

Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbf{IP}^5

Claire Voisin

Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Mathématiques, F-91405 Orsay Cedex, France

On propose dans ce qui suit une démonstration du théorème de Torelli pour les cubiques de $\mathbf{IP}^5(\mathbf{C})$, sous la forme suivante:

Soient X et X' deux cubiques lisses, et soit i une isométrie $H^4(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^4(X', \mathbf{Z})$ préservant la classe h^2 d'une section linéaire, et induisant un isomorphisme de structures de Hodge: $i \otimes \mathbf{C}: H^4(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^4(X', \mathbf{C})$; il existe alors un isomorphisme $I: X' \rightarrow X$, tel que $i = I^*$. Un énoncé semblable pour la cubique de \mathbf{IP}^4 est prouvé dans [3], qui est d'ailleurs la référence pour un certain nombre de résultats de nature géométrique. La théorie de Hodge a obtenu depuis de nombreux succès, en exploitant la structure de la différentielle de l'application des périodes; le noyau de sa codifférentielle, convenablement interprété, comporte une information géométrique précieuse, et l'étude de la «variation infinitésimale de structure de Hodge» peut permettre de reconstruire certains idéaux, dans le meilleur des cas, par exemple, le système des quadriques passant par le modèle canonique d'une courbe; cette théorie culmine dans le théorème de Donagi [5], qui règle le problème de Torelli générique pour la plupart des hypersurfaces, en montrant que l'on peut en général reconstruire l'idéal jacobien à partir du contenu polynomial de la variation de structure de Hodge. La cubique de \mathbf{IP}^5 fait partie de la série d'exceptions au théorème de Donagi (essentiellement d divise $n+2$, d le degré et n la dimension), mais n'est peut-être pas la plus représentative car la sous-série des hypersurfaces à fibré canonique trivial est plus significative.

Les cubiques de dimension quatre possèdent une variété de droites de dimension 4; une construction due à Beauville et Donagi [2] montre que ces variétés sont des déformations du produit symétrique d'une surface $K3$; ce sont donc des variétés symplectiques, dont l'étude du point de vue théorie de Hodge est menée dans [1]. On obtient donc un énoncé de Torelli pour une hypersurface de déformations projectives de ces variétés: en effet, dans [2], il est montré également que l'application d'Abel-Jacobi, qui relie naturellement la cohomologie de la cubique et celle de sa variété des droites, induit une isométrie entre les structures de Hodge primitives: $H^4(X, \mathbf{Z})^0 \rightarrow H^2(F, \mathbf{Z})^0$, pour le cup-produit sur X , et la polarisation naturelle sur $H^2(F, \mathbf{Z})^0$, décrite dans [1], (voir pp. 4–5).

C'est cet isomorphisme d'Abel-Jacobi qui rend accessible le problème de Torelli pour la cubique; en effet, l'application des périodes est un isomorphisme local; c'est pour cela que la méthode de Donagi est inapplicable, et, faute d'information infinitésimale, que l'on doit interpréter la structure de Hodge elle-même: or même avec une réponse positive à la conjecture de Hodge pour la cubique (plus généralement pour des variétés de dimension quatre balayées par des courbes rationnelles [4]), on a peu de maniement des classes entières de type (2,2), tandis que la théorie des diviseurs permet de se ramener aux objets de la géométrie algébrique.

On constate donc assez rapidement que la difficulté essentielle est d'avoir des critères numériques d'effectivité pour les diviseurs de F ; on n'a pas cherché à aborder ce problème en général, mais en s'appuyant sur la double géométrie (X, F) , et sur l'existence de sous-variétés particulières de F , on arrive à prouver l'effectivité de certaine classe de bas degré (§3), et à caractériser numériquement les cubiques contenant un plan; le reste du travail consiste à analyser l'application des périodes sur cette hypersurface de la famille des cubiques, et cela fait l'objet des sections §1 et §2.

Plus précisément, la section 1 adapte une idée détaillée dans un article de Tjurin [16], aux cubiques contenant un plan, et oublie la variété F en exhibant un diviseur D qui au moins sur \mathbb{Q} , a la même structure de Hodge. Ce diviseur a une structure de fibré en coniques sur une surface $K3$.

La section 2 est plus subtile, et peut être lue indépendamment; il s'agit d'analyser des «extensions» de structure de Hodge sur \mathbb{Z} ; étant donnée une surface $K3$ S , revêtement double du plan, ramifié le long d'une sextique C , on trouve un isomorphisme naturel entre l'espace affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des thêta-caractéristiques de C , et un espace affine de classes d'extension du réseau $H^2(S, \mathbb{Z})^0$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; en particulier, la fonction quadratique de Mumford [14] s'interprète bien dans cette situation.

La section §3 est consacrée à la description des surfaces d'incidence S_i , qui balaient la variété F ;

la démonstration d'effectivité se fait alors par application de la formule de Riemann-Roch sur ces surfaces.

Dans la section §4, on procède encore à une démonstration d'effectivité, avec le même genre de méthodes, pour exclure de l'image par l'application des périodes de l'ouvert des cubiques lisses le lieu de ramification de la projection $\tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \Gamma \backslash \tilde{\mathcal{D}}$, où Γ est le groupe discret des isométries du réseau, préservant la polarisation, qui opère naturellement sur $\tilde{\mathcal{D}}$: de là, on conclut rapidement, par un raisonnement global qui s'appuie sur la structure de l'espace projectif $\mathbb{P}^{5,5}$, paramètre grossier pour les cubiques de \mathbb{P}^5 .

On a recours dans la section §4 au théorème de prolongement dans le cas de la monodromie finie autour d'une fibre singulière [9]. On utilise également alors la possibilité de comparer la structure de Hodge limite et celle de la fibre dégénérée, mais uniquement dans le cas, bien compris, d'une singularité ordinaire d'hypersurface.

Remerciements. Je remercie Arnaud Beauville, qui m'a proposé le thème de ce travail, et dont les avis judicieux m'ont aidée à le mener à bien. Je remercie également le referée dont les réflexions m'ont guidée dans la mise au point d'une version allégée et clarifiée.

Notations: (elles sont en général, mais pas systématiquement, réintroduites dans le texte)

- X une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$
- d l'application de Gauss de X
- F la variété des droites de X
- Z le graphe d'incidence, p et q les projections de Z sur F et X respectivement:

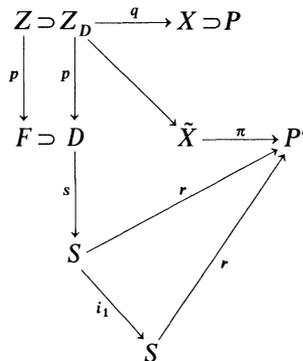
$$\begin{array}{ccc}
 F \times X \supset Z & \xrightarrow{q} & X; & Z = \{(l, x) \in F \times X / x \in l\}. \\
 \downarrow p & & & \\
 & & & F.
 \end{array}$$

- $\Phi = p_* q^*$, l'application d'Abel-Jacobi: $\Phi: H^4(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$.

Lorsque X contient un plan P :

- $D \subset F$ le diviseur des droites rencontrant P
- P' le plan des espaces de dimension 3 contenant P ; P^\vee, P'^\vee les plans duaux
- \tilde{X} l'éclatement de X le long de P : $\pi: \tilde{X} \rightarrow P'$, la projection de centre P .
- S le revêtement double de P' associé au fibré en quadriques \tilde{X} , ramifié le long de C , courbe discriminante; $S \rightarrow P'$, i_1 l'involution de S au dessus de P' .
 - $s: D \rightarrow S$ défini comme suit: S paramètre les réglages des fibres de π ; une fibre de s est la courbe des droites dans ce réglage.
 - Z_D la restriction à D du graphe d'incidence
 - on note de la même façon la restriction à D de l'application d'Abel Jacobi soit $\Phi: H^4(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Z})$

ces notations sont résumées dans la figure suivante:

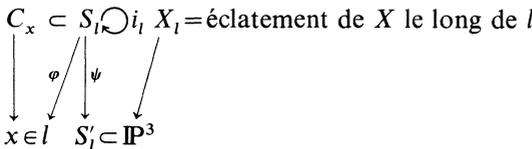


- Sur X : $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$
- Sur F : $g =$ première classe de Chern de \mathcal{E} , où $Z = \mathbb{P}(\mathcal{E})$
 $g_2 =$ deuxième classe de Chern de \mathcal{E}
- Sur S : $h_1 = c_1(r^* \mathcal{O}_{P'}(1))$

