

Henri Cartan et les fonctions holomorphes de plusieurs variables

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I

BP74, 100 rue des Maths, 38402 Saint-Martin d'Hères

1. Introduction

L'objectif de ces notes est d'introduire quelques résultats fondamentaux de nature algébrique relatifs aux fonctions holomorphes de plusieurs variables. Henri Cartan y a contribué de manière essentielle en développant la théorie des faisceaux cohérents, qui est aujourd'hui l'un des fondements de la géométrie analytique complexe tout comme de la géométrie algébrique. Henri Cartan soutient sa Thèse de Doctorat ès Sciences en 1928 sous la direction de Paul Montel, sur le thème "*Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*". Cette thèse porte principalement sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions d'une variable, dans le droit fil des travaux de Nevanlinna, mais les premiers travaux de Cartan sur les fonctions de plusieurs variables complexes remontent déjà à cette époque. On peut noter en particulier un article de 1932 en commun avec le mathématicien allemand Peter Thullen sur les singularités des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, dans lequel est développée la théorie des domaines d'holomorphicité – il s'agit des domaines "convexes" par rapport aux fonctions holomorphes, généralisée de nos jours grâce à la notion de variété de Stein. Pour la suite de l'histoire, écoutons ce qu'écrivit Henri Cartan lui-même dans sa notice de travaux publiée par l'Académie des Sciences en 1973 : *L'étude des problèmes globaux relatifs aux idéaux et modules de fonctions holomorphes m'a occupé plusieurs années, en partant des travaux d'Oka. Dès 1940, j'avais vu qu'un certain lemme sur les matrices holomorphes inversibles joue un rôle décisif dans ces questions. Ce lemme est énoncé et démontré en 1940 dans [19]; dans ce même travail, j'en fais diverses applications, et je prouve notamment que si des fonctions f_i (en nombre fini), holomorphes dans un domaine d'holomorphicité D , n'ont aucun zéro commun dans D , il existe une relation $\sum_i c_i f_i = 1$ à coefficients c_i holomorphes dans D . Dans [22], j'introduis la notion de "cohérence" d'un système d'idéaux et je tente de démontrer les théorèmes fondamentaux de ce qui deviendra la théorie des faisceaux analytiques cohérents sur une variété de Stein; mais je n'y parviens pas dans le cas le plus général, faute de réussir à prouver une conjecture que K. Oka démontrera plus tard (1950) et qui, en langage d'aujourd'hui, exprime que le faisceau des germes de fonctions holomorphes est cohérent. Sitôt que j'eus connaissance de ce théorème de Oka (publié avec beaucoup d'autres dans le volume 78 du Bulletin de la Société mathématique de France), je repris l'ensemble de la question dans [29], en introduisant systématiquement la notion de faisceau (introduite alors par Leray en Topologie) et celle de faisceau cohérent (mais pas encore dans le sens plus général et définitif qui sera celui de mon Séminaire 1951-52). Il s'agit essentiellement de ce qu'on appelle aujourd'hui les "théorèmes A et B". Cependant, la formulation cohomologique générale du théorème B ne viendra que dans le Séminaire cité, à la suite de discussions avec J.-P. Serre. La conférence [35] est consacrée à une exposition d'ensemble de ces questions (sans démonstrations), avec indications sur les diverses applications qui en découlent pour la théorie globale des variétés de Stein, et en particulier pour les problèmes de Cousin.*

Terminons par un bref plaidoyer pour la géométrie analytique. On doit à Descartes l'idée essentielle qu'il est possible de ramener des problèmes de géométrie à des calculs effectués dans des systèmes de coordonnées, ce qui a rapidement permis d'utiliser de manière très efficace les outils de l'algèbre et les méthodes de résolution des équations linéaires ou algébriques. La géométrie algébrique consiste précisément à étudier les propriétés générales des solutions des systèmes d'équations polynomiales. Dans un contexte moderne, on peut se placer sur un corps quelconque, mais les corps \mathbb{R} et \mathbb{C} restent particulièrement intéressants puisqu'ils correspondent aux espaces euclidiens usuels de la Physique. Sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes, on a l'immense avantage que tout polynôme admet autant exactement de racines que le degré (en comptant les multiplicités). Il en résulte que l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales reflète beaucoup plus fidèlement la structure algébrique de ces équations lorsqu'on se place sur \mathbb{C} que lorsqu'on se place sur \mathbb{R} , et beaucoup d'énoncés deviennent en réalité plus simples et plus "réguliers". Il en est ainsi par exemple du théorème de Bezout qui dit que l'intersection de deux courbes algébriques irréductibles distinctes de degrés p et q comporte exactement pq points, à condition de compter les multiplicités et les "points à l'infini" sur \mathbb{C} , alors que. Cependant, il existe des fonctions très naturelles qui ne sont pas polynomiales, comme la fonction exponentielle, pourtant solution d'une équation différentielle algébrique simple. La géométrie analytique moderne, en particulier celle développée par Henri Cartan, consiste à étendre au cadre analytique, c'est-à-dire aux séries entières convergentes de plusieurs variables complexes, la plus grande partie des propriétés algébriques des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} . D'une certaine manière, la géométrie analytique est une "complétion" de la géométrie algébrique – il existe même des questions purement algébriques que l'on ne sait résoudre aujourd'hui que par voie analytique – un peu comme les réels ou les complexes permettent de résoudre des équations algébriques ou différentielles qu'il serait impossible de résoudre dans le corps des rationnels ou des nombres algébriques.

2. L'anneau local des germes de fonctions holomorphes

2.A. Théorème de préparation de Weierstrass

Notre premier objectif sera d'établir un théorème fondamental concernant la factorisation et les propriétés de divisibilité des fonctions holomorphes de plusieurs variables, essentiellement dû à Weierstrass. Nous suivons ici une preuve classique donnée par C.L. Siegel, s'appuyant sur un usage astucieux de la formule de Cauchy. Soit g une fonction holomorphe définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n , $g \neq 0$. On sait que g admet un développement sous forme d'une série entière

$$g(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

convergeant sur un polydisque de \mathbb{C}^n assez petit, noté

$$D(0, r) := D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_n), \quad D(z_j^0, r_j) = \{|z_j - z_j^0| < r_j\}.$$

Il existe un ensemble dense de vecteurs $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $\mathbb{C} \ni t \mapsto g(tv)$ ne soit pas identiquement nulle. En effet, la série de Taylor de g à l'origine peut s'écrire

$$g(tv) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(v)$$

où $g^{(k)}(v) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha v^\alpha$ est un polynôme homogène de degré k sur \mathbb{C}^n (on note ici $|\alpha|$ la longueur $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ du multi-indice α). On a par hypothèse $g^{(k_0)} \neq 0$ pour un certain indice k_0 . Par conséquent, il suffit de choisir v tel que $g^{(k_0)}(v) \neq 0$. Après un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $v = (0, \dots, 0, 1)$. Soit s l'ordre d'annulation de

$z_n \mapsto g(0, \dots, 0, z_n)$ en $z_n = 0$. Il existe $r_n > 0$ tel que $g(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$ pour $0 < |z_n| \leq r_n$. Par continuité de g et par compacité du cercle $|z_n| = r_n$, il existe $r' > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$g(z', z_n) \neq 0 \quad \text{pour } z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad |z'| \leq r', \quad r_n - \varepsilon \leq |z_n| \leq r_n + \varepsilon.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, considérons l'intégrale

$$S_k(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r_n} \frac{1}{g(z', z_n)} \frac{\partial g}{\partial z_n}(z', z_n) z_n^k dz_n.$$

Alors S_k est holomorphe dans un voisinage de $|z'| \leq r'$. Le théorème de Rouché montre que $S_0(z')$ est le nombre de racines z_n de $g(z', z_n) = 0$ dans le disque $|z_n| < r_n$, donc par continuité $S_0(z')$ doit être une constante s . Notons $w_1(z'), \dots, w_s(z')$ ces racines, comptées avec multiplicités. Par définition de r_n , nous avons $w_1(0) = \dots = w_s(0) = 0$, et grâce au choix de r', ε on obtient $|w_j(z')| < r_n - \varepsilon$ pour $|z'| \leq r'$. La formule des résidus de Cauchy implique

$$S_k(z') = \sum_{j=1}^s w_j(z')^k.$$

Maintenant, une formule bien connue de Newton montre que la fonction symétrique élémentaire $c_k(z')$ de degré k en $w_1(z'), \dots, w_s(z')$ est un polynôme en $S_1(z'), \dots, S_k(z')$. Par suite $c_k(z')$ est holomorphe dans un voisinage de $|z'| \leq r'$. Posons

$$P(z', z_n) = z_n^s - c_1(z')z_n^{s-1} + \dots + (-1)^s c_s(z') = \prod_{j=1}^s (z_n - w_j(z')).$$

Pour $|z'| \leq r'$, le quotient $f = g/P$ (resp. $f = P/g$) est holomorphe in z_n sur le disque $|z_n| < r_n + \varepsilon$, car g et P ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités, et $f(z', z_n)$ est holomorphe en z' pour $r_n - \varepsilon \leq |z_n| \leq r_n + \varepsilon$. La formule de Cauchy donne

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_n|=r_n+\varepsilon} \frac{f(z', w_n) dw_n}{w_n - z_n},$$

et f est holomorphe en z sur un voisinage du polydisque $\bar{\Delta}(r', r_n) = \{|z'| \leq r'\} \times \{|z_n| \leq r_n\}$. Par conséquent g/P est inversible et on obtient :

(2.1) Théorème de préparation de Weierstrass. *Soit g une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n , telle que $g(0, z_n)/z_n^s$ a une limite finie non nulle en $z_n = 0$. Avec les choix précédentes de r' et r_n , on peut écrire $g(z) = u(z)P(z', z_n)$ où u est une fonction holomorphe inversible dans un voisinage du polydisque $\bar{\Delta}(r', r_n)$, et P est un polynôme de Weierstrass en z_n , c'est-à-dire, un polynôme de la forme*

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z')z_n^{s-1} + \dots + a_s(z'), \quad a_k(0) = 0,$$

avec des coefficients $a_k(z')$ holomorphe sur un voisinage de $|z'| \leq r'$ dans \mathbb{C}^{n-1} .

(2.2) Remarque. Si g s'annule à l'ordre m en 0 et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est choisi tel que $g^{(m)}(v) \neq 0$, alors $s = m$ et P doit aussi s'annuler à l'ordre m en 0. Dans ce cas, les coefficients $a_k(z')$ sont tels que $a_k(z') = O(|z'|^k)$, $1 \leq k \leq s$.

(2.3) Théorème de division de Weierstrass. *Pour toute fonction holomorphe f sur le polydisque $\Delta = \Delta(r', r_n)$, on peut écrire*

$$(2.4) \quad f(z) = g(z)q(z) + R(z', z_n),$$

où q et R sont analytiques dans Δ , $R(z', z_n)$ est un polynôme de degré $\leq s - 1$ en z_n , et

$$(2.5) \quad \sup_{\Delta} |q| \leq C \sup_{\Delta} |f|, \quad \sup_{\Delta} |R| \leq C \sup_{\Delta} |f|$$

pour une constante $C \geq 0$ indépendante de f . La représentation (2.4) est unique.

Démonstration (Siegel). Il suffit de démontrer le résultat lorsque $g(z) = P(z', z_n)$ est un polynôme de Weierstrass.

Démontrons d'abord l'unicité. Si $f = Pq_1 + R_1 = Pq_2 + R_2$, alors

$$P(q_2 - q_1) + (R_2 - R_1) = 0.$$

Il s'ensuit que les s racines z_n de $P(z', \bullet) = 0$ sont des zéros de $R_2 - R_1$. Comme $\deg_{z_n}(R_2 - R_1) \leq s - 1$, on doit avoir $R_2 - R_1 \equiv 0$, donc $q_2 - q_1 \equiv 0$. Pour prouver l'existence de (q, R) , on pose

$$q(z', z_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_n|=r_n-\varepsilon} \frac{f(z', w_n)}{P(z', w_n)(w_n - z_n)} dw_n, \quad z \in \Delta;$$

observons que l'intégrale ne dépend pas de ε lorsque $\varepsilon < r_n - |z_n|$ est assez petit. Alors q est holomorphe sur Δ . La fonction $R = f - Pq$ est aussi holomorphe sur Δ et

$$R(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_n|=r_n-\varepsilon} \frac{f(z', w_n)}{P(z', w_n)} \left[\frac{P(z', w_n) - P(z', z_n)}{(w_n - z_n)} \right] dw_n.$$

L'expression entre crochets est de la forme

$$[(w_n^s - z_n^s) + \sum_{j=1}^s a_j(z')(w_n^{s-j} - z_n^{s-j})] / (w_n - z_n)$$

donc est un polynôme en z_n de degré $\leq s - 1$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de z' . Par conséquent, on obtient bien l'écriture annoncée $f = Pq + R$ et

$$\sup_{\Delta} |R| \leq C_1 \sup_{\Delta} |f|$$

où C_1 dépend de majorants des $a_j(z')$ et de $\mu = \min |P(z', z_n)|$ sur l'ensemble compact $\{|z'| \leq r'\} \times \{|z_n| = r_n\}$. Par le principe du maximum appliqué à $q = (f - R)/P$ sur chaque disque $\{z'\} \times \{|z_n| < r_n - \varepsilon\}$, on obtient aisément

$$\sup_{\Delta} |q| \leq \mu^{-1}(1 + C_1) \sup_{\Delta} |f|. \quad \square$$

2.B. Propriétés algébriques de l'anneau \mathcal{O}_n

Nous présentons ici des applications importantes du théorème de préparation de Weierstrass à l'étude de l'anneau des germes de fonctions holomorphes dans \mathbb{C}^n . Rappelons que le germe en un point x d'une fonction f définie sur un voisinage U de x n'est autre que la classe d'équivalence de f pour la relation d'équivalence suivante: $f_1 \sim f_2$ si et seulement si il existe un voisinage V de x sur lequel f_1 et f_2 sont toutes deux définies, avec $f_1 = f_2$ sur V .

(2.6) Notation. On notera \mathcal{O}_n l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n en 0. De manière alternative, \mathcal{O}_n peut être identifié avec l'anneau $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ des séries entières $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \alpha_\alpha z^\alpha$ en z_1, \dots, z_n .

(2.7) Théorème. L'anneau \mathcal{O}_n est Noethérien, c'est-à-dire que tout idéal \mathcal{I} de \mathcal{O}_n admet un nombre fini de générateurs (on dit que cet idéal est de type fini).

