LE THÉORÈME D'ERGODICITÉ QUANTIQUE

NALINI ANANTHARAMAN

En mécanique quantique, la fonction d'onde $\psi_t(x)$ permet de calculer la probabilité de présence $|\psi_t(x)|^2$ d'une particule au point $x \in \mathbb{R}^3$, à l'instant t. Celle-ci évolue selon l'équation de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi,$$

où $\mathbf{H}$ est l'opérateur hamiltonien, donné (selon Schrödinger et Heisenberg) par

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V(x)$$

si la particule de masse m est soumise à une force dérivant d'un potentiel V. La notation Δ désigne le laplacien, et $\hbar$ est la constante de Planck. L'énergie "classique" du système admet l'expression "énergie cinétique + énergie potentielle"

$$H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2m} + V(x)$$

si ξ est la quantité de mouvement. La fonction d'onde au temps t s'exprime donc grâce à la fonction d'onde au temps 0,

$$\psi_t = e^{-it\mathbf{H}/\hbar}\psi_0.$$

Les fonctions propres de $\mathbf{H}$, c'est-à-dire les solutions de

$$\mathbf{H}\psi_0 = E\psi_0$$

avec $E \in \mathbb{R}$, jouent un rôle particulier : si ψ_0 est fonction propre de $\mathbf{H}$, on a

$$\psi_t(x) = e^{-itE/\hbar}\psi_0(x),$$

et la probabilité de présence $|\psi_t(x)|^2$ ne dépend pas du temps. Si on peut trouver une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R}^3)$, formée de fonctions propres de $\mathbf{H}$ (pour les valeurs propres $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$), toute donnée initiale se décompose selon cette base en une série convergente dans $L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\psi_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi_n}\psi_0 \right) \phi_n(x),$$

et donc

$$\psi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi_n}\psi_0 \right) e^{-itE_n/\hbar}\phi_n(x).$$

Les différences de valeurs propres, $E_n - E_m$, jouent un rôle très important en physique, car elles sont liées aux énergies que le système peut absorber ou émettre lors d'interactions avec la lumière. Dans ces notes, nous ne parlerons pas beaucoup des valeurs propres elles-mêmes : peu des conjectures à leur sujet sont démontrées mathématiquement (voir le §4.2 des notes de F. Faure). Nous essaierons de comprendre les probabilités de présence $|\phi_n(x)|^2$. L'étude mathématique de la question est assez différente, selon que la particule reste confinée dans une région bornée de l'espace ("système fermé") ou qu'elle peut s'échapper à l'infini ("système ouvert"). Ceci dépend des propriétés, confinantes ou non, du potentiel V (essentiellement, V est confinant si $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$).

Ici nous ne nous intéresserons qu'au cas des systèmes fermés, et nous essaierons de comprendre comment la géométrie du problème influence les probabilités de présence $|\phi_n(x)|^2$. Nous regarderons des cas où il n'y a pas de potentiel ($V = 0$, donc $\mathbf{H}$ est un multiple du laplacien Δ) mais où la particule est astreinte à se déplacer dans un espace compact, généralement une variété. Ceci n'est qu'un léger changement de point de vue (notre discussion pourrait s'adapter à des potentiels confinants sur $\mathbb{R}^3$) qui permet d'aborder des exemples géométriques de base : tores plats, sphère. Notre but principal est de démontrer le théorème d'ergodicité quantique : celui-ci fait le lien entre les propriétés du hamiltonien classique H et celles des fonctions propres de $\mathbf{H}$. Si le système hamiltonien classique est ergodique, le théorème dit que les fonctions propres ont tendance à être délocalisées : $|\phi_n(x)|^2$ est proche de la probabilité uniforme.

On donnera la preuve complète du théorème d'ergodicité quantique dans le cas des tores plats. Attention, l'hypothèse d'ergodicité n'est pas satisfaite dans ce cas ! On démontrera donc une version modifiée du théorème, valable seulement pour des observables de position $a(x)$. Ceci nous permettra d'avoir une preuve qui n'utilise pas de notions sur les variétés. On décrira ensuite les fonctions propres de Δ sur la sphère. On verra, de manière pas très étonnante, qu'il y a des fonctions propres telles que $|\phi_n(x)|^2$ se concentre au voisinage de l'équateur (et donc la probabilité de présence n'est pas du tout uniforme). Enfin, on abordera le théorème d'ergodicité quantique sur les variétés. On ne rentrera pas dans les détails, mais on dira comment adapter la preuve donnée sur le tore. L'énoncé général concerne des observables $a(x, \xi)$ dépendant à la fois de x (position) et de ξ (quantité de mouvement, impulsion).

En conclusion, on évoque brièvement des recherches récentes sur le sujet, en particulier les travaux d'Elon Lindenstrauss, médaillé Fields 2010.

1. Une version du théorème d'ergodicité quantique pour les tores plats

1.1. Laplacien et fonctions propres sur un tore plat. Dans toute cette section $\mathbb{R}^d$ sera muni de sa structure euclidienne usuelle $\cdot, \|\cdot\|$, pour laquelle la base canonique est orthonormée, et de la distance d associée.

On appelle réseau de $\mathbb{R}^d$ un sous-groupe Λ de $(\mathbb{R}^d, +)$, discret pour la topologie induite, et tel que $\mathrm{Vect}(\Lambda) = \mathbb{R}^d$. Si Λ est un réseau, considérons l'espace quotient $\mathbb{R}^d/\Lambda$ pour la relation d'équivalence ($x' \sim y' \iff x' - y' \in \Lambda$). Il peut-être muni de la topologie quotient, définie par la distance

$$d_\Lambda(x, y) = \min\{d(x', y'), x' \text{ représentant de } x, y' \text{ représentant de } y\}.$$

Cet espace est compact. En fait, si l'on considère une "base" $(e_1, \cdots, e_d)$ de Λ, de sorte que $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_d$, l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1]^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d/\Lambda \\ (y_1, \ldots, y_d) & \mapsto & y_1 e_1 + \cdots + y_d e_d \end{array}$$

est une surjection continue (et c'est une bijection en restriction à $[0,1[^d$). L'espace $\mathbb{R}^d/\Lambda$, qui est homéomorphe à un parallélépipède $[0,1]^d$ dont on recolle les côtés par translation, s'appelle un tore. Si on le munit de la structure riemannienne héritée de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$, ce tore a une courbure nulle, d'où l'appellation "tore plat".

Soit

$$p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d/\Lambda$$

la projection canonique. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^d/\Lambda$ dans $\mathbb{C}$, remarquons que $F = f \circ p$ est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$F(x + \lambda) = F(x)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$: autrement dit F est Λ-périodique. Inversement, si F est Λ-périodique elle s'écrit $F = f \circ p$ pour une unique fonction $f : \mathbb{R}^d/\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, on peut identifier les fonctions sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ avec les fonctions Λ-périodiques sur $\mathbb{R}^d$. Par définition de la topologie quotient, f est continue si et seulement si F l'est. Nous dirons que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ si F est de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$.

Sur $\mathbb{R}^d$, le laplacien est l'opérateur qui s'exprime comme

$$\Delta_{\mathbb{R}^d} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

dans les coordonnées de la base canonique. Si A est une transformation affine de $\mathbb{R}^d$, de partie linéaire L, et si F est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, notons la formule

$$\Delta_{\mathbb{R}^d}(F \circ A) = \left(\sum_{ij} \ell_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) \circ A$$

où ℓ est la matrice représentant $L^{-1}\,{}^tL$. On voit que si A est une isométrie affine, $\Delta_{\mathbb{R}^d}(F \circ A) = (\Delta_{\mathbb{R}^d} F) \circ A$, c'est-à-dire que $\Delta_{\mathbb{R}^d}$ commute avec les isométries affines.

Ainsi, si F est Λ-périodique et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, $\Delta_{\mathbb{R}^d} F$ est aussi Λ-périodique. Ceci permet de définir sans ambiguïté l'opérateur laplacien Δ_Λ sur les fonctions de classe C^2 sur le tore $\mathbb{R}^d/\Lambda$: si f est une fonction de classe C^2 sur le tore $\mathbb{R}^d/\Lambda$, on pose $F = f \circ p$ et $\Delta_\Lambda f$ est l'unique fonction sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ telle que $\Delta_{\mathbb{R}^d} F = (\Delta_\Lambda f) \circ p$.

Définition 1. *Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$, à valeurs complexes, non identiquement nulle. On dira que f est une fonction propre de Δ_Λ s'il existe un nombre complexe μ tel que*

$$\Delta_\Lambda f + \mu f = 0.$$

$-\mu$ est la valeur propre de Δ_Λ associée à f, on verra dans un instant pourquoi cette convention de signe.

Dans la suite, pour simplifier, nous nous restreignons à $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z}^d$ (mais tous les résultats peuvent s'étendre à des réseaux plus généraux) et on notera $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$, et $\Delta_\Lambda = \Delta_{\mathbb{T}^d}$. Comme on l'a vu, une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$ n'est rien d'autre qu'une fonction sur $\mathbb{R}^d$ qui est 2π-périodique en chaque variable.

Pour f continue bornée sur $\mathbb{T}^d$, on définit $\int_{\mathbb{T}^d} f = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)dx$ comme étant

$$\int_{[a_1,a_1+2\pi]\times[a_2,a_2+2\pi]\times\cdots\times[a_2,a_2+2\pi]} f(x)dx$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $dx = (2\pi)^{-d}dx_1 \ldots dx_d$ est la mesure de Lebesgue normalisée. Par périodicité de f on vérifie que cette définition est indépendante du choix des réels $a_1, a_2, \ldots, a_d$.

En effectuant des intégrations par parties, on montre les identités suivantes :

Proposition 2. *f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{T}^d$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}^d} g\,\Delta_{\mathbb{T}^d} f = -\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{T}^d} f\,\Delta_{\mathbb{T}^d} g.$$

Si f et g sont à valeurs complexes, on a aussi

$$\int_{\mathbb{T}^d} \overline{g}\,\Delta_{\mathbb{T}^d} f = -\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \int_{\mathbb{T}^d} f\,\overline{\Delta_{\mathbb{T}^d} g}.$$

En appliquant ces identités à $f = g$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \overline{f}\,\Delta_{\mathbb{T}^d} f \geq 0$$

pour tout f, et donc que les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ sont des réels négatifs (c'est pourquoi dans la suite on notera plutôt $-\lambda$, avec $\lambda \geq 0$, les valeurs propres). De plus, si f est fonction propre, $\Re e(f)$ et $\Im(f)$ le sont aussi (si elles sont non nulles). Enfin, si f et g sont des fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes $-\mu$ et $-\lambda$, on a $\int_{\mathbb{T}^d} g\,\Delta_{\mathbb{T}^d} f = \int_{\mathbb{T}^d} f\,\Delta_{\mathbb{T}^d} g$ donc $\mu\int_{\mathbb{T}^d} f\,g = \lambda\int_{\mathbb{T}^d} f\,g$, donc

$$\int_{\mathbb{T}^d} f\,g = 0.$$

Tout ceci peut s'exprimer en disant que $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ est un opérateur symétrique (non borné) sur l'espace de Hilbert complexe $L^2(\mathbb{T}^d)$, qui est le complété de l'espace des fonctions C^0 pour la norme issue du produit hilbertien

$$\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f\,\overline{g}.$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f|^2\right)^{1/2}.$$

Remarquons que dans le cas du tore, on peut utiliser la décomposition en séries de Fourier pour caractériser complètement les fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$. Pour $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, les fonctions $e_k : x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto e^{ik\cdot x}$ (avec $k \cdot x = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$) sont des fonctions propres du laplacien, on a en effet

$$\Delta_{\mathbb{T}^d} e_k = -\|k\|^2 e_k$$

où $\|k\|^2 = k_1^2 + \ldots + k_d^2$. D'après la théorie des séries de Fourier, on sait que les fonctions e_k sont linéairement indépendantes, et qu'elles forment une *base hilbertienne* de l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$, ce qui signifie que $\mathrm{Vect}(e_k, k \in \mathbb{Z})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Ceci est d'ailleurs un cas particulier du théoréme de diagonalisation 9.

