t) - z_2(t))^\perp}{|z_1(t) - z_2(t)|^2} \\ \dot{z}_2(t) = \gamma_1 \frac{(z_2(t) - z_1(t))^\perp}{|z_1(t) - z_2(t)|^2}, \end{cases} \quad t \in [0, T). \quad (1.10)$$

Puisque l'énergie $H(t) = \gamma_1 \gamma_2 \ln |z_1(t) - z_2(t)|$ est conservée, on sait déjà que $|z_1(t) - z_2(t)| = |z_1(0) - z_2(0)|$ pour tout $t \in [0, T)$. Comme les trajectoires

de deux points vortex n'entrent jamais en collision, on a $T = +\infty$. Afin de déterminer explicitement les trajectoires, il convient de dissocier les deux cas suivants.

- $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

Alors $M(t) = \gamma_1 (z_1(t) - z_2(t)) = M(0)$, donc (1.10) se réécrit comme

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \gamma_1 \frac{(z_2(t) - z_1(t))^\perp}{|z_1(t) - z_2(t)|^2} = -\frac{M(0)}{|z_1(0) - z_2(0)|^2},$$

d'où

$$z_1(t) = z_1(0) - \frac{M(0)t}{|z_1(0) - z_2(0)|^2}, \quad z_2(t) = z_2(0) - \frac{M(0)t}{|z_1(0) - z_2(0)|^2}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Les points vortex évoluent donc selon un mouvement de translation uniforme dont la vitesse est proportionnelle à l'inverse de la distance qui les sépare. On remarque que ceci fournit un exemple de dynamique pour lequel les trajectoires ne sont pas bornées uniformément sur \mathbf{R}_+ , contrairement à la solution du Théorème 2.

- $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$.

Puisque $c(t) = M(t)/\Gamma = c(0)$, on peut exprimer (1.10) sous la forme

$$\dot{z}_1(t) = \frac{\Gamma}{|z_1(0) - z_2(0)|^2} (z_1(t) - c(0)), \quad \dot{z}_2(t) = \frac{\Gamma}{|z_1(0) - z_2(0)|^2} (z_2(t) - c(0)).$$

Ainsi, le mouvement est celui d'une rotation uniforme des points z_1 et z_2 autour du centre d'inertie $c(0)$ à vitesse angulaire $\Gamma|z_1(0) - z_2(0)|^2$.

Le mouvement de translation uniforme pour la paire de vortex s'apparente fortement à celui d'un (unique) rond de fumée, comme on l'a vu au paragraphe 1.1.4; on peut voir en effet une paire de points vortex comme la projection bidimensionnelle d'un anneau, obtenue par la section de l'anneau par un plan perpendiculaire.

2 Collisions de trois points

L'objectif de cette partie est d'étudier plus précisément la question des collisions en temps fini entre les points vortex. C'est un problème complexe, y compris dans sa définition. En effet, on pourrait envisager plusieurs types de collisions entre les trajectoires :

- des collisions partielles, c'est-à-dire telles que

$$\liminf_{t \rightarrow T} \min_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)| = 0;$$

- des collisions totales, c'est-à-dire telles que

$$\liminf_{t \rightarrow T} \max_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)| = 0.$$

- des collisions autosimilaires, voir ci-dessous.

Dans la suite, on parlera de collision au sens de collision partielle c'est-à-dire dès que la solution maximale du Théorème 1 vérifie $T < +\infty$.

2.1 Collisions autosimilaires pour le système des trois points vortex

On va proposer ici une méthode pour construire des solutions du système à $N = 3$ points vortex dont les trajectoires s'intersectent en temps fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse de Gröbni [17] (pour les lecteurs germanophones uniquement !), de Aref [1, 4], ainsi qu'au livre [13] de Marchioro et Pulvirenti page 140. L'étude qui suit ne s'étend pas, a priori, au cas de $N \geq 4$ points. Trois points définissent trois distances

$$\ell_{12}(t) = |z_1(t) - z_2(t)|, \quad \ell_{23}(t) = |z_2(t) - z_3(t)|, \quad \ell_{31}(t) = |z_3(t) - z_1(t)|.$$