Démonstration. Par récurrence sur n . Pour $n = 1$, \mathcal{O}_n est un anneau principal: tout idéal $\mathcal{J} \neq \{0\}$ est engendré by z^s , où s est le minimum des ordres d'annulation en 0 des éléments non nuls de \mathcal{J} . Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_n$, $\mathcal{J} \neq \{0\}$. Après un changement de variables, on peut supposer que \mathcal{J} contient un polynôme de Weierstrass $P(z', z_n)$. Pour tout $f \in \mathcal{J}$, le théorème de division de Weierstrass implique

$$f(z) = P(z', z_n)q(z) + R(z', z_n), \quad R(z', z_n) = \sum_{k=0}^{s-1} c_k(z') z_n^k,$$

et on a $R \in \mathcal{J}$. Considérons l'ensemble \mathcal{M} des coefficients (c_0, \dots, c_{s-1}) dans $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus s}$ qui correspondent aux polynômes $R(z', z_n)$ appartenant à \mathcal{J} . Alors \mathcal{M} est un \mathcal{O}_{n-1} -sous-module de $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus s}$. D'après l'hypothèse de récurrence \mathcal{O}_{n-1} est Noethérien; de plus, tout sous-module d'un module de type fini sur un anneau Noethérien est de type fini ([Lang 1965], Chapter X). Par suite \mathcal{M} est de type fini, et \mathcal{J} est engendré par P et par les polynômes R_1, \dots, R_N associés à un ensemble fini de générateurs de \mathcal{M} . \square

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de deux lemmes qui relient les propriétés algébriques de \mathcal{O}_n à celle de l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

(2.8) Lemme. *Soit $P, F \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ où P est un polynôme de Weierstrass. Si P divise F dans \mathcal{O}_n , alors P divise F dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Démonstration. Supposons que $F(z', z_n) = P(z', z_n)h(z)$, $h \in \mathcal{O}_n$. L'algorithme standard de division de F par P dans l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ fournit

$$F = PQ + R, \quad Q, R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n], \quad \deg R < \deg P.$$

La partie "unicité" du Th. 2.3 implique $h(z) = Q(z', z_n)$ et $R \equiv 0$. \square

(2.9) Lemme. *Soit $P(z', z_n)$ un polynôme de Weierstrass.*

- a) *Si $P = P_1 \dots P_N$ avec $P_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, alors, modulo des facteurs inversibles de \mathcal{O}_{n-1} , tous les P_j sont des polynômes de Weierstrass.*
- b) *$P(z', z_n)$ est irréductible dans \mathcal{O}_n si et seulement s'il est irréductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Démonstration. a) Supposons que $P = P_1 \dots P_N$ pour des polynômes $P_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de degrés respectifs s_j , $\sum_{1 \leq j \leq N} s_j = s$. Le produit des coefficients directeurs de P_1, \dots, P_N dans \mathcal{O}_{n-1} est égal to 1; après avoir normalisé ces polynômes, on peut supposer que P_1, \dots, P_N sont unitaires et $s_j > 0$ pour tout j . Alors

$$P(0, z_n) = z_n^s = P_1(0, z_n) \dots P_N(0, z_n),$$

donc $P_j(0, z_n) = z_n^{s_j}$ et par suite P_j est un polynôme de Weierstrass.

b) Posons $s = \deg P$, de sorte que $P(0, z_n) = z_n^s$. Supposons que P soit réductible dans \mathcal{O}_n , avec $P(z', z_n) = g_1(z)g_2(z)$ pour des éléments non inversibles $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_n$. Alors $g_1(0, z_n)$ et $g_2(0, z_n)$ ont des ordres d'annulation $s_1, s_2 > 0$ tels que $s_1 + s_2 = s$, et

$$g_j = u_j P_j, \quad \deg P_j = s_j, \quad j = 1, 2,$$

où P_j est un polynôme de Weierstrass et où $u_j \in \mathcal{O}_n$ est inversible. Par suite $P_1 P_2 = uP$ pour un germe inversible $u \in \mathcal{O}_n$. Le Lemme 2.8 montre que P divise $P_1 P_2$ dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; puisque P_1, P_2 sont unitaires et que $s = s_1 + s_2$, on obtient $P = P_1 P_2$, donc P est réductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. L'implication réciproque est évidente d'après a). \square

(2.10) Théorème. *L'anneau \mathcal{O}_n est factoriel, c'est-à-dire que \mathcal{O}_n est un anneau intègre dans lequel*

- a) *tout élément non nul $f \in \mathcal{O}_n$ admet une factorisation $f = f_1 \dots f_N$ en éléments irréductibles;*
- b) *la factorisation est unique à des facteurs inversibles près.*

Démonstration. L'existence stipulée par a) résulte du Lemme 2.9 si on prend pour f un polynôme de Weierstrass et $f = f_1 \dots f_N$ une décomposition de longueur maximale N en polynômes de degrés positifs. Pour montrer l'unicité, il suffit de vérifier l'énoncé suivant :

b') *Si g est un élément irréductible qui divise un produit $f_1 f_2$, alors g divise f_1 ou f_2 .*

Grâce au Th. 2.1, on peut supposer que f_1, f_2, g sont des polynômes de Weierstrass en z_n . Alors g est irréductible et divise $f_1 f_2$ in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ d'après les Lemmes 2.8 et 2.9 b). Par récurrence sur n , on peut supposer que \mathcal{O}_{n-1} est factoriel. Le classique lemme de Gauss ([Lang 1965], Chapter IV) affirme que l'anneau de polynômes $A[T]$ est factoriel dès que l'anneau A est lui-même factoriel. Par conséquent, on voit d'après l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est factoriel et donc g doit diviser f_1 ou f_2 dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. \square

(2.11) Théorème. *Si $f, g \in \mathcal{O}_n$ sont premiers entre eux, les germes f_z, g_z sont encore premiers entre eux en tout point $z \in \mathbb{C}^n$ voisin de 0.*

Démonstration. On peut supposer que $f = P, g = Q$ sont des polynômes de Weierstrass. Rappelons que des polynômes unitaires $P, Q \in A[X]$ ($A =$ anneau factoriel) sont premiers entre eux si et seulement si leur résultant $R \in A$ est non nul. On en déduit que le résultant $R(z') \in \mathcal{O}_{n-1}$ de $P(z', z_n)$ et $Q(z', z_n)$ possède un germe non nul en 0. Par suite le germe $R_{z'}$ est lui aussi non nul aux points $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ voisins de 0. \square

3. Faisceaux cohérents

La notion de faisceau a été introduite par Jean Leray entre 1940 et 1945, alors qu'il est prisonnier de guerre en Autriche. Son but était de développer des notions fondamentales nouvelles pour la topologie algébrique, afin d'étudier en particulier les propriétés topologiques des espaces fibrés. Entre 1945 et 1950, Henri Cartan comprend tout le bénéfice que la notion générale de faisceau apporte à l'étude des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

3.A. Notions de préfaisceau et de faisceau

Nous commençons par introduire la notion plus élémentaire de préfaisceau de fonctions.

(3.1) Définition. *Soit X un espace topologique.*

- a) *Un **préfaisceau** de fonctions \mathcal{F} sur X (à valeurs dans un ensemble E donné) est la donnée pour chaque ouvert $U \subset X$ d'un ensemble de fonctions $f : U \rightarrow E$ définies sur U , noté $\mathcal{F}(U)$, de sorte que pour chaque paire d'ouverts emboîtés $V \subset U$ et tout $f \in \mathcal{F}(U)$ la restriction $f|_V$ de f à V vérifie $f|_V \in \mathcal{F}(V)$. On dit que $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble (ou l'espace) des sections de \mathcal{F} sur U .*
- b) *Le préfaisceau \mathcal{F} est un **faisceau** si chaque fois qu'on se donne une collection $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ avec $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous i, j , alors il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(U)$ définie sur la réunion $U = \bigcup U_i$ telle que $f|_{U_i} = f_i$ pour tout i .*

[La propriété (3.1 b) dit en quelque sorte que \mathcal{F} prescrit une propriété *purement locale*, vraie sur un ouvert U si et seulement si elle est vraie sur un recouvrement arbitraire (U_i) de U].

(3.2) Exemples.

- a) La collection $\mathcal{F}_{X,E}$ telle que $\mathcal{F}_{X,E}(U)$ est l'ensemble de **toutes** les fonctions $U \rightarrow E$ est un faisceau sur X .

- b) La collection $\mathcal{C}_{X,\mathbb{K}}$ telle que $\mathcal{C}_{X,\mathbb{K}}(U)$ est l'ensemble des fonctions **continues** $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est un faisceau sur X .
- c) Si X est une variété différentielle de classe C^k , la collection $\mathcal{C}_{X,\mathbb{K}}^k$ des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ **de classe C^k** est un faisceau sur X .
- d) Si X est une variété analytique complexe, la collection notée \mathcal{O}_X des fonctions **holomorphes** $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est un faisceau sur X .
- e) Si E est un ensemble, la collection souvent notée \underline{E} (ou \underline{E}_X) des fonctions **localement constantes** $U \rightarrow E$ est un faisceau sur X .
- f) En revanche, la collection \mathcal{F} des fonctions **constantes** $U \rightarrow E$ est un préfaisceau qui n'est pas un faisceau. De même, si on pose

$$\mathcal{C}_{X,b}(U) = \{\text{fonctions continues bornées } U \rightarrow \mathbb{R}\}$$

on obtient un préfaisceau $\mathcal{C}_{X,b}$ qui n'est pas un faisceau, le fait pour une fonction d'être bornée n'étant pas une propriété locale ...

- g) Si $X = \mathbb{R}^n$ par exemple, la collection $\mathcal{C}_c(U)$ des fonctions continues à support compact dans U n'est pas un préfaisceau, la restriction à un ouvert V plus petit n'étant pas nécessairement à support compact dans V .

On observera que les collections b) c) d) ont des structures algébriques supplémentaires, chaque ensemble $\mathcal{F}(U)$ ayant en fait dans ce cas une structure d'anneau. Malheureusement la notion de (pré)faisceau de fonctions est un peu malcommode à manipuler algébriquement, car par exemple un quotient d'un espace de fonctions par un sous-espace n'est plus formellement un espace de fonctions. On est amené à poser la définition plus générale suivante.

(3.3) Définition. Soit X un espace topologique.

- a) Un **préfaisceau** \mathcal{F} sur X est la donnée pour chaque ouvert $U \subset X$ d'un ensemble noté $\mathcal{F}(U)$ et pour chaque paire d'ouverts emboîtés $V \subset U$ d'une application $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, en sorte que $\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{U,W}$ lorsque $W \subset V \subset U$ (intuitivement $\rho_{U,V}$ sera vue comme une "restriction" de U à V , même si ce n'est pas formellement le cas).
- b) Le préfaisceau \mathcal{F} est appelé **faisceau** si chaque fois qu'on se donne une collection d'éléments $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ vérifiant $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j)$ dans $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ pour tous i, j , il existe un unique élément $f \in \mathcal{F}(U)$ sur la réunion $U = \bigcup U_i$ tel que $\rho_{U, U_i}(f) = f_i$ pour tout i .
- c) On parlera de (pré)faisceau de groupes, d'anneaux, d'espaces vectoriels (...) si les ensembles $\mathcal{F}(U)$ sont munis de structures de groupes, d'anneaux, d'espaces vectoriels (...), et si les "restrictions" $\rho_{U,V}$ sont toutes des morphismes pour ces structures.

(3.4) Définition. Si \mathcal{F} est un préfaisceau sur X , on définit pour chaque point $x \in X$ une relation d'équivalence pour les éléments $g \in \mathcal{F}(U)$, $h \in \mathcal{F}(V)$ où U, V sont des voisinages ouverts de X par la condition suivante: $g \sim h$ s'il existe un voisinage $W \subset U \cap V$ de x tel que $\rho_{U,W}(g) = \rho_{V,W}(h)$. On appelle **germe** de g en x , noté g_x , la classe d'équivalence de $g \in \mathcal{F}(U)$, et on note \mathcal{F}_x l'ensemble des classes d'équivalences lorsque U décrit tous les voisinages U de x . En termes plus savants, \mathcal{F}_x est la limite inductive

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} (\mathcal{F}(U), \rho_{UV}).$$

On appelle cet ensemble \mathcal{F}_x la **fibres** de \mathcal{F} en x .

Un fait fondamental est qu'il est possible **d'associer de manière naturelle un faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ à tout préfaisceau \mathcal{F}** . Pour cela, on considère l'ensemble $E = \coprod \mathcal{F}_x$ formé de la somme

disjointes des fibres, et on définit $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ comme étant l'ensemble des fonctions $\tilde{f} : U \rightarrow E$ telles qu'il existe un recouvrement ouvert $U = \bigcup U_i$ de U et des éléments $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ pour lesquels $\tilde{f}(x) = (f_i)_x$ chaque fois que $x \in U_i$ (ceci implique donc en particulier que $\tilde{f}(x) \in \mathcal{F}_x$). Il est immédiat de constater que $\tilde{\mathcal{F}}$ est un faisceau de fonctions (avec les morphismes de restriction de fonctions usuels $\tilde{\rho}_{U,V} : f \mapsto f|_V, f \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$), et que ce faisceau est "identique" (canoniquement isomorphe) à \mathcal{F} si \mathcal{F} était déjà un faisceau – puisqu'alors les f_i précédents se recollent par hypothèse en un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ global qui correspond bijectivement à l'application \tilde{f} donnée a priori seulement localement par ses germes, i.e. $\tilde{f}(x) = f_x$ pour tout $x \in U$.

Un morphisme de préfaisceaux de groupes abéliens $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sur X est la donnée d'une collection de morphismes de groupes $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ commutant aux restrictions, i.e. tels que

$$\rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$$

pour tous $V \subset U$. Dans cette situation, on peut considérer les collections de groupes abéliens notées $\text{Ker } \varphi$, $\text{Im } \varphi$ et $\text{Coker } \varphi$, données par

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)), & \quad \text{Im}(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)) = \varphi_U(\mathcal{F}(U)), \\ \text{Coker}(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)) & = \mathcal{G}(U)/\varphi_U(\mathcal{F}(U)). \end{aligned}$$

On constate immédiatement qu'avec les restrictions induites par $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$ (resp. par $\rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$) on obtient bien des préfaisceaux. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des faisceaux, il est facile de voir que $\text{Ker } \varphi$ est encore un faisceau, mais en général $\text{Im } \varphi$ et $\text{Coker } \varphi$ ne sont que des préfaisceaux. Un exemple typique est donné sur le cercle $X = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par l'exponentielle complexe

$$\varphi : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^*}, \quad f \mapsto e^{2\pi i f},$$

du faisceau des fonctions continues sur X à valeurs complexes (avec $+$ comme loi de groupe), dans le faisceau $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^*}$ des fonctions continues non nulles (avec \times comme loi de groupe). Le noyau $\text{Ker } \varphi$ s'identifie au faisceau $\underline{\mathbb{Z}}$ des fonctions localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} . On peut voir cependant que le préfaisceau image ne contient pas l'application $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni x \mapsto e^{2\pi i x}$ définie sur S^1 tout entier, alors qu'il contient pourtant sa restriction au cercle $S^1 \setminus x_0$ privé d'un point quelconque (en prenant la détermination continue de x située dans un intervalle $]x_0, x_0 + 1[$). Lorsqu'on travaille dans la catégorie des faisceaux (ce qui sera notre cas), on conviendra de désigner plutôt par $\text{Im } \varphi$ et $\text{Coker } \varphi$ les **faisceaux associés aux préfaisceaux définis plus haut**. L'exemple précédent donne alors lieu pour tout espace topologique X à une suite exacte de faisceaux (mais pas en général de préfaisceaux) sur X

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^*} \rightarrow 0.$$

Comme par définition un faisceau est déterminé de façon purement locale, il est équivalent de dire que $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est une suite exacte de faisceaux (i.e. $\text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}) = \text{Im}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$) ou de dire que les fibres forment des suites exactes de groupes abéliens $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ pour tout $x \in X$.

3.B. Faisceaux de modules

Avant d'introduire la notion de faisceau cohérent, nous définissons les notions de modules (localement) de type fini et (localement) libres sur un faisceau d'anneaux. Tous les anneaux A apparaissant dans la suite seront supposés **commutatifs et unitaires**, sauf mention explicite du contraire; on admet cependant que l'on puisse avoir $A = \{0\}$, auquel cas $1_A = 0_A$. Le cas non commutatif présente aussi un intérêt considérable, par exemple en vue de la théorie des \mathcal{D} -modules, mais ce sujet dépasse le cadre du présent texte.