Plus généralement, f est une fonction propre de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$, associée à la valeur propre $-\lambda$, si et seulement si sa décomposition en séries de Fourier est de la forme

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|k\|^2=\lambda} c_k e^{ik\cdot x} \tag{1}$$

où les c_k sont les coefficients de Fourier de f. On observe donc que

- Les valeurs propres λ sont exactement les entiers positifs qui peuvent s'écrire comme sommes de d carrés;
- La multiplicité $m(\lambda)$ de la valeur propre λ, définie comme la dimension du sous-espace propre associé, est exactement le nombre de décompositions de λ comme somme de d carrés (si l'on compte toutes les décompositions, même celles qui ne diffèrent que par le signe ou par l'ordre).

Pour $d = 2$, le théorème des deux carrés (dont il existe plusieurs démonstrations, dûes à Fermat, Euler, Gauss,...) dit que λ est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme de $4k+3$ intervient à une puissance paire. La multiplicité $m(\lambda)$ est une fonction non bornée de λ, mais étudier de manière fine sa dépendance en λ est une question très difficile en théorie des nombres.

C'est d'ailleurs ce qui donne un intérêt à l'étude, que nous présentons ci-dessous, des fonctions propres sur le tore : si $m(\lambda)$ était bornée, l'étude des sommes de la forme (1) n'aurait que peu d'intérêt. C'est parce que le nombre de termes dans la somme peut-être arbitrairement grand qu'il y a des questions intéressantes à se poser.

1.2. **Loi de Weyl.** S'il est très difficile d'étudier les fluctuations de la multiplicité $m(\lambda)$, il est en revanche plus aisé de comprendre son comportement moyen : on note $N(E) = \sum_{\lambda\leq E} m(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$ inférieures à E. C'est aussi le nombre de points à coordonnées entières $k = (k_1, \ldots, k_d)$ contenus dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{E}$ de $\mathbb{R}^d$. Décrivons le comportement asymptotique de $N(E)$ quand $E \longrightarrow +\infty$.

On peut remarquer que

$$N(E) = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{k}{\sqrt{E}}\right)$$

où f est la fonction qui vaut 1 sur $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}$ et 0 ailleurs. La fonction f étant intégrable, on a convergence des sommes de Riemann

$$\frac{1}{\sqrt{E}^d}\sum_{k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{k}{\sqrt{E}}\right)\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^d} f=\mathrm{Vol}\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}.$$

On obtient donc l'asymptotique suivante, qui est un cas particulier de la loi de Weyl qui sera énoncée plus bas :

$$N(E)\sim\sqrt{E}^d\mathrm{Vol}\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0,1)}$$

quand $E\longrightarrow+\infty$. On montre de la même manière que pour toute fonction χ Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d}\chi\left(\frac{\|k\|^2}{E}\right)\sim\sqrt{E}^d\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^{+\infty}\chi(r^2)r^{d-1}dr \tag{2}$$

où $\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$ la mesure $d-1$-dimensionnelle totale de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ (voir la section sur la sphère pour une définition plus précise).

Remarque 3. *Voici une méthode plus savante pour démontrer la même chose (en faisant le lien avec les notes de C. Fermanian). Si χ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact, notons $\chi(-\Delta_{\mathbb{T}^d})$ l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ par son action sur la base hilbertienne (e_k) :*

$$\chi(-\Delta_{\mathbb{T}^d})e_k=\chi(\|k^2\|)e_k.$$

Comme conséquence de la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))e_k=\chi(\hbar^2\|k^2\|)e_k$$

et donc on a l'identité entre opérateurs

$$\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))=\chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d}).$$

(on a utilisé la notation abusive, mais pratique, $\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))$ pour désigner l'opérateur $\mathrm{op}_\hbar(a)$ où a est la fonction $(x,\xi)\mapsto\chi(\|\xi\|^2)$. On continuera par la suite à pratiquer ce genre d'abus de notation).

La loi de Weyl peut maintenant se démontrer ainsi : si l'on note (λ_n) les valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$, ordonnées de manière croissante et répétées avec leurs multiplicité, on écrit

$$\sum_n\chi(\hbar^2\lambda_n)=\mathrm{Tr}(\chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d}))=\mathrm{Tr}(\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2)))$$

et on applique le résultat énoncé dans les notes de C. Fermanian,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2)))\sim_{\hbar\longrightarrow0}(2\pi\hbar)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d}\chi(\|\xi\|^2)dx\,d\xi\sim(2\pi\hbar)^{-d}(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d}\chi(\|\xi\|^2)d\xi$$

ce qui est identique à la formule (2) en posant $\hbar=E^{-1/2}$. L'avantage de cette preuve, plus compliquée, est qu'elle s'adapte à des situations où l'on ne connaît pas explicitement le spectre du laplacien. Le désavantage est qu'il faut supposer χ de classe C^∞ pour que *les résultats prouvés par C. Fermanian s'appliquent (pour passer à des fonctions moins régulières, il faut procéder par encadrements).*

Il est difficile d'obtenir une estimation de l'erreur. Dans le cas présent, on peut faire le raisonnement suivant, qui ne donne cependant pas une estimation optimale de l'erreur. Restreignons-nous à la dimension $d = 2$.

Pour des raisons de symétrie, pour estimer $N(E)$ il suffit de multiplier par 4 le nombre de points de coordonnées entières dans le cadran

$$C(\sqrt{E}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{E}\}.$$

Si $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ est un vecteur entier dans $C(\sqrt{E})$, on note C_k le carré $[k_1, k_1 + 1) \times [k_2, k_2 + 1)$. Il est clair que $C(E) \subset \cup_{k \in C(\sqrt{E}) \cap \mathbb{Z}^2} C_k$, l'union étant disjointe. Comme chaque carré est d'aire 1, on en déduit en comparant les aires de ces deux ensembles que

$$\text{Aire}(C(\sqrt{E})) = \frac{\pi E}{4} \leq \sum_{k \in C(\sqrt{E}) \cap \mathbb{Z}^2} 1$$

On raisonne de même dans les 4 cadrans, on somme les 4 inégalités ainsi obtenues et on obtient

$$\pi E \leq N(E) + O(\sqrt{E})$$

où l'erreur $O(\sqrt{E})$ correspond aux points qui ont été comptés plusieurs fois, c'est-à-dire ceux qui sont sur les axes de coordonnées. Par ailleurs

$$\cup_{k \in C(\sqrt{E}) \cap \mathbb{Z}^2} C_k \subset C(\sqrt{E} + \sqrt{2}),$$

d'où, en comparant de nouveau les aires des deux ensembles,

$$N(E) \leq \pi E + O(\sqrt{E}).$$

En fin de compte on a donc $N(E) = \pi E + O(\sqrt{E})$.

Il est en fait conjecturé que $N(E) = \pi E + O(E^{1/4+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, et il a été démontré que $N(E) = \pi E + O(E^{131/416})$. Dennis Hejhal estimait en 1976 que cette conjecture était peut-être plus difficile encore que l'hypothèse de Riemann [Hej76].

1.3. **"Ergodicité quantique" sur le tore.** Nous démontrons maintenant le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^d)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta_{\mathbb{T}^d} \phi_n = -\lambda_n \phi_n$$

que l'on supposera ordonnées de sorte que $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Soit $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$.

Alors

$$\lim_{E \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{n, \lambda_n \leq E} \left| \langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x) dx \right|^2 = 0.$$

Remarquons que le produit scalaire $\langle \phi_n, a\phi_n \rangle$ n'est rien d'autre que $\int_{\mathbb{T}^d} a(x)|\phi_n(x)|^2 dx$.

Appelons

$$\epsilon(E) = \frac{1}{N(E) - N(\frac{E}{2})} \sum_{n, \frac{E}{2} < \lambda_n \leq E} \left| \langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx \right|^2 .$$

D'après la loi de Weyl,

$$\frac{N(E)}{N(E) - N(\frac{E}{2})} = O(1).$$

Le théorème implique donc que $\lim_{E \longrightarrow +\infty} \epsilon(E) = 0$. De plus,

$$\frac{\sqrt{\epsilon(E)}}{N(E) - N(\frac{E}{2})} \sharp \left\{ n, \frac{E}{2} < \lambda_n \leq E, |\langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx|^2 \geq \sqrt{\epsilon(E)} \right\} \leq \epsilon(E),$$

et donc

$$\sharp \left\{ n, \frac{E}{2} < \lambda_n \leq E, |\langle \phi_n, a\phi_n \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx|^2 \geq \sqrt{\epsilon(E)} \right\} \leq \sqrt{\epsilon(E)} \left(N(E) - N(\frac{E}{2}) \right).$$

Prenant $E = 2^M$, on peut donc choisir une suite croissante d'entiers (n_k) telle que

$$|\langle \phi_{n_k}, a\phi_{n_k} \rangle - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx|^2 \leq \sqrt{\epsilon(2^M)}$$

dès que $\lambda_{n_k} \in [2^{M-1}, 2^M]$, et telle que

$$\sharp\{k, \lambda_{n_k} \in [2^{M-1}, 2^M]\} \geq (1 - \sqrt{\epsilon(2^M)})(N(2^M) - N(2^{M-1})).$$

On voit ainsi que le théorème est équivalent à l'énoncé suivant :

Corollaire 5. *Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^d)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta_{\mathbb{T}^d} \phi_n = -\lambda_n \phi_n$$

que l'on supposera ordonnées de sorte que $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Soit $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$. Alors il existe une suite croissante d'entiers (n_k) telle que

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \langle \phi_{n_k}, a\phi_{n_k} \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx$$

et

$$\sharp\{k, \lambda_{n_k} \leq E\} \sim N(E).$$

En fait, en utilisant le fait qu'il existe une suite (dénombrable) dense dans $C^0(\mathbb{T}^d)$ et en utilisant un procédé d'extraction diagonale, on pourrait même s'arranger pour que la suite (n_k) soit indépendante de la fonction a. L'énoncé nous dit alors que les mesures $|\phi_{n_k}(x)|^2 dx$ convergent au sens faible vers la mesure de Lebesgue dx.

Ces énoncés ne rentrent pas, à strictement parler, dans le cadre du "véritable" théorème d'ergodicité quantique qui sera énoncé plus bas : en effet, le flot géodésique sur le tore, c'est-à-dire la famille d'applications

$$\phi^t : (x, \xi) \mapsto (x + t\xi, \xi)$$

(où $t \in \mathbb{R}$) n'est pas ergodique, pour la raison simple qu'il laisse invariante la deuxième coordonnée. Rappelons que l'ergodicité signifie l'identité des moyennes temporelles et spatiales

$$\lim_{|T| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_0 + t\xi_0, \xi_0) dt = \int_{x \in \mathbb{T}^d, u \in \mathbb{S}^{d-1}} a(x, \|\xi_0\| u) dx d\sigma_{d-1}(u) \tag{3}$$

pour *toute* fonction continue $a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour *Lebesgue-presque-tout* couple de données initiales (x_0, ξ_0) ($d\sigma_{d-1}(u)$ est de nouveau la mesure de volume $(d-1)$-dimensionnel sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, voir sa définition dans la section sur les sphères). Il est clair par exemple que l'identité (3) ne peut avoir lieu si $a = a(\xi)$ est une fonction qui ne dépend que de la deuxième variable ξ.

On démontrera cependant (Lemme 6) que si a ne dépend *pas* de la coordonnée ξ, autrement dit si on considère une fonction $a : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{|T| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_0 + t\xi_0) dt = \int_{x \in \mathbb{T}^d} a(x) dx$$

pour presque tout ξ_0 (en fait, ssi l'hyperplan $\xi_0^\perp$ n'intersecte $\mathbb{Z}^d$ qu'en 0, autrement dit si les coordonnées de ξ_0 dans la base canonique sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$). On a donc, sur le tore, un phénomène d'"ergodicité restreinte" à la classe des fonctions ne dépendant que de x. Ceci explique qu'on puisse démontrer le Théorème 4, "théorème d'ergodicité quantique restreint" aux opérateurs de multiplication par $a(x)$.