Lorsqu'une variété a été munie d'une polarisation, sa cohomologie primitive est notée $H^*(\cdot, \cdot)^0$

- $\tilde{\mathcal{D}}$ le domaine local des périodes: $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{P}(H^4(X, \mathbb{C})^0)$ est défini par $(u, u)_X = 0$ et $(u, \bar{u})_X > 0$

- \mathcal{D} le domaine global; $\mathcal{D}: \Gamma \setminus \tilde{\mathcal{D}}$
- Γ groupe d'isométries du réseau de cohomologie, préservant la polarisation
- $\tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{P}$ les applications des périodes à valeur dans $\tilde{\mathcal{D}}, \mathcal{D}$ respectivement. $\tilde{\mathcal{P}}$ est définie sur la famille des cubiques marquées.
- H le sous-espace de $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}(3)))$ des cubiques contenant le plan P
- G le stabilisateur de P dans $\mathbb{P}GL(5)$
- \mathcal{H} l'image de H/G dans $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}(3)))/\mathbb{P}GL(5)$
- U l'ouvert de $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}(3)))/\mathbb{P}GL(5)$, paramétrant les cubiques lisses et sans automorphisme nontrivial. $U_p = U \cap \mathcal{H}$
- $U' = U \cup \{\text{cubiques admettant un point double ordinaire, et sans automorphisme non trivial}\}$
- \mathcal{P}' le prolongement de \mathcal{P} à U' .
- Δ l'hypersurface de \mathbb{P}^{55} paramétrant les cubiques singulières.
- $\mathcal{C}_6 = \mathbb{P}(H^0(P', \mathcal{O}(6)))/\mathbb{P}GL(2)$
- \mathcal{F}_2 la famille des surfaces K3 obtenues par revêtement double de P' ramifié le long d'une sextique
- \mathcal{C}'_6 le revêtement de \mathcal{C}_6 dont la fibre au-dessus de C est constituée par les thêta-caractéristiques de C
- \mathcal{D}_p image de \mathcal{H} dans \mathcal{D} par \mathcal{P} : sur \mathcal{D}_p la classe $[P]$ du plan P est «marquée».
- \mathcal{P}_p la restriction de \mathcal{P} à \mathcal{H} à valeur dans \mathcal{D}_p
- $S_l, l \subset X$, la surface des droites rencontrant l
- $C_x, x \in X$, la courbe des droites passant par x ; C_x est la fibre en x de $q: Z \rightarrow X$
- si $l \subset X$, la projection depuis l sur \mathbb{P}^3 réalise S_l comme revêtement double d'une quintique S'_l :



le symbole \square signifie: démonstration évidente ou sans intérêt.

§0. Résultats utilisés

De façon essentielle le contenu de [2]: soient F, g, g_2, X et Φ l'application d'Abel-Jacobi: $\Phi = p_* q^*, H^4(X) \rightarrow H^2(F)$, envoie isométriquement $H^4(X)^0$ sur $H^2(F)^0$, soit pour $x \in H^4(X)^0: (x^2)_X = -1/6 g^2 (\Phi x^2)_F$. De plus pour $u \in H^2(F)^0$, on a $g_2 u = 0$ dans $H^6(F)$. On sait également que l'application naturelle $\text{Sym}^2(H^2(F)) \rightarrow H^4(F)$ est un isomorphisme sur \mathbb{Q} : par ce qui précède, on voit que $g_2 \in H^4(F, \mathbb{Q})$ engendre l'orthogonal de l'image de $H^2(F)^0 \otimes H^2(F)$ dans $H^4(F)$: g_2 est alors uniquement déterminée par le nombre d'intersection $g_2 \cdot g^2 = 45$: on en déduit qu'une isométrie $H^2(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F', \mathbb{Z})$, (isométrie pour la polarisation construite dans [2]), induit un isomorphisme $H^4(F, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(F', \mathbb{Q})$ préservant g_2 et la forme d'intersection; (F est de dimension quatre). La dernière assertion, non-évidente, résulte également de [2].

Les invariants de la cubique de \mathbb{P}^5 : par le théorème de Lefschetz, les groupes $H^i(X, \mathbb{Z})$ sont nuls pour i impair, égaux à \mathbb{Z} pour i pair différent de 4. Le groupe H^4 est de rang 23, avec pour nombres de Hodge $h^{3,1} = 1$, $h^{2,2} = 21$. Soit $\bigoplus_n R_n$ l'algèbre graduée de \mathbb{P}^5 , $J = \bigoplus_n J_n$ l'idéal jacobien de X , et T l'équation homogène de X : l'espace tangent à $\mathbb{P}(R_3)/\mathbb{P}GL(5)$ est naturellement $R_3/J_3 \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(3))/H^0(T_{\mathbb{P}^5}) \simeq H^1(T_X)$. Soit Ω la section canonique de $K_{\mathbb{P}^5}(6)$; par la théorie des résidus, $H^{3,1}(X)$ est engendré par $\omega = \text{Res}_X \left(\frac{\Omega}{T^2} \right)$, et $H^{2,2}(X)^0$ par les résidus: $\text{Res}_X \left(\frac{P\Omega}{T^3} \right)$, $P \in R_3/J_3$. Identifiant $\omega^\perp / \langle \omega \rangle$ à $H^{2,2}(X)^0$, la différentielle de \mathcal{P} , $T\mathcal{P}_X: R_3/J_3 \rightarrow \text{Hom}(H^{3,1}(X), H^{2,2}(X)^0)$ est alors à un coefficient près: $P \mapsto \left(\alpha \text{Res}_X \left(\frac{\Omega}{T^2} \right) \mapsto \alpha \text{Res}_X \left(\frac{P\Omega}{T^3} \right) \right)$ ([6, 8]). L'application des périodes est donc un isomorphisme local sur son image $\mathcal{D} \subset \Gamma \setminus \mathbb{P}(H^4(X)^0)$ lorsque le point image n'est pas laissé fixe par un élément de Γ .

Lorsque X contient un plan P , la seconde composante d'une section de X par un espace \mathbb{P}^3 contenant P , est une quadrique Q ; on a alors: $(P^2)_X = 3$, $(Q^2)_X = 4$, $(P \cdot Q)_X = -2$;

Sur la grassmannienne des droites de \mathbb{P}^5 , la classe de cohomologie de la variété Σ des droites rencontrant un plan donné a l'expression: $[\Sigma] = g^2 - g_2$. On en déduit, puisque toutes les droites de X sont homologues: $[S_i] = 1/3(g^2 - g_2)$ dans $H^4(F, \mathbb{Z})$.

§ 1. Sur les cubiques qui contiennent un plan

On transforme par projection ces cubiques en fibrés en quadriques; cela permet de leur associer une courbe discriminante, plane de degré six, une surface $K3$ qui paramètre les réglages de ces quadriques, et un diviseur lisse de la variété des droites qui se présente comme un fibré en coniques lisses sur cette surface; ceci permet de représenter l'hypersurface constituée par ces cubiques comme un revêtement de la famille des courbes planes de degré six; on étudie également la restriction de l'application d'Abel-Jacobi à ce diviseur, ce qui permettra (§2) de «factoriser» l'application des périodes par celle de l'hypersurface \mathcal{F}_2 de la famille des surfaces $K3$.

Lemme 1. *L'ensemble des cubiques contenant un plan constitue une hypersurface irréductible de l'espace $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3)))$, stable par l'action de $\mathbb{P}GL(5)$, non contenue dans l'hypersurface discriminante. \square*

Remarque. Deux plans distincts ont des classes de cohomologie indépendantes qui imposent deux conditions indépendantes à X , du fait que \mathcal{P} est un isomorphisme local.

On suppose donc que X contient P , mais ne contient pas un second plan rencontrant P . On note P' l'espace des 3-plans contenant P , et \tilde{X} l'éclatement de X le long de P . La projection $\pi: \tilde{X} \rightarrow P'$ fait de \tilde{X} un fibré en quadriques.