Soit donc \mathcal{A} un faisceau d'anneaux (commutatifs, unitaires) sur un espace topologique X . Un faisceau \mathcal{S} de \mathcal{A} -modules (ou plus brièvement un \mathcal{A} -module) est un faisceau de groupes

abéliens tel que chaque espace de sections $\mathcal{S}(U)$ a une structure de $\mathcal{A}(U)$ -module, avec une loi de multiplication externe compatible aux restrictions. De même, un morphisme $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ de \mathcal{A} -modules est une collection de $\mathcal{A}(U)$ -morphisms $\mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{S}'(U)$ commutant aux restrictions. On remarquera qu'un morphisme $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ est déterminé de manière unique par la section globale $F = \varphi(1) \in \mathcal{S}(X)$ image de la section globale $1 \in \mathcal{A}(X)$. Dans ce cas, par $\mathcal{A}(U)$ -linéarité, l'image d'une section locale $a \in \mathcal{A}(U)$ est $aF|_U$ (et par \mathcal{A}_x -linéarité, l'image d'un germe $w \in \mathcal{A}_x$ n'est autre que wF_x).

(3.5) Définition. Soit \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X et soit \mathcal{S} un faisceau de \mathcal{A} -modules. Alors \mathcal{S} est dit :

a) de **type fini** s'il existe des générateurs globaux $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{S}(X)$ donnant un morphisme surjectif de \mathcal{A} -modules sur X tout entier

$$\mathcal{A}^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathcal{A}_x^{\oplus N} \ni (w_1, \dots, w_N) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq N} w_j F_{j,x} \in \mathcal{S}_x, \quad x \in X.$$

b) **localement de type fini**, si tout point $x_0 \in X$ admet un voisinage U sur lequel il existe des générateurs locaux $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{S}(U)$ ($N = N(x_0)$), donnant un morphisme surjectif de \mathcal{A} -modules au dessus de U

$$\mathcal{A}_{|U}^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{S}|_U, \quad \mathcal{A}_x^{\oplus N} \ni (w_1, \dots, w_N) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq N} w_j F_{j,x} \in \mathcal{S}_x, \quad x \in U.$$

(La restriction $\mathcal{F}|_U$ d'un (pré)faisceau est par définition la collection des $\mathcal{F}(V)$, $V \subset U$, considérée sur l'espace U , les fibres \mathcal{F}_x étant prises elles aussi pour $x \in U$).

c) **libre de rang r** s'il existe des générateurs globaux $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{S}(X)$ tels que le morphisme du a) (avec $N = r$) soit un isomorphisme de \mathcal{A} -modules au dessus de X .

d) **localement libre de rang r** si tout point $x_0 \in X$ admet un voisinage U sur lequel il existe des générateurs locaux $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{S}(U)$ tels que le morphisme du b) (avec $N = r$) soit un isomorphisme de \mathcal{A} -modules au dessus de U .

Par définition, si \mathcal{S} est localement libre, il existe un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ par des ouverts sur lesquels \mathcal{S} admet des systèmes libres de générateurs $F_1^\alpha, \dots, F_r^\alpha \in \mathcal{S}(U_\alpha)$. Comme les générateurs peuvent alors être exprimés de manière unique les uns en fonction des autres, il existe pour chaque paire (α, β) d'indices une unique matrice $r \times r$

$$G^{\alpha\beta} = (G_{jk}^{\alpha\beta})_{1 \leq j, k \leq r}, \quad G_{jk}^{\alpha\beta} \in \mathcal{A}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

telle que

$$F_k^\beta = \sum_{1 \leq j \leq r} F_j^\alpha G_{jk}^{\alpha\beta} \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta.$$

En d'autres termes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{|U_\alpha \cap U_\beta}^{\oplus r} & \xrightarrow{F^\alpha} & \mathcal{S}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ G^{\alpha\beta} \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{A}_{|U_\alpha \cap U_\beta}^{\oplus r} & \xrightarrow{F^\beta} & \mathcal{S}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \end{array}$$

Il résulte aussitôt de l'égalité $G^{\alpha\beta} = (F^\alpha)^{-1} \circ F^\beta$ que les matrices de transition $G^{\alpha\beta}$ sont inversibles et qu'elles satisfont les relations de transition

$$(3.6) \quad G^{\alpha\gamma} = G^{\alpha\beta} G^{\beta\gamma} \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

pour tous les indices $\alpha, \beta, \gamma \in I$. En particulier $G^{\alpha\alpha} = \text{Id}$ on U_α et $(G^{\alpha\beta})^{-1} = G^{\beta\alpha}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Réciproquement, si on se donne un système $G^{\alpha\beta} = (G_{jk}^{\alpha\beta})$ de matrices $r \times r$ inversibles ayant leurs coefficients dans $\mathcal{A}(U_\alpha \cap U_\beta)$ et satisfaisant les relations de transition (3.6), on peut définir un \mathcal{A} -module localement libre \mathcal{S} de rang r en prenant $\mathcal{S} \simeq \mathcal{A}_{|U_\alpha}^{\oplus r}$ sur chaque ouvert, l'identification au dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$ étant donnée par l'isomorphisme $G^{\alpha\beta}$: une section F de \mathcal{S} sur un ouvert $U \subset X$ peut être vue simplement comme une collection de sections $F^\alpha = (F_1^\alpha, \dots, F_r^\alpha)$ de $\mathcal{A}^{\oplus r}(U \cap U_\alpha)$ satisfaisant les relations de transition $F^\alpha = G^{\alpha\beta} F^\beta$ sur les intersections $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$.

(3.7) Remarque. Lorsque \mathcal{A} est le faisceau des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sur un espace topologique X , on voit aisément que la catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules localement libres de rang r sur X est équivalente à celle des fibrés vectoriels topologiques de rang r sur le corps \mathbb{K} au dessus de X : à un faisceau localement libre \mathcal{E} donné par les matrices de transition $G^{\alpha\beta}$, il suffit de faire correspondre le fibré vectoriel E obtenu en recollant les cartes $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ par la relation d'équivalence $(x, \xi^\alpha) \sim (y, \xi^\beta)$, $x \in U_\alpha$ et $y \in U_\beta$, si et seulement si $x = y$ et $\xi^\alpha = G^{\alpha\beta}(x)\xi^\beta$. Le quotient

$$E = \left(\coprod (U_\alpha \times \mathbb{K}^r) \right) / \sim$$

est le fibré vectoriel recherché. De même, si \mathcal{A} est le faisceau des fonctions C^∞ sur une variété différentiable (resp. des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe), la catégorie des \mathcal{A} -modules localement libres équivaut à celle des fibrés vectoriels différentiables (resp. holomorphes).

Une propriété élémentaire et fréquemment utilisée des faisceaux de modules localement de type fini est la suivante.

(3.8) Lemme. *Soit \mathcal{S} un faisceau de \mathcal{A} -modules localement de type fini sur X et G_1, \dots, G_p des sections de $\mathcal{S}(U)$ telles que les germes $G_{1,x_0}, \dots, G_{p,x_0}$ engendrent la fibre \mathcal{S}_{x_0} en un point $x_0 \in U$. Alors il existe un voisinage V de x_0 tel que $G_{1|V}, \dots, G_{p|V}$ engendrent \mathcal{S}_x pour tout x dans V .*

Démonstration. Soit W un voisinage de x_0 sur lequel \mathcal{S} possède des générateurs $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{S}(W)$ engendrant $\mathcal{S}|_W$. Comme les germes $G_{1,x_0}, \dots, G_{p,x_0}$ engendrent \mathcal{S}_{x_0} , on peut trouver un voisinage $V \subset W$ de x_0 et des sections $H_{jk} \in \mathcal{A}(V)$ telles que $F_j = \sum H_{jk} G_k$ sur V . On voit que les germes $G_{1,x}, \dots, G_{N,x}$ engendrent \mathcal{S}_x pour tout $x \in V$. \square

3.C. Notion de faisceau cohérent sur un faisceau d'anneaux

La notion de cohérence concerne les faisceaux de modules sur un faisceau d'anneaux. C'est une propriété semi-locale qui stipule grosso modo que le faisceau de modules en question possède une présentation finie en termes de générateurs et relations. Nous décrivons ici la définition et quelques propriétés basiques de cette notion, avant de nous concentrer dans la section suivante sur le cas des faisceaux de modules sur le faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes.

Si U est un ouvert de X et si $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{S}(U)$ sont des sections de \mathcal{S} sur U , le noyau du morphisme de \mathcal{A} -modules $F = (F_1, \dots, F_q) : \mathcal{A}_U^{\oplus q} \rightarrow \mathcal{S}|_U$ défini par

$$(3.9) \quad \mathcal{A}(V)^{\oplus q} \ni (g_1, \dots, g_q) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq q} g_j F_{j|V} \in \mathcal{S}(V), \quad V \subset U$$

est un sous- \mathcal{A} -module $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ de $\mathcal{A}_U^{\oplus q}$, appelé **faisceau des relations** entre les sections F_1, \dots, F_q .

(3.10) Définition. Un faisceau \mathcal{F} de \mathcal{A} -modules sur X est dit **cohérent** si :

- a) \mathcal{F} est localement de type fini sur X ;
- b) pour tout sous-ensemble ouvert U of X et tout système de sections $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ est localement de type fini sur U .

Soit $x_0 \in X$ un point fixé. Par l'hypothèse a), il existe un voisinage U de x_0 et des sections $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ réalisant un *morphisme surjectif* de $\mathcal{A}|_U$ -modules

$$F = (F_1, \dots, F_q) : \mathcal{A}|_U^{\oplus q} \longrightarrow \mathcal{F}|_U,$$

et l'hypothèse b) implique que le noyau $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ de F est localement de type fini. Par conséquent, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 et un morphisme surjectif

$$G : \mathcal{A}|_V^{\oplus p} \rightarrow \mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)|_V \subset \mathcal{A}|_V^q$$

sur le noyau de F au dessus de V . On voit ainsi qu'on obtient une *présentation finie* de \mathcal{F} au dessus de V , c'est-à-dire une suite exacte de $\mathcal{A}|_V$ -modules

$$(3.11) \quad \mathcal{A}|_V^{\oplus p} \xrightarrow{G} \mathcal{A}|_V^{\oplus q} \xrightarrow{F} \mathcal{F}|_V \longrightarrow 0,$$

où G est donné par une matrice $p \times q$ de sections (G_{jk}) de $\mathcal{A}(V)$ dont les colonnes $(G_{j1}), \dots, (G_{jp})$ sont des générateurs de $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$.

Il est clair par définition que tout sous- \mathcal{A} -module localement de type fini d'un \mathcal{A} -module cohérent est cohérent (car la propriété b) s'hérite par passage à un sous- \mathcal{A} -module). De là on déduit aisément :

(3.12) Théorème. Soit $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de \mathcal{A} -modules cohérents. Alors $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ sont des \mathcal{A} -modules cohérents.

Démonstration. Il est clair que $\text{Im } \varphi$ est un sous- \mathcal{A} -module localement de type fini de \mathcal{G} , donc il est cohérent. Soit $x_0 \in X$ et soient $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ des générateurs de \mathcal{F} sur un voisinage U de x_0 . Enfin, soient $G_1, \dots, G_r \in \mathcal{A}(V)^{\oplus q}$ des générateurs de $\mathcal{R}(\varphi(F_1), \dots, \varphi(F_q))|_V$ sur un voisinage $V \subset U$ de x_0 . Alors $\text{Ker } \varphi$ est engendré au dessus de V par les sections

$$H_j = \sum_{k=1}^q G_{jk} F_k \in \mathcal{F}(V), \quad 1 \leq j \leq r, \quad \text{où } G_j = (G_{j1}, \dots, G_{jq}).$$

Ceci montre que $\text{Ker } \varphi \subset \mathcal{F}$ est localement de type fini, donc $\text{Ker } \varphi$ est cohérent. \square

(3.13) Théorème [Serre]. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{A} -modules. Si deux des \mathcal{A} -modules $\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{G}$ sont cohérents, alors les trois sont cohérents.

Démonstration. Si \mathcal{S} et \mathcal{G} sont cohérents, alors $\mathcal{F} = \text{Ker}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{G})$ est cohérent par le Th. 3.13. Si \mathcal{S} et \mathcal{F} sont cohérents, alors \mathcal{G} est localement de type fini; pour prouver la cohérence de \mathcal{G} , soient $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{G}(U)$ et $x_0 \in U$. Alors il existe un voisinage V de x_0 et des sections $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q \in \mathcal{S}(V)$ qui sont envoyées sur $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{G}(V)$. Après rétrécissement éventuel de V , on peut supposer aussi que $\mathcal{F}|_V$ est engendré par des sections $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(V)$. Alors $\mathcal{R}(G_1, \dots, G_q)$ est la projection sur les q dernières composantes du sous-module $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_p, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q) \subset \mathcal{A}^{\oplus p+q}$, qui est de type fini près de x_0 par cohérence de \mathcal{S} . Par conséquent $\mathcal{R}(G_1, \dots, G_q)$ est de type fini près de x_0 et \mathcal{G} est cohérent.

Finalement, supposons que \mathcal{F} et \mathcal{G} soient cohérents. Soit $x_0 \in X$ un point quelconque, et soient $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U)$ et $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{G}(U)$ des générateurs de \mathcal{F}, \mathcal{G} sur un voisinage

U de x_0 . Il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que G_1, \dots, G_q admettent des relèvements $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q \in \mathcal{S}(V)$. Alors $(F_1, \dots, F_q, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q)$ engendrent $\mathcal{S}|_V$, donc \mathcal{S} est de type fini sur V . Maintenant, soient S_1, \dots, S_q des sections arbitraires de $\mathcal{S}(U)$ et $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_q$ leurs images dans $\mathcal{G}(U)$. Pour tout $x_0 \in U$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_q)$ est engendré par des sections $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{A}(V)^{\oplus q}$ sur un petit voisinage V de x_0 . Posons $P_j = (P_{jk})_{1 \leq k \leq q}$. Alors les sections $H_j = P_{j1}S_1 + \dots + P_{jq}S_q$, $1 \leq j \leq s$, sont envoyées sur 0 dans \mathcal{G} , donc elles peuvent être vues comme des sections de \mathcal{F} (ou plutôt des images de telles sections). La cohérence de \mathcal{F} montre que $\mathcal{R}(H_1, \dots, H_s)$ possède des générateurs $Q_1, \dots, Q_t \in \mathcal{A}(W)^s$ sur un petit voisinage $W \subset V$ de x_0 . Alors il est facile de voir que $\mathcal{R}(S_1, \dots, S_q)$ est engendré au dessus de W par les sections $R_j = \sum Q_{jk}P_k \in \mathcal{A}(W)$, $1 \leq j \leq t$, par suite \mathcal{S} est cohérent. \square

(3.14) Corollaire. *Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des sous- \mathcal{A} -modules cohérent d'un \mathcal{A} -module cohérent \mathcal{S} , l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un \mathcal{A} -module cohérent.*

Démonstration. En effet, le faisceau intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est le noyau du morphisme composé $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{G}$, et on sait que \mathcal{S}/\mathcal{G} est cohérent par (3.13), donc le noyau $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ de $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}/\mathcal{G}$ est cohérent d'après (3.12). \square

3.D. Notion de faisceau cohérent d'anneaux

Un faisceau d'anneaux \mathcal{A} est dit cohérent s'il est cohérent comme module sur lui-même. D'après la Définition 3.11, ceci signifie que pour tout ouvert $U \subset X$ et tout système de sections $F_j \in \mathcal{A}(U)$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ est localement de type fini.