Il est légitime de s'interroger sur l'intérêt du Théorème 4, étant donné que l'on connaît une base orthonormée explicite de fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$ (les fonctions e_k) pour laquelle le résultat est évident : on constate en effet que

$$\int_{\mathbb{T}^d} a(x) |e_k(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^d} a(x) dx$$

pour tout k. Donnons deux réponses à cette objection : d'une part, à cause de la multiplicité des valeurs propres du laplacien, le choix d'une telle base orthonormée n'est pas unique, et il peut être intéressant d'avoir un résultat valable pour *n'importe quelle* base de fonctions propres (on verra d'ailleurs plus bas qu'il y a des question intéressantes à se poser sur les fonctions propres générales du laplacien sur $\mathbb{T}^d$, c'est à-dire les fonctions de la forme (1)). Deuxième réponse : le Théorème 4 dans le cas particulier du tore nous permet de donner une présentation relativement simple, en évitant le langage des variétés riemanniennes, de la preuve du théorème d'ergodicité quantique. La preuve présentée ci-dessous s'adaptera mot pour mot à des variétés plus générales, la difficulté supplémentaire étant surtout de savoir définir les objets.

Le lemme suivant est une version du lemme de Kronecker-Weyl :

Lemma 6. *Soit $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$ et soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ dont les coordonnées dans la base canonique sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors, quel que soit $x_0 \in \mathbb{T}^d$,*

$$\lim_{|T| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_0 + t\xi_0) dt = \int_{x \in \mathbb{T}^d} a(x) dx.$$

Démonstration. Par densité de $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans l'espace $C^0(\mathbb{T}^d)$ (muni de la norme de la convergence uniforme), il suffit de démontrer le lemme pour $a = e_k$. Pour $k = 0$ c'est évident, la fonction e_k étant constante. Pour $k \neq 0$, on sait par hypothèse que $k \cdot \xi_0 \neq 0$. On a

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\cdot(x_0+t\xi_0)}dt = \frac{e^{ik\cdot x_0}(e^{iTk\cdot x_0}-1)}{iTk\cdot\xi_0} \tag{4}$$

et donc

$$\lim_{|T|\longrightarrow+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e_k(x_0+t\xi_0)dt = 0 = \int_{x\in\mathbb{T}^d} e_k(x)dx.$$

On voit aussi que la condition du lemme est nécessaire : si $k\cdot\xi_0 = 0$, on a convergence de la quantité (4), mais vers une quantité autre que $\int_{x\in\mathbb{T}^d} a(x)dx$. □

On commence à présent la preuve du Théorème 4.

On utilise les résultats énoncés par C. Fermanian, portant sur la quantification $\mathrm{op}_\hbar(a)$ pour $a : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, $(2\pi\mathbb{Z})^d$-périodique en x.

On a vu plus en remarque que si $b(x,\xi) = \chi(\|\xi\|^2)$ on a $\mathrm{op}_\hbar(b) = \chi(-\hbar^2\Delta_{\mathbb{T}^d})$. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{op}_\hbar(a(x,\xi))\circ\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2)) = \mathrm{op}_\hbar(a(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2)) + O(\hbar),$$

et cette relation est même exacte (sans $O(\hbar)$) si, au lieu de la quantification de Weyl, on utilise la quantification appelée “classique” dans le cours de C. Fermanian – ce que l'on peut faire sans changer l'énoncé final du théorème.

Des exposés de C. Fermanian, on rappelle le théorème d'Egorov :

$$e^{-it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}}\mathrm{op}_\hbar(a(x,\xi))e^{it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}} = \mathrm{op}_\hbar(a(x+t\xi,\xi)) + O(|t|\hbar)$$

valable pour $a\in C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d)$ (on remarque que l'estimation de l'erreur est moins bonne que pour la quantification de Weyl, mais cela n'aura aucune importance ici).

En remplaçant a par $a - \int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx$, on peut toujours se ramener au cas où $\int_{\mathbb{T}^d} a(x)dx = 0$.

On commence par écrire

$$\frac{1}{N(E)}\sum_{n,\lambda_n\leq E}|\langle\phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leq \frac{1}{N(E)}\sum_{n=0}^{+\infty}\chi^2\left(\frac{\lambda_n}{E}\right)|\langle\phi_n, a\phi_n\rangle|^2$$

si χ est une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[0,1]$. Puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(E)}\sum_{n=0}^{+\infty}\chi^2\left(\frac{\lambda_n}{E}\right)|\langle\phi_n, a\phi_n\rangle|^2 &= \frac{1}{N(E)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\left\langle\phi_n, a\chi\left(\frac{\Delta}{E}\right)\phi_n\right\rangle\right|^2\\ &= \frac{1}{N(E)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\left\langle\phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\right\rangle\right|^2\end{aligned}$$

où l'on prend $\hbar = \hbar(E) = E^{-1/2}$. Soit t quelconque, en utilisant que les ϕ_n sont des fonctions propres du laplacien on a

$$\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle = \left\langle \phi_n, e^{-it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}}\,\mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\, e^{it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}}\phi_n\right\rangle$$

ou, en intégrant sur un intervalle $[0, T]$ quelconque,

$$\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle \phi_n, e^{-it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}}\,\mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\, e^{it\frac{\hbar\Delta_{\mathbb{T}^d}}{2}}\phi_n\right\rangle dt.$$

Le théorème d'Egorov permet ensuite de transformer cette expressions en

$$\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle = (\phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n) + O(\hbar|T|)\chi^2\left(\frac{\lambda_n}{E}\right)$$

où l'on a noté

$$a_T(x,\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T a(x+t\xi)dt.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{N(E)}\sum_n |\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a(x)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle|^2 = \frac{1}{N(E)}\sum_n |\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle|^2 + O(\hbar|T|).$$

Dans le raisonnement, on fera tendre E vers l'infini, et donc $\hbar = E^{-1/2}$ vers 0, à T fixé, ce n'est donc que par souci de précision que nous écrivons la dépendance en T des erreurs (cela peut servir à optimiser la preuve si l'on souhaite connaître la vitesse de convergence vers 0 dans le Théorème 4).

Cette dernière quantité se majore grâce à la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \phi_n, \mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\phi_n\rangle|^2 \leq \|\mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\|_{HS}^2$$

et l'on a vu (dans le cours de C. Fermanian) que

$$\|\mathrm{op}_\hbar(a_T(x,\xi)\chi(\|\xi\|^2))\|_{HS}^2 \sim (2\pi\hbar)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi$$

Rappelons aussi que d'après la loi de Weyl, $N(E) \sim CE^{d/2} \sim \tilde{C}(2\pi\hbar)^{-d}$ pour des constantes $C, \tilde{C} > 0$.

Mettant bout-à-bout ces inégalités, faisant tendre E vers l'infini, et donc $\hbar$ vers 0, à T fixé, on constate que

$$\limsup_{E\longrightarrow+\infty}\frac{1}{N(E)}\sum_{n,\lambda_n\leq E} |\langle \phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leq \tilde{C}^{-1}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi$$

pour T arbitraire.

On prend maintenant la limite $T \longrightarrow +\infty$: le lemme 6 montre que $a_T^2(x,\xi) \longrightarrow 0$ pour presque tout ξ, et par convergence dominée on a

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} a_T^2(x,\xi)\chi^2(\|\xi\|^2)dxd\xi \underset{T\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où finalement

$$\limsup_{E\longrightarrow+\infty} \frac{1}{N(E)} \sum_{n, \lambda_n \leq E} |\langle \phi_n, a\phi_n\rangle|^2 \leq 0$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

2. Fonctions propres de la sphère ronde

On renvoie au livre [Far08], Chap. 9, pour une présentation plus détaillée.

2.1. **Laplacien et fonctions propres sur la sphère.** La sphère de dimension d est la sous-variété de $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d = \{(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, x_1^2 + \ldots + x_{d+1}^2 = 1\}.$$

La sphère $\mathbb{S}^d$ peut être munie de la structure riemannienne héritée de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^{d+1}$. Elle rentre donc dans le cadre général décrit au paragraphe 3.1. Nous donnons ici une construction *ad hoc* du laplacien sur $\mathbb{S}^d$ et décrivons une base de fonctions propres, les *harmoniques sphériques*.

Soit $a > 1$ arbitraire. Toute fonction f sur $\mathbb{S}^d$ peut être étendue de manière unique en une fonction f_0 sur $\mathbb{S}_a^d = \{(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, 1 - a^{-1} \leq x_1^2 + \ldots + x_{d+1}^2 \leq 1 + a\}$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{S}^d$, et qui soit 0-homogène, c'est-à-dire qui satisfasse

$$f_0(x) = f_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in S_a^d$. On dira que f est de classe C^k sur $\mathbb{S}^d$ si f_0 est de classe C^k sur S_a^d. Si f est de classe C^2 sur $\mathbb{S}^d$, on définira $\Delta_{\mathbb{S}^d} f$ comme la restriction à $\mathbb{S}^d$ de $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_0$.

Soit $\alpha > 0$ et soit f_α une fonction α-homogène sur S_a^d, c'est-à-dire que

$$f_\alpha(x) = \|x\|^\alpha f_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Autrement dit, si l'on pose $g(r,u) = f_\alpha(ru)$ pour $1 - a^{-1} < r^2 < 1 + a$ et $u \in \mathbb{S}^d$, on a $g(r,u) = r^\alpha g(1,u)$. On calcule “à la main” l'expression

$$(\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_\alpha)(x) = \alpha(\alpha + d - 1)\|x\|^{\alpha-2} f_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|x\|^{\alpha-2}\Delta_{\mathbb{S}^d} f_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tag{5}$$

autrement dit

$$\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f_\alpha(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^d}\right) g(r,u).$$

Cette expression du laplacien $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ en coordonnées sphériques reste vraie pour des fonctions quelconques, car les combinaisons linéaires de fonctions homogènes sont denses dans $C^k(S^d_a)$.

On définit sur $\mathbb{S}^d$ une mesure positive σ_d en posant

$$\sigma_d(A) = \ell^{d+1}\left(\{x \in \mathbb{S}^d_a, \frac{x}{\|x\|} \in A\}\right) \frac{d+1}{(1+a)^{d+1} - (1-a^{-1})^{d+1}}$$

où $d\ell^{d+1}(x) = dx_1 \dots dx_{d+1}$ désigne la mesure de Lebesgue $d+1$-dimensionnelle. Cette définition est indépendante du choix de a. Notons que cette mesure invariante par l'action de tous les éléments de $O(d,\mathbb{R})$: $\sigma_d(A) = \sigma_d(M(A))$ pour toute matrice $M \in O(d,\mathbb{R})$ (c'est pourquoi dans ces notes l'appelle parfois la "mesure uniforme" sur $\mathbb{S}^d$). On peut alors définir $\int_{\mathbb{S}^d} f(u)d\sigma_d(u)$ pour toute fonction f continue sur $\mathbb{S}^d$, en procédant par approximation par des fonctions "en escalier".

Inversement, ℓ^{d+1} s'exprime à l'aide de σ_d de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)d\ell^{d+1}(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^d} f(ru)r^d dr d\sigma_d(u)$$

pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^{d+1}$ pour lesquelles ces intégrales sont absolument convergentes.