Puisque

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3)^\perp &= (z_1 - z_2) \cdot (z_2 - z_3)^\perp \\ &= (z_2 - z_3) \cdot (z_2 - z_1)^\perp = (z_2 - z_3) \cdot (z_3 - z_1)^\perp \\ &= (z_3 - z_1) \cdot (z_3 - z_2)^\perp = (z_3 - z_1) \cdot (z_1 - z_2)^\perp, \end{aligned}$$

les distances vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \ell_{12}^2(t) = 4\gamma_3 \mathcal{A}(t) \left(\frac{1}{\ell_{23}^2} - \frac{1}{\ell_{31}^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \ell_{23}^2(t) = 4\gamma_1 \mathcal{A}(t) \left(\frac{1}{\ell_{31}^2} - \frac{1}{\ell_{12}^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \ell_{31}^2(t) = 4\gamma_2 \mathcal{A}(t) \left(\frac{1}{\ell_{12}^2} - \frac{1}{\ell_{23}^2} \right), \end{cases} \quad (2.11)$$

où $\mathcal{A}(t) = -(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3)^\perp = A(t)\sigma$, avec $A(t) \geq 0$ l'aire du triangle formé par les points $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ et $\sigma = \pm 1$ vaut 1 si ce triangle est orienté positivement, et -1 sinon.

Dans la suite, on dit qu'il se produit une *collision autosimilaire* pour le système des trois points vortex lorsque la solution donnée par le Théorème 1 vérifie

- $T < +\infty$,
- $\ell_{12}(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0$ et $\ell_{23}(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0$,
- $\frac{\ell_{12}(t)}{\ell_{23}(t)} = \frac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)}$ et $\frac{\ell_{23}(t)}{\ell_{31}(t)} = \frac{\ell_{23}(0)}{\ell_{31}(0)}$, $\forall t \in [0, T)$.

En particulier, la collision est totale. De plus, le triangle formé par les trois points est donc pour tout temps $t < T$ l'image du premier par une similitude. Comme nous allons le voir dans peu de temps, la quantité

$$h = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1$$

joue un rôle important dans l'étude des collisions autosimilaires.

Des conditions nécessaires pour qu'une collision autosimilaire ait lieu sont données ci-dessous.

Proposition 3. *Si le système des trois points vortex évolue vers une collision autosimilaire, on a $h = 0$ et $T(0) = 0$.*

Démonstration. On a $T(0) = T(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$, ainsi $T(0) = 0$. D'autre part, comme l'énergie et les rapports des longueurs sont constants, on a

$$e^{H(0)} = \ell_{12}(t)^{\gamma_1 \gamma_2} \ell_{23}(t)^{\gamma_2 \gamma_3} \ell_{31}(t)^{\gamma_3 \gamma_1} = \left(\frac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)} \right)^{\gamma_1 \gamma_2} \left(\frac{\ell_{31}(0)}{\ell_{23}(0)} \right)^{\gamma_1 \gamma_3} \ell_{23}(t)^h,$$

donc $h = 0$.

□

La réciproque est partiellement vraie :

Théorème 3. *Si la configuration initiale vérifie*

$$h = 0 \quad \text{et} \quad T(0) = 0,$$

alors la solution donnée par le Théorème 1 forme un triangle autosimilaire :

$$\frac{\ell_{12}(t)}{\ell_{23}(t)} = \frac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)} \quad \text{et} \quad \frac{\ell_{23}(t)}{\ell_{31}(t)} = \frac{\ell_{23}(0)}{\ell_{31}(0)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

De plus, supposons que les trois points ne forment pas initialement un triangle équilatéral ni ne soient initialement alignés^c. Alors il existe $T^ \neq 0$ tel que*

$$\ell_{12}(t) = \ell_{12}(0) \sqrt{1 - t/T^*}, \quad \ell_{12}(t) = \ell_{12}(0) \sqrt{1 - t/T^*}, \quad \ell_{12}(t) = \ell_{12}(0) \sqrt{1 - t/T^*}.$$

Par conséquent, si $T^ > 0$, le système évolue vers une collision totale en $T = T^*$. Si $T^* < 0$, le triangle croît et $T = +\infty$.*

Démonstration. Calculons, en utilisant (2.11), la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ell_{12}^2}{\ell_{23}^2} \right) &= \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4} \left(\gamma_3 \ell_{23}^2 \left(\frac{1}{\ell_{23}^2} - \frac{1}{\ell_{31}^2} \right) - \gamma_1 \ell_{12}^2 \left(\frac{1}{\ell_{31}^2} - \frac{1}{\ell_{12}^2} \right) \right) \\ &= \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4} \left(\gamma_1 + \gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2 \ell_{31}^2} (\gamma_2 \gamma_3 \ell_{23}^2 + \gamma_1 \gamma_2 \ell_{12}^2) \right). \end{aligned}$$