(3.15) Exemple et contre-exemples. Soit \mathbb{K} un corps (par exemple \mathbb{R}) et X un espace topologique, qu'on prendra ici localement connexe (par exemple $X = \mathbb{R}^n$). Alors il est évident que le faisceau localement constant $\mathcal{A} = \underline{\mathbb{K}}$ sur X est un faisceau cohérent d'anneaux. Si Y est une partie de X , on peut définir un sous-faisceau $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}$ en prenant pour $\mathcal{A}_Y(U)$ l'ensemble des fonctions localement constantes $U \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont nulles sur $X \setminus Y$ (fonctions à support dans Y). On vérifie facilement que \mathcal{A}_Y est un sous-faisceau d'anneaux qui n'est pas localement de type fini au voisinage d'un point x_0 de la frontière ∂Y , si elle est non vide. En effet la fibre $(\mathcal{A}_Y)_{x_0}$ est nulle par l'hypothèse de locale connexité de X , donc on ne peut pas trouver de section de $\mathcal{A}_Y(V)$ sur un petit voisinage connexe de V qui puisse engendrer les fibres non nulles $(\mathcal{A}_Y)_x$, $x \in Y \cap V$. En fait \mathcal{A}_Y est aussi un faisceau d'idéaux de \mathcal{A} , et on peut donc considérer le \mathcal{A} -module quotient $\mathcal{A}/\mathcal{A}_Y$. On verra alors que $\mathcal{A}/\mathcal{A}_Y$ est bien localement de type fini (engendré par 1), mais il n'est pas cohérent sinon le noyau de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A}_Y$ le serait. Il faut avouer que ces exemples et contre-exemples ne sont pas parmi les plus passionnants du sujet ...

Si \mathcal{A} est un faisceau cohérent d'anneaux, les résultats du paragraphe 3.C impliquent que tout module libre $\mathcal{A}^{\oplus p}$ est cohérent (et donc tout \mathcal{A} -module localement libre est également cohérent). En conséquence:

(3.16) Théorème. *Si \mathcal{A} est un faisceau cohérent d'anneaux, tout sous-module localement de type fini de $\mathcal{A}^{\oplus p}$ est cohérent. En particulier, si \mathcal{S} est un \mathcal{A} -module cohérent et $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{S}(U)$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q) \subset \mathcal{A}^{\oplus q}$ est lui aussi cohérent.*

Soit \mathcal{S} un \mathcal{A} -module cohérent sur un faisceau cohérent d'anneaux \mathcal{A} . Grâce à une itération de la construction (3.11), on voit que pour tout entier $m \geq 0$ et tout point $x_0 \in X$ il existe un voisinage V de x_0 sur lequel on a une suite exacte de faisceaux

$$(3.17) \quad \mathcal{A}|_V^{\oplus p_m} \xrightarrow{F_m} \mathcal{A}|_V^{\oplus p_{m-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{A}|_V^{\oplus p_1} \xrightarrow{F_1} \mathcal{A}|_V^{\oplus p_0} \xrightarrow{F_0} \mathcal{S}|_V \longrightarrow 0,$$

où F_j est donné par une matrice $p_{j-1} \times p_j$ de sections de $\mathcal{A}(V)$.

3.E. Faisceaux analytiques et théorème d'Oka

Beaucoup de propriétés des fonctions holomorphes qui seront étudiées ici se formulent naturellement dans le cadre des faisceaux analytiques. Le théorème d'Oka [Oka 1950] stipulant la cohérence du faisceau des fonctions holomorphes de n variables peut être considéré comme une extension profonde de la propriété de noethérianité vue à la Section 2.

(3.18) Définition. Soit M une variété analytique complexe de dimension n et soit \mathcal{O}_M le faisceau des germes de fonctions analytique sur M . Un faisceau analytique sur M est par définition un faisceau \mathcal{F} de modules sur le faisceau d'anneaux \mathcal{O}_M .

(3.19) Théorème d'Oka. Pour toute variété analytique complexe M , le faisceau d'anneaux \mathcal{O}_M est cohérent.

Soient $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{O}(U)$. Puisque $\mathcal{O}_{M,x}$ est noethérien, on sait déjà que les fibres $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x \subset \mathcal{O}_{M,x}^{\oplus q}$ sont de type fini, mais le fait nouveau important exprimé par le théorème est que le faisceau des relations est localement de type fini, c'est-à-dire que les "mêmes" générateurs peuvent être utilisés pour engendrer les fibres dans un voisinage de chaque point.

Démonstration. Par récurrence sur $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Pour $n = 0$, les fibres $\mathcal{O}_{M,x}$ se réduisent au corps des complexes \mathbb{C} et le résultat est trivial. Supposons maintenant que $n \geq 1$ et que le résultat ait déjà été démontré en dimension $n-1$. Soit U un ouvert de M et $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{O}_M(U)$. Pour montrer que $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ est localement de type fini, on peut supposer que $U = \Delta = \Delta' \times \Delta_n$ est un polydisque de \mathbb{C}^n centré en $x_0 = 0$; après un changement de coordonnées et après une multiplication de F_1, \dots, F_q par des fonctions inversibles, on peut aussi supposer que F_1, \dots, F_q sont des polynômes de Weierstrass en z_n dont les coefficients sont dans $\mathcal{O}(\Delta')$. Nous avons besoin d'un lemme.

(3.20) Lemme. Si $x = (x', x_n) \in \Delta$, le $\mathcal{O}_{\Delta,x}$ -module $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$ est engendré par ceux de ses éléments dont les composantes sont des germes de polynômes analytiques dans $\mathcal{O}_{\Delta',x'}[z_n]$ dont le degré en z_n est au plus égal à $\mu = \text{maximum des degrés de } F_1, \dots, F_q$.

Démonstration. Supposons par exemple que F_q soit degré maximal μ parmi les F_j . D'après le théorème de préparation de Weierstrass 1.1 et le Lemme 1.9 appliqué en x , on peut écrire $F_{q,x} = f'f''$ où $f', f'' \in \mathcal{O}_{\Delta',x'}[z_n]$, f' sont des polynômes de Weierstrass en $z_n - x_n$ et $f''(x) \neq 0$. Soient μ' et μ'' les degrés de f' et f'' par rapport à z_n , de sorte que $\mu' + \mu'' = \mu$. Maintenant, prenons $(g^1, \dots, g^q) \in \mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$. Le théorème de division de Weierstrass donne

$$g^j = F_{q,x} t^j + r^j, \quad j = 1, \dots, q-1,$$

où $t^j \in \mathcal{O}_{\Delta,x}$ et où $r^j \in \mathcal{O}_{\Delta',x'}[z_n]$ est un polynôme de degré $< \mu'$. Pour $j = q$, définissons $r^q = g^q + \sum_{1 \leq j \leq q-1} t^j F_{j,x}$. On peut écrire

$$(3.21) \quad (g^1, \dots, g^q) = \sum_{1 \leq j \leq q} t^j (0, \dots, F_q, \dots, 0, -F_j)_x + (r^1, \dots, r^q)$$

où F_q est en position j dans le q -uplet figurant dans la sommation. Puisque ces q -uplets sont dans $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$, on a $(r^1, \dots, r^q) \in \mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$, donc

$$\sum_{1 \leq j \leq q-1} F_{j,x} r^j + f' f'' r^q = 0.$$

Comme la somme est un polynôme en z_n de degré $< \mu + \mu'$, il résulte du Lemme 1.9 que $f'' r^q$ est un polynôme en z_n de degré $< \mu$. Maintenant, nous avons

$$(r^1, \dots, r^q) = 1/f''(f'' r^1, \dots, f'' r^q)$$

où $f''r^j$ est de degré $< \mu' + \mu'' = \mu$. En combinant ceci avec (3.21), le lemme s'ensuit. \square

Démonstration du Théorème 3.19 (fin). Si $g = (g^1, \dots, g^q)$ est un des polynômes de $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$ décrits dans l'énoncé du Lemme 3.20, on peut écrire

$$g^j = \sum_{0 \leq k \leq \mu} u^{jk} z_n^k, \quad u^{jk} \in \mathcal{O}_{\Delta', x'}.$$

La condition pour que (g^1, \dots, g^q) appartienne à $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$ consiste par conséquent en $2\mu + 1$ conditions linéaires portant sur le germe $u = (u^{jk})$, avec des coefficients dans $\mathcal{O}(\Delta')$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{O}_{\Delta'}$ est cohérent et le Th. 3.16 montre que le module correspondant des relations est engendré sur $\mathcal{O}_{\Delta', x'}$, pour x' dans un voisinage Ω' de 0, par un nombre fini de $(q \times \mu)$ -uplets $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{O}(\Omega')^{q\mu}$. Grâce au Lemme 3.20, $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)_x$ est engendré en chaque point $x \in \Omega = \Omega' \times \Delta_n$ par les germes des polynômes associés

$$G_l(z) = \left(\sum_{0 \leq k \leq \mu} U_l^{jk}(z') z_n^k \right)_{1 \leq j \leq q}, \quad z \in \Omega, \quad 1 \leq l \leq N. \quad \square$$

(3.22) Propriété noethérienne forte. *Soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur une variété complexe M et $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ une suite croissante de sous-faisceaux cohérents de \mathcal{F} . Alors la suite (\mathcal{F}_k) est stationnaire sur tout sous-ensemble compact de M .*

Démonstration. Puisque \mathcal{F} est localement un quotient d'un module libre $\mathcal{O}_M^{\oplus q}$, on peut prendre les images réciproques des \mathcal{F}_j dans $\mathcal{O}_M^{\oplus q}$, ce qui nous ramène facilement au cas $\mathcal{F} = \mathcal{O}_M^{\oplus q}$, puis finalement à $\mathcal{F} = \mathcal{O}_M$, par des réductions faciles semblables à celles utilisées dans la démonstration du Th. 3.13. Supposons M connexe et $\mathcal{F}_{k_0} \neq \{0\}$ pour un certain indice k_0 (sinon, il n'y a rien à démontrer). Grâce au théorème de prolongement analytique, on voit facilement que $\mathcal{F}_{k_0, x} \neq \{0\}$ pour tout $x \in M$. Pour tout point $x \in M$, on peut donc prendre un polynôme de Weierstrass non nul $P \in \mathcal{F}_{k_0}(V)$, $\deg_{z_n} P(z', z_n) = \mu$, dans un ouvert de coordonnées qui soit un voisinage $V = \Delta' \times \Delta_n$ de centre x . Une division par P montre que pour $k \geq k_0$ et $x \in V$, toutes les fibres $\mathcal{F}_{k, x}$ sont engendrées par P_x et par les polynômes de degré $< \mu$ en z_n à coefficients dans $\mathcal{O}_{\Delta', x'}$. Ceci permet de raisonner par récurrence sur n , en considérant le $\mathcal{O}_{\Delta'}$ -module cohérent

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \{Q \in \mathcal{O}_{\Delta'}[z_n]; \deg Q \leq \mu\}$$

et sa suite croissante de sous-faisceaux cohérents $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}'$. On conclut grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée en dimension $n - 1$. \square

4. Ensembles analytiques complexes. Propriétés locales

4.A. Définition. Composantes irréductibles

Un ensemble analytique complexe est un ensemble qui peut être défini localement par un nombre fini d'équations holomorphes; un tel ensemble n'est en général pas une sous-variété lisse, mais une sous-variété avec singularités, précisément parce qu'aucune hypothèse n'est faite sur les différentielles des équations. Nous sommes intéressés à la fois par la description des singularités et par l'étude des propriétés algébriques des fonctions holomorphes sur les ensembles analytiques. Pour une étude plus détaillée, nous renvoyons le lecteur au séminaire de H. Cartan!

(4.1) Définition. Soit M une variété analytique complexe. Une partie $A \subset M$ est appelée ensemble analytique dans M si A est fermée et si pour tout point $x_0 \in A$ il existe un voisinage U de x_0 et des fonctions holomorphes g_1, \dots, g_n de $\mathcal{O}(U)$ telles que

$$A \cap U = \{z \in U ; g_1(z) = \dots = g_n(z) = 0\}.$$

Alors $g_1 = \dots = g_n = 0$ est appelé système d'équations (locales) de A sur U .

Il est facile de voir qu'une réunion ou une intersection finie d'ensembles analytiques est analytique : si $(g'_j), (g''_k)$ sont des équations de A', A'' dans l'ouvert U , alors le système constitué de tous les produits $(g'_j g''_k)$, resp. le système $(g'_j) \cup (g''_k)$ constitue un système d'équations de $A' \cup A''$, resp. de $A' \cap A''$.

(4.2) Remarque. Supposons que M soit connexe. Le théorème du prolongement analytique montre que soit $A = M$, soit A n'a pas de point intérieur. Dans ce dernier cas, chaque intersection $A \cap U = g^{-1}(0)$ est contenue dans l'ensemble des zéros d'une fonction non nulle g_j , laquelle s'écrit comme un produit $g_j(z) = u_j(z)P_j(z', z_n)$ d'un facteur inversible u_j par un polynôme de Weierstrass P_j non nul. Comme les zéros de $z_n \mapsto P_j(z', z_n)$ sont des points isolés lorsque z' est fixé, on voit facilement en prenant pour U un polydisque Δ de coordonnées assez petit que $\Delta \setminus A = \Delta \setminus (A \cap \Delta)$ est connexe. Il en résulte facilement que $M \setminus A$ est connexe et que toute fonction $f \in \mathcal{O}(M \setminus A)$ qui est localement bornée près de A peut être prolongée en une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{O}(M)$. \square

Nous focalisons maintenant notre attention sur les propriétés locales des ensembles analytiques. Par définition, un germe d'ensemble en un point $x \in M$ est une classe d'équivalence d'éléments de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(M)$, avec $A \sim B$ s'il existe un voisinage ouvert V de x tel que $A \cap V = B \cap V$. Le germe d'un sous-ensemble $A \subset M$ en x sera noté (A, x) . Nous considérerons le plus souvent le cas où $A \subset M$ est un ensemble analytique dans un voisinage U de x , et dans ce cas nous noterons $\mathcal{I}_{A,x}$ l'idéal des germes $f \in \mathcal{O}_{M,x}$ qui s'annulent sur (A, x) . Réciproquement, si $\mathcal{I} = (g_1, \dots, g_n)$ est un idéal de $\mathcal{O}_{M,x}$, on notera $(V(\mathcal{I}), x)$ le germe au point x de l'ensemble $V(\mathcal{I}) = \{z \in U ; g_1(z) = \dots = g_n(z) = 0\}$ des zéros de \mathcal{I} , où U est un voisinage de x tel que $g_j \in \mathcal{O}(U)$. Il est facile de vérifier que le germe $(V(\mathcal{I}), x)$ ne dépend pas du choix des générateurs de \mathcal{I} . De plus, on voit immédiatement que

$$(4.3') \quad \text{pour tout idéal } \mathcal{I} \text{ de l'anneau } \mathcal{O}_{M,x}, \quad \mathcal{I}_{V(\mathcal{I}),x} \supset \mathcal{I},$$

$$(4.3'') \quad \text{pour tout germe d'ensemble analytique } (A, x), \quad (V(\mathcal{I}_{A,x}), x) = (A, x).$$

(4.4) Définition. Un germe (A, x) est dit irréductible s'il ne possède aucune décomposition $(A, x) = (A_1, x) \cup (A_2, x)$ en des ensembles analytiques $(A_j, x) \neq (A, x)$, $j = 1, 2$.

(4.5) Proposition. Un germe (A, x) est irréductible si et seulement si son idéal $\mathcal{I}_{A,x}$ est un idéal premier de l'anneau $\mathcal{O}_{M,x}$.