De la formule

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)g(x)d\ell^{d+1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} g(x)d\ell^{d+1}(x) = -\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)d\ell^{d+1}(x)$$

valable pour f, g à supports compacts et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{d+1}$, on peut déduire la formule

$$\int_{\mathbb{S}^d} \Delta_{\mathbb{S}^d} f(u)g(u)d\sigma_d(u) = \int_{\mathbb{S}^d} f(u)\Delta_{\mathbb{S}^d} g(u)d\sigma_d(u) = -\int_{\mathbb{S}^d} \nabla f_0(u)\cdot\nabla g_0(u)d\sigma_d(u) \tag{6}$$

valable pour f, g de classe C^2 sur $\mathbb{S}^d$; les fonctions f_0, g_0 sont, comme plus haut, les fonctions 0-homogènes qui coïncident avec f, g sur $\mathbb{S}^d$. Le gradient $\nabla f_0(u)$ est orthogonal à u.

Exactement comme dans le cas du tore, on en déduit que

- Les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ sont des réels ≤ 0;
- si f et g sont des fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes, alors $\int_{\mathbb{S}^d} f(u)\overline{g(u)}d\sigma_d(u) = 0$, autrement dit, elles sont orthogonales pour le produit scalaire hermitien
$$\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{S}^d} f(u)\overline{g(u)}d\sigma_d(u).$$

Si $f \in C^0(\mathbb{S}^d)$ on notera

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

et on définit l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^d)$ comme le complété de $C^0(\mathbb{S}^d)$ pour cette norme.

Une fonction f sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$ est dite *harmonique* si $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} f = 0$. De la formule (5), on déduit que, si f est harmonique sur $\mathbb{S}^d_a$, et homogène de degré α (autrement dit $f(x) = \|x\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ pour tout x), alors la fonction $F = u \mapsto f(u)$ définie sur $\mathbb{S}^d$ vérifie

$$\Delta_{\mathbb{S}^d} F = -\alpha(\alpha + d - 1)F$$

autrement dit F est une fonction propre du laplacien sur la sphère. Ci-dessous on va montrer qu'en fait, les restrictions à $\mathbb{S}^d$ des polynômes harmoniques sont denses dans $C^0(\mathbb{S}^d)$ et donc dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Il en découlera que l'on peut trouver une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^d)$, formée de restrictions à $\mathbb{S}^d$ de polynomômes *homogènes* harmoniques. Ces polynômes nous fournissent une base hilbertienne de fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$, et comme le degré d'homogénéité d'un polyême est un entier, les valeurs propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ sont donc les $-m(m+d-1)$, où $m \in \mathbb{N}$ (on calculera aussi les multiplicités des valeurs propres).

On notera $\mathcal{P}$ l'algèbre des fonctions polynômiales à plusieurs variables sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Une base de cette algèbre est donnée par les fonctions

$$x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \mapsto x^\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ est un multi-indice, et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}$. On notera $\mathcal{P}_m$ l'espace des fonctions polynômiales homogènes de degré m, engendré par les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{d+1} = m$. La dimension δ_m de $\mathcal{P}_m$ est

$$\delta_m = \frac{(m+d)!}{d!m!},$$

c'est le nombre de manières d'écrire $m = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{d+1}$ avec les α_i entiers positifs. Remarquons que $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ envoie $\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{P}_{m-2}$. On notera

$$\mathcal{H}_m = \{p \in \mathcal{P}_m, \Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} p = 0\}$$

et $\mathcal{HS}_m \subset C^\infty(\mathbb{S}^d)$ les restrictions à $\mathbb{S}^d$ des fonctions de $\mathcal{H}_m$. On sait que les éléments de $\mathcal{HS}_m$ sont des fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ pour la valeur propre $-m(m+d-1)$ (on les appelle "harmoniques sphériques") et ceci implique que pour $m \neq m'$, $\mathcal{HS}_m$ et $\mathcal{HS}_{m'}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Le but de ce qui suit est de montrer que $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{HS}_m$ est dense dans $L^2(\mathbb{S}^d)$, afin de montrer qu'on a exhibé toutes les fonctions propres.

Notons Q l'élément de $\mathcal{P}_2$, $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_{d+1}^2$.

Proposition 7. *(1) Pour toute application polynomiale $p \in \mathcal{P}_m$, il existe des applications polynomiales harmoniques $h_k \in \mathcal{H}_{m-2k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$) telles que*

$$p = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} Q^k h_k.$$

(2) $\bigoplus_m \mathcal{HS}_m$ est dense dans $C^0(\mathbb{S}^d)$ et donc dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Par conséquent, l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^d)$ est somme hilbertienne des $\mathcal{HS}_m$ (ces sous-espaces étant deux à deux orthogonaux).

(3) La dimension d_m de $\mathcal{HS}_m$ vaut

$$d_m = \delta_m - \delta_{m-2} = (2m+d-1)\frac{(m+d-2)!}{(d-1)!m!}$$

Preuve. On va montrer que $\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q\mathcal{P}_{m-2}$ pour tout $m \geq 2$. Le (1) et le (3) en découleront.

On introduit sur $\mathcal{P}$ le produit scalaire hermitien défini par

$$((p,q)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} \alpha!\overline{p_\alpha}q_\alpha$$

où $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_{d+1}!$, si $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} p_\alpha x^\alpha$ et $q = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} q_\alpha x^\alpha$.

On vérifie qu'on a $((\partial_{x_k}p,q)) = ((p,x_kq))$, d'où

$$((\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}p,q)) = ((p,Qq)),$$

autrement dit, l'adjoint de $\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}}$ est l'opérateur M_Q de multiplication par Q. La formule annoncée résulte alors de

$$\mathcal{P}_m = \operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}} \oplus (\operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}})^\perp$$

(on utilise ici l'orthogonal au sens du produit scalaire $((.,.))$) et

$$(\operatorname{Ker}\Delta_{\mathbb{R}^{d+1}})^\perp = \operatorname{Im}\Delta^*_{\mathbb{R}^{d+1}} = \operatorname{Im} M_Q = Q\mathcal{P}_{m-2}.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass implique que l'ensemble des restrictions à $\mathbb{S}^d$ d'éléments de $\mathcal{P}$ est dense dans $C^0(\mathbb{S}^d)$, lui-même dense dans $L^2(\mathbb{S}^d)$. Le (1) implique alors que tout élément de $\mathcal{P}_m$ coïncide sur $\mathbb{S}^d$, avec un élément de $\oplus_{k\le m/2}\mathcal{H}_k$, et ceci démontre le point (2). $\square$

Remarquons que la multiplicité d_m de la valeur propre $-m(m+d-1)$ est asymptotiquement

$$d_m \sim \frac{2m^{d-1}}{(d-1)!}.$$

On en déduit la loi de Weyl : soit $N(E) = \sum_{m(m+d-1)\le E} d_m$, on a quand $E \longrightarrow +\infty$

$$N(E) \sim \sum_{m\le E^{1/2}} \frac{2m^{d-1}}{(d-1)!} \sim \frac{2E^{d/2}}{d!}.$$

2.2. **Suite de fonctions propres se concentrant sur l'équateur.** Considérons la suite de fonction ϕ_n sur $\mathbb{R}^{d+1}$, $\phi_n(x_1,\dots,x_{d+1}) = (x_1+ix_2)^n$. Pour tout entier n, ϕ_n est un polynôme n-homogène sur $\mathbb{R}^{d+1}$, harmonique (car fonction holomorphe de $z = x_1+ix_2$). La restriction de ϕ_n à $\mathbb{S}^d$ est donc une fonction propre du laplacien, de valeur propre $-n(n+d-1)$. Sa norme dans $L^2(\mathbb{S}^d)$ est $(\int_{\mathbb{S}^d}|u_1+iu_2|^{2n}d\sigma_d(u))^{1/2}$, quantité que nous n'avons pas besoin de calculer explicitement pour ce qui suit.

On constate que sur $\mathbb{S}^d$ le maximum de $u\mapsto |u_1+iu_2|$ est 1, atteint si et seulement si $u_3 = u_4 = \dots = u_{d+1} = 0$. Un argument standard montre alors que, si a est une fonction continue sur $\mathbb{S}^d$, qui s'annule au voisinage de l'ensemble $\{u\in\mathbb{S}^d, u_3 = u_4 = \dots = u_{d+1} = 0\}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a(u)|u_1+iu_2|^{2n}d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d}|u_1+iu_2|^{2n}d\sigma_d(u)} = 0.$$

Autrement dit, toute la "masse" des fonctions propres ϕ_n se concentre sur le cercle $\{x_3 = x_4 = \dots = x_{d+1} = 0\}\cap\mathbb{S}^d$.

En remarquant que $\phi_n \circ R_\theta = \phi_n$, où R_θ est la rotation des deux premières coordonnées,

$$R_\theta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{d+1}) = (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3, \ldots, x_{d+1})$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et en utilisant l'invariance de σ_d par les isométries, on montre que

$$\lim_n \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a(u)|\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)} == \lim_n \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a \circ R_\theta(u)|\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}$$

pour toute fonction a continue sur $\mathbb{S}^d$.

Ainsi, nécéssairement,

$$\lim_n \frac{\int_{\mathbb{S}^d} a(u)|\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)}{\int_{\mathbb{S}^d} |\phi_n(u)|^2 d\sigma_d(u)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\cos\theta, \sin\theta, 0, \ldots, 0) d\theta$$

pour toute fonction a continue sur $\mathbb{S}^d$.

Nous verrons au paragraphe 4.3 que ce phénomène de concentration de fonctions propres sur des courbes marque une grande différence entre le tore et la sphère : en effet, sur le tore, Bourgain et Jakobson ont démontré à partir du développement en série de Fourier (1) que cela n'était pas possible.

3. Ergodicité quantique sur les variétés riemanniennes

3.1. **Structures riemanniennes et opérateur de Laplace-Beltrami.** Pour simplifier la présentation, nous considérons uniquement des *sous-variétés* de $\mathbb{R}^n$ (ceci n'est en fait pas une restriction, si l'on connaît le théorème de plongement de Nash (1956), selon lequel toute variété riemannienne abstraite peut se réaliser de manière isométrique comme sous-variété d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$).

Définition 8. *(Sous-variété) Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d et de classe C^k si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(1) Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_{n-d} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k, dont les différentielles df_i $(i = 1, \ldots, n-d)$ sont partout linéairement indépendantes, telles que

$$M \cap U = \bigcap_{i=1}^{n-d} f_i^{-1}(\{0\});$$

(2) Pour tout $x \in M$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$, il existe, après permutation éventuelle des coordonnées, un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un ouvert U' de $\mathbb{R}^d$ contenant $(x_1, \ldots, x_d)$, et $n-d$ fonctions de classeC^k $h_1, \ldots, h_{n-d} : U' \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que $M \cap U$ soit le graphe de $h = (h_1, \ldots, h_{n-d})$ dans $U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ (identifié à un ouvert de $\mathbb{R}^n$).

(3) Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, et une application Φ de classe C^k de Ω dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\Phi(0) = x$, $d\Phi(0)$ est injective, et Φ est un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$ (muni de la topologie induite).

La sous-variété M est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$. Les applications Φ de la caractérisation (3) s'appellent des *cartes*. Une application $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k si $f \circ \Phi$ est de classe C^k, pour toute carte Φ. L'espace tangent à M en un point y est l'espace vectoriel :

- $T_yM = \cap_{i=1}^{n-d} df_i(y)^{-1}(\{0\})$ si $y \in M \cap U$ comme dans la caractérisation (1);
- $T_yM = d\Phi(a) \cdot \mathbb{R}^d$ si $y \in M \cap U$ et $y = \Phi(a)$ comme dans la caractérisation (3);
- le graphe de l'application linéaire $dh(u) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ si $y = M \cap U$, $y = (u, h(u)) \in U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ comme dans la caractérisation (2).

(ces trois définitions sont équivalentes). De manière plus intuitive : $v \in T_yM$ si et seulement si il existe une courbe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\gamma(t) \in M$ pour tout t, $\gamma(0) = y$, $\gamma'(0) = v$.

On notera T_y^*M le dual de T_yM. On note

$$TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x \in M, v \in T_xM\}$$

(c'est une sous-variété de dimension $2d$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, appelée *fibré tangent* de M) et

$$T^*M = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*, x \in M, \xi \in T_x^*M\}$$

(*fibré cotangent* de M).