Puisque $T = \gamma_2 \gamma_3 \ell_{23}^2 + \gamma_1 \gamma_2 \ell_{12}^2 + \gamma_1 \gamma_3 \ell_{31}^2$ est nul, ceci nous donne

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\ell_{12}^2}{\ell_{23}^2} \right) = \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4} \left(\gamma_1 + \gamma_3 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2} \right) = \frac{4\mathcal{A}}{\gamma_2 \ell_{23}^4} h = 0.$$

Ainsi, le rapport ℓ_{12}/ℓ_{23} est constant sur $[0, T)$, et il en va de même pour ℓ_{23}/ℓ_{31} (par conséquent aussi pour ℓ_{31}/ℓ_{12}).

c. Le cas des triangles équilatéraux et des configurations colinéaires sera envisagé au paragraphe sur les équilibres relatifs.

Ensuite, on en déduit qu'il existe $\alpha_{12} \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall t \in [0, T), \quad 2\mathcal{A}(t) = \ell_{31}(t)\ell_{23}(t) \sin(\widehat{132}) = \alpha_{12}\ell_{12}(t)^2.$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\ell_{12}^2(t) = 4\gamma_3\mathcal{A}(t) \left(\frac{1}{\ell_{23}(t)^2} - \frac{1}{\ell_{31}(t)^2} \right),$$

on obtient l'existence de $M_{12} \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall t \in [0, T), \quad \frac{d}{dt}\ell_{12}^2(t) = M_{12},$$

soit

$$\ell_{12}^2(t) = \ell_{12}^2(0) + M_{12}t = \ell_{12}^2(0) \left(1 + \frac{M_{12}}{\ell_{12}^2(0)}t \right).$$

Notons que $M_{12} \neq 0$. En effet, si $M_{12} = 0$,

$$0 = \left(\frac{d\ell_{12}^2}{dt} \right) (0) = 2\gamma_3\mathcal{A}(0) \left(\frac{1}{\ell_{23}(0)^2} - \frac{1}{\ell_{31}(0)^2} \right).$$

Puisque les trois points ne sont pas initialement alignés on a $\mathcal{A}(0) \neq 0$, ainsi $\ell_{23}(0) = \ell_{31}(0)$. Comme $h = 0$ et $T(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1\gamma_2\ell_{12}(0)^2 + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)\ell_{23}(0)^2 \\ &= \gamma_1\gamma_2\ell_{12}(0)^2 - \gamma_1\gamma_2\ell_{23}(0)^2 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction puisqu'on a supposé que le triangle initial n'est pas équilatéral. De même, on a $M_{23} \neq 0$ et $M_{31} \neq 0$.

Ensuite, les rapports de distances étant constants, on a nécessairement

$$\frac{M_{12}}{\ell_{12}^2(0)} = \frac{M_{13}}{\ell_{13}^2(0)} = \frac{M_{32}}{\ell_{32}^2(0)} =: -\frac{1}{T^*}$$

ce qui donne les deux cas de figure possibles en fonction du signe de T^* .

□

Donnons à présent un exemple explicite de données initiales satisfaisant les conditions $h = 0$ et $T(0) = 0$, issu de [13]. Posons

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = -1,$$

donc $h = 0$, puis

$$z_{1,0} = (-1, 0), \quad z_{2,0} = (1, 0), \quad z_{3,0} = (1, \sqrt{2})$$

de sorte que le triangle formé par $(z_{1,0}, z_{2,0}, z_{3,0})$ est rectangle, positivement orienté, et satisfait bien $T(0) = 0$. Puis,

$$\left(\frac{d\ell_{12}^2}{dt} \right) (0) = 2\gamma_3|\mathcal{A}(0)| \left(\frac{1}{\ell_{23}(0)^2} - \frac{1}{\ell_{31}(0)^2} \right) < 0,$$

donc $M_{12} < 0$ et le système évolue vers une collision auto-similaire en temps fini. En partant des mêmes positions mais en posant cette fois $\gamma_1 = \gamma_2 = -2$ et $\gamma_3 = 1$, on trouve $M_{12} > 0$ donc le triangle croît. Un autre exemple est obtenu en gardant les valeurs $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ et $\gamma_3 = -1$ et en posant

$$z_{1,0} = (-1, 0), \quad z_{2,0} = (1, 0), \quad z_{3,0} = (1, -\sqrt{2}),$$

ce qui revient à changer l'orientation du triangle initial.

De façon plus générale, il existe une méthode géométrique simple qui permet de construire les configurations initiales satisfaisant aux conditions de collision en temps fini, qui sont détaillés dans [4].