Démonstration. Rappelons qu'un idéal \mathcal{I} est dit premier si $fg \in \mathcal{I}$ implique $f \in \mathcal{I}$ ou $g \in \mathcal{I}$. Supposons que (A, x) soit irréductible et que $fg \in \mathcal{I}_{A,x}$. Comme nous pouvons écrire $(A, x) = (A_1, x) \cup (A_2, x)$ avec $A_1 = A \cap f^{-1}(0)$ et $A_2 = A \cap g^{-1}(0)$, on doit avoir par exemple $(A_1, x) = (A, x)$; donc $f \in \mathcal{I}_{A,x}$ et $\mathcal{I}_{A,x}$ est bien premier. Réciproquement, si $(A, x) = (A_1, x) \cup (A_2, x)$ avec $(A_j, x) \neq (A, x)$, il existe $f \in \mathcal{I}_{A_1,x}$ et $g \in \mathcal{I}_{A_2,x}$ telles que $f, g \notin \mathcal{I}_{A,x}$. Cependant $fg \in \mathcal{I}_{A,x}$, donc $\mathcal{I}_{A,x}$ n'est pas un idéal premier. \square

(4.6) Théorème. Toute suite d'écroissante de germes d'ensembles analytiques (A_k, x) est stationnaire.

Démonstration. En effet, la suite correspondante d'idéaux $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{A_k, x}$ est croissante, donc $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k_0}$ pour $k \geq k_0$ assez grand par la propriété noethérienne de $\mathcal{O}_{M, x}$. On en déduit que $(A_k, x) = (V(\mathcal{F}_k), x)$ est constant pour $k \geq k_0$. Ce résultat a les conséquences immédiates suivantes : \square

(4.7) Théorème. *Tout germe d'ensemble analytique (A, x) admet une décomposition finie*

$$(A, x) = \bigcup_{1 \leq k \leq N} (A_k, x)$$

où les germes (A_j, x) sont irréductibles et où $(A_j, x) \not\subset (A_k, x)$ pour $j \neq k$. La décomposition est unique à l'ordre près.

Démonstration. Si (A, x) peut être décomposé en plusieurs composantes, on redécompose celles qui peuvent l'être, et ce tant que l'une des composantes ainsi obtenues est réductible. Ce processus doit s'arrêter par le Th. 4.6, d'où l'existence de la décomposition. Pour vérifier l'unicité, supposons que $(A, x) = \bigcup_{1 \leq l \leq N'} (A'_l, x)$, soit une autre décomposition. Puisque $(A_k, x) = \bigcup_{\ell} (A_k \cap A'_\ell, x)$, on doit avoir $(A_k, x) = (A_k \cap A'_\ell, x)$ pour un certain $\ell = \ell(k)$, par conséquent $(A_k, x) \subset (A'_{\ell(k)}, x)$, et de même $(A'_{\ell(k)}, x) \subset (A_j, x)$ pour un certain j . Nécessairement $j = k$ et donc $(A'_{\ell(k)}, x) = (A_k, x)$. \square

4.B. Structure locale d'un germe d'ensemble analytique

Nous allons décrire la structure locale d'un germe, à la fois du point de vue holomorphe et du point de vue topologique. Grâce à la décomposition précédente, on peut se restreindre au cas de germes irréductibles. Soit \mathcal{F} un idéal premier de $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ et soit $A = V(\mathcal{F})$ sa variété de zéros. On pose $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

(4.8) Proposition. *Il existe un entier d , une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n et des coordonnées (z_1, \dots, z_n) correspondantes ayant les propriétés suivantes: $\mathcal{F}_d = \{0\}$ et pour tout entier $k = d + 1, \dots, n$ il existe un polynôme de Weierstrass $P_k \in \mathcal{F}_k$ de la forme*

$$(4.9) \quad P_k(z', z_k) = z_k^{s_k} + \sum_{1 \leq j \leq s_k} a_{j,k}(z') z_k^{s_k - j}, \quad a_{j,k}(z') \in \mathcal{O}_{k-1},$$

où $a_{j,k}(z') = O(|z'|^j)$. De plus, la base (e_1, \dots, e_n) peut être choisie arbitrairement proche de toute base donnée a priori (e_1^0, \dots, e_n^0) .

Démonstration. Par récurrence sur n . Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n = \{0\}$, alors $d = n$ et alors il n'y a rien à démontrer. Sinon, choisissons un élément non nul $g_n \in \mathcal{F}$ et un vecteur e_n tels que $\mathbb{C} \ni w \mapsto g_n(w e_n)$ s'annule au plus petit ordre possible s_n . Ce choix exclut au plus l'ensemble algébrique $g_n^{(s_n)}(v) = 0$, donc e_n peut être choisi arbitrairement proche de e_n^0 . Soient $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-1}, z_n)$ les coordonnées associées à la base $(e_1^0, \dots, e_{n-1}^0, e_n)$. Après multiplication par un élément inversible, on peut supposer que g_n est un polynôme de Weierstrass

$$P_n(\tilde{z}, z_n) = z_n^{s_n} + \sum_{1 \leq j \leq s_n} a_{j,n}(\tilde{z}) z_n^{s_n - j}, \quad a_{j,n} \in \mathcal{O}_{n-1},$$

et $a_{j,n}(\tilde{z}) = O(|\tilde{z}|^j)$ par la Remarque 2.2. Si $\mathcal{F}_{n-1} = \mathcal{F} \cap \mathbb{C}\{\tilde{z}\} = \{0\}$ alors $d = n - 1$ et la construction est terminée. Sinon on applique l'hypothèse de récurrence à l'idéal $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}$ pour trouver une nouvelle base (e_1, \dots, e_{n-1}) de $\text{Vect}(e_1^0, \dots, e_{n-1}^0)$, des coordonnées correspondantes (z_1, \dots, z_{n-1}) et des polynômes de Weierstrass $P_k \in \mathcal{F}_k$, $d + 1 \leq k \leq n - 1$, comme stipulé dans le lemme. \square

(4.10) Lemme. *Si $w \in \mathbb{C}$ est une racine de $w^d + a_1 w^{d-1} + \dots + a_d = 0$, $a_j \in \mathbb{C}$, alors $|w| \leq 2 \max |a_j|^{1/j}$.*

Démonstration. Sinon $|w| > 2|a_j|^{1/j}$ pour tout $j = 1, \dots, d$ et l'équation $-1 = a_1/w + \dots + a_d/w^d$ implique $1 \leq 2^{-1} + \dots + 2^{-d}$, contradiction. \square

(4.11) Corollaire. Posons $z' = (z_1, \dots, z_d)$, $z'' = (z_{d+1}, \dots, z_n)$, et soient Δ' dans \mathbb{C}^d , Δ'' dans \mathbb{C}^{n-d} des polydisques de centre 0 et de rayons $r', r'' > 0$. Alors le germe $(A, 0)$ est contenu dans un cône $|z''| \leq C|z'|$, $C = \text{constante}$, et la restriction de l'application de projection $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^d$, $(z', z'') \mapsto z' :$

$$\pi : A \cap (\Delta' \times \Delta'') \longrightarrow \Delta'$$

est propre si r'' est assez petit et si $r' \leq r''/C$.

Démonstration. Les polynômes $P_k(z_1, \dots, z_{k-1}; z_k)$ s'annulent sur $(A, 0)$. D'après (4.9) et le Lemme 4.10, tout point $z \in A$ suffisamment proche de 0 satisfait l'estimation

$$|z_k| \leq C_k(|z_1| + \dots + |z_{k-1}|), \quad d+1 \leq k \leq n,$$

donc $|z''| \leq C|z'|$ et le Corollaire s'ensuit. \square

Puisque $\mathcal{J}_d = \{0\}$, nous avons un morphisme injectif d'anneaux

$$(4.12) \quad \mathcal{O}_d = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_n/\mathcal{J}.$$

(4.13) Proposition. $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}$ est une extension algébrique entière finie de \mathcal{O}_d .

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}_n$. Une division de f par P_n donne $f = P_n q_n + R_n$ avec un reste $R_n \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $\deg_{z_n} R_n < s_n$. Des divisions des coefficients de R_n par P_{n-1}, P_{n-2} etc ... fournissent

$$R_{k+1} = P_k q_k + R_k, \quad R_k \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}, \dots, z_n],$$

où $\deg_{z_j} R_k < s_j$ pour $j > k$. Par conséquent

$$(4.14) \quad f = R_d + \sum_{d+1 \leq k \leq n} P_k q_k = R_d \pmod{(P_{d+1}, \dots, P_n)} \subset \mathcal{J}$$

et $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}$ est engendré comme \mathcal{O}_d -module par la famille finie de monômes $z_{d+1}^{\alpha_{d+1}} \dots z_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_j < s_j$. \square

Comme \mathcal{J} est premier, $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}$ est un anneau intègre. Nous noterons \tilde{f} l'image d'un germe quelconque $f \in \mathcal{O}_n$ dans le quotient $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}$, et \mathcal{M}_A et \mathcal{M}_d les corps des quotients de $\mathcal{O}_n/\mathcal{J}$ et \mathcal{O}_d respectivement. Alors $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_d[\tilde{z}_{d+1}, \dots, \tilde{z}_n]$ est une extension algébrique finie de \mathcal{M}_d . Soit $q = [\mathcal{M}_A : \mathcal{M}_d]$ son degré et soient $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ les plongements de \mathcal{M}_A au dessus de \mathcal{M}_d dans la clôture algébrique $\overline{\mathcal{M}_A}$. Rappelons qu'un anneau factoriel est intégralement clos dans son corps des quotients ([Lang 1965], Chapter VII). Par suite, tout élément de \mathcal{M}_d qui est entier algébrique sur \mathcal{O}_d appartient en fait à \mathcal{O}_d . D'après le théorème de l'élément primitif, il existe une forme linéaire $u(z'') = c_{d+1}z_{d+1} + \dots + c_n z_n$, $c_k \in \mathbb{C}$, telle que $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_d[\tilde{u}]$; en fait, u est de degré q si et seulement si $\sigma_1 \tilde{u}, \dots, \sigma_q \tilde{u}$ sont tous distincts, et ceci exclut au plus un nombre fini de sous-espaces vectoriels de l'espace \mathbb{C}^{n-d} des coefficients (c_{d+1}, \dots, c_n) . Comme $\tilde{u} \in \mathcal{O}_n/\mathcal{J}$ est entier algébrique sur l'anneau intégralement clos \mathcal{O}_d , le polynôme irréductible unitaire W_u de \tilde{u} sur \mathcal{M}_d a ses coefficients dans \mathcal{O}_d :

$$W_u(z'; T) = T^q + \sum_{1 \leq j \leq q} a_j(z_1, \dots, z_d) T^{q-j}, \quad a_j \in \mathcal{O}_d.$$

W_u est nécessairement un polynôme de Weierstrass, sinon il existerait une factorisation $W_u = W'Q$ dans $\mathcal{O}_d[T]$ avec un polynôme de Weierstrass W' de degré $\deg W' < q = \deg \tilde{u}$ et $Q(0) \neq 0$, donc $W'(\tilde{u}) = 0$, contradiction. De la même manière, on voit que $\tilde{z}_{d+1}, \dots, \tilde{z}_n$ possèdent des

équations irréductibles $W_k(z'; \tilde{z}_k) = 0$ où $W_k \in \mathcal{O}_d[T]$ est un polynôme de Weierstrass de degré $= \deg \tilde{z}_k \leq q$, $d+1 \leq k \leq n$.

(4.15) Lemme. *Soit $\delta(z') \in \mathcal{O}_d$ le discriminant de $W_u(z'; T)$. Pour tout élément g de \mathcal{M}_A qui est entier algébrique sur \mathcal{O}_d (ou de façon équivalente sur $\mathcal{O}_n/\mathcal{F}$), on a $\delta g \in \mathcal{O}_d[\tilde{u}]$.*

Démonstration. On a $\delta(z') = \prod_{j < k} (\sigma_k \tilde{u} - \sigma_j \tilde{u})^2 \neq 0$, et $g \in \mathcal{M}_A = \mathcal{M}_d[\tilde{u}]$ peut s'écrire

$$g = \sum_{0 \leq j \leq q-1} b_j \tilde{u}^j, \quad b_j \in \mathcal{M}_d,$$

où b_0, \dots, b_{q-1} sont les solutions du système linéaire $\sigma_k g = \sum b_j (\sigma_k \tilde{u})^j$; le déterminant (de type Van der Monde) est $\delta^{1/2}$. Il s'ensuit que les $\delta b_j \in \mathcal{M}_d$ sont des polynômes en $\sigma_k g$ et $\sigma_k \tilde{u}$, donc δb_j est entier algébrique sur \mathcal{O}_d . Comme \mathcal{O}_d est intégralement clos, on a nécessairement $\delta b_j \in \mathcal{O}_d$, donc $\delta g \in \mathcal{O}_d[\tilde{u}]$. \square

En particulier, il existe des polynômes uniques $B_{d+1}, \dots, B_n \in \mathcal{O}_d[T]$ de degrés $\deg B_k \leq q-1$, tels que

$$(4.16) \quad \delta(z') z_k = B_k(z'; u(z'')) \pmod{\mathcal{F}}.$$

Alors on a

$$(4.17) \quad \delta(z')^q W_k(z'; B_k(z'; T)/\delta(z')) \in \text{idéal } W_u(z'; T) \mathcal{O}_d[T];$$

en effet, le membre de gauche est un polynôme en $\mathcal{O}_d[T]$ et admet la racine $T = \tilde{u}$ dans $\mathcal{O}_n/\mathcal{F}$ puisque $B_k(z'; \tilde{u})/\delta(z') = \tilde{z}_k$ et $W_k(z'; \tilde{z}_k) = 0$.

(4.18) Lemme. *Considérons l'idéal*

$$\mathcal{G} = (W_u(z'; u(z'')), \delta(z') z_k - B_k(z'; u(z''))) \subset \mathcal{F}$$

et posons $m = \max\{q, (n-d)(q-1)\}$. Pour tout germe $f \in \mathcal{O}_n$, il existe un unique polynôme $R \in \mathcal{O}_d[T]$, $\deg_T R \leq q-1$, tel que

$$\delta(z')^m f(z) = R(z'; u(z'')) \pmod{\mathcal{G}}.$$

De plus $f \in \mathcal{F}$ implique $R = 0$, donc $\delta^m \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration. Grâce à (4.17) et à une substitution de z_k , on obtient $\delta(z')^q W_k(z'; z_k) \in \mathcal{G}$. L'analogie de la formule (4.14) où P_k est remplacé par W_k donne

$$f = R_d + \sum_{d+1 \leq k \leq n} W_k q_k, \quad R_d \in \mathcal{O}_d[z_{d+1}, \dots, z_n],$$

avec $\deg_{z_k} R_d < \deg W_k \leq q$, donc $\delta^m f = \delta^m R_d \pmod{\mathcal{G}}$. On peut par conséquent remplacer f par R_d et supposer que $f \in \mathcal{O}_d[z_{d+1}, \dots, z_n]$ est un polynôme de degré total $\leq (n-d)(q-1) \leq m$. Une substitution de z_k par $B_k(z'; u(z''))/\delta(z')$ donne $G \in \mathcal{O}_d[T]$ tel que

$$\delta(z')^m f(z) = G(z'; u(z'')) \pmod{(\delta(z') z_k - B_k(z'; u(z'')))}.$$

Finalement, une division $G = W_u Q + R$ fournit le polynôme cherché $R \in \mathcal{O}_d[T]$. La dernière affirmation est claire: si $f \in \mathcal{F}$ satisfait $\delta^m(z') f(z) = R(z'; u(z'')) \pmod{\mathcal{G}}$ pour $\deg_T R < q$, alors $R(z'; \tilde{u}) = 0$, et comme $\tilde{u} \in \mathcal{O}_n/\mathcal{F}$ est de degré q , on doit avoir $R = 0$. L'unicité de R se démontre d'une manière semblable. \square

(4.19) Théorème de paramétrisation locale. Soit \mathcal{J} un idéal premier de \mathbb{C}_n et $A = V(\mathcal{J})$. Supposons que les coordonnées

$$(z'; z'') = (z_1, \dots, z_d; z_{d+1}, \dots, z_n)$$

soient choisies comme indiqué plus haut. Alors l'anneau \mathbb{C}_n/\mathcal{J} est une extension entière finie de \mathbb{C}_d ; soit q le degré de l'extension et soit $\delta(z') \in \mathbb{C}_d$ le discriminant du polynôme irréductible d'un élément primitif $u(z'') = \sum_{k>d} c_k z_k$. Si Δ', Δ'' sont des polydisques de rayons suffisamment petits r', r'' et si $r' \leq r''/C$ avec C assez grand, l'application de projection $\pi : A \cap (\Delta' \times \Delta'') \rightarrow \Delta'$ est un revêtement ramifié à q feuillets, dont le lieu de ramification est contenu dans $S = \{z' \in \Delta'; \delta(z') = 0\}$. Ceci signifie que :

- le sous-ensemble ouvert $A_S = A \cap ((\Delta' \setminus S) \times \Delta'')$ est une variété de dimension d , dense dans $A \cap (\Delta' \times \Delta'')$;
- $\pi : A_S \rightarrow \Delta' \setminus S$ est un revêtement ;
- les fibres $\pi^{-1}(z')$ ont exactement q éléments si $z' \notin S$ et au plus q si $z' \in S$.