Structure riemannienne induite sur M, et distance associée. Pour $y \in M$ et $v, v' \in T_yM$, on peut définir leur produit scalaire $\langle v, v' \rangle$ comme étant celui qui provient de la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$. La donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent T_yM (dépendant de manière C^k de y) est ce qu'on appelle *structure riemannienne* de classe C^k sur M.

On définit la longueur $\ell(\gamma)$ d'une courbe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tracée sur M :

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

et son énergie $E(\gamma)$,

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt.$$

On vérifie que la longueur ne dépend pas du paramétrage (alors que l'énergie en dépend). Ceci permet de définir une distance sur M

$$d_M(x, y) = \inf\{\ell(\gamma), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Cette distance n'a aucune raison d'être équivalente à la distance sur $\mathbb{R}^n$, par contre, elle définit sur M la même topologie que la topologie induite.

Gradient d'une fonction. Soir $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $y \in M$. La différentielle $df(y)$ est une forme linéaire sur T_yM : pour tout $h \in T_yM$,

$$df(y) \cdot h = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(y)}{t}$$

où γ est une courbe tracée sur M telle que $\gamma(0) = y$ et $\gamma'(0) = h$.

Comme le produit scalaire définit une forme bilinéaire non dégénérée sur T_yM, en en déduit qu'il existe un unique vecteur de T_yM, noté $\nabla f(y)$, tel que

$$df(y)h = \nabla f(y) \cdot h$$

pour tout $h \in T_yM$.

Flot géodésique.

Soit $\gamma_s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une famille de courbes tracées sur M, indexées par $s \in]-\epsilon, \epsilon[$. Plus précisément, on demande que $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ soit de classe C^2 sur $]-\epsilon, \epsilon[\times[a, b]$. L'application énergie, $s \mapsto E(\gamma_s)$ est dérivable, et par dérivation sous $\int$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E(\gamma_s) &= \int_a^b \gamma_s'(t) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s'(t)dt \\
&= \int_a^b \gamma_s'(t) \cdot \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\gamma_s(t)dt \\
&= \int_a^b \gamma_s'(t) \cdot \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\gamma_s(t)dt \\
&= -\int_a^b \gamma_s''(t) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s(t)dt + \gamma_s'(b) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s(b) - \gamma_s'(a) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s(a)
\end{aligned}$$

(intégration par parties). On dira qu'une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est une géodésique de M si l'on a $\frac{d}{ds}_{\rceil s=0}E(\gamma_s) = 0$ pour toute famille C^2 de courbes $\gamma_s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tracées sur M, telles que $\gamma_0 = \gamma$ et telle que

$$\gamma_s(a) = \gamma(a), \qquad \gamma_s(b) = \gamma(b)$$

pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ (les extrémités sont fixes). Une condition nécessaire et suffisante est que

$$\int_a^b \gamma''(t) \cdot \frac{d}{ds}_{s=0}\gamma_s(t)dt = 0$$

pour toute famille C^2 de courbes $\gamma_s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tracées sur M, telles que $\gamma_0 = \gamma$ et d'extrémités fixes. Comme $\frac{d}{ds}_{\rceil s=0}\gamma_s(t)$ est un élément quelconque de $T_{\gamma(t)}M$, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante est que

$$\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M \tag{7}$$

pour tout t : l'accélération est normale à M.

Plus généralement, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dira que $\gamma : I \longrightarrow M$ est une géodésique si γ est de classe C^2 et si on a (7) pour tout $t \in I$. Remarquons que l'on a alors $\|\gamma'(t)\| = cste$.

Montrons que l'équation des géodésiques (7) peut se mettre sous forme hamiltonienne, afin de faire le lien avec les exposés précédents. Cela peut paraître artificiel ici, mais le caractère hamiltonien de l'équation joue en fait un rôle très important quand on fait le lien avec la mécanique quantique. On notera toujours $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et on utilisera la même notation $\|\cdot\|$ pour la norme sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$. L'usage de la même notation est justifié par la remarque que l'identification de $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$ grâce au produit scalaire est une isométrie. Néanmoins, quand on voudra souligner la différence entre ces deux normes, on les notera $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ et $\|\cdot\|_{(\mathbb{R}^n)^*}$.

Pour $v \in \mathbb{R}^n$ on note ξ_v la forme linéaire $\langle v, \cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$. L'application $v \mapsto \xi_v$ est donc l'identification usuelle entre $\mathbb{R}^n$ et son dual. Pour $x \in M$ on note P_x le projecteur orthogonal sur T_xM. L'application $x \mapsto P_x$ est différentiable. L'équation des géodésiques s'écrit aussi $\xi_{\gamma''} \circ P_\gamma = 0$. On identifiera systématiquement les formes linéaires sur T_xM avec les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, s'annulant sur $T_xM^\perp$. Autrement dit, on plonge T_x^*M dans $(\mathbb{R}_n)^*$ par l'application $\xi \in T_x^*M \mapsto \xi \circ P_x \in (\mathbb{R}_n)^*$. On considère sur T^*M la fonction ("hamiltonien")

$$H_M(x,\xi) = \frac{1}{2}\|\xi \circ P_x\|^2_{(\mathbb{R}^n)^*} = \frac{1}{2}\|v\|^2_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2}\|P_x v\|^2_{\mathbb{R}^n}$$

si $\xi = \xi_v \in T_x^*M$, $v \in T_xM$..

L'équation du flot géodésique peut se récrire comme le système d'équations portant sur $(x(t) = \gamma(t), \xi_{\gamma'(t)})$:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma' = \frac{\partial H_M}{\partial \xi}(x, \xi_{\gamma'})$$

$$\frac{d\xi_{\gamma'}}{dt} = \frac{d}{dt}\xi_{\gamma'} \circ P_\gamma = \xi_{\gamma''} \circ P_\gamma + \xi_{\gamma'} \circ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\gamma'\right) = 0 + \xi_{\gamma'} \circ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\gamma'\right) \tag{8}$$

Ce dernier terme $\xi_{\gamma'} \circ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \gamma'\right)$ est l'élément de $(\mathbb{R}^n)^*$ défini par

$$u \mapsto \gamma'(t) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\gamma'\right) u.$$

Pour faire apparaître ceci comme une équation de Hamilton, il reste à voir que cette dernière quantité peut être vue comme $-\frac{\partial H_M}{\partial x}$, en particulier il faut comprendre ce que veut dire cette dérivée partielle en x "à ξ fixé". Plaçons nous au voisinage du temps $t = 0$ (par exemple) et identifions tous les T_x^*M avec $T_{\gamma(0)}M$ (par l'application $v \in T_{\gamma(0)}M \mapsto \xi_v\rceil_{T_x^*M}$). Une variation de x à ξ constant signifie que l'élément v de $T_{\gamma(0)}M$ reste constant. Calculons alors, en $x = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$,

$$-\frac{\partial H_M}{\partial x}(x, \xi_v) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\|P_x v\|^2 = -\left\langle v, \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \bullet\right) v\right\rangle$$

Pour retrouver le membre de droite de (8) nous faut donc vérifier que les 2 formes linéaires sur T_xM

$$u \mapsto -v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} u\right) v$$

et

$$u \mapsto v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} v\right) u$$

sont les mêmes. En dérivant l'équation $P_\zeta \zeta' = \zeta'$ pour n'importe quelle courbe tracée sur M telle que $\zeta(0) = x$, on trouve

$$(I - P_x)\zeta''(0) = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \zeta'(0)\zeta'(0)$$

d'où

$$v \cdot \frac{\partial P}{\partial x}\zeta'(0)\zeta'(0) = 0$$

pour tout $v \in T_xM$, ce qui implique finalement

$$-v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} u\right) v = v \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} v\right) u$$

pour tous $u, v \in T_xM$.

On peut donc écrire l'équation des géodésiques comme le couple d'équations,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_M}{\partial \xi}(x, \xi)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H_M}{\partial x}(x, \xi). \tag{9}$$

Le *flot géodésique* est la famille de difféomorphismes $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}} : T^*M \longrightarrow T^*M$ telle que, pour tout $(x_0, \xi_0) \in T^*M$, $t \mapsto \phi^t(x_0, \xi_0)$ est la solution du système d'équations différentielles (9), telle que $\phi^0(x_0, \xi_0) = (x_0, \xi_0)$. On a

$$\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, et ϕ^0 est l'identité.

Forme volume et structure hilbertienne.

Soit f une fonction $M \longrightarrow \mathbb{R}$, continue à support compact. Soit $\Omega \subset M$ un ouvert borné, en dehors duquel f est nulle. Pour $\epsilon > 0$, notons $\Omega^\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des points qui sont à distance inférieure à ϵ de Ω. Pour ϵ assez petit, pour tout $x \in \Omega^\epsilon$, il existe un unique $y \in M$ tel que $x - y \perp T_yM$ (si M est un sous-espace affine, y est le projeté orthogonal de x sur M, et si M est une sous-variété quelconque, cela se démontre grâce au théorème des fonctions implicites). On notera $y = P_Mx$. On pose $f_0 = f \circ P_M$, et on montre que la limite

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon^{-(n-d)} \int_{\Omega^\epsilon} f_0 d\ell^n$$

existe (avec $d\ell^n = dx_1 \cdots dx_n$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle). Cette limite est notée

$$\int_M f(y) d\,\mathrm{Vol}(y),$$

et $d\,\mathrm{Vol}(y)$ s'appelle la mesure de volume riemannien sur M (dans le cas où M est une sphère, c'est le même objet que l'on a noté $d\sigma$).

On introduit le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_M \overline{f(x)} g(x) d\,\mathrm{Vol}(x)$$

et la norme associée,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Le complété de $C^0(M)$ pour cette norme est noté $L^2(M)$, c'est un espace de Hilbert.

Laplacien. Il existe un unique opérateur différentiel Δ_M d'ordre 2 sur M tel que

$$\int_M \Delta_M f(x) g(x) d\,\mathrm{Vol}(x) = -\int_M \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\, d\,\mathrm{Vol}(x)$$

pour toutes fonctions f, g sur M, de classe C^2 et nulles en dehors d'un compact de M. On l'appelle le *laplacien* sur M ou *opérateur de Laplace-Beltrami*. La preuve de l'existence et de l'unicité peut se faire en exprimant Δ_M à l'aide de coordonnées locales, à partir de la caractérisation (3). Le laplacien peut aussi être défini ainsi : si f est à support compact, on pose $f_0 = f \circ P_M$, fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\Delta_M f$ est défini comme la restriction à M de la fonction $\Delta_{\mathbb{R}^n} f_0$.

Si f n'est pas à support compact, on peut définir $\Delta_M f(x)$ comme étant $\Delta_M(\chi f)(x)$, où χ est une fonction C^∞ à support compact, constante égale à 1 au voisinage de x.

Théorème de diagonalisation du laplacien.

Théorème 9. *Soit M une variété riemannienne compacte. Alors les valeurs propres ordonnées de $-\Delta_M$ forment une suite (λ_n) tendant vers $+\infty$. De plus, il existe une famille $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de $-\Delta_M$ qui forme une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(M)$ (de manière équivalente, les combinaisons linéaires finies des $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont denses dans $C^0(M)$).*

3.2. **Le théorème d'ergodicité quantique pour les fonctions propres du laplacien.** Dans le théorème ci-dessous, on note

$$N(E) = \sharp\{n, \lambda_n \leq E\}$$

le nombre de valeurs propres de Δ_M inférieures à E, comptées avec leur multiplicité. Pour $x \in M$, on note $S_x^*M \subset T_x^*M$ la sphère unité,

$$S_x^*M = \{\xi \in T_x^*M, \|\xi\| = 1\}$$

et $d\sigma_x$ la mesure de volume sur la sphère S_x^*M. À partir de maintenant on normalise $d\,\mathrm{Vol}(x)$ et $d\sigma_x$ en les multipliant par des constantes positives, choisies de sorte que

$$\int_M d\,\mathrm{Vol}(y) = 1 \text{ et } \int_{S_x^*M} d\sigma_x(\omega) = 1$$

pour tout x. La mesure $d\,\mathrm{Vol}(x) d\sigma_x(\omega)$ ($x \in M, \omega \in S_x^*M$), appelée mesure de Liouville, est la mesure uniforme sur les couples (x, ω).