2.2 Collisions pour le système des trois points vortex

Le but de ce paragraphe est de démontrer que toute collision pour le système des trois points vortex est nécessairement une collision totale et auto-similaire.

Théorème 4. *Soit (z_1, z_2, z_3) une solution du système des trois points vortex donnée par le Théorème 1 avec $T < +\infty$. Alors $h = 0$ et $T(0) = 0$. En particulier, en vertu du Théorème 3, toute collision pour le système des trois points vortex est nécessairement autosimilaire.*

Démonstration. On introduit les distances minimale et maximale

$$d(t) = \min_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)|, \quad D(t) = \max_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)|.$$

Puisque $T < +\infty$, il existe une suite $t_n \rightarrow T$, strictement croissante, telle que $d(t_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quitte à extraire, ceci implique qu'il existe $i \neq j$ tel que $|z_i(t_n) - z_j(t_n)| \rightarrow 0$. Prenons par exemple $i = 1$ et $j = 2$.

On va établir ci-dessous que

$$\ell_{31}(t_n) \xrightarrow{t_n \rightarrow T} 0,$$

autrement dit les trois trajectoires des points vortex entrent simultanément en collision le long de la suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$. En effet, si ce n'est pas le cas,

- Ou bien on peut trouver une suite extraite de $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, **renotée** $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $\ell_{31}(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbf{R}_+^*$;
- Ou bien on peut trouver une suite extraite de $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, **renotée** $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $\ell_{31}(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Dans le premier cas, on a alors aussi $\ell_{23}(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi, puisque $H(t_n) = H(0)$,

$$\begin{aligned} \ell_{12}(t_n)^{\gamma_1 \gamma_2} &= e^{H(0)} \ell_{23}(t_n)^{-\gamma_2 \gamma_3} \ell_{31}(t_n)^{-\gamma_3 \gamma_1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{H(0)} \ell^{-\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_3 \gamma_1} \in \mathbf{R}_+^*, \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $\ell_{12}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Dans le second cas, on a

$$\ell_{23}(t_n)^2 = \ell_{31}(t_n)^2 + o(\ell_{31}(t_n)).$$

Puisque $T(t_n) = T(0)$, on a

$$\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 = \frac{T(0)}{\ell_{31}(t_n)^2} + o(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

d'où $\gamma_1 = -\gamma_2$. En revenant au fait que l'énergie est conservée, on en déduit que

$$\ell_{12}(t_n)^{\gamma_1\gamma_2} = e^{H(0)} \left(\frac{\ell_{23}(t_n)}{\ell_{31}(t_n)} \right)^{-\gamma_3\gamma_1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{H(0)},$$

ce qui est de nouveau absurde.

Finalement, on a $T(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et T est constante, d'où $T(0) = 0$.

Montrons ensuite que $h = 0$. Puisque les γ_i ne sont pas tous de même signe d'après le Théorème 2, on peut supposer par exemple que $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ et $\gamma_3 < 0$.

Supposons par l'absurde $h < 0$. Soit

$$\gamma = |\gamma_3| \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) > 1.$$

On a pour tout $t \in [0, T)$

$$\ell_{12}(t) \leq e^{\frac{H(0)}{\gamma_1\gamma_2}} \ell_{31}(t)^{\frac{|\gamma_3|}{\gamma_2}} \ell_{23}(t)^{\frac{|\gamma_3|}{\gamma_1}} \leq e^{\frac{H(0)}{\gamma_1\gamma_2}} D(t)^\gamma. \quad (2.12)$$

Ceci implique qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $D(t_n) \neq \ell_{12}(t_n)$: sinon, l'inégalité précédente donnerait pour une sous-suite $(t_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$

$$D(t_{n_k}) \leq e^{\frac{H(0)}{\gamma_1\gamma_2}} D(t_{n_k})^\gamma,$$

ce qui est impossible puisque $\gamma > 1$ et que $D(t_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Soit $n \geq n_0$. Par exemple, si $D(t_n) = \ell_{31}(t_n)$, alors d'après (2.12) on a

$$\ell_{23}(t_n)^2 = D(t_n)^2 + O(D(t_n)^{\gamma+1}),$$

ce qui est encore vrai si $D(t_n) = \ell_{23}(t_n)$. Finalement, comme $T(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} |\gamma_3|(\gamma_1 + \gamma_2)D(t_n)^2 &= \gamma_1\gamma_2 d(t_n)^2 + O(D(t_n)^{\gamma+1}) \\ &= O(D(t_n)^{\gamma+1}), \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $h \geq 0$.