De plus, A_S est un revêtement connexe de $\Delta' \setminus S$, et $A \cap (\Delta' \times \Delta'')$ est contenu dans un cône $|z''| \leq C|z'|$ (cf. Fig. 1).

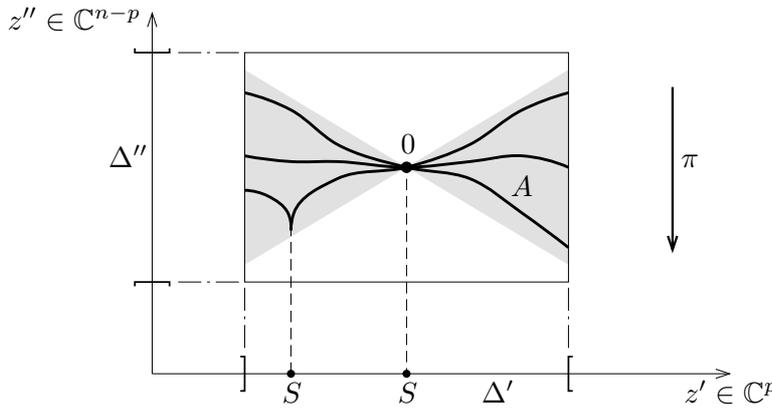


Fig. 1 Revêtement ramifié de A sur $\Delta' \subset \mathbb{C}^p$.

Démonstration. Après une transformation linéaire des coordonnées z_{d+1}, \dots, z_n , on peut supposer que $u(z'') = z_{d+1}$, donc $W_u = W_{d+1}$ et $B_{d+1}(z'; T) = \delta(z')T$. Grâce au Lemme 4.18, on a

$$\mathcal{G} = (W_{d+1}(z', z_{d+1}), \delta(z')z_k - B_k(z', z_{d+1}))_{k \geq d+2} \subset \mathcal{J}, \quad \delta^m \mathcal{J} \subset \mathcal{G}.$$

On peut donc trouver un polydisque $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ de rayons r', r'' assez petits tel que $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{G}) \subset V(\delta^m \mathcal{J})$ dans Δ . Comme $V(\mathcal{J}) = A$ et $V(\delta) \cap \Delta = S \times \Delta''$, ceci implique

$$A \cap \Delta \subset V(\mathcal{G}) \cap \Delta \subset (A \cap \Delta) \cup (S \times \Delta'').$$

En particulier, l'ensemble $A_S = A \cap ((\Delta' \setminus S) \times \Delta'')$ situé au dessus de $\Delta' \setminus S$ coïncide avec $V(\mathcal{G}) \cap ((\Delta' \setminus S) \times \Delta'')$, qui est l'ensemble des points $z \in \Delta$ défini par les équations

$$(4.20) \quad \begin{cases} \delta(z') \neq 0, & W_{d+1}(z', z_{d+1}) = 0, \\ z_k = B_k(z', z_{d+1})/\delta(z'), & d+2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Comme $\delta(z')$ est le résultant de W_{d+1} et de $\partial W_{d+1}/\partial T$, on a

$$\partial W_{d+1}/\partial T(z', z_{d+1}) \neq 0 \quad \text{sur } A_S.$$

Le théorème des fonctions implicites montre que z_{d+1} est localement fonction holomorphe de z' sur A_S , et la même affirmation vaut pour $z_k = B_k(z', z_{d+1})/\delta(z')$, $k \geq d+2$. Par suite A_S est une variété lisse, et pour $r' \leq r''/C$ petit, l'application de projection $\pi : A_S \rightarrow \Delta' \setminus S$ est un difféomorphisme local et un application propre; d'après (4.20) les fibres $\pi^{-1}(z')$ ont au plus q points correspondant à certaines des q racines w de $W_{d+1}(z'; w) = 0$. Comme $\Delta' \setminus S$ est connexe (Remarque 4.2), ou bien $A_S = \emptyset$ ou bien l'application π est un revêtement ayant un nombre de feuillet $q' \leq q$ constant. Par ailleurs, si w est une racine de $W_{d+1}(z', w) = 0$ avec $z' \in \Delta' \setminus S$ and si on pose $z_{d+1} = w$, $z_k = B_k(z', w)/\delta(z')$, $k \geq d+2$, la relation (4.17) montre que $W_k(z', z_k) = 0$, en particulier $|z_k| = O(|z'|^{1/q})$ d'après le Lemme 4.10. Pour z' assez petit, les q points $z = (z', z'')$ définis de cette manière appartiennent à Δ , donc $q' = q$. La Propriété b) et les premières parties de a) et c) s'ensuivent. On a maintenant besoin du lemme suivant.

(4.21) Lemme. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_n$ est premier et $A = V(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}_{A,0} = \mathcal{F}$.*

Il est évident que $\mathcal{F}_{A,0} \supset \mathcal{F}$. Maintenant, pour tout $f \in \mathcal{F}_{A,0}$, la Prop. 4.13 implique que \tilde{f} satisfait dans l'anneau $\mathcal{O}_n/\mathcal{F}$ une équation irréductible

$$f^r + b_1(z') f^{r-1} + \dots + b_r(z') = 0 \pmod{\mathcal{F}}.$$

Alors $b_r(z')$ s'annule sur $(A, 0)$ et la première partie de c) donne $b_r = 0$ sur $\Delta' \setminus S$. Par conséquent $\tilde{b}_r = 0$ et l'irréductibilité de l'équation de \tilde{f} implique $r = 1$, de sorte que $f \in \mathcal{F}$, ce qu'il fallait montrer. \square

Démonstration du Théorème 4.19 (fin). Il reste seulement à prouver que A_S est connexe et dense dans $A \cap \Delta$ et que les fibres $\pi^{-1}(z')$, $z' \in S$, ont au plus q éléments. Soient $A_{S,1}, \dots, A_{S,N}$ les composantes connexes de A_S . Alors $\pi : A_{S,j} \rightarrow \Delta' \setminus S$ est un revêtement à q_j feuillet, $q_1 + \dots + q_N = q$. Pour tout point $\zeta' \in \Delta' \setminus S$, il existe un voisinage U de ζ' tel que $A_{S,j} \cap \pi^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe de graphes $z'' = g_{j,k}(z')$ de fonctions analytiques $g_{j,k} \in \mathcal{O}(U)$, $1 \leq k \leq q_j$. Si $\lambda(z'')$ est une forme linéaire arbitraire en z_{d+1}, \dots, z_n et $z' \in \Delta' \setminus S$, on pose

$$P_{\lambda,j}(z'; T) = \prod_{\{z''; (z', z'') \in A_{S,j}\}} (T - \lambda(z'')) = \prod_{1 \leq k \leq q_j} (T - \lambda \circ g_{j,k}(z')).$$

Ceci définit un polynôme en T dont les coefficients sont des fonctions holomorphes bornées sur $\Delta' \setminus S$. Ces coefficients admettent des prolongements holomorphes à Δ' (Remarque 4.2), donc $P_{\lambda,j} \in \mathcal{O}(\Delta')[T]$. Par construction, $P_{\lambda,j}(z'; \lambda(z''))$ s'annule identiquement sur $A_{S,j}$. Soit

$$P_\lambda = \prod_{1 \leq j \leq N} P_{\lambda,j}, \quad f(z) = \delta(z') P_\lambda(z'; \lambda(z''));$$

f s'annule sur $A_{S,1} \cup \dots \cup A_{S,N} \cup (S \times \Delta'') \supset A \cap \Delta$. le Lemme 4.21 montre que $\mathcal{F}_{A,0}$ est premier; comme $\delta \notin \mathcal{F}_{A,0}$, on obtient $P_{\lambda,j}(z'; \lambda(z'')) \in \mathcal{F}_{A,0}$ pour un certain indice j . Ceci est une contradiction si $N \geq 2$ et si λ est choisi en sorte que λ sépare les q points z'' de chaque fibre $\pi^{-1}(z'_\nu)$, pour une suite $z'_\nu \rightarrow 0$ dans $\Delta' \setminus S$. Par conséquent $N = 1$, A_S est connexe, et pour tout $\lambda \in (\mathbb{C}^{n-d})^*$ on a $P_\lambda(z', \lambda(z'')) \in \mathcal{F}_{(A,0)}$. Par construction $P_\lambda(z', \lambda(z''))$ s'annule sur A_S , donc aussi sur $\overline{A_S}$; par conséquent, pour tout $z' \in S$, la fibre $\overline{A_S} \cap \pi^{-1}(z')$ possède au plus q éléments, sinon en choisissant λ qui sépare $q+1$ de ces points on obtiendrait $q+1$ racines $\lambda(z'')$ de $P_\lambda(z'; T)$, contradiction. Supposons maintenant que A_S ne soit pas dense dans $A \cap \Delta$ pour des polydisques Δ arbitrairement petits. Alors il existerait une suite $A \ni z_\nu = (z'_\nu, z''_\nu) \rightarrow 0$ telle que $z'_\nu \in S$ et z''_ν ne soit pas dans $F_\nu := \text{pr}''(\overline{A_S} \cap \pi^{-1}(z'_\nu))$. La continuité des racines du polynôme $P_\lambda(z'; T)$ lorsque $\Delta' \setminus S \ni z' \rightarrow z'_\nu$ implique que l'ensemble des racines de $P_\lambda(z'_\nu; T)$ est $\lambda(F_\nu)$. Choisissons λ tel que $\lambda(z''_\nu) \notin \lambda(F_\nu)$ pour tout ν . Alors $P_\lambda(z'_\nu; \lambda(z''_\nu)) \neq 0$ pour tout ν et $P_\lambda(z'; \lambda(z'')) \notin \mathcal{F}_{A,0}$, contradiction. \square

À ce point, il nous faut observer que beaucoup des énoncés précédents tombent complètement en défaut dans le cas des ensembles analytiques réels. Dans \mathbb{R}^2 , par exemple, l'idéal premier $\mathcal{J} = (x^5 + y^4)$ définit un germe irréductible de courbe $(A, 0)$ et on a une extension algébrique entière injective d'anneaux $\mathbb{R}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{R}\{x, y\}/\mathcal{J}$ qui est de degré 4; cependant, la projection de $(A, 0)$ sur le premier facteur, $(x, y) \mapsto x$, n'a pas un nombre de feuillet constant près de 0, et ce nombre n'est pas égal au degré de l'extension. De plus, l'idéal premier $\mathcal{J} = (x^2 + y^2)$ a une variété de zéros $V(\mathcal{J})$ associée qui se réduit à $\{0\}$, donc $\mathcal{J}_{A,0} = (x, y)$ contient strictement \mathcal{J} , ce qui contraste avec le Lemme 4.21.

Retournons maintenant à la situation complexe, qui est d'un comportement beaucoup plus simple. Le résultat obtenu au Lemme 4.21 peut alors être étendu aux idéaux non premiers et on obtient le résultat important suivant :

(4.22) Théorème des zéros de Hilbert holomorphe. *Pour tout idéal $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}_n$ on a*

$$\mathcal{J}_{V(\mathcal{J}),0} = \sqrt{\mathcal{J}},$$

où $\sqrt{\mathcal{J}}$ est la racine de l'idéal \mathcal{J} , c'est-à-dire l'ensemble des germes $f \in \mathbb{C}_n$ tels qu'une certaine puissance f^k appartient à \mathcal{J} .

Démonstration. Soit $B = V(\mathcal{J})$. Si $f^k \in \mathcal{J}$, alors f^k s'annule sur $(B, 0)$ et $f \in \mathcal{J}_{B,0}$. Par conséquent $\sqrt{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}_{B,0}$. Réciproquement, c'est un fait algébrique général bien connu que $\sqrt{\mathcal{J}}$ est l'intersection de tous les idéaux premiers $\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$ ([Lang 1965], Chapter X). Pour un tel idéal $(B, 0) = (V(\mathcal{J}), 0) \supset (V(\mathcal{P}), 0)$, donc $\mathcal{J}_{B,0} \subset \mathcal{J}_{V(\mathcal{P}),0} = \mathcal{P}$ d'après le Lemme 4.21. Par suite $\mathcal{J}_{B,0} \subset \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{J}}$ et le théorème est démontré. \square

En d'autres termes, si un germe $(B, 0)$ est défini par un idéal arbitraire $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}_n$ et si $f \in \mathbb{C}_n$ s'annule sur $(B, 0)$, alors une certaine puissance f^k appartient à \mathcal{J} .

4.C. Points réguliers et singuliers. Dimension

Les puissants résultats qui précèdent nous permettent d'analyser avec précision les singularités d'un ensemble analytique. Donnons d'abord quelques définitions.

(4.23) Définition. *Soit $A \subset M$ un ensemble analytique et $x \in A$. On dit que $x \in A$ est un point régulier de A si $A \cap \Omega$ est une sous-variété \mathbb{C} -analytique lisse de Ω pour un voisinage Ω assez petit de x . Sinon, on dit que x est un point singulier. Les sous-ensembles correspondants de A seront notés respectivement A_{reg} et A_{sing} .*

Il est clair par définition que A_{reg} est un sous-ensemble ouvert de A , que A_{sing} est fermé, et que les composantes connexes de A_{reg} sont des sous-variétés \mathbb{C} -analytique lisses de M non nécessairement fermées.