Lemme 2. *Les fibres de π admettent au plus un point singulier; il existe une courbe plane C , lisse, de degré six, qui paramètre les fibres singulières. \square*

Soit $r: S \rightarrow P'$ le revêtement double de P' ramifié le long de C . S est une surface $K3$ dans \mathcal{F}_2 , c'est-à-dire admettant un diviseur de self-intersection 2; le revêtement double a la signification géométrique suivante: lorsque la fibre est une quadrique non-singulière, elle admet deux réglages; lorsqu'elle admet un point singulier, il n'y a plus qu'une conique de droites passant par le point singulier. On construit donc sur S un fibré en courbes rationnelles lisses $D = \{(l, s) \in F \times S, l \text{ est dans le réglage de la quadrique } r(s), \text{ paramétré par } s\}$; il est facile de voir que $p_1^*(\mathcal{O}_F(1))$ est de degré deux sur les fibres de D . $p_1(D)$ rencontre le plan P^\vee , suivant une courbe, en dehors de laquelle p_1 plonge D dans F .

Soit Z_D le fibré en droites projectives provenant par pull-back, via p_1 , du fibré naturel de la grassmannienne; la projection $Z_D \xrightarrow{q} X$ est de degré deux. En effet si x n'est pas dans P , et si la quadrique déterminée par x n'est pas singulière il passe par x exactement deux droites de cette quadrique.

Proposition 1. *Le graphe $Z_D \subset D \times X$ induit un isomorphisme $\Phi: H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Q})$ de structures de Hodge.*

Démonstration. On considère

$${}^t\Phi = q_* p^*: H_2(D, \mathbb{Q}) \rightarrow H_4(X, \mathbb{Q});$$

comme q est de degré fini, $q_*: H_4(Z_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H_4(X, \mathbb{Q})$ est surjectif; comme

$$H_4(Z_D, \mathbb{Q}) = H_2(D, \mathbb{Q}) \oplus H_4(D, \mathbb{Q}) \quad \text{et que } H_4(D, \mathbb{Q}) \rightarrow H_4(X, \mathbb{Q})$$

se factorise par $H_4(Y, \mathbb{Q})$, Y une section hyperplane de X , il suffit de prouver que l'image de $H_4(Y, \mathbb{Q})$, qui par le théorème de Lefschetz est réduite à la classe de h^2 , est dans l'image de $H_2(D, \mathbb{Q})$, ce qui est évident; cela donne la surjectivité, et par raison de dimensions, (voir §0), le résultat.

Etant donné que sur \mathbb{Q} , la structure de Hodge de D se déduit de celle de S , puisque D est fibré en courbes rationnelles lisses sur S , la proposition 1 permet d'affirmer que localement, l'application des périodes sur H/G , s'identifie à celle de la surface $K3$ associée dans \mathcal{F}_2 .

On a en fait l'énoncé beaucoup plus précis suivant: Soit $L \subset H^2(D, \mathbb{Z})$ l'image par Φ de l'orthogonal de P et Q dans $H^4(X, \mathbb{Z})$ où P, Q dénotent respectivement les classes de cohomologie de P et d'une quadrique Q_x , de sorte que $P + Q = h^2$ dans $H^4(X, \mathbb{Z})$; soit s la projection $D \rightarrow S$; on a:

Proposition 2. i) $L \subset s^*(H^2(S, \mathbb{Z})^0)$

ii) pour u, v orthogonaux à P et Q , on a: $(u \cdot v)_X = -(\Phi u \cdot \Phi v)_S$

iii) L est d'indice deux dans $s^*(H^2(S, \mathbb{Z})^0)$.

Lemme 3. *D est plongé dans la grassmannienne; on note encore g la restriction de g à D ; pour x primitif, on a l'égalité: $(x^2)_X = -1/2(g \cdot (\Phi x)^2)_D$.*

Démonstration du lemme. On reprend la situation $Z_D \xrightarrow{q} X$; Z_D est fibré en \mathbb{P}^1 sur D et $q^*(h) = c_1(O_{Z_D}(1)) \stackrel{\text{def}}{=} f$; sur la grassmannienne on a l'identité $p_* q^*(h^2) = g$, et par définition, $\Phi = p_* q^*$.

On écrit $q^*(h^2) = fp^*g - p^*g_2$, [$Z_D \xrightarrow{p} D$ est fibré en \mathbb{P}^1], de même: $q^*x = f \cdot p^*x_1 + p^*x'$, avec $x_1 = \Phi(x)$; $h^2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow h \cdot x = 0$, soit encore:

$$(f^2 \cdot p^*x_1 + f \cdot p^*x')_{Z_D} = (f \cdot (p^*(g \cdot x_1) + p^*x') - p^*(g_2 \cdot x_1))_{Z_D} = 0$$

d'où $(g \cdot x_1)_D = -x'$ et $(g_2 \cdot x_1)_D = 0$.

Il vient: $(q^*x)_{Z_D}^2 = 2(x)_X^2 = (f^2 \cdot p^*x_1^2)_{Z_D} + (2f \cdot p^*(x_1 \cdot x'))_{Z_D} = -f \cdot p^*(g \cdot x_1^2)_{Z_D} - (g \cdot x_1^2)_D$.

Lemme 4. $g_2 = g^2 - g \cdot s^*(h_1)$; ($h_1 = c_1(r^*(\mathcal{O}_P(1)))$). \square

Démonstration de la proposition 2. i) Notons que si c désigne la classe d'homologie d'une fibre de D , on a: ${}^t\Phi(c) = Q$ dans $H_4(X) = H^4(X)$; pour x orthogonal à Q , il vient $(\Phi x \cdot c)_D = (x \cdot Q)_X = 0$, ce qui entraîne que Φx est dans $s^*(H^2(S))$.

Soit u tel que $\Phi x = s^*u$; on a $h_1 \cdot u = \frac{1}{2}s^*h_1 \cdot \Phi x \cdot g$; mais à cause de la description infinitésimale de l'application des périodes, on peut affirmer que génériquement, pour X contenant un plan, $H^4(X, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}$ est réduit à $\langle P, Q \rangle$; on en déduit que ${}^t\Phi(g \cdot s^*(h_1))$ doit être dans $\langle P, Q \rangle$ et $(\Phi x \cdot g \cdot s^*(h_1))_D = (x \cdot {}^t\Phi(g \cdot s^*(h_1)))_X = 0$.

ii) Par i) on peut écrire $\Phi u = s^*u'$, $\Phi v = s^*v'$, d'où $(\Phi u \cdot \Phi v \cdot g)_D = 2(u' \cdot v')_S$; or c'est aussi $-2(u \cdot v)_X$ (lemme 3).

iii) Par raison de dimension et parce que Φ est injectif par la prop. 1, L doit être un sous-réseau d'indice fini de $H^2(S)^0$; le réseau engendré par P et Q est primitif et sa matrice d'intersection est $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (cf. §0) il est donc de discriminant 8, comme son orthogonal. Comme la forme d'intersection sur $H^2(S, \mathbb{Z})^0$ est de discriminant 2, iii) suit.

Soit C une classe dans $H^4(X, \mathbb{Z})^0$ telle que $(C \cdot Q)_X = 1$, (C existe car le réseau $\langle h^2, Q \rangle$ est primitif et la forme d'intersection est unimodulaire); soit $l = \Phi(C) \in H^2(D, \mathbb{Z})$; on a $(c \cdot g)_D = 2$, et ${}^t\Phi(c) = (Q)$ d'où $(c \cdot l)_D = 1$ et $2l - g = s^*(k)$, où $k \in H^2(S, \mathbb{Z})$; on a alors:

Lemme 5. $L = \{u \in H^2(S, \mathbb{Z})^0 / (u \cdot k)_S = 0 \pmod{2}\}$.

Démonstration. On a $2s^*(H^2(S, \mathbb{Z})^0) \subset L$: soit $u \in H^2(S, \mathbb{Z})^0$ tel que $2s^*u = \Phi(w)$; comme Φ est injectif, $s^*u \in L \Leftrightarrow w$ est divisible par deux dans l'orthogonal de $\langle P, Q \rangle$ et, de façon équivalente, dans $H^4(X, \mathbb{Z})$; pour $s \perp \langle P, Q \rangle$, on a, par la prop. 2: $-(s \cdot w)_X = 2(\Phi(s) \cdot u)_S$; il existe $t \in H^4(X, \mathbb{Z})$, tel que $2t - w \in \langle P, Q \rangle$; d'après la forme de l'intersection sur $\langle P, Q \rangle$, on voit aisément que $2t - w$ est divisible par 2 ssi $(w \cdot C)_X$ est pair; par le lemme 3, comme C et w sont primitifs, cela équivaut à $-1/2(g \cdot l \cdot 2s^*u)_D$ pair; comme $g - 2l = s^*k$, on a:

$$(g \cdot l \cdot s^*u)_D = (k \cdot u)_S \pmod{2}.$$

Proposition 3. La structure de Hodge de X , avec son sous-réseau $\langle P, Q \rangle$, détermine la partie primitive de celle de $S \in \mathcal{F}_2$, et donc S elle-même; inverse-

ment, la structure de Hodge polarisée de S , avec la donnée de la classe k dans $H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ détermine la structure de Hodge de X : si S n'admet pas d'autre automorphisme de structure de Hodge que l'involution hyperelliptique, deux classes k , induisant des éléments distincts de $\text{Hom}(H^2(S, \mathbb{Z})^0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donnent des structures de Hodge distinctes pour X .