Si $h > 0$, on obtient cette fois $\gamma < 1$ et

$$\ell_{12}(t) \geq e^{\frac{H(0)}{\gamma_1\gamma_2}} \ell_{31}(t)^{\frac{|\gamma_3|}{\gamma_2}} \ell_{23}(t)^{\frac{|\gamma_3|}{\gamma_1}} \geq e^{\frac{H(0)}{\gamma_1\gamma_2}} d(t)^\gamma. \quad (2.13)$$

Comme $d(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\gamma < 1$, il existe donc $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait ou bien $d(t_n) = \ell_{31}(t_n)$ ou bien $d(t_n) = \ell_{23}(t_n)$. Il existe une suite extraite, renotée $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $d(t_n) = \ell_{31}(t_n)$ (par exemple) pour tout $n \geq n_1$. Alors d'après (2.13),

$$\ell_{23}(t_n)^2 = \ell_{12}(t_n)^2 + \ell_{31}(t_n)^2 + O(\ell_{12}(t_n)\ell_{31}(t_n)) = \ell_{12}(t_n)^2 + O\left(\ell_{12}(t_n)^{1+\frac{1}{\gamma}}\right).$$

Puisque $T(0) = 0$, on en déduit que

$$(\gamma_2\gamma_1 + \gamma_2\gamma_3)\ell_{12}(t_n)^2 = O\left(\ell_{12}(t_n)^{1+\frac{1}{\gamma}}\right),$$

avec $1 + \frac{1}{\gamma} > 2$, donc $\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 = 0$ puis $h = \gamma_1\gamma_3 < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $h > 0$. □

2.3 Presque jamais de collision

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, les conditions nécessaires de collision en temps fini pour le cas de trois points sont très restrictives quant au choix des circulations γ_i et des positions initiales. Il s'avère que pour un nombre quelconque $N \geq 3$ de points, les configurations initiales qui mènent à des collisions en temps fini sont exceptionnelles.

Plus précisément, nous avons le résultat suivant dû à Marchioro et Pulvirenti [13].

Théorème 5. *On suppose que*

$$\forall J \subset \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{i \in J} \gamma_i \neq 0.$$

Alors pour presque toute^d position initiale $(z_{1,0}, \dots, z_{N,0}) \in (\mathbf{R}^2)^N \setminus \Delta$, la solution donnée par le Théorème 1 est globale.

La preuve repose sur l'invariance de la mesure de Lebesgue par le flot du système hamiltonien (1.1), on ne la développera pas ici. Mentionnons toutefois que Marchioro et Pulvirenti établissent l'estimation quantitative suivante : pour tout $T > 0$,

$$\left| \left\{ (z_{1,0}, \dots, z_{N,0}) \mid \inf_{t \in [0, T]} \min_{i \neq j} |z_i(t) - z_j(t)| < \varepsilon \right\} \right| \leq C(T) |\ln \varepsilon|^{-1}.$$

3 Équilibres relatifs et configurations stationnaires

Dans ce dernier paragraphe, nous allons amorcer l'étude d'une classe particulière de solutions pour le système des points vortex, celle des équilibres

d. Au sens de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}^2)^N$.

fixes et des équilibres relatifs. Soit $N \geq 2$ et soit (z_1, \dots, z_N) la solution de (1.1) donnée par le Théorème 1. Nous dirons que (z_1, \dots, z_N) est

- Un équilibre fixe - ou configuration stationnaire - si

$$z_j(t) = z_j(0), \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall t \in [0, T];$$

- En translation uniforme si, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $V(t) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que

$$\dot{z}_j(t) = V(t), \quad \forall j = 1, \dots, N;$$

- Un équilibre relatif si il existe $z_0 \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $t \in [0, T)$, il existe $\omega(t) \in \mathbf{R}^*$ tel que

$$\dot{z}_j(t) = \omega(t)(z_j(t) - z_0)^\perp, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Le polygone formé par les points vortex au temps t est constant (dans le premier cas) ou obtenu à partir du polygone initial par une translation (dans le second cas) ou une rotation (dans le troisième cas). Dans les trois situations, la taille et la forme du polygone sont constants, en particulier aucune collision ne se produit et donc $T = +\infty$.

On remarque que si (z_1, \dots, z_N) est un équilibre relatif, il en est de même pour toute configuration obtenue à partir de (z_1, \dots, z_N) par rotation, homothétie ou translation.