(4.24) Proposition. *Si (A, x) est irréductible, il existe des voisinages Ω arbitrairement petits de x tels que $A_{\text{reg}} \cap \Omega$ soit une partie dense et connexe de $A \cap \Omega$.*

Démonstration. Prenons $\Omega = \Delta$ comme dans le Th. 4.19. Alors $A_S \subset A_{\text{reg}} \cap \Omega \subset A \cap \Omega$, où A_S est connexe et dense dans $A \cap \Omega$; par suite $A_{\text{reg}} \cap \Omega$ a les mêmes propriétés. \square

(4.25) Définition. *La dimension d'un germe d'ensemble analytique irréductible (A, x) est définie par $\dim(A, x) = \dim(A_{\text{reg}}, x)$. Si (A, x) a plusieurs composantes irréductibles (A_ℓ, x) , on pose*

$$\dim(A, x) = \max\{\dim(A_\ell, x)\}, \quad \text{codim}(A, x) = n - \dim(A, x).$$

(4.26) Proposition. *Soient $(B, x) \subset (A, x)$ des germes d'ensembles analytiques. Si (A, x) est irréductible et $(B, x) \neq (A, x)$, alors $\dim(B, x) < \dim(A, x)$ et $B \cap \Omega$ est d'intérieur vide dans $A \cap \Omega$ pour tout voisinage Ω suffisamment petit de x .*

Démonstration. On peut supposer $x = 0$, $(A, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ et $(B, 0)$ irréductible. Alors $\mathcal{I}_{A,0} \subset \mathcal{I}_{B,0}$ sont des idéaux premiers. On réalise A et B comme des revêtements ramifiés en choisissant des coordonnées adéquates, et on peut à chaque étape sélectionner des vecteurs de base e_n, e_{n-1}, \dots qui conviennent simultanément pour A et B . Si $\dim B = \dim A$, le processus s'arrête en même temps pour A et B , de sorte qu'on obtient des revêtements ramifiés

$$\pi : A \cap (\Delta' \times \Delta'') \longrightarrow \Delta', \quad \pi : B \cap (\Delta' \times \Delta'') \longrightarrow \Delta'$$

de lieux de ramifications S_A, S_B . Alors $B \cap ((\Delta' \setminus (S_A \cup S_B)) \times \Delta'')$ est un sous-ensemble ouvert de la variété $A_S = A \cap ((\Delta' \setminus S_A) \times \Delta'')$, par conséquent $B \cap A_S$ est un sous-ensemble analytique de A_S d'intérieur non vide. La même conclusion vaut si $B \cap \Delta$ est supposé d'intérieur non vide dans $A \cap \Delta$. Comme A_S est connexe, on obtient $B \cap A_S = A_S$, et comme $B \cap \Delta$ est fermé dans Δ on en déduit que $B \cap \Delta \supset \overline{A_S} = A \cap \Delta$, donc $(B, 0) = (A, 0)$, en contradiction avec l'hypothèse. \square

(4.27) Exemple: paramétrisation des courbes analytiques. Supposons que $(A, 0)$ soit un germe irréductible de courbe analytique ($\dim(A, 0) = 1$). Si le disque $\Delta' \subset \mathbb{C}$ est choisi assez petit pour que $S = \{0\}$, alors A_S est un revêtement connexe de $\Delta' \setminus \{0\}$ à q feuillets. Par conséquent, il existe un isomorphisme de revêtements entre π et le revêtement standard

$$\mathbb{C} \supset \Delta(r) \setminus \{0\} \longrightarrow \Delta(r^q) \setminus \{0\}, \quad t \longmapsto t^q, \quad r^q = \text{rayon de } \Delta',$$

c'est-à-dire une application $\gamma : \Delta(r) \setminus \{0\} \longrightarrow A_S$ telle que $\pi \circ \gamma(t) = t^q$. Cette application s'étend en une application holomorphe bijective $\gamma : \Delta(r) \rightarrow A \cap \Delta$ avec $\gamma(0) = 0$. Ceci signifie que tout germe irréductible de courbe peut être paramétrisé par une application holomorphe bijective définie sur un disque de \mathbb{C} . On peut encore dire que la courbe est paramétrée par une application multi-valuée $t \mapsto \gamma(t^{1/q})$ (avec toutes les déterminations possible de la racine q -ième), de sorte que les séries de Taylor des composantes $\gamma_j(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{j,s} t^s$ fournissent des *développements de Puiseux*

$$z_j = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{j,s} t^{s/q}, \quad 1 \leq j \leq n$$

pour les coordonnées des points $z = (z_1, \dots, z_n) \in A \cap \Delta$.

4.D. Cohérence des faisceaux d'idéaux

Soit A un ensemble analytique dans une variété complexe M . Le *faisceau d'idéaux* \mathcal{I}_A est le sous-faisceau de \mathcal{O}_M consistant en les germes de fonctions holomorphes de M qui s'annulent sur A . Ses fibres sont les idéaux $\mathcal{I}_{A,x}$ déjà considérés; observons bien sûr que $\mathcal{I}_{A,x} = \mathcal{O}_{M,x}$ si $x \notin A$. Si $x \in A$, on note $\mathcal{O}_{A,x}$ l'anneau des germes de fonctions sur (A, x) qui peuvent s'étendre en des germes de fonctions holomorphes sur (M, x) . Par définition, il y a un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{M,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{A,x}$ dont le noyau est $\mathcal{I}_{A,x}$, donc

$$(4.28) \quad \mathcal{O}_{A,x} = \mathcal{O}_{M,x} / \mathcal{I}_{A,x}, \quad \forall x \in A,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{O}_A = (\mathcal{O}_M / \mathcal{I}_A)|_A$. Puisque $\mathcal{I}_{A,x} = \mathcal{O}_{M,x}$ pour $x \notin A$, le faisceau quotient $\mathcal{O}_M / \mathcal{I}_A$ est nul sur $M \setminus A$.

(4.29) Théorème (Cartan [67], 1950). *Pour tout ensemble analytique $A \subset M$, le faisceau d'idéaux \mathcal{I}_A est un faisceau analytique cohérent.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat lorsque A est un sous-ensemble analytique d'un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n . Si $(A, 0)$ n'est pas irréductible, il existe un voisinage Ω tel que $A \cap \Omega = A_1 \cup \dots \cup A_N$ où les A_k sont des ensembles analytique dans Ω et $(A_k, 0)$ est irréductible. On

a $\mathcal{F}_{A \cap \Omega} = \bigcap \mathcal{F}_{A_k}$, donc d'après le Cor. 3.14 on peut supposer que $(A, 0)$ est irréductible. On peut alors choisir des coordonnées z', z'' , des polydisques Δ', Δ'' et un élément primitif $u(z'') = c_{d+1}z_{d+1} + \dots + c_n z_n$ tel que le Th. 4.19 s'applique. Puisque $\delta(z') = \prod_{j < k} (\sigma_k \tilde{u} - \sigma_j \tilde{u})^2$, on voit que $\delta(z')$ est en fait un polynôme en les c_j avec des coefficients dans \mathcal{O}_d . La même propriété est vraie pour les coefficients des polynômes $W_u(z'; T)$ et $B_k(z'; T)$ qui s'expriment en termes des fonctions symétriques élémentaires des $\sigma_k \tilde{u}$. On suppose que Δ' est choisi suffisamment petit pour que tous les coefficients de ces polynômes de $\mathcal{O}_d[c_{d+1}, \dots, c_n]$ soient dans $\mathcal{O}(\Delta')$. Soit $\delta_\alpha \in \mathcal{O}(\Delta')$ un des coefficients non nuls apparaissant dans $\delta^m = \sum \delta_\alpha c^\alpha$. De plus, soient $G_1, \dots, G_N \in \mathcal{O}(\Delta')[z'']$ les coefficients des monômes c^α apparaissant dans les développements des fonctions $W_u(z'; u(z''))$ ou $\delta(z')z_k - B_k(z'; u(z''))$. Il est clair que G_1, \dots, G_N s'annulent sur $A \cap \Delta$. Nous affirmons que

$$(4.30) \quad \mathcal{F}_{A,x} = \{f \in \mathcal{O}_{M,x} ; \delta_\alpha f \in (G_{1,x}, \dots, G_{N,x})\}.$$

Ceci implique que le faisceau \mathcal{F}_A est la projection sur le premier facteur du faisceau des relations $\mathcal{R}(\delta_\alpha, G_1, \dots, G_N) \subset \mathcal{O}_\Delta^{N+1}$, qui est cohérent par le théorème d'Oka; le Théorème 4.29 en résultera alors.

On démontre d'abord que l'inclusion $\mathcal{F}_{A,x} \supset \{\dots\}$ a bien lieu dans (4.30). En effet, si $\delta_\alpha f \in (G_{1,x}, \dots, G_{N,x})$, alors f s'annule sur $A \setminus \{\delta_\alpha = 0\}$ dans un certain voisinage de x . Comme $(A \cap \Delta) \setminus \{\delta_\alpha = 0\}$ est dense dans $A \cap \Delta$, on en conclut que $f \in \mathcal{F}_{A,x}$.

Pour démontrer l'autre inclusion $\mathcal{F}_{A,x} \subset \{\dots\}$, on reprend la démonstration du Lemme 4.18 avec quelques modifications. Soit $x \in \Delta$ un point fixé. Au point x , les polynômes irréductibles $W_u(z'; T)$ et $W_k(z'; T)$ des éléments \tilde{u} et \tilde{z}_k de $\mathcal{O}_{M,0}/\mathcal{F}_{A,0}$ se décomposent en

$$\begin{aligned} W_u(z'; T) &= W_{u,x}(z'; T - u(x'')) Q_{u,x}(z'; T - u(x'')), \\ W_k(z'; T) &= W_{k,x}(z'; T - x_k) Q_{k,x}(z'; T - x_k), \end{aligned}$$

où $W_{u,x}(z'; T)$ et $W_{k,x}(z'; T)$ sont des polynômes de Weierstrass en T , et $Q_{u,x}(x', 0) \neq 0$, $Q_{k,x}(x', 0) \neq 0$. Pour tout $z' \in \Delta'$, les racines de $W_u(z'; T)$ sont les valeurs $u(z'')$ en tous les points $z \in A \cap \pi^{-1}(z')$. Comme A est fermé, tout point $z \in A \cap \pi^{-1}(z')$ avec z' proche de x' doit être dans un petit voisinage de l'un des points $y \in A \cap \pi^{-1}(x')$. Choisissons c_{d+1}, \dots, c_n tels que la forme linéaire $u(z'')$ sépare tous les points de la fibre $A \cap \pi^{-1}(x')$. Alors, pour une racine $u(z'')$ de $W_{u,x}(z'; T - u(x''))$, le point z doit être dans un voisinage de $y = x$, sinon $u(z'')$ serait proche de $u(y'') \neq u(x'')$ et le polynôme de Weierstrass $W_{u,x}(z'; T)$ aurait une racine loin de 0, en contradiction avec (4.10). Réciproquement, si $z \in A \cap \pi^{-1}(z')$ est proche de x , alors $Q_{u,x}(z'; u(z'')) - u(x'') \neq 0$ et $u(z'')$ est une racine de $W_{u,x}(z'; T - u(x''))$. De tout ceci, on déduit que tout polynôme $P(z'; T) \in \mathcal{O}_{\Delta', x'}[T]$ tel que $P(z'; u(z'')) = 0$ sur (A, x) est un multiple de $W_{u,x}(z'; T - u(x''))$, car les racines de ce dernier polynôme sont simples pour z' dans l'ensemble dense $(\Delta' \setminus S, x)$. En particulier $\deg P < \deg W_{u,x}$ implique $P = 0$ et

$$\delta(z')^q W_{k,x}(z'; B_k(z'; u(z'')))/\delta(z') - x_k$$

est un multiple de $W_{u,x}(z'; T - u(x''))$. Si on remplace W_u, W_k par $W_{u,x}, W_{k,x}$ respectivement, la démonstration du Lemme 4.18 montre que pour tout $f \in \mathcal{O}_{M,x}$ il existe un polynôme $R \in \mathcal{O}_{\Delta', x'}[T]$ de degré $\deg R < \deg W_{u,x}$ tel que

$$\begin{aligned} \delta(z')^m f(z) &= R(z'; u(z'')) \quad \text{modulo l'idéal} \\ &(\ W_{u,x}(z'; u(z'')) - u(x''), \delta(z')z_k - B_k(z'; u(z'')) \), \end{aligned}$$

et $f \in \mathcal{F}_{A,x}$ implique $R = 0$. Comme $W_{u,x}$ diffère de W_u seulement par un élément inversible de $\mathcal{O}_{M,x}$, on en déduit

$$\left(\sum \delta_\alpha c^\alpha \right) \mathcal{F}_{A,x} = \delta^m \mathcal{F}_{A,x} \subset (G_{1,x}, \dots, G_{N,x}).$$

Ceci est vrai pour un ouvert dense de coefficients c_{d+1}, \dots, c_n , par conséquent en exprimant les coefficients δ_α comme des fonctions d'interpolation des valeurs $\sum \delta_\alpha c^\alpha$ en des points c ad hoc on obtient

$$\delta_\alpha \mathcal{J}_{A,x} \subset (G_{1,x}, \dots, G_{N,x}) \quad \text{pour tout } \alpha. \quad \square$$

(4.31) Théorème. A_{sing} est un sous-ensemble analytique de A .

Démonstration. L'énoncé est local. Supposons d'abord que $(A, 0)$ soit un germe irréductible dans \mathbb{C}^n . Soit g_1, \dots, g_N les générateurs du faisceau \mathcal{J}_A sur un voisinage Ω de 0. Posons $d = \dim A$. Dans un voisinage de tout point $x \in A_{\text{reg}} \cap \Omega$, A peut être défini par des équations holomorphes $u_1(z) = \dots = u_{n-d}(z) = 0$ telles que du_1, \dots, du_{n-d} sont linéairement indépendantes. Comme u_1, \dots, u_{n-d} sont engendrés par g_1, \dots, g_N , on peut extraire une sous-famille $g_{j_1}, \dots, g_{j_{n-d}}$ qui a au moins un déterminant jacobien non nul de rang $n - d$ en x . Par suite $A_{\text{sing}} \cap \Omega$ est défini par les équations

$$\det \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right)_{\substack{j \in J \\ k \in K}} = 0, \quad J \subset \{1, \dots, N\}, \quad K \subset \{1, \dots, n\}, \quad |J| = |K| = n - d.$$

Supposons maintenant que $(A, 0) = \bigcup (A_\ell, 0)$ avec $(A_\ell, 0)$ irréductible. Le germe d'un ensemble analytique irréductible en un point régulier est irréductible, donc tout point qui appartient simultanément à au moins deux composantes est singulier. Par conséquent

$$(A_{\text{sing}}, 0) = \bigcup (A_{l,\text{sing}}, 0) \cup \bigcup_{k \neq l} (A_k \cap A_l, 0),$$

et A_{sing} est analytique. □

On donne maintenant une caractérisation des points réguliers en termes d'une propriété algébrique simple de l'anneau $\mathcal{O}_{A,x}$.

(4.32) Proposition. Soit (A, x) un germe d'ensemble analytique de dimension d et soit $\mathfrak{m}_{A,x} \subset \mathcal{O}_{A,x}$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en x . Alors $\mathfrak{m}_{A,x}$ ne peut avoir moins de d générateurs et $\mathfrak{m}_{A,x}$ possède d générateurs si et seulement si x est un point régulier.