Théorème 10. [Šni74, Zel87, CdV85] *Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Soit $a \in C_c^\infty(T^*M)$.

Supposons le flot géodésique ergodique. *Alors*

$$\lim_{E\longrightarrow+\infty}\frac{1}{N(E)}\sum_{n,\lambda_n\leq E}\left|\langle\phi_n,\mathrm{op}_{E^{-1/2}}(a)\phi_n\rangle-\int_{x\in M,\omega\in S_x^*M}a(x,E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)\right|^2=0.$$

On peut appliquer le théorème à une fonction $\tilde{a}$, à support dans $|\xi|\in[1/2-2\delta,3/2+2\delta]$, et qui vérifie la propriété

$$\tilde{a}(x,t\omega)=a(x,\omega)$$

pour tout $t\in[1/2-\delta,3/2+\delta]$ et ω de norme 1. Remarquons que les expressions se simplifient un peu :

$$\int\tilde{a}(x,E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)=\int a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$$

dès que $E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\in[1/2-\delta,3/2+\delta]$, et on montre que

$$\langle\phi_n,\mathrm{op}_{E^{-1/2}}(\tilde{a})\phi_n\rangle=\langle\phi_n,\mathrm{op}_{\lambda_n^{-1/2}}(a)\phi_n\rangle+o(1)$$

dès que $E^{-1/2}\lambda_n^{1/2}\in[1/2,3/2]$. Ainsi le théorème admet la variante suivante, peut-être plus agréable à lire :

Théorème 11. [Šni74, Zel87, CdV85]*Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n=-\lambda_n\phi_n$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n\leq\lambda_{n+1}$. Soit $a\in C_c^\infty(T^*M)$.

Supposons le flot géodésique ergodique. Alors

$$\lim_{E\longrightarrow+\infty}\frac{1}{N(3E/2)-N(E/2)}\sum_{n,E/2\leq\lambda_n\leq3E/2}\left|\left\langle\phi_n,\mathrm{op}_{\lambda_n^{-1/2}}(a)\phi_n\right\rangle-\int_{x\in M,\omega\in S_x^*M}a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)\right|^2=0.$$

En particulier, en appliquant le théorème 11 à des symboles du type $a(x)\chi(\|\xi\|^2)$, on obtient :

Théorème 12. *Soit M une variété riemannienne compacte, et soit Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien :*

$$\Delta\phi_n=-\lambda_n\phi_n$$

que l'on supposera ordonnée de sorte que $\lambda_n\leq\lambda_{n+1}$. Soit $a\in C^\infty(M)$.

Supposons le flot géodésique ergodique. Alors

$$\lim_{E\longrightarrow+\infty}\frac{1}{N(E)}\sum_{n,\lambda_n\leq E}|\langle\phi_n,a\phi_n\rangle-\int_M a(x)d\,\mathrm{Vol}(x)|^2=0.$$

Nous définirons ici l'ergodicité par l'égalité (presque sûre) des moyennes temporelles et spatiales : pour $(x, \xi) \in T^*M$ et $T > 0$, définissons

$$\langle a \rangle_T(x, \xi) = \frac{1}{T} \int_0^T a(\phi^t(x, \xi))dt.$$

On dira que le flot géodésique est ergodique si, pour *Lebesgue presque tout* $(x_0, \xi_0) \in T^*M$, et pour toute fonction a continue sur T^*M, on a

$$\lim_{T \longrightarrow +\infty} \langle a \rangle_T(x_0, \xi_0) = \int_{x \in M, \omega \in T_x^*M, |\omega|=1} a(x, \|\xi_0\|\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega). \tag{10}$$

On remarque que l'intégrale (10) porte sur les vecteurs de même vitesse que la condition initiale ξ_0, ce qui est naturel puisque les trajectoires de ϕ^t sont à vitesse constante.

On parle d'*unique ergodicité* quand l'identité (10) est valable pour *tous* les (x_0, ξ_0) tels que $\xi_0 \neq 0$. Cependant l'étude d'exemples montre que cette propriété plus forte n'est pas si intéressante qu'il n'y paraît : les systèmes dynamiques dits "chaotiques", qui nous intéressent ici en premier lieu, ne sont pas uniquement ergodiques car ils possèdent une infinité de trajectoires périodiques.

La preuve du théorème 10 est à peu près identique à celle du théorème 4 une fois que l'on parle le langage des variétés. Contentons-nous d'en rappeler les principaux ingrédients : ce sont les règles du calcul pseudodifférentiel qu'il faut adapter aux variétés, en particulier :

- le théorème d'Egorov reliant le laplacien Δ_M et le flot géodésique :
$$e^{it\mathbf{H}/\hbar}\mathrm{op}_\hbar(a)e^{-it\mathbf{H}/\hbar} = \mathrm{op}_\hbar(a \circ \phi^t) + O_t(\hbar)$$
où $\mathbf{H} = \frac{-\hbar^2\Delta}{2}$.
- le calcul fonctionnel : plus précisément, le fait que l'opérateur $\chi(-\hbar^2\Delta_M)$, défini par
$$\chi(-\hbar^2\Delta_M)\phi_n = \chi(\hbar^2\lambda_n)\phi_n,$$
avec $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, est un opérateur pseudodifférentiel qui coïncide avec $\mathrm{op}_\hbar(\chi(\|\xi\|^2))$ à $O(\hbar)$ près.

Remarquons la dépendance du reste $O_t(\hbar)$ dans le théorème d'Egorov. Dans le cadre euclidien, cette dépendance était linéaire $O_t(\hbar) = O(|t|\hbar)$. Sur une variété compacte quelconque, il faut plutôt s'attendre à une dépendance exponentielle, $O_t(\hbar) = O(e^{\lambda t}\hbar)$, où $\lambda > 0$ est un "exposant de Lyapounov" qui mesure la sensibilité aux conditions initiales des solutions de l'équation des géodésiques (9). Cette dépendance exponentielle ne pose aucun problème dans notre preuve, car nous avons commencé par considérer la limite $\hbar \longrightarrow 0$ à t fixé. Cependant, dès que l'on veut attaquer des questions plus fines, telles que la vitesse de convergence vers 0 dans le théorème d'ergodicité quantique, ou l'*unique ergodicité quantique* abordée plus bas, la dépendance exponentielle en temps des restes est un problème majeur.

On utilise encore :

- Si $a \in C_c^\infty(T^*M)$, alors $\mathrm{op}_\hbar(a)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et on a
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{op}_\hbar(a)^*\mathrm{op}_\hbar(a)) \sim_{\hbar \longrightarrow 0} (2\pi\hbar)^{-d} \int_{T^*M} |a(x, \xi)|^2 d\,\mathrm{Vol}(x)d\ell_x(\xi)$$

où ℓ_x est la mesure de Lebesgue sur T_x^*M.

- (Loi de Weyl)
$$N(E) \sim_{E\longrightarrow+\infty} (2\pi)^{-d}\operatorname{Vol}(M)\operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^d}(B(0,1))E^{d/2}$$
La loi de Weyl peut être obtenue comme corollaire de la formule précédente, appliquée à $\mathrm{op}_\hbar(a) = \chi(-\hbar^2\Delta)$, avec $\hbar = E^{-1/2}$.

Une fois ces ingrédients réunis, la preuve des théorèmes 10 ou 11 est identique à celle di théorème 4, à ceci près qu'elle s'applique à des fonctions a dépendant à la fois de x et de ξ, parce que l'on a supposé l'ergodicité du flot géodésique (qui n'était pas vérifiée dans le cas du tore).

Remarque 13. *On peut voir assez facilement qu'un énoncé tel que celui du Théorème 11 est impossible sur le tore. Ceci est lié au fait que le laplacien commute avec les opérateurs* $\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1,\dots,d)$*. Considérons la base des fonctions* $e_k, k \in \mathbb{Z}^d$ $(e_k(x) = e^{ik\cdot x})$*, qui sont en fait des fonctions propres communes à tous les opérateurs* $\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1,\dots,d)$*. Les valeurs propres de* $-\Delta_{\mathbb{T}^d}$ *sont les* $\lambda_n = \|k\|^2$*, et donc* $\lambda_n^{-1/2} = \|k\|^{-1}$*. Comme* $\mathrm{op}_\hbar(a)e_k(x) = a(x,\hbar k)e_k$*, on constate que*

$$\langle e_k, \mathrm{op}_{\|k\|^{-1}}(a(x,\xi))e_k\rangle = \left\langle e_k, \mathrm{op}_{\|k\|^{-1}}(a(x,\frac{k}{\|k\|}))e_k\right\rangle \tag{11}$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} a\left(x,\frac{k}{\|k\|}\right)\frac{dx}{(2\pi)^d}. \tag{12}$$

On n'a aucune chance de trouver une suite de vecteurs k_l *tels que*
$$\int_{\mathbb{T}^d} a\left(x,\frac{k_l}{\|k_l\|}\right)\frac{dx}{(2\pi)^d} \longrightarrow \int a(x,\omega)\frac{dx}{(2\pi)^d}d\sigma_x(\omega)$$
pour toute fonction a*, où* $\sigma_x = \sigma_{d-1}$ *est la mesure de volume* $(d-1)$*-dimensionnel sur* $\mathbb{S}^{d-1}$*. En effet, dès que* $\frac{k_l}{\|k_l\|} \longrightarrow k_\infty \in \mathbb{S}^{d-1}$*, on a* $\int_{\mathbb{T}^d} a(x,\frac{k_l}{\|k_l\|})\frac{dx}{(2\pi)^d} \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d} a(x,k_\infty)\frac{dx}{(2\pi)^d}$*.*

Cette remarque est aussi valable pour le laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^d$*. On remarque que* $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ *commute avec tous les opérateurs* $\mathbf{J}_{kl} = \frac{1}{i}\left(x_l\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x_l}\right)$ $(k,l = 1,\dots,d+1,\ k\neq l)$*. Ces opérateurs sont ceux qui engendrent les rotations, au sens suivant : prenant par exemple* $(k,l) = (1,2)$*, pour une fonction* a *de classe* C^1*, on a*
$$\mathbf{J}_{12}a(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{d+1}) = \frac{\partial}{\partial\theta}\rceil_{\theta=0}a(\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3,\dots,x_{d+1}).$$
L'opérateur $\mathbf{J}_{12}$ *est celui qui correspond à l'observable classique* $J_{12}(x,\xi) = x_2\xi_1 - x_1\xi_2$ $(x = (x_1,\dots,x_{d+1}),\ \xi = (\xi_1,\dots,\xi_{d+1}))$*. Prenons pour* (ϕ_n) *une suite de fonctions propres communes à* $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ *et à* $\mathbf{J}_{12}$ *:*
$$-\Delta_{\mathbb{S}^d}\phi_n = \lambda_n\phi_n, \qquad \mathbf{J}_{12}\phi_n = \mu_n\phi_n.$$
On montre que $\frac{\mu_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ *est une quantité bornée, en lien avec le fait que la fonction* $(x,\xi)\mapsto \frac{J_{12}(x,\xi)}{\|\xi\|}$ *est bornée pour* $x\in\mathbb{S}^d$*. Par ailleurs, si* a *et* b *sont deux fonctions qui coïncident*

au voisinage de l'ensemble

$$\left\{(x,\xi), \|\xi\| = 1, J_{12}(x,\xi) = \frac{\mu_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\},$$

on a $(\phi_n, \mathrm{op}_{\lambda_n^{-1}}(a)\phi_n)_{L^2(\mathbb{S}^d)} = (\phi_n, \mathrm{op}_{\lambda_n^{-1}}(b)\phi_n)_{L^2(\mathbb{S}^d)} + o(1)_{n\longrightarrow+\infty}$. *Ceci suffit à conclure qu'on ne peut pas extraire de sous-suite telle que*

$$(\phi_n, \mathrm{op}_{\lambda_n^{-1}}(a)\phi_n)_{L^2(\mathbb{S}^d)} \longrightarrow \int a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$$

pour tout a.