Nous aurons besoin de la quantité h déjà introduite dans l'étude des collisions, définie par

$$h = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \gamma_i \gamma_j.$$

Mentionnons dès maintenant une condition nécessaire sur les circulations, qui sera établie au paragraphe 3.3, pour l'existence d'une configuration stationnaire.

Proposition 4. *Si (z_1, \dots, z_N) est une configuration stationnaire, alors*

$$h = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \gamma_i \gamma_j = 0.$$

3.1 Équilibres relatifs et configurations stationnaires pour $N = 3$ points vortex

Le cas des trois points vortex a été amplement étudié dans la littérature, voir par exemple [2, 3, 4]. Il y a seulement deux types d'équilibres relatifs^e :

- Les triangles équilatéraux en rotation uniforme : pour tout choix de circulations telles que $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \neq 0$, si $(z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ forme un triangle équilatéral de côté $\ell > 0$ en rotation uniforme autour de son centre d'inertie, à la vitesse angulaire

$$\theta = \frac{\Gamma}{\ell^2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\ell^2},$$

e. Á rotation, homothétie ou translation près.

c'est une solution du système des points vortex.

- Les configurations colinéaires en rotation uniforme : si $\Gamma = 0$, elles s'écrivent en notation complexe

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \ell \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \right) e^{i\theta t}, \\ z_2(t) &= \ell \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3} - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \right) e^{i\theta t}, \\ z_3(t) &= \ell \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) e^{i\theta t}, \end{aligned}$$

où ℓ est un facteur d'échelle et où $\theta = -\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{h\ell^2}$.

Le cas où $\Gamma \neq 0$ est toutefois plus complexe ; en particulier, suivant les choix des circulations γ_1, γ_2 et γ_3 il peut y avoir une, deux, trois, voire aucun équilibre relatif de points alignés.

Par ailleurs, lorsque $\Gamma = 0$, si $(z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ forme un triangle équilatéral de côté $\ell > 0$ en translation uniforme à la vitesse $V(t) = -c(0)^\perp/\ell^2$, c'est une solution du système des points vortex.

Enfin, pour tout choix de circulations satisfaisant $h = 0$, il existe une configuration stationnaire, donnée par

$$z_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_1}, \quad z_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_2}, \quad z_3 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_3}.$$

3.2 Équilibres relatifs et configuration stationnaires à N points

Pour tout $N \geq 3$, il existe des équilibres relatifs qui sont donnés par N points de même circulations, alignés, et dont les positions sont déterminées comme zéros de polynômes bien particuliers (voir la section suivante). D'autres équilibres relatifs sont obtenus en plaçant un point vortex de circulation $\gamma_i = \gamma$ à chaque sommet d'un polygone régulier à N côtés et de taille ℓ , ce qui donne une vitesse angulaire $\theta = \gamma(N-1)/(2\ell^2)$. Le problème de la stabilité de ces solutions (linéaire et non linéaire) a suscité beaucoup d'attention de la part des mathématiciens. En particulier, Lord Kelvin souleva cette question en 1878, en notant par ailleurs le lien étroit entre ce problème et celui de la stabilité des équilibres d'aimants plongés dans un champ magnétique. La réponse complète à sa question a été finalement apportée par Kurakin and Yudovitch [9, 10], qui ont démontré que le N -gone est stable si et seulement si $N \leq 7$.

Il est possible d'obtenir d'autres équilibres relatifs en ajoutant à la solution précédente un point vortex de circulation arbitraire γ_0 au centre du polygone, auquel cas la vitesse angulaire devient $\theta = (\gamma(N-1) + 2\gamma_0)/(2\ell^2)$. En particulier, en posant $\gamma_0 = -\gamma(N-1)/2$ on obtient une solution stationnaire.

Enfin, signalons que d'autres types d'équilibres relatifs existent : polygones non nécessairement réguliers concentriques avec des vortex de circulations éventuellement différentes. On renvoie aux articles de Aref, Newton, Stremler, Tokieda and Vainchtein [5], ainsi que de O'Neil [16].

3.3 Dénombrément des configurations stationnaires

Nous allons ici déterminer des conditions nécessaires additionnelles à celle donnée par la Proposition 4 pour l'existence de configurations stationnaires et, le cas échéant, tenter de les dénombrer. Une analyse approfondie de ces questions est réalisée dans l'article de O'Neil [15]. Nous allons adopter des notations complexes pour désigner les positions des points vortex. Une configuration stationnaire est donc un élément (z_1, \dots, z_N) de $\mathbb{C}^N \setminus \Delta$ qui vérifie

$$\overline{\dot{z}_k} = -i \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

De façon équivalente, c'est aussi un point critique de la fonctionnelle H .