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{C}^n$ est une sous-variété de dimension d dans un voisinage de x , il existe des coordonnées locales centrées en x telles que A soit donné par les équations $z_{d+1} = \dots = z_n$ près de $z = 0$. Alors $\mathcal{O}_{A,x} \simeq \mathcal{O}_d$ et $\mathfrak{m}_{A,x}$ est engendré by z_1, \dots, z_d . Réciproquement, supposons que $\mathfrak{m}_{A,x}$ possède s générateurs $g_1(z), \dots, g_s(z)$ dans $\mathcal{O}_{A,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x} / \mathcal{J}_{A,x}$. Si l'on choisit $x = 0$ comme origine pour simplifier, on peut écrire

$$z_j = \sum_{1 \leq k \leq s} u_{jk}(z) g_k(z) + f_j(z), \quad u_{jk} \in \mathcal{O}_n, \quad f_j \in \mathcal{J}_{A,0}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Alors il vient $dz_j = \sum c_{jk}(0) dg_k(0) + df_j(0)$, de sorte que le rang du système de différentielles $(df_j(0))_{1 \leq j \leq n}$ est au moins égal à $n - s$. Supposons par exemple que $df_1(0), \dots, df_{n-s}(0)$ soient linéairement indépendantes. D'après le théorème des fonctions implicites, les équations $f_1(z) = \dots = f_{n-s}(z) = 0$ définissent un germe de sous-variété de dimension s contenant $(A, 0)$, donc $s \geq d$ et $(A, 0)$ est égal à cette sous-variété si $s = d$. □

(4.33) Corollaire. Soit $A \subset M$ un ensemble analytique de dimension pure d et soit $B \subset A$ un sous-ensemble analytique de codimension $\geq p$ dans A . Alors, en tant que $\mathcal{O}_{A,x}$ -module, l'idéal $\mathcal{J}_{B,x}$ ne peut être engendré par moins de p générateurs en tout point $x \in B$, et par moins de $p + 1$ générateurs en tout point $x \in B_{\text{reg}} \cap A_{\text{sing}}$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{J}_{B,x}$ admette s -générateurs (g_1, \dots, g_s) en x . D'après la cohérence de \mathcal{J}_B ces germes engendrent aussi \mathcal{J}_B dans un voisinage de x , donc on peut supposer que x est un point régulier de B . Alors il existe des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) de M centrées en x telles que (B, x) soit défini par $z_{k+1} = \dots = z_n = 0$, où $k = \dim(B, x)$. Alors l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{B,x} = \mathfrak{m}_{A,x}/\mathcal{J}_{B,x}$ est engendré par z_1, \dots, z_k , de sorte que $\mathfrak{m}_{A,x}$ est engendré par $(z_1, \dots, z_k, g_1, \dots, g_s)$. D'après la Prop. 4.32, on obtient $k + s \geq d$, donc $s \geq d - k \geq p$, et les inégalités sont strictes lorsque $x \in A_{\text{sing}}$. \square

Quelques références

Serge Lang. *Algebra*, Third revised edition, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 2002, 914 pages

Roger Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, 1957, 283 pages

Kiyoshi Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I à X*, cf. Collected Papers, Translated from the French by R. Narasimhan. With commentaries by H. Cartan. Edited by R. Remmert. Springer-Verlag, Berlin, 1984, 223 pages

Travaux et publications de Henri Cartan

- [1] (avec E. Cartan) *Note sur la génération des oscillations entretenues*, Annales des P.T.T., 14, 1196-1207 (1925)
- [2] *Sur quelques théorèmes de Nevanlinna*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 185, 1253-1255 (1927)
- [3] *Sur un théorème d'André Bloch*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 186, 624-626 (1928)
- [4] *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires (Thèse)*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 45, 255-346 (1928)
- [5] *Un nouveau théorème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 188, 301-303 (1929)
- [6] *Sur la croissance des fonctions méromorphes d'une ou plusieurs variables complexes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 188, 1374-1376 (1929)
- [7] *Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe d'une variable*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 189, 521-523 (1929)
- [8] *Sur la dérivée par rapport à $\log r$ de la fonction de croissance $T(r; f)$* , Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 189, 625-627 (1929)
- [9] *Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions entières données*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 189, 727-729 (1929)
- [10] *Sur les fonctions de deux variables complexes*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 54, 99-116 (1930)
- [11] *Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de M. Carathéodory*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 190, 354-356 (1930)
- [12] *Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 190, 718-720 (1930)
- [13] *Sur les valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe dans tout le plan*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 190, 1003-1005 (1930)
- [14] *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 9e série, 10, 1-114 (1931)
- [15] *Sur les fonctions de deux variables complexes: les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D* , Bulletin de la Société Mathématique de France, 58, 199-219 (1930)
- [16] *Sur les variétés définies par une relation entière*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 55, 24-32 et 47-64 (1931)
- [17] *Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 59, 46-69 (1931)
- [18] *Les transformations analytiques et les domaines convexes*, Association française pour l'avancement des sciences, Nancy, 30-31 (1931)
- [19] (avec E. Cartan) *Les transformations des domaines cerclés bornés*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 192, 709-712 (1931)

- [20] *Les transformations des domaines semi-cerclés bornés*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 192, 869-871 (1931)
- [21] *Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés*, Mathematische Annalen, 106, 540-573 (1932)
- [22] *Sur une classe remarquable de domaines*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 192, 1077-1079 (1931)
- [23] *Sur les transformations pseudo-conformes des domaines cerclés bornés*, Congrès International des Mathématiciens, Zürich, vol. 2, 57-59 (1932)
- [24] *Sur les transformations localement topologiques*, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, 6, 85-104 (1933)
- [25] (avec P. Thullen) *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen*, Mathematische Annalen, 106, 617-647 (1932)
- [26] *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné*, Mathematische Zeitschrift, 35, 760-773 (1932)
- [27] *Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données*, Mathematica, Cluj, 7, 5-29 (1933)
- [28] *Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 57, 333-344 (1933)
- [29] *Sur les groupes de transformations pseudo-conformes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 196, 669-671 (1933)
- [30] *Sur les groupes de transformations pseudo-conformes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 196, 993-995 (1933)
- [31] *Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes*, Compositio Mathematica, 1, 223-227 (1934)
- [32] *Sur les transformations pseudo-conformes du produit topologique de deux domaines*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 199, 925-927 (1934)
- [33] *Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 199, 1284-1287 (1934)
- [34] *Sur les groupes de transformations analytiques*, Collection à la mémoire de Jacques Herbrand, Hermann, Paris (1936)
- [35] *Sur les fonctions de n variables complexes: les transformations du produit topologique de deux domaines bornés*, Bulletin de la Société mathématique de France, 64, 37-48 (1936)
- [36] *Théorie des filtres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 205, 595-598 (1937)
- [37] *Filtres et ultrafiltres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 205, 777-779 (1937)
- [38] *Sur le premier problème de Cousin*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 207, 558-560 (1938)
- [39] *Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 208, 414-416 (1939)
- [40] (avec S. Mandelbrojt) *Solution du problème de Carleman pour un intervalle ouvert fini*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 208, 555-558 (1939)
- [41] *Solution du problème de Carleman pour un intervalle fermé fini*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 208, 716-718 (1939)
- [42] *Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 210, 431-434 (1940)
- [43] (avec S. Mandelbrojt) *Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables*, Acta Mathematica, 72, 31-49 (1940)
- [44] *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*, Publications de l'Institut Mathématique de Strasbourg, Hermann (1940)
- [45] *Sur les classes de Haar*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 211, 759-762 (1940)
- [46] *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 19, 1-26 (1940)
- [47] *Sur les fondements de la théorie du potentiel*, Bulletin de la Société mathématique de France, 69, 71-96 (1941)
- [48] *La théorie générale du potentiel dans les espaces homogènes*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 66, 126-132 et 136-144 (1942)

- [49] *Capacité extérieure et suites convergentes de potentiels*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 214, 944-946 (1942)
- [50] *Sur les suites de potentiels de masses ponctuelles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 214, 994-996 (1942)
- [51] *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 61, 149-197 (1944)
- [52] *Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels*, Bulletin de la Société mathématique de France, 73, 74-106 (1945)
- [53] *Méthodes modernes en Topologie Algébrique*, Commentarii Mathematici Helvetici, 18, 1-15 (1945)
- [54] *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Annales de l'université de Grenoble, 22, 221-280 (1946)
- [55] *Extension de la théorie de Galois aux corps non commutatifs*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 224, 87-89 (1947)
- [56] *Les principaux théorèmes de la théorie de Galois pour les corps non commutatifs*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 224, 249-251 (1947)
- [57] *Théorie de Galois pour les corps non commutatifs*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 64, 59-77 (1947)
- [58] (avec R. Godement) *Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 64, 79-99 (1947)
- [59] *Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe. Notions algébriques préliminaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 226, 148-150 (1948)
- [60] *Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe: étude d'un anneau différentiel où opère un groupe*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 226, 303-305 (1948)
- [61] *Sur la notion de carapace en topologie algébrique*, Topologie Algébrique, Colloque International du C.N.R.S., n°12, 1-2 (1949)
- [62] *Sur un cas de prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables complexes*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, séries A, 61, 3-6 (1949)
- [63] (avec J. Deny) *Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique*, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 12, 81-100 (1950)
- [64] *Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 230, 425-427 (1950)
- [65] *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de Topologie, C.B.R.M., Bruxelles, 15-27 (1950)
- [66] *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de Topologie, C.B.R.M., Bruxelles, 57-71 (1950)
- [67] *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 78, 29-64 (1950)
- [68] *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Congrès International des Mathématiciens, Cambridge, vol. 1, 152-164 (1950)
- [69] *Sur une extension d'un théorème de Rado*, Mathematische Annalen, 125, 49-50 (1952)
- [70] *Extension du théorème des « chaînes de syzygies »*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, V, 11, 1-11 (1952)
- [71] (avec J.-P. Serre) *Espaces fibrés et groupes d'homotopie, I. Constructions générales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 234, 288-290 (1952)
- [72] (avec J.-P. Serre) *Espaces fibrés et groupes d'homotopie, II. Applications*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 234, 393-395 (1952)
- [73] *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 41-55 (1953)
- [74] (avec J.-P. Serre) *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 237, 128-130 (1953)
- [75] *Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\pi, n)$: I. Méthode des constructions*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 40, 467-471 (1954)
- [76] *Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane II*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 40, 704-707 (1954)

- [77] *Algèbres d'Eilenberg-MacLane*, Séminaire H. Cartan, Ecole Normale Supérieure, 1954-1955, exposés 2 à 11, deuxième édition (1956)
- [78] *Sur l'itération des opérations de Steenrod*, Commentarii Mathematici Helvetici, 29, 40-58 (1955)
- [79] *Sur la notion de dimension*, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, 37, 1-12 (1957)
- [80] *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes*, Algebraic Geometry and Topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, 90-102 (1957)
- [81] *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bulletin de la Société mathématique de France, 85, 77-99 (1957)
- [82] (avec F. Bruhat) *Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 244, 988-991 (1957)
- [83] (avec F. Bruhat) *Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique réel*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 244, 1123-1126 (1957)
- [84] *Fonctions automorphes et séries de Poincaré*, Journal d'Analyse Mathématique, 6, 169-175 (1958)
- [85] *Prolongement des espaces analytiques normaux*, Mathematische Annalen, 136, 97-110 (1958)
- [86] *Espaces fibrés analytiques*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Mexico, 97-121 (1958)
- [87] *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: les espaces analytiques*, Congrès International des Mathématiciens, Edingurgh, 33-52 (1958)
- [88] *Quotients of complex analytic spaces*, International Colloquium on Function Theory, Tata Institute, 1-15 (1960)
- [89] *Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques*, Atti della seconda Riunione del Grupamento des Mathématiciens d'expression latine, Florence, 24-29 (1961)
- [90] *Faisceaux analytiques cohérents*, Centro Internazionale Matematico Estivo, Varenna (1963)
- [91] *Réflexions sur les rapports d'Aarhus et Dubrovnik*, L'Enseignement Mathématique, 9, 84-90 (1963)
- [92] *Emil Artin*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 28,1-5 (1965)
- [93] *Some applications of the new theory of Banach analytic spaces*, Journal of the London Mathematical Society, 41, 70-78 (1966)
- [94] *Sur le théorème de préparation de Weierstrass*, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Wissenschaftliche Abhandlung, Band 33, 155-168 (1966)
- [95] *Structural stability of differentiable mappings*, Proceedings International Conference of Functional Analysis, Tokyo, 1-10 (1969)
- [96] *Les travaux de Georges de Rham sur les variétés différentiables*, Essays on Topology and Related Topics, Springer-Verlag, 1-11 (1970)
- [97] *Sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes dans un espace de Banach*, Séminaire sur les espaces analytiques, Éditions de l'Académie de la République socialiste de Roumanie, Bucarest, 129-135 (1971)
- [98] *Sur les travaux de K. Stein*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster (1973)
- [99] *Théories cohomologiques*, Inventiones Mathematicae, 35, 261-271 (1976)
- [100] *Domaines bornés symétriques dans un espace de Banach complexe*, Publicado en « Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina » Madrid, 3-14 (1978)

Séminaires de l'Ecole Normale Supérieure

(publiés par le Secr. Math., 11 rue P. et M. Curie, 75005 PARIS, et par W. A. Benjamin, éd., New York, 1967)

- 1948-49 *Topologie algébrique*
- 1949-50 *Espaces fibrés et homotopie*
- 1950-51 *Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux*
- 1951-52 *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*
- 1953-54 *Fonctions automorphes et espaces analytiques*
- 1954-55 *Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*
- 1955-56 (avec C. Chevalley) *Géométrie algébrique*
- 1956-57 *Quelques questions de Topologie*
- 1957-58 (avec R. Godement et I. Satake) *Fonctions automorphes*

- 1958-59 *Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires*
 1959-60 (avec J. C. Moore) *Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott*
 1960-61 (avec A. Grothendieck) *Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*
 1961-62 *Topologie différentielle*
 1962-63 *Topologie différentielle*
 1963-64 (avec L. Schwartz) *Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique*

Livres

- (avec S. Eilenberg) *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Math. Séries, n^o19, 1966 – traduit en russe.
Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Paris, Hermann, 1961 – traduit en allemand, anglais, espagnol, japonais, russe.
Calcul différentiel; formes différentielles, Paris, Hermann, 1967 – traduit en anglais et en russe.

Divers

- Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes*, Annexe aux « Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes » de P. Montel, Paris, Gauthier-Villars (1933), 129-155.
 (avec J. Dieudonné) *Notes de tératologie III*, Rev. Sci., 77 (1939), 413-414.
Un théorème sur les groupes ordonnés, Bull. Sci. Math., 63 (1939), 201-205.
Sur le fondement logique des mathématiques, Rev. Sci., 81 (1943), 2-11.
 (avec J. Leray) *Relations entre anneaux d'homologie et groupes de Poincaré*, Topologie Algébrique, Coll. Intern. C.N.R.S. n^o12 (1949), 83-85.
Nombres réels et mesure des grandeurs, Bull. Ass. Prof. Math., 34 (1954), 29-35. Structures algébriques, Bull. Ass. Prof. Math., 36 (1956), 288-298.
 (avec S. Eilenberg) *Foundations of fibre bundles*, Symp. Intern. Top. Alg., Mexico (1956), 16-23.
Volume des polyèdres, Bull. Ass. Prof. Math., 38 (1958), 1-12.
Nicolas Bourbaki und die heutige Mathematik, Arbeits. für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 76, Köln (1959).
Notice nécrologique sur Arnaud Denjoy, C. R. Acad. Sci. Paris, 279 (1974), Vie Académique, 49-52 (= Astérisque 28-29, S.M.F., 1975, 14-18).

Exposés au Séminaire Bourbaki

(Les numéros renvoient à la numérotation globale du Séminaire)

- 1,8,12. *Les travaux de Koszul* (1948-49)
 34. *Espaces fibrés analytiques complexes* (1950)
 73. *Mémoire de Gleason sur le 5e problème de Hilbert* (1953)
 84. *Fonctions et variétés algébroides*, d'après F. Hirzebruch (1953)
 115. *Sur un mémoire inédit de H. Grauert: « Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume »* (1955)
 125. *Théorie spectrale des \mathbb{C} -algèbres commutatives*, d'après L. Waelbroeck (1956)
 137. *Espaces fibrés analytiques*, d'après H. Grauert (1956)
 296. *Thèse de Douady* (1965)
 337. *Travaux de Karoubi sur la K-théorie* (1968)
 354. *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*, d'après J.-P. Ramis (1969)