4. La conjecture d'unique ergodicité quantique

4.1. **Énoncé de la conjecture et des résultats de Lindenstrauss.** On a vu l'argument dans le cas particulier du tore : le théorème 11 peut se reformuler en disant qu'il existe un sous-ensemble $S \subset \mathbb{N}$ tel que

- $\frac{\sharp\{n\in S, \lambda_n \leq E\}}{N(E)} \underset{E\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$
- Si l'on pose $h_n = \lambda_n^{-1/2}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty, n\in S}\langle\phi_n, \mathrm{op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \int_{x\in M, \omega\in S_x^*M} a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$$

Un procédé d'extraction diagonale permettrait en fait de choisir S indépendant de la fonction a.

Une question tout-à-fait naturelle est de savoir si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\langle\phi_n, \mathrm{op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \int a(x,\omega)d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega) \tag{13}$$

pour tout a (sans avoir à extraire de sous-suite), ou inversement, s'il existe des suites croissantes d'entiers (n_k) telles que $\langle\phi_{n_k}, \mathrm{op}_{h_{n_k}}(a)\phi_{n_k}\rangle$ converge vers une limite autre. Il est certain que la réponse dépend des caractéristiques géométriques de la variété M, et en particulier des propriétés du flot géodésique plus fines que l'ergodicité, mais on est loin d'une réponse satisfaisante à cette question.

On parle d'"unique ergodicité quantique" si la limite (13) a lieu sans avoir à extraire de sous-suite. Selon la conjecture de Rudnick et Sarnak ("conjecture d'unique ergodicité quantique"), on devrait avoir cette propriété quand M est une variété compacte de courbure négative [RS94]. Une intuition derrière cette conjecture est que les très fortes propriétés de mélange du flot géodésique (voir le §3.2 des notes de F. Faure) empêchent les fonctions d'ondes de se localiser dans de petites régions de l'espace des phases. Cet argument reste vague, et tout le monde n'est en fait pas convaincu de la validité de cette conjecture

Cette conjecture est ouverte à l'heure actuelle, mais une avancée importante est due à Elon Lindenstrauss (médaille Fields 2010) dans le cas des *surfaces de congruences arithmétiques*. C'est ce cas particulier de la conjecture qui avait motivé Rudnick et Sarnak, spécialistes de théorie analytique des nombres plutôt que de systèmes dynamiques et d'équation aux dérivées partielles.

Nous nous contenterons d'évoquer superficiellement les travaux de Lindenstrauss [Lin06], qui utilisent des techniques tout autres que l'analyse microlocale développée dans ces notes. Ceci illustre bien la richesse de ce sujet, motivé par la mécanique quantique et situé à la confluence de domaines très variés des mathématiques. Les surfaces de congruences arithmétiques sont des surfaces de courbure constante -1, obtenues en quotientant le *demi-plan de Poincaré* par des groupes d'isométries très particuliers, construits à partir d'algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$ (on renvoie au livre récent de N. Bergeron [Ber11] pour la construction explicite, et pour une introduction plus détaillée aux techniques utilisées par Lindentrauss). Ces surfaces arithmétiques peuvent être compactes ou non-compactes (c'est le cas notamment de la surface modulaire). Dans ces notes, nous avons traité uniquement le cas des variétés compactes, mais les questions se posent aussi, avec des difficultés différentes, dans le cas non-compact.

Les surfaces arithmétiques présentent la particularité de posséder une famille d'opérateurs dits "de Hecke", (T_p), indexée par les nombres premiers p, agissant sur $L^2(M)$ de façon autoadjointe, qui commutent entre eux ainsi qu'avec Δ_M. L'opérateur T_p est en fait le laplacien associé avec la structure p-adique sur M qui vient de sa construction arithmétique. Tous ces opérateurs commutant entre eux, on peut restreindre l'étude de l'ergodicité quantique aux fonctions propres communes à toute la famille. C'est pour de telles fonctions propres que Lindenstrauss a démontré (13) (c'est ce qu'on appelle l'"unique ergodicité quantique arithmétique"). Plus récemment, Brooks et Lindenstrauss ont affaibli les hypothèses en supposant que les ϕ_n sont fonctions propres de Δ_M et d'un seul opérateur T_p.

Ceci pose de nouveau la question de la multiplicité des valeurs propres de Δ_M. Si la multiplicité est 1, toute fonction propre de Δ_M est automatiquement fonction propre des opérateurs de Hecke, et il n'est pas restrictif de considérer des fonctions propres communes. Mais si la multiplicité des valeurs propres n'est pas bornée, on peut imaginer qu'en changeant de base de fonctions propres on observe un comportement différent de la limite (13). La meilleure borne connue sur la multiplicité est

$$m(\lambda) = O\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\log \lambda}\right),$$

borne générale pour les surfaces de courbure négative; pour les surfaces arithmétiques on ne sait guère mieux.

4.2. **Résultats plus généraux.** Soit M une variété riemannienne compacte, et soit (ϕ_n) une suite de fonctions propres de Δ_M, normalisées dans $L^2(M)$. Un argument de compacité permet d'affirmer, quitte à extraire une sous-suite, que la limite de $\langle \phi_{n_k}, \mathrm{op}_{h_{n_k}}(a)\phi_{n_k}\rangle$ existe pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$ et qu'elle est de la forme

$$\int a(x,\omega)\mu(dx,d\omega)$$

où μ est une mesure de probabilité sur S^*M. Le théorème d'Egorov, associé à la remarque que $\langle \phi_n, \mathrm{op}_{h_n}(a)\phi_n\rangle = \langle \phi_n, e^{-ith_n\Delta_M/2}\mathrm{op}_{h_n}(a)e^{ith_n\Delta_M/2}\phi_n\rangle$ pour tout t, implique que

$$\int a\circ\phi^t(x,\omega)\mu(dx,d\omega) = \int a(x,\omega)\mu(dx,d\omega)$$

pour tout a et pour tout t. Autrement dit, le mesure μ est *invariante* par l'action du flot géodésique. Selon la conjecture d'unique ergodicité quantique, sur une variété compacte de courbure négative, la seule mesure μ qu'on puisse obtenir de la sorte est la mesure uniforme, $d\,\mathrm{Vol}(x)d\sigma_x(\omega)$. Mais, sans nécessairement chercher à résoudre la conjecture, on peut simplement vouloir démontrer des propriétés de ces mesures μ. Par exemple, il y a beaucoup de géodésiques périodiques, est-ce que μ peut-être concentrée sur une telle géodésique ? Cette question, qui reste bien en deçà de la conjecture d'unique ergodicité quantique, était ouverte jusqu'en 2005.

Les articles [Ana08, AN07] démontrent que l'*entropie de Kolmogorov-Sinai* d'une telle mesure μ est nécessairement non nulle, ce qui a pour conséquence que μ ne peut pas être concentrée sur un ensemble de dimension de Hausdorff 1. Par exemple, μ ne peut pas être concentrée sur une géodésique périodique (notre résultat donne en fait une borne inférieure explicite sur la dimension du support de μ).

Frédéric Faure a exposé le modèle du"chat" qui constitue le prototype du système dynamique chaotique; du point de vue de la dynamique classique, ce système partage beaucoup de propriétés avec le flot géodésique des variétés de courbure négative : la principale différence réside dans le fait que c'est un modèle à temps discret, alors que le flot géodésique est un modèle à temps continu. Afin de tester les conjectures sur un modèle simple, plusieurs auteurs ont construit une version quantique du "chat" et ont montré une version du théorème d'ergodicité quantique dans ce cas (voir par exemple [BDB96]). Faure, Nonnenmacher et De Bièvre [FNDB03] ont démontré que, pour ce modèle, la conjecture d'unique ergodicité quantique n'est pas saitsfaite : ils ont pu exhiber des suites de fonctions propres dont la répartition asymptotique n'est pas donnée par la mesure uniforme. Il est intéressant de constater que, sur ces contre-exemples, la mesure μ possède une entropie qui est exactement la borne inférieure du théorème de Anantharaman-Nonnenmacher [AN07].

4.3. **Retour sur le cas du tore.** Pour revenir sur le cas du tore, on rappelle qu'on a énoncé un théorème de type "ergodicité quantique", valable seulement pour des observables $a(x)$. Ce théorème nous donne un comportement limite pour "la plupart" des fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{T}^d}$. On peut poser la question de la description du comportement asymptotique de suites quelconques de fonctions propres : soit ϕ_n une suite quelconque de fonctions propres, vérifiant donc $\Delta_{\mathbb{T}^d}\phi_n = -\lambda_n\phi_n$, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, normalisées en norme L^2 ($\int_{\mathbb{T}^d}|\phi_n(x)|^2dx = 1$). Un argument de compacité permet de trouver une suite croissante d'entiers n_k, et une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{T}^d$, tels que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\langle \phi_{n_k}, a\phi_{n_k}\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} a(x)d\nu(x)$$

pour toute fonction $a \in C^0(\mathbb{T}^d)$. Que peut-on dire d'une telle mesure ν ? est-ce que ν est nécessairement la mesure uniforme dx ?

La réponse est non : il suffit pour le voir de considérer des fonctions propres de la forme

$$\phi(x) = \frac{e^{ik\cdot x} + e^{i(k-m)\cdot x}}{\sqrt{2}}$$

avec m fixé, $\|k\| \longrightarrow +\infty$, $\|k\| = \|k-m\|$ (par exemple, si l'on choisit k dont la première coordonnée est 1, ces relations sont vérifiées avec $m = (2,0,0,\dots,0)$). On a $|\phi(x)|^2 = 1+\cos(m\cdot x)$ qui ne dépend pas de k, et donc la mesure ν correspondant à une telle famille est $d\nu(x) = (1+\cos(m\cdot x))dx$.

Bourgain et Jakobson [Jak97] ont démontré qu'une telle mesure ν avait nécessairement une densité,

$$d\nu(x) = \rho(x)dx$$

où ρ est une fonction positive d'intégrale 1. De plus, si l'on note $\hat\rho(k)$ les coefficients de Fourier de ρ, on a

$$\sum_k |\hat\rho(k)|^{d-2} < +\infty.$$

Ainsi, en dimension $d = 2$, ρ est un polynôme trigonométrique, en dimension $d = 3$ ρ est une fonction continue,... De plus, un résultat de Jaffard dit que $\int_\Omega \rho(x)dx > 0$ pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{T}^d$. Ces résultats reposent sur la décomposition en série de Fourier (1) et une étude fine des propriétés des points entiers sur les sphères. Les articles [Mac10, AM10] donne une nouvelle preuve de ces résultats, qui s'appuie sur l'analyse microlocale.