Proposition 5. *Soit (z_1, \dots, z_N) une configuration stationnaire. Alors pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$, on a*

$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2}.$$

Démonstration. On a par décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{(z - z_k)(z - z_j)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{z_k - z_j} \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z - z_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{z - z_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (3.14). □

En développant les termes de gauche et de droite de la Proposition 5 en série de Laurent pour $|z| > \max(|z_1|, \dots, |z_N|)$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_k}{z - z_k} &= z^{-1} \frac{\gamma_k}{1 - \frac{z_k}{z}} = z^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_k z_k^j z^{-j}, \\ \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} &= \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \gamma_k^2 z_k^j z^{-2-j}. \end{aligned}$$

Posons pour $j \in \mathbb{N}$

$$m_j = \sum_{k=1}^N \gamma_k z_k^j, \quad M_j = \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 z_k^j.$$

On a alors d'après la Proposition 5 (après simplification par z^{-2})

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} m_j z^{-j} \right)^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) M_j z^{-j}.$$

Par identification, on aboutit à

$$\sum_{\ell=0}^p m_\ell m_{p-\ell} = (p+1) M_p, \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

En particulier, avec $p = 0$ on retrouve

$$m_0 = \sum_{k=1}^N \gamma_k = M_0 = \sum_{k=1}^N \gamma_k^2,$$

à savoir la relation de la Proposition 4.

On remarque que, réciproquement, si

$$\sum_{\ell=0}^p m_\ell m_{p-\ell} = (p+1) M_p, \quad \forall p = 0, \dots, N-2,$$

alors (z_1, \dots, z_N) est une configuration stationnaire. En effet, on a alors d'après la démonstration de la Proposition 5

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{z - z_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} \right) &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 - \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} \\ &= z^{-N-1} F(z^{-1}), \end{aligned}$$

où F est une série entière. En multipliant à gauche et à droite par le polynôme $\prod_{\ell=1}^N (z - z_\ell)$ de degré N , on trouve alors

$$P(z) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \prod_{\ell \neq k} (z - z_\ell) \left(\sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} \right) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

où P est un polynôme, ainsi $P = 0$.

Comme on l'a déjà évoqué, la transformation

$$(z_1, \dots, z_N) \mapsto (\alpha z_1 + \beta, \dots, \alpha z_N + \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0,$$

transforme une configuration stationnaire en une configuration stationnaire. Ainsi, on peut considérer une configuration (z_1, \dots, z_N) comme un élément $[z_1, \dots, z_N]$ de l'espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ et se débarrasser de l'invariance par translation en fixant un hyperplan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$, par exemple l'hyperplan donné par $\{m_1\} = 0$.

Proposition 6. Soit \mathcal{V} l'ensemble de \mathbb{CP}^{N-1} constitué des solutions $[z_1, \dots, z_N]$ de

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ \sum_{\ell=0}^p m_\ell m_{p-\ell} = (p+1)M_p, \quad \forall p = 0, \dots, N-2. \end{cases} \quad (3.15)$$

L'ensemble des configurations stationnaires est $\mathcal{V} \setminus \Delta$.

Finalement, l'étude des configurations stationnaires se ramène donc à l'étude de variétés algébriques projectives, ce qui nous amène à rappeler le

Théorème 6 (Théorème de Bezout). *Ou bien \mathcal{V} admet un nombre infini d'éléments, et dans ce cas \mathcal{V} intersecte tout hyperplan. Ou bien \mathcal{V} contient un nombre fini d'éléments, égal (à multiplicité près) à $(N-2)!$.*

Il existe un critère permettant d'écartier le cas d'un nombre infini de solutions pour (3.15) :

Proposition 7. *Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ des circulations telles que $h = 0$. Supposons qu'il existe deux indices p et q tels que pour tout sous-ensemble strict J de $\{1, \dots, N\}$, $p, q \subset J$ implique que $\sum_{j,k \in J} \gamma_j \gamma_k \neq 0$. Alors \mathcal{V} contient exactement (à multiplicité près) $(N-2)!$ éléments. En particulier, il y a au plus $(N-2)!$ configurations stationnaires.*