Remarque. Toutes les classes k ne permettent pas de reconstruire le réseau H^4 d'une cubique; il faut d'abord que le noyau L vérifie $L^*/L \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et que l'on puisse étendre le module $\langle P, Q \rangle \oplus L$ en un réseau unimodulaire sur lequel la forme d'intersection reste entière, la seconde condition englobant la première, sachant que L et $\langle P, Q \rangle$ doivent rester primitifs dans l'extension.

Démonstration. Sur \mathbb{Q} , tout est évident, car $H^4(X, \mathbb{Q}) = \langle P, Q \rangle \oplus L$, la structure de Hodge étant définie par la règle: $\langle P, Q \rangle$ est de type $(2, 2)$, et sur $L \otimes \mathbb{C}$ la décomposition est celle de S , avec un décalage $(1, 1)$; (ce que l'on note $\langle P, Q \rangle$ indépendamment d'une interprétation géométrique est le réseau de rang deux muni de la forme d'intersection $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ sur \mathbb{Z}); soit L d'indice deux dans $H^2(S, \mathbb{Z})^0$, vérifiant $L^*/L \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ on cherche $H^4(X, \mathbb{Z}) = M \supset E \oplus E' = \langle P, Q \rangle \oplus L$, avec $M \subset E^* \oplus E'^*$, $M \simeq M^*$, la forme d'intersection sur M est entière et E et E' sont primitifs dans M . On a: $E^* \oplus E'^*/M \simeq M/E \oplus E'$ et $E^* \oplus E'^*/E \oplus E' \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: M est déterminé par son image dans le dernier groupe; le second terme est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = E^*/E$. Sur la variété des cubiques qui contiennent un plan, l'image de M dans $E^*/E \oplus E'^*/E$ est certainement constante, ce qui donne la seconde assertion. Quant à la dernière assertion, si deux sous-réseaux L et L' déterminent des structures de Hodge «pour cubiques» isomorphes, l'isomorphisme préservant $\langle P, Q \rangle$, le premier énoncé permet de construire un automorphisme de $H^2(S)$, envoyant L sur L' , préservant la structure de Hodge et la polarisation; comme l'involution agit par $-Id$ sur $H^2(S)^0$, S admet un second automorphisme de structure de Hodge.

Dans ce qui suit, on décrit les données qui déterminent la cubique à partir de sa courbe discriminante, c'est-à-dire la fibre de l'application $H/G \rightarrow \mathcal{F}_2$. On note d l'application de Gauss relative à X ; il est clair que $d^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = \mathcal{O}_X(2)$. En particulier $d(P)$ est de degré 4; mais d est finie et clairement $d(P) \subset (P^\vee)^\vee$ (= hyperplans contenant P). Donc d est de degré topologique 4 sur son image.

Lemme 6. P' paramètre un système plan de coniques, par $x \rightarrow Q_x \cap P$, et un second système plan, par $x \rightarrow d^{-1}(x)$, où x est alors à voir comme une droite de $(P^\vee)^\vee$; ces deux systèmes sont identiques. \square

A ce système de coniques on associe une courbe plane discriminante de degré trois, soit C_1 ; C_1 paramètre les coniques singulières du réseau, et est donc naturellement munie d'un revêtement double dans P^\vee , qu'on note \tilde{C}_1 , un point de \tilde{C}_1 détermine un réglage de la quadrique définie par le point correspondant sur C_1 , et \tilde{C}_1 admet donc un morphisme (clairement birationnel) sur le relèvement \hat{C}_1 de C_1 dans S :

Lemme 7. C_1 découpe sur C un diviseur double $2D_1$, et détermine donc une thêta-caractéristique effective sur C ($K_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|_C$).

Démonstration. En un point x de $C_1 \cap C$, non-singulier sur C_1 , la conique dégénérée correspondante est constituée de deux droites distinctes, et le revêtement $\tilde{C}_1 \rightarrow C_1$ est non-ramifié au-dessus de x : donc $\tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}_1$ est la normalisation de \tilde{C}_1 au voisinage de $\tilde{x} \in \tilde{C}_1$, et possède deux points au-dessus de \tilde{x} : cela entraîne que la multiplicité d'intersection $m_x(C_1 \cdot C)$ est paire. Le cas où C_1 est singulière est décrit dans ([0] pp. 376/377): en effet, les coniques paramétrées par P' , par le lemme 6, sont les fibres $d^{-1}(x)$, et comme d est partout définie, forment un réseau sans point fixe. Un point singulier x de C_1 correspond alors à une droite double; la quadrique associée est partout tangente à P et donc est singulière; donc $x \in C$. D'après [0], C_1 a une singularité ordinaire en x , avec deux branches $C_1^{(j)}$ transversales, de sorte que $m_x(C_1 \cdot C) = m_x(C_1^{(1)} \cdot C) + m_x(C_1^{(2)} \cdot C)$; d'autre part \tilde{C}_1 possède un seul point \tilde{x} au-dessus de x , et a une singularité ordinaire en \tilde{x} , soit deux branches $\tilde{C}_1^{(j)}$, de sorte que $\tilde{C}_1^{(j)} \rightarrow C_1^{(j)}$ est un revêtement double ramifié en \tilde{x} ; il est alors clair que $\tilde{C}_1^{(j)}$ normalise $\tilde{C}_1^{(j)}$ en \tilde{x} , où $\tilde{C}_1^{(j)}$ est le relèvement de $C_1^{(j)}$ dans S , et comme $\tilde{C}_1^{(j)}$ possède un seul point \tilde{x} au-dessus de x , la multiplicité $m_x(C_1^{(j)} \cdot C)$ doit être impaire.

Proposition 4. *La cubique est déterminée par la courbe C et la thêta-caractéristique D_1 .*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_6 = \mathbb{P}(H^0(P', \mathcal{O}(6)))/PGL(2)$, la famille des déformations planes de C ; \mathcal{C}_6 s'identifie localement à \mathcal{F}_2 , famille des déformations polarisées de la surface K3 S : d'après la proposition 1, et Torelli infinitésimal pour la cubique et la surface K3, l'application $H/G \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un isomorphisme local, et d'après le lemme 6, elle se factorise en: $H/G \rightarrow \mathcal{C}'_6 \rightarrow \mathcal{C}_6 \simeq \mathcal{F}_2$, où \mathcal{C}'_6 est le revêtement de \mathcal{C}_6 dont la fibre est constituée par les thêta-caractéristiques; il suffit de prouver que cette application est de degré un au-dessus d'un ouvert de Zariski de \mathcal{C}'_6 ; cela résulte de la construction suivante: la courbe C admet un plongement naturel dans \mathbb{P}^5 , associant à chaque quadrique singulière son point singulier: il est facile de voir que la cubique est déterminée par ce plongement et le diviseur effectif D_1 ; (ce diviseur D_1 engendre le plan P , et détermine d'autre part la courbe C_1 , donc l'application de Gauss de X le long de P ; enfin, les points de $\tilde{C} \subset X \subset \mathbb{P}^5$, sont caractérisés par le fait que leur hyperplan tangent à X contient P , et donc l'application de Gauss de X le long de \tilde{C} est uniquement déterminée); la proposition 4 découle alors du fait suivant:

Lemma 8. *Le plongement $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^5$ est donné par le système linéaire $|\mathcal{O}_{P'}(1) \otimes \mathcal{O}_C(D_1)|$; si C est générique, on a $h^0(\mathcal{O}_C(D_1)) = 1$, et un isomorphisme:*

$$H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}(1)) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C(D_1) \otimes \mathcal{O}_{P'}(1)).$$

Démonstration. On vérifie que si X est générique, \tilde{C} n'est nulle part tangente au plan P , et que si C est générique, toutes les thêta-caractéristiques satisfont $h^0(\mathcal{O}_C(\theta)) \leq 1$, et les caractéristiques effectives sont de la forme $\sum_1^9 p_i$, avec $p_i \neq p_j$, si $i \neq j$. Soit C ainsi choisie et soit X une cubique qui a C pour courbe discriminante, D_1 la thêta-caractéristique associée: comme \tilde{C} est la projection de \tilde{C} depuis P , on a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C \otimes \mathcal{O}_C(P \cap \tilde{C})$, où $P \cap \tilde{C}$ doit être compté

simplement: on vérifie alors que $P \cap \tilde{C}$ correspond ensemblistement à D_1 (si la quadrique singulière Q a son point singulier sur P , $Q \cap P$ est une conique singulière, et si une conique singulière est tracée par un plan sur une quadrique avec un point singulier, celui-ci est sur le plan); les deux diviseurs étant constitués de points simples sont donc égaux; on peut remarquer que l'égalité pour C générique entraîne l'égalité pour toute courbe C ; enfin la dernière assertion résulte de ce que \tilde{C} est non-dégénérée (si \tilde{C} était contenue dans un hyperplan, celui-ci contiendrait P , car D_1 est non-dégénéré, et l'application de Gauss de X serait constante le long de \tilde{C} , ce qui est impossible)¹, et de ce que $h^0(D_1)=1$ entraîne $H^0(\mathcal{O}_C(D_1)) \otimes \mathcal{O}_C(-1)=0$, soit, par Riemann-Roch: $h^0(\mathcal{O}_C(D_1) \otimes \mathcal{O}_P(1))=6$.

§ 2. Structure de Hodge des cubiques qui contiennent un plan, et thêta-caractéristique sur la sextique associée

On établit dans cette section les résultats suivants.

Soit C une sextique lisse de P' , S la surface $K3$ obtenue comme revêtement double de P' ramifié le long de $C: S \rightarrow P'$; soit

$$h_1 = r^*(c_1(\mathcal{O}_{P'}(1))) \in H^2(S, \mathbf{Z}).$$

Soit $H^2(S, \mathbf{Z})^0 = \langle h_1 \rangle^\perp$. Soit i_1 l'involution de S qui échange les feuilletés du revêtement.

Lemme 1. *Il existe un isomorphisme naturel \tilde{i} d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*

$$\tilde{i}: \tilde{K} = H^2(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^0 / \langle h_1 \rangle \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \tilde{K}'.$$

Comme $\langle h_1 \rangle$ est le noyau de la forme d'intersection de S , restreinte à la partie primitive $H^2(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^0$, \tilde{K} est muni d'une forme bilinéaire non-dégénérée; \tilde{K}' étant muni de la forme d'intersection de C , on prouve alors:

Lemme 1'. *\tilde{i} est une isométrie.*

Si $\bar{u} \in \tilde{K}$ est la projection dans \tilde{K} de la classe d'un diviseur primitif D , $D|_C$ est un point d'ordre deux dans $J(C)$, donc est naturellement dans $H^1(C, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Lemme 2. *On a alors $D|_C = \tilde{i}(\bar{u})$.*

Soit K l'image dans $H^2(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) / \langle h_1 \rangle$ de l'hyperplan affine $\{(x \cdot h_1) = 1\}$ de $H^2(S, \mathbf{Z})$; la forme d'intersection de S étant paire, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$ est à valeurs dans \mathbf{Z} ; on montre qu'elle «descend» sur K en une fonction à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, K étant un espace affine sur \tilde{K} , et qu'elle est associée au cup-produit sur \tilde{K} par la relation:

$$\forall x \in K, \quad \forall u, v \in \tilde{K}, \quad e(x+u+v) + e(x+u) + e(x+v) + e(x) = (u, v).$$

Par ailleurs si K' dénote l'espace affine sur \tilde{K}' des thêta-caractéristiques de C , K' est également muni d'une fonction quadratique e' , associée de la même façon au cup-produit sur \tilde{K}' , définie par: $e'(L) = h^0(L) \pmod{2}$.

¹ voir [3]

On a alors la proposition suivante, qui entraîne le lemme 1' :

Proposition 1. *K est naturellement isométrique à K'. Si $\bar{u} \in K$ est l'image de la classe d'un diviseur D sur S, tel que $D \cdot h_1 = 3$, son image dans K' est la restriction $D|_C$.*

La suite de cette section applique ces résultats à l'étude de la structure de Hodge des cubiques contenant un plan; on prouve enfin :

Proposition 2. *l'application des périodes $\mathcal{P}: U \rightarrow \Gamma \backslash \tilde{\mathcal{D}}$, vérifie: $\mathcal{P}_P = \mathcal{P}|_{\mathcal{P}}$ est de degré un sur son image.*

Nous donnons maintenant les démonstrations de ces résultats.

Lemme 1. *Il existe un isomorphisme naturel: $\vec{i}: \vec{K} \simeq \vec{K}'$; en particulier, par naturalité, il est équivariant pour l'action de monodromie sur \vec{K} et \vec{K}' .*

Démonstration. Soit $C \subset P'$, et $U = P' \setminus C$. De même, soit $C \subset S$, et $V = S \setminus C$; soit $r: S \rightarrow P$, le morphisme de revêtement; la restriction $r|_V$ est un revêtement double non-ramifié de U : la suite exacte de complexes de cochaines singulières à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $0 \rightarrow C^k(U) \xrightarrow{r^*} C^k(V) \xrightarrow{r_*} C^k(U) \rightarrow 0$, donne lieu à une suite exacte longue qui s'écrit dans notre cas, compte tenu du fait que $H^3(U) = 0$ (U affine de dim. deux), et de ce que $H^1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, comme on le voit sur la suite de cohomologie relative (S, V) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^*} & H^2(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & H^2(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{Res}_V \\
 0 \rightarrow H^0(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{Res}_V} & H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0
 \end{array}$$

il est très facile de voir que le diagramme commute; (du moins le dernier carré).

D'autre part l'image $H^2(S, \mathbb{Z})^0 \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est clairement envoyée sur zéro par r_* , et donc on a également une flèche:

$H^2(S, \mathbb{Z})^0 \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H^2(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, dont le noyau est visiblement le même que celui de: $H^2(S, \mathbb{Z})^0 \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/H^0(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, soit encore $\text{Ker } \bar{q}$. Cette flèche se factorise donc par \vec{K} .

Il suffit de voir que $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est exactement le noyau du résidu $H^2(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Res}_U} \vec{K}'$ pour obtenir l'isomorphisme cherché. \square

Lemme 2. *Si \bar{u} est dans \vec{K} , et provient de la classe d'un diviseur u de S, l'image de \bar{u} dans \vec{K}' s'identifie à $u|_C$. [Notons que $i_1^*(u) = -u$ entraîne: $i_1^*(u|_C) = -(u|_C) = u|_C$, car i_1 agit trivialement sur C. Donc $2u|_C = 0$, et $u|_C$ est bien dans $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$].*

*Démonstration*². Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de S, sur lequel l'involution i_1 opère, au sens où il existe une permutation σ , telle que $i_1(U_j) = U_{\sigma(j)}$, et que $\sigma(j)$

² On ne se réfère pas à cette démonstration par la suite, et elle peut être passée sans inconvénients.

$=j$, si U_j rencontre C ; relativement à ce recouvrement, soit $\{f_{ij}\}$ une représentation de u comme cocycle de Čech à valeurs dans \mathcal{O}_S^* ; comme u est anti-invariant, et que l'équivalence homologique est l'équivalence linéaire sur S , il existe des sections s_i de \mathcal{O}_S^* , telles que $s_i/s_j = f_{ij} \cdot i_1^*(f_{\sigma(i)\sigma(j)})$; comme le second terme est i_1 -invariant, $s_i/i_1^*(s_{\sigma(i)})$ fournit une section globale de \mathcal{O}_S^* , donc constante, donc égale à 1, puisque c'est ainsi le long de C . Comme les s_i sont inversibles, on peut choisir des racines carrées s'_i , formant encore un système i_1 -invariant; multipliant le cocycle f_{ij} par s'_j/s'_i , on obtient un cocycle F_{ij} effectivement anti-invariant, et équivalent.

On peut alors trouver des fonctions, méromorphes seulement le long de C , et inversibles ailleurs, soit K_{ij} , de sorte que $F_{ij} = K_{ij}/i_1^*(K_{\sigma(i)\sigma(j)})$. Le bord de K_{ij} est alors invariant et donc naturellement dans $H^2(U, \mathcal{O}_U^*) = 0$. On peut donc modifier K_{ij} , par des fonctions inversibles sur U et méromorphes le long de C , tout en gardant la même relation, et de sorte que K_{ij} devienne un cocycle de \mathcal{O}_V^* ; soit y_i un système d'équations pour C , tel que $i_1^*(y_{\sigma(i)}) = -y_j$. On peut écrire de façon unique le long de C :

$K_{ij} = y_i^{k_{ij}} H_{ij}$, où les H_{ij} sont inversibles, et $k_{ij} = \text{Ord}_C K_{ij}$: on trouve alors $F_{ij|_C} = (-1)^{k_{ij}}$; donc $k_{ij} \pmod{2}$ est, dans $H^1(C, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, la restriction de u à C . Par ailleurs, $K_{ij} \cdot i_1^*(K_{\sigma(i)\sigma(j)})$ est dans $H^1(U, \mathcal{O}_U^*)$ et s'écrit le long de C : $f^{k_{ij}} \cdot p_{ij}$; on termine alors en constatant que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(U, \mathcal{O}_U^*) & \xrightarrow{\text{ord}_C} & H^1(C, \mathbf{Z}) \\
 \searrow c_1 & & \nearrow \text{Res}_U \\
 & & H^2(U, \mathbf{Z})
 \end{array}$$

est commutatif.

Soit D un diviseur sur S , satisfaisant $(D \cdot h_1) = 3$; cela entraîne: $c_1(i_1(D)) = c_1(-D) + 3h_1$: Soit puisque $K_C = \mathcal{O}_P(3)|_C$; $2(D|_C) = K_C$; donc $(D|_C)$ est dans K' .

Lemme 3. $\forall \bar{u} \in \bar{K} \simeq \bar{K}'$, on a $e'(t + \bar{u}) = (e(D + \bar{u}))$, où $t = (D|_C)$.

Démonstration. Soit \bar{u} dans \bar{K} , il existe un représentant de u dans $H^2(S, \mathbf{Z})^0$ qui est susceptible de devenir de type $(1, 1)$, sur une surface S' connectée à S par un chemin contenu dans la sous-variété de F , sur laquelle h_1 et D restent de type $(1, 1)$ (on ne peut pas prendre n'importe quel représentant à cause du théorème de l'indice, mais la détermination modulo deux est très faible): suivant le même chemin, la thêta-caractéristique t se transporte, et reste égale à $D|_C$; sur la surface S' , on a: $e_{S'}(D' + \bar{u}') = e_S(D + \bar{u})$, où u' est le transporté de u , et de même $e'_C(t' + u') = e'_C(t + u)$, C et C' étant les sextiques correspondantes: il suffit donc de prouver l'assertion lorsque D et u sont des classes $(1, 1)$; par le lemme 2, $t + u = (D + u)|_C$, où D et u dans le second terme dénotent un choix de représentants de type $(1, 1)$ dans $H^2(S, \mathbf{Z})$, avec u primitif et $h_1 \cdot D = 3$.

Soit $D' = D + u$, considéré comme classe de diviseur sur S , et $t + u = D'|_C$ soit $\mathcal{O}_S(1) = r^*(\mathcal{O}_P(1))$, et soit $y \in H^0(\mathcal{O}_S(3))$ la section dont le diviseur est C : on a la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(D'(-3)) \xrightarrow{y} \mathcal{O}_S(D') \rightarrow \mathcal{O}_C(D') \rightarrow 0;$$

comme $D' \cdot h_1 = 3$, on trouve $c_1(i_1(D')) = 3h_1 - c_1(D')$; via i_1^* , les groupes de cohomologie $H^1(S, \mathcal{O}_S(D'))$ et $H^1(\mathcal{O}_S(D'(-3)))$ sont donc duaux, par la dualité de Serre et du fait que $K_S = 0$: avec cette identification, la flèche $H^1(S, \mathcal{O}_S(D'(-3))) \xrightarrow{\cdot y} H^1(S, \mathcal{O}_S(D'))$, dans la suite exacte longue associée est alternée: en effet, on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, \mathcal{O}_S(D'(-3))) & \xrightarrow{\cdot y} & H^1(\mathcal{O}_S(D')) \\ \downarrow i_1^* & & \downarrow i_1^* \\ H^1(S, \mathcal{O}_S(-D')) = H^1(S, \mathcal{O}_S(D'))^* & \xrightarrow{\cdot y} & H^1(\mathcal{O}_S(D'(-3)))^*, \end{array}$$

et les composés

$i_1^* o(\cdot y)$ et $(\cdot y) o i_1^*$ sont à la fois duaux et opposés, du fait que la section y est antiinvariante.

On en déduit que la dimension du noyau de $(\cdot y)$ est congrue à $h^1(\mathcal{O}_S(D'(-3)))$ modulo deux, et donc que $h^0(C, \mathcal{O}_C(D')) \equiv X(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(D')) \pmod{2}$.

Par Riemann-Roch, c'est encore $1/2(D')_S^2 \pmod{2}$; d'où le lemme.

Corollaire 1. *L'isomorphisme $\vec{i}: \vec{K} \xrightarrow{\sim} \vec{K}'$ est une isométrie.*

Corollaire 2. *K' et K ont les mêmes invariants d'Arf, et sont associés à la même forme bilinéaire sur $\vec{K}' \simeq \vec{K}$, donc sont naturellement isomorphes; de plus avec les notations du lemme 3, l'isomorphisme envoie D sur $D|_C$ lorsque \vec{D} est l'image dans K d'un diviseur D satisfaisant $D \cdot h_1 = 3$: (ce qui prouve la proposition 1.)*

On effectue maintenant la synthèse de §1 et §2, pour obtenir la proposition 2:

Soit $\mathcal{C}'_6 \rightarrow \mathcal{C}_6$ le revêtement de fibre K' , et $K_2 \rightarrow \mathcal{D}_2$ le revêtement de fibre K : on a par le corollaire 2 un isomorphisme $i: \mathcal{C}'_6 \simeq K_2$.

Par ailleurs, les résultats de la section §1 se résument dans l'existence d'un plongement $t: U_p \hookrightarrow \mathcal{C}'_6$, qui à une cubique contenant P associe la sextique C et la thêta-caractéristique D_1 , et enfin d'une application $k: \mathcal{D}_p \rightarrow K_2$, qui, à la structure de Hodge de X , cubique lisse contenant le plan P , associe la structure de Hodge de S , et la classe d'extension k (prop. 3). Pour conclure que \mathcal{P}_p est un plongement sur U_p , il suffit de prouver que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \supset U_p & \xrightarrow{\mathcal{P}_p} & \mathcal{D}_p \\ \downarrow t & & \downarrow k \\ \mathcal{C}'_6 & \rightarrow & K_2 \end{array} \quad (\text{avec } k: H^4(X) \rightarrow H^4(X)^{\langle P, Q \rangle^\perp} \simeq L)$$

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & & \downarrow \\ & & H^2(S, \mathbb{Z})^0 \\ & & \downarrow k \\ & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

(avec $i: \mathcal{C}'_6 \simeq K_2$ et $\mathcal{C}'_6 \rightarrow \mathcal{C}_6 \simeq \mathcal{F}_2 \simeq \mathcal{D}_2$)

mais la théorie des revêtements montre qu'il suffit qu'il soit commutatif en un seul point de U_p : on conclut donc par le lemme suivant, dont la démonstration est reportée en appendice à la section 3, dont elle utilise le résultat.

Lemme 4. *Lorsque la cubique contient un second plan P' ne rencontrant pas P , la θ -caractéristique et la classe d'extension coïncident, via i .*

Remarque: on m'a donné depuis l'interprétation suivante de l'isomorphisme \tilde{i} : en homologie, $\tilde{i}: H_1(C, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}/2) / \langle h_1 \rangle$, se construit de la façon suivante: un cycle γ sur C est un bord dans \mathbb{P}^2 , soit $\gamma = d\Gamma$; le relevé $r^{-1}(\Gamma)$ dans S , est un cycle, bien défini modulo 2, et modulo $\langle h_1 \rangle$.

La partie topologique de ces résultats est par ailleurs esquissée dans la thèse de D. Summers (Oregon State University 1978).

§ 3. Caractérisation numérique des cubiques qui contiennent un plan

On considère une cubique X dont le groupe $H^4(X, \mathbb{Z})$ contient un sous-réseau primitif de rang deux, $\langle P, Q \rangle$, tel que $P + Q = h^2$, et sur lequel la forme d'intersection a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (§0). On suppose que ce sous-réseau est de type (2,2); on prouve alors que la classe P , qui est de degré un, est bien la classe d'un plan.

On procède de la façon suivante: on montre d'abord que la classe $\Phi(P)$, qui est entière de type (1,1), correspond à un diviseur qui satisfait la condition $h^0(D) = 1$, on utilise ce diviseur pour construire une application rationnelle $R: X \rightarrow F$, dont l'image doit être une surface: on montre ensuite que le lieu des droites paramétrées par cette surface doit être une surface dans X , et donc un plan.

Surfaces S_l . X est une cubique lisse de \mathbb{P}^5 , l une droite de X , S_l est la surface des droites de X rencontrant l . Si l est générique, la projection de centre l , sur \mathbb{P}^3 , réalise S_l comme le revêtement double d'une surface S'_l de degré 5, possédant un nombre fini de points singuliers. S_l est munie d'une involution i_l possédant un nombre fini de points fixes, et S'_l est le quotient de S_l par i_l . L'application $\psi: S_l \rightarrow \mathbb{P}^3$ est définie au point $l \in S_l$, lorsqu'il existe un unique plan tangent à X le long de l , ce qui signifie, selon la terminologie introduite ci-dessous, que l est de type I.

Lissité de S_l : On rappelle, suivant [3], l'existence de droites de type I et II: l'application de Gauss d est définie par un sous-système de $\mathcal{O}(2)$ sur chaque droite de X . Si l est de type I, l'application de Gauss le long de l est un isomorphisme sur son image qui est une conique plane de $(\mathbb{P}^5)^\vee$, et il existe un unique plan P_l de \mathbb{P}^5 tangent à X le long de l : on en déduit $P_l \cap X = 2l + l'$ où l' est dite droite résiduelle de l : si l est de type II, $d(l)$ est au contraire une droite de $(\mathbb{P}^5)^\vee$, dont le base-locus est un espace de dimension trois tangent à X le long de l . Tout plan contenu dans cet espace et contenant l rencontre X suivant $2l + L$.

Lemme 1. *S_l est lisse si les conditions suivantes sont vérifiées:*

- i) *l n'est pas de second type*
- ii) *le plan partout tangent à l n'est pas triplement tangent à l , (i.e. $i_l(l) \neq l$)*

iii) l n'est pas résiduelle d'une droite de second type

iv) l n'est pas dans le plan de deux droites de second type coplanaires.

Il est aisé de voir que toutes ces conditions sont vérifiées génériquement. \square

S_l est munie d'une application rationnelle $\varphi: S_l \rightarrow l: \varphi(L) = l \cap L$; on note C_x la courbe des droites passant par un point $x \in l$; cette courbe est génériquement lisse et complète intersection de type (2, 3) dans \mathbb{P}^3 , et son plongement dans (F, g) , qui s'identifie à son plongement dans \mathbb{P}^3 par l'intermédiaire d'un cône, est canonique.

Lemme 2. i) $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = K_{S_l} = C_x + i_l^*(C_x)$

ii) si g dénote encore la restriction à S_l de la polarisation g sur F , on a: $g = 2C_x + i_l^*(C_x)$. \square

Lemme 3. i) $H^1(S_l, \mathcal{O}_{S_l}) = 0$; ii) $K_{S_l}^2 = 10$; iii) $\chi(\mathcal{O}_{S_l}) = 6$.

Démonstration. ii) est clair par $K_{S_l} = \psi^*(\mathcal{O}_{S_l}(1))$, ψ étant de degré 2 et S'_l étant une quintique. Pour le reste, il est connu que S'_l a exactement 16 points singuliers ordinaires, correspondant aux points fixes de i_l . Soit \tilde{S}'_l la désingularisation minimale de S'_l : on a: $c_2(\tilde{S}'_l) = 55$, et donc $\chi_{\text{top}}(S'_l) = 39$: utilisant une triangulation de S'_l dont les sommets comprennent les points singuliers, on obtient: $c_2(S_l) = \chi_{\text{top}}(S_l) = 2 \times 39 - 6 = 62$: la formule de Noether $\chi(\mathcal{O}_{S_l}) = 1/12(c_1^2 + c_2)$ montre alors que i) et ii) entraînent iii). Enfin, pour montrer i), il suffit, par la décomposition de Hodge, de montrer que $H^1(S_l, \mathbb{Q}) = 0$: soit un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de X , de sorte que l est l'une des 27 droites contenues dans le base-locus: cela induit un pinceau de sections hyperplanes de S'_l , et l'on sait ([0], [3]), que l'application d'Abel-Jacobi: $H^1(S_{l_{(t)}}) \rightarrow H^3(X_{(t)})$ induit sur \mathbb{Q} un isomorphisme: $H^1(S_{l_{(t)}})^{\#} \simeq H^3(X_{(t)})$, où $S_{l_{(t)}} = \psi^{-1}(S'_{l_{(t)}})$, et « $\#$ » dénote la partie anti-invariante sous l'action de i_l . Or $H^1(S_l)$ s'identifie par la théorie de Lefschetz à la partie invariante par monodromie de $H^1(S_{l_{(t)}})$: $H^1(S_l)^{\#}$ est donc nul, puisqu'il n'y a pas de cocycles invariants dans $H^3(X_{(t)})$. Quant à la partie symétrique de $H^1(S_l)$, elle provient de S'_l et est donc nulle.³

Ces préliminaires établis, on revient, à la cubique contenant un plan P de classe P , et une quadrique de classe Q ; avec les notations de la section 1, on pose $D = \Phi(P)$, (c'est le diviseur de F fibré en coniques décrit plus haut), et $D' = \Phi(Q)$, d'où $D + D' = g$ dans $H^2(F, \mathbb{Z})$.

On rappelle que la classe de cohomologie de la surface S_l dans F a l'expression: $(S_l) = 1/3(g^2 - g_2)$.

Dans la proposition qui suit les diviseurs sont restreints à S_l .

Lemme 4. On a les relations numériques suivantes:

i) $D \cdot D' = 10$; ii) $D \cdot g = 7$; iii) $D^2 = -3$; iv) $D \cdot C_x = 2$.

³ cette démonstration élégante, proposée par la referee, évite le calcul fastidieux de groupes de cohomologie de faisceaux cohérents sur la désingularisées \tilde{S}'_l

Démonstration. iv) a déjà été vu; par un point de X il passe deux droites de D .

i) soit l générique et Q une quadrique, de sorte que l ne rencontre ni P ni Q : une droite rencontrant l , P et Q , doit rencontrer P sur la conique $P \cap Q$ car sinon elle est dans l'espace engendré par P et Q : mais il y a cinq droites de F rencontrant deux droites non-coplanaires, soit dix droites rencontrant une droite et une conique disjointes.

iii) on a $g = D + D'$ d'où iii) \Leftrightarrow ii) au vu de i)

ii) on a $(D \cdot g)_{S_1} = 1/3((g^2 - g_2) \cdot D \cdot g)_F$; or $(C_x) = 1/18 g^3$ dans $H^0(F, \mathbf{Z})$.

D'autre part, l'intersection $(g_2 \cdot D \cdot g)_F$ se calcule en considérant les droites contenues dans un hyperplan, soit H_4 , et rencontrant $T = P \cap H_4$, ainsi qu'un plan P' de H_4 ; il y a 15 telles droites. D'où $(D \cdot g)_{S_1} = 1/3(36 - 15) = 7$.

Proposition 1. *Un diviseur D vérifiant ces conditions numériques est effectif sur S_1 .*

Démonstration. On a vu que $K_{S_1} = C_x + i_l(C_x)$ et $g = 2C_x + i_l(C_x)$; le lemme 4 entraîne immédiatement: $D \cdot C_x = 2$; $D \cdot i_l(C_x) = 3$ et $D \cdot K_{S_1} = 5$; la formule de Riemann Roch appliquée au diviseur D sur S_1 donne donc: $h^0(\mathcal{O}_{S_1}(D)) + h^0(\mathcal{O}_{S_1}(K - D)) \geq 2$; ($\chi(\mathcal{O}_{S_1}) = 6$) mais on a nécessairement $h^0(\mathcal{O}_{S_1}(K - D)) < 2$.

En effet $(K - D) \cdot i_l(C_x) = 2$, et $i_l(C_x)$ est isomorphe à C_x qui est plongée canoniquement⁴ et n'est pas hyperelliptique: donc $h^0(i_l(C_x), (K - D)|_{i_l(C_x)}) \leq 1$; comme $(K - D - i_l(C_x)) \cdot C_x < 0$, on a $H^0(\mathcal{O}_{S_1}(K - D - i_l(C_x))) = 0$ et donc $H^0(\mathcal{O}_{S_1}(K - D))$ s'injecte dans $H^0(\mathcal{O}_{i_l(C_x)}(K - D))$; ce qui démontre la prop. 1.

Proposition 1'. *Plus précisément, on a: i) $h^0(\mathcal{O}_{S_1}(D)) = 1$; ii) $h^0(\mathcal{O}_{S_1}(D - C_x)) = 0$; iii) $h^1(\mathcal{O}_{S_1}(D - C_x)) = 0$.*

Démonstration. ii) on a $i_l(C_x)$ effective, $i_l(C_x)^2 > 0$, et $(D - C_x) \cdot i_l(C_x) < 0$.

i) D est effectif et d'après ii) $0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{S_1}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C_x}(D))$; or si on prend C_x lisse, C_x est non-hyperelliptique et donc $\deg(D|_{C_x}) = 2$ entraîne $h^0(\mathcal{O}_{C_x}(D)) \leq 1$

iii) dans la démonstration de la prop. 1, on a établi: $h^0(\mathcal{O}_{S_1}(K - D)) \leq 1$. Combinant avec i), on voit que l'égalité est réalisée dans l'inégalité de Riemann-Roch, c'est à dire $h^1(\mathcal{O}_{S_1}(D)) = 0$. Complétant la suite exacte:

$$H^0(\mathcal{O}_{S_1}(D)) \simeq H^0(\mathcal{O}_{C_x}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{S_1}(D - C_x)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{S_1}(D)),$$

dans le cas où C_x est non-hyperelliptique, on obtient iii).

Conclusion remarque. En s'appuyant sur le fait qu'il existe au moins une courbe C_x du pinceau qui est lisse, on a prouvé: $h^0(\mathcal{O}_{C_x}(D)) = 1$ pour toute courbe du pinceau. Le fait qu'il existe une telle courbe se réduit par Bertini à une question locale en l , puisque l est le point-base du pinceau; mais pour qu'une courbe C_x , $x \in l$, soit non-singulière en l , il suffit que l ne passe pas par un éventuel second point singulier de l'intersection $TX_x \cap X$; en particulier il suffit que l ne soit pas de type II.

On affirme le point suivant, dont la démonstration est facile: Soit X une cubique lisse: il existe un fermé A de codimension \geq deux dans X , tel que

⁴ voir conclusion-remarque ci-dessous

pour $x \in X \setminus A$, la courbe C_x est contenue dans une surface S_l non-singulière, et l n'est pas de type II.

On est alors en mesure de prouver la proposition suivante:

Proposition 2. *Soit X une cubique lisse, et X' une cubique lisse contenant un plan telles qu'il existe un isomorphisme de structures de Hodge: $H^4(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^4(X', \mathbb{Z})$ préservant la polarisation h^2 ; alors X contient un plan.*

Démonstration. D'après le §0, l'isomorphisme induit: $H^4(F, \mathbb{Q}) \simeq \text{Sym}^2 H^2(F, \mathbb{Q}) \simeq \text{Sym}^2 H^2(F', \mathbb{Q}) \simeq H^4(F', \mathbb{Q})$ envoie g_2 sur g'_2 . Soit $P \subset X'$ et $D' = \Phi'(P) \in H^2(F', \mathbb{Z})$: l'image de D' par l'isomorphisme, vu entre $H^2(F)$ et $H^2(F')$, est une classe D , entière de type $(1, 1)$. D'après les résultats énoncés en §0, cette classe restreinte à S_l , $l \in F$, satisfait les mêmes conditions numériques que $D'|_{S_l}$, $l' \in F'$, (en effet, les produits calculés plus haut ne dépendent que des classes $[C_x] = 1/18 g^3$ et $[S_l] = 1/3(g^2 - g_2)$, qui sont préservées par l'isométrie).

Par la conclusion précédente, on a, pour $x \in X \setminus A$, $h^0(\mathcal{O}_{C_x}(D)) = 1$; on peut évidemment affirmer que l'application $q: Z \rightarrow X$ est plate au-dessus de $X \setminus A$ puisque les fibres sont toutes de dimension un. Par le théorème de changement de base, le faisceau $R^0 q_* p^*(\mathcal{O}_F(D))$ est libre de rang un sur $X \setminus A$; or $\text{Pic } X \setminus A = \mathbb{Z}$. On calcule le degré de ce faisceau en le restreignant à une droite l générique de X , qui ne rencontre pas A . Or $h^0(R^0 q_* p^*(\mathcal{O}_F(D)))|_l = h^0(S_l, \mathcal{O}_{S_l}(D)) = 1$, par prop. 1'. Donc ce faisceau est trivial: d'où:

$$h^0(X \setminus A, R^0 q_* p^* \mathcal{O}_F(D)) = h^0(Z \setminus q^{-1}(A), p^*(\mathcal{O}_F(D))) = h^0(\mathcal{O}_F(D)) = 1,$$

car $q^{-1}(A)$ est également de codimension deux dans Z .

On dispose donc d'un diviseur effectif D sur F , dont la restriction aux courbes C_x est de degré deux: on utilise ce diviseur pour construire une application rationnelle $R: X \rightarrow F$: soit $x \in X$, tel que $C_x \not\subset D$, et $D \cdot C_x = (l, l')$; on pose $R(x) = l'$, avec $l' + l' + l = \langle l, l' \rangle \cap X$.

On rappelle que X ne possède aucune forme holomorphe, tandis que F possède une deux-forme partout de rang maximal. La restriction de cette deux-forme à $R(X)$ doit être identiquement nulle ce qui entraîne que $\dim R(X) \leq 2^5$. Mais visiblement la fibre en l est contenue dans une réunion de composantes de S_l^6 , et pour tout l , S_l^6 est de dimension au plus deux: donc l'image $R(X)$ est de dimension deux. Soit $E \subset X$ la réunion des droites paramétrées par $R(X)$; On montre que E est une surface:

Une étude assez fastidieuse montre que pour $l \in R(X)$ générique, S_l^6 est irréductible, et s'identifie alors à la fibre de R en l . Supposons que E soit un diviseur de X . Comme $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, ce diviseur rencontre toute droite de X ; soit L rencontrant E sur l , avec l générique dans $R(X)$. Le plan $\langle L, l \rangle$ coupe X suivant une troisième droite L' , et si $x = L \cap L'$, $x \in S_l^6$, d'où $l = R(x)$. Mais par construction le couple (L, L') constitué alors l'intersection $D \cdot C_x$, et donc L est dans D , c'est à dire non-générique. C'est une contradiction, et donc E est une surface, donc un plan.

⁵ S_l^6 a un plongement naturel dans $X: \mathbb{P}^3$ paramètre les plans de \mathbb{P}^5 contenant l , soit un système de coniques de X ; $S_l^6 \subset \mathbb{P}^3$ paramètre les coniques singulières; ce plongement (défini en dehors des points singuliers de S_l^6), associe à une conique singulière son point singulier

⁶ en un point régulier x de $R(X)$, l'espace tangent $TR(X)_x$ est totalement isotrope pour la 2-forme de F , et donc de dimension ≤ 2

Corollaire. *l'image \mathcal{D}_p de \mathcal{H} dans \mathcal{D} par \mathcal{P} satisfait : $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{D}_p) = \mathcal{H}$.*

Appendice. Théorème de Torelli pour les cubiques contenant deux plans

Proposition. *Une cubique contenant exactement deux plans ne se rencontrant pas est déterminée par sa structure de Hodge.*

Démonstration. Au vu de la structure de Hodge de X , par la proposition 2, on peut affirmer que X contient deux plans; le fait que les deux plans soient disjoints est caractérisé au niveau $H^4(X, \mathbb{Z})$ par $P_1 \cdot P_2 = 0$ (s'ils se rencontrent en un point $P_1 \cdot P_2 = 1$, en une droite $P_1 \cdot P_2 = -1$); on note S_1 et S_2 les surfaces $K3$ associées comme dans la section 1, par projection