En dimension $d = 2$, il est assez aisé de démontrer l'existence d'une densité $\rho \in L^2(\mathbb{T}^d)$ telle que $d\nu(x) = \rho(x)dx$. Nous donnons ci-dessous l'argument, dû à Zygmund [Zyg74]. Repartons de l'expression (1) des fonctions propres :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d, \|k\|^2=\lambda} c_k e^{ik\cdot x}, \tag{14}$$

avec ici $d = 2$. On a alors

$$|f(x)|^2 = \sum_{k,m\in\mathbb{Z}^2, \|k\|^2=\|m\|^2=\lambda} \overline{c_k} c_m e^{i(m-k)\cdot x}.$$

Rappelons la notation

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

et introduisons aussi

$$\|f\|_4 = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^4 dx\right)^{1/4} = \||f|^2\|_2^{1/2}.$$

On a

$$\|f\|_4^4 = \||f|^2\|_2^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \left| \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2, \|k\|^2=\|m\|^2=\lambda, m-k=j} \overline{c_k} c_m \right|^2.$$

en appliquant la formule de Parseval à la fonction $x \mapsto |f(x)|^2$. Or, on remarque qu'à $j \neq 0$ donné, l'ensemble $\{(k,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \|k\|^2 = \|m\|^2 = \lambda, m-k=j\}$ a au plus deux éléments, et ceci quel que soit λ. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\|f\|_{L^4}^4 \leq \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2, \|k\|^2 = \lambda} \overline{c_k} c_k \right|^2 + 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \|k\|^2 = \|m\|^2 = \lambda, m-k=j} |\overline{c_k} c_m|^2$$

le premier terme provenant du cas $j = 0$. Enfin, toujours par Parseval

$$|\sum_{k \in \mathbb{Z}^2, \|k\|^2 = \lambda} \overline{c_k} c_k|^2 = \|f\|_{L^2}^4$$

et

$$2 \sum_{j \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \|k\|^2 = \|m\|^2 = \lambda, m-k=j} |\overline{c_k} c_m|^2 \leq 2 (|\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k|^2)^2 = 2\|f\|_{L^2}^4.$$

On a ainsi prouvé que, pour toute fonction propre f du laplacien sur $\mathbb{T}^2$, on a

$$\|f\|_4^4 \leq 3\|f\|_2^4.$$

Supposons, comme d'habitude, que ϕ_n est une suite de fonctions propres normalisées dans L^2: $\|\phi_n\|_{L^2} = 1$. Les fonctions $(|\phi_n|^2)$ sont alors elles-mêmes de norme L^2 inférieure à $3^{1/4}$, de sorte que, par Cauchy-Schwarz,

$$|\int_{\mathbb{T}^2} a(x) |\phi_n(x)|^2 dx| \leq 3^{1/4} \left(\int_{\mathbb{T}^2} |a(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

pour toute fonction a continue. Ainsi, si

$$\int_{\mathbb{T}^2} a(x) |\phi_n(x)|^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^2} a(x) d\nu(x)$$

où ν est une mesure positive sur $\mathbb{T}^2$, on obtient par passage à la limite que

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} a(x) d\nu(x) \right| \leq 3^{1/4} \left(\int_{\mathbb{T}^2} |a(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

pour toute fonction a continue. Ceci implique (théorème de Riesz) qu'il existe une fonction ρ telle que $d\nu(x) = \rho(x) dx$ et qui vérifie

$$\int_{\mathbb{T}^2} |\rho(x)|^2 dx \leq 3^{1/2}.$$

4.4. **Le stade.** Terminons par quelques images de fonctions propres du "stade", sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé d'un rectangle auquel on accole deux demi-disques. Pour les ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$, dont le bord est suffisamment régulier (et plus généralement, pour les variétés riemanniennes compactes *à bord*), le théorème 9 de diagonalisation reste valable, mais il faut imposer une condition aux limites. Les plus courantes sont la condition de Dirichlet,

$$\phi_n \rceil_{\partial M} = 0$$

(on demande aux fonctions de s'annuler sur le bord de M) ou la condition de Neumann

$$\partial_\nu \phi_n \rceil_{\partial M} = 0$$

(on demande à la dérivée normale de s'annuler sur le bord de M).

Le théorème d'ergodicité quantique 11 a été étendu a cette situation par Gérard et Leichtnam [GL93]. Pour un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le flot géodésique est le flot géodésique euclidien ($(x, \xi) \mapsto (x + t\xi, \xi)$) tant que la tractoire ne touche pas le bord. Quand elle touche le bord, elle se réfléchit à angle égal : c'est ce qu'on appelle en mathématques un "billard". Bunimovich a démontré que le billard en forme de stade était ergodique. Ainsi, le théorème 11 s'y applique.

Les images suivantes ont été créées par Arnd Bäcker. Elles montrent trente fonctions propres successives du stade (avec condition de Dirichlet), à partir de la 750ème valeur propre. En couleurs foncées, les endroits où le module de la fonction propre est grand, en couleurs claires, là où il est petit. On y vérifie effectivement (du moins, visuellement) la conclusion du théorème 11 : la plupart des fonctions propres présentent une coloration à peu près uniforme. Cependant, il semble que l'on n'ait pas "unique ergodicité quantique" : certaines fonctions propres, rares certes, mais apparemment persistantes pour des fréquences arbitrairement grandes, ne présentent pas une distribution uniforme.

De manière surprenante (pour une géométrie aussi simple !), ceci est très difficile à démontrer, et ne l'est pas encore tout à fait à l'heure actuelle. Précisons qu'il n'est pas possible, même pour un exemple aussi simple, de calculer explicitement valeurs et fonctions propres. Il a fallu attendre 2008 pour le premier résultat rigoureux sur l'absence d'unique ergodicité quantique sur le stade. À cette date, Andrew Hassell a démontré qu'effectivement, il existe une suite de fonctions propres dont la distribution asymptotique n'est pas uniforme [Has10]. Mais il ne le démontre que pour "presque tout stade". Qu'est-ce que cela veut dire ? Si l'on fixe le diamètre des demi-disques à 1, on peut encore faire varier l'autre longueur ℓ du rectangle. On a donc en fait toute une famille de stades. Hassell ne démontre son résultat que pour ℓ "en dehors d'un ensemble de mesure nulle" de $\mathbb{R}^+$. Cela veut dire que son résultat est démontré pour l'immense majorité des stades, mais que je ne peux pas vous dire s'il s'applique pour $\ell = 3$.

On renvoie à l'article en ligne [AB13] pour plus d'images.

References

[AB13] Nalini Anantharaman and Arnd Bäcker. Quantum ergodicity and beyond – with a gallery of pictures. In *IAMP News Bulletin*, April 2013.

[AM10] Nalini Anantharaman and Fabricio Macià. Semiclassical measures for the Schrödinger equation on the torus. *J.E.M.S.*, 2010. to appear.

[AN07] Nalini Anantharaman and Stéphane Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7):2465–2523, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

[Ana08] Nalini Anantharaman. Entropy and the localization of eigenfunctions. *Ann. of Math. (2)*, 168(2):435–475, 2008.

[BDB96] A. Bouzouina and S. De Bièvre. Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus. *Comm. Math. Phys.*, 178(1):83–105, 1996.

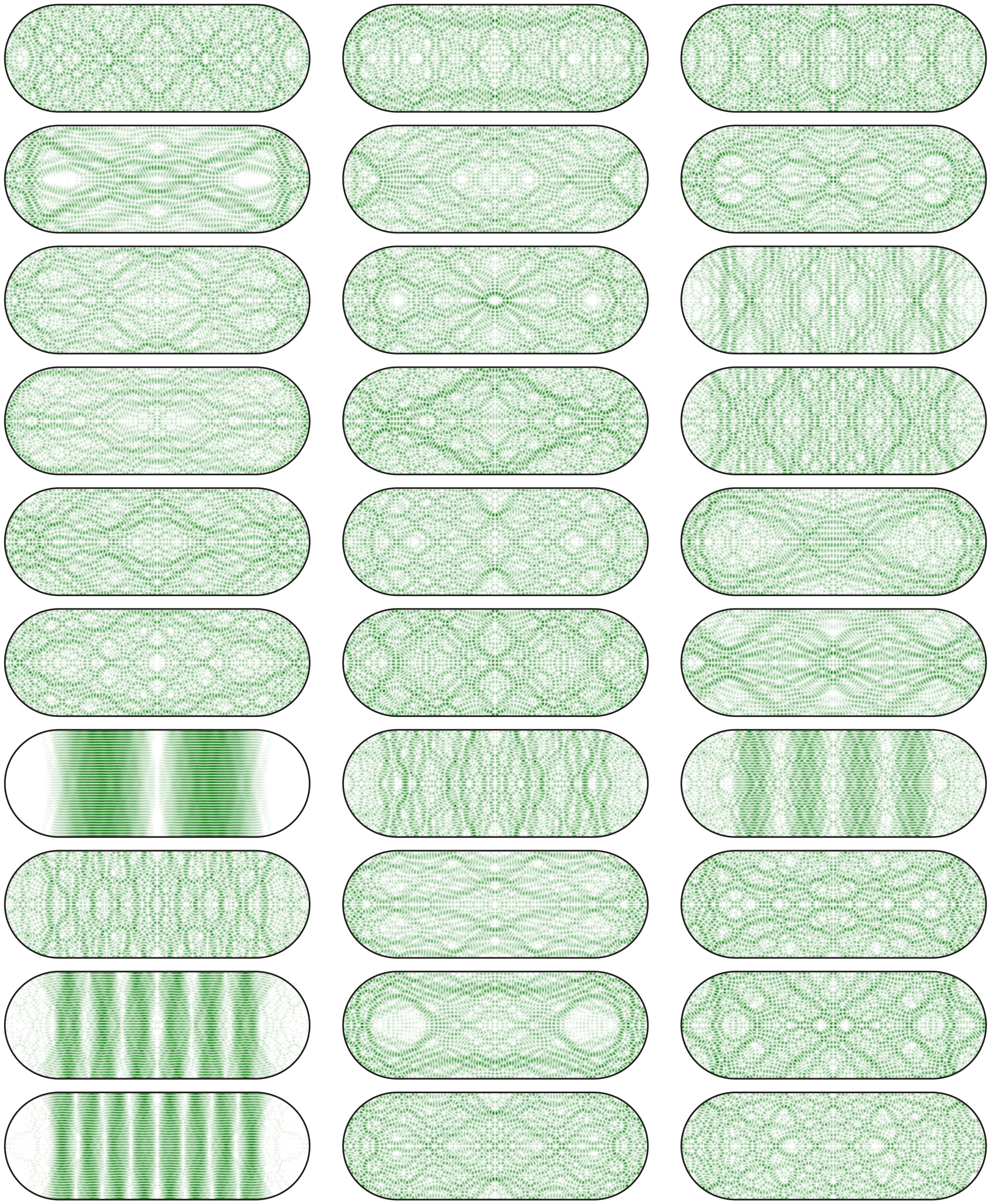

FIGURE 1. Représentation de $|\phi_n(x,y)|^2$ pour le stade avec symétrie impaire, pour 30 valeurs propres consécutives à partir de $n = 758$.

[Ber11] Nicolas Bergeron. *Le spectre des surfaces hyperboliques*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2011.

[CdV85] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3):497–502, 1985.

[Far08] Jacques Faraut. *Analysis on Lie groups*, volume 110 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. An introduction.

[FNDB03] Frédéric Faure, Stéphane Nonnenmacher, and Stephan De Bièvre. Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods. *Comm. Math. Phys.*, 239(3):449–492, 2003.

[GL93] Patrick Gérard and Éric Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem. *Duke Math. J.*, 71(2):559–607, 1993.

[Has10] Andrew Hassell. Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic. *Ann. of Math. (2)*, 171(1):605–619, 2010. With an appendix by the author and Luc Hillairet.

[Hej76] Dennis A. Hejhal. The Selberg trace formula and the Riemann zeta function. *Duke Math. J.*, 43(3):441–482, 1976.

[Jak97] Dmitry Jakobson. Quantum limits on flat tori. *Ann. of Math. (2)*, 145(2):235–266, 1997.

[Lin06] Elon Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Ann. of Math. (2)*, 163(1):165–219, 2006.

[Mac10] Fabricio Macià. High-frequency propagation for the Schrödinger equation on the torus. *J. Funct. Anal.*, 258(3):933–955, 2010.

[RS94] Zeév Rudnick and Peter Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 161(1):195–213, 1994.

[Šni74] A. I. Šnirel′man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)):181–182, 1974.

[Zel87] Steven Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4):919–941, 1987.

[Zyg74] A. Zygmund. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia Math.*, 50:189–201, 1974.

Université Paris-Sud 11, Mathématiques, Bât. 425, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE
E-mail address: `Nalini.Anantharaman@math.u-psud.fr`