Démonstration. Soit $[z_1, \dots, z_N]$ un point de \mathcal{V} tel que $z_p = z_q =: z^*$. Soit J l'ensemble des indices de $\{1, \dots, N\}$ tels que $z_j = z_p$. J est un sous-ensemble strict car le point $[z_p, \dots, z_p] = [1, \dots, 1]$ ne satisfait pas $m_1 = 0$. On a par définition de \mathcal{V}

$$\left(\frac{\sum_{j \in J} \gamma_j}{z - z^*} + \sum_{j \notin J} \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right)^2 = \frac{\sum_J \gamma_j^2}{(z - z^*)^2} + \sum_{j \notin J} \frac{\gamma_j^2}{(z - z_j)^2},$$

ce qui par identification mène à

$$\left(\sum_{j \in J} \gamma_j \right)^2 = \sum_J \gamma_j^2,$$

en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, \mathcal{V} n'intersecte pas l'hyperplan $z_p = z_q$, et le théorème de Bezout s'applique. □

Remarque. À ce stade, rien n'affirme qu'une, au moins, des solutions donnée par le Théorème de Bezout n'appartienne pas à Δ , et il faut procéder à une analyse plus poussée. Toutefois, la démonstration précédente montre que si les circulations sont telles que pour tout sous-ensemble strict J de $\{1, \dots, N\}$ on a $\sum_{j,k \in J} \gamma_j \gamma_k \neq 0$, alors \mathcal{V} n'intersecte pas Δ , ainsi il y a exactement $(N-2)!$ configurations stationnaires.

Références

- [1] H. Aref, *Motion of three vortices*, Physics of fluids **22**, 393, (1979).
- [2] H. Aref, *Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows*, Ann. Rev. Fluid Mech. **15** (1983), 345–389.
- [3] H. Aref, *Stability of relative equilibria of three vortices*, Physics of fluid **21** (2009), 094101.
- [4] H. Aref, *Self-similar motion of three point vortices*, Physics of fluids **22** (2010), 057104.
- [5] H. Aref, P. K. Newton, M. Stremler, T. Tokieda and D. Vainchtein, *Vortex Crystals*, Adv. Appl. Mech. **39** (2003), 1–79.
- [6] Y. Brenier, exposé aux Journées XUPS (2015).
- [7] L. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1910).
- [8] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Math. Phys.*, Teuber, Leipzig (1876).
- [9] L. G. Kurakin and V. I. Yudovich, *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon* Chaos **12** (2002), 574–595.
- [10] L. G. Kurakin and V. I. Yudovich, *On the nonlinear stability of the steady rotation of a regular vortex polygon* (Russian), Dokl. Akad. Nauk **384** (2002), no. 4, 476–482.
- [11] H. Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, Crelles J. **55**, 25 (1858). Translated in : "On the integral of the hydrodynamical equations which express vortex motion", Phil Mag. **33** (1867), 485–513.
- [12] C. Marchioro, P. Negrini, *On a dynamical system related to fluid dynamics*, Nonlinear differ. equ. appl. **6** (1999), 473–499.
- [13] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag, 1991.
- [14] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Vortices and localization in Euler flows*, Commun. Math. Phys. **154**, 49–61 (1993).
- [15] K. A. O’Neil, *Minimal polynomial systems for point vortex equilibria*, Physica D **219** (2006), 69–79.
- [16] K. A. O’Neil, *Relative equilibrium and collapse configurations of heterogeneous vortex triple rings*, Physica D **236** (2007), 123–130.
- [17] W. Gröbli, *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden*, Vierteljahrsschr. Natforsch. Ges. Zur. **22**, 37 (1877); **22**, 129 (1877).
- [18] H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, Georges Carré (1893).

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Le système des points vortex | 1 |
| 1.1 | Le système des points vortex à partir des équations d’Euler | 1 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.1.1 | Loi de Biot-Savart | 2 |
| 1.1.2 | Formulation lagrangienne | 3 |
| 1.1.3 | Dérivation formelle du système des points vortex | 3 |
| 1.1.4 | 3D versus 2D | 4 |
| 1.2 | Un premier résultat d'existence | 4 |
| 1.3 | Écriture hamiltonienne, quantités conservées | 5 |
| 1.4 | Circulations de même signe : existence globale | 6 |
| 1.5 | Le cas de deux points vortex | 7 |
| 2 | Collisions de trois points | 8 |
| 2.1 | Collisions autosimilaires pour le système des trois points vortex | 9 |
| 2.2 | Collisions pour le système des trois points vortex | 12 |
| 2.3 | Presque jamais de collision | 14 |
| 3 | Équilibres relatifs et configurations stationnaires | 14 |
| 3.1 | Équilibres relatifs et configurations stationnaires pour $N = 3$ points vortex | 15 |
| 3.2 | Equilibres relatifs et configuration stationnaires à N points | 16 |
| 3.3 | Dénombrement des configurations stationnaires | 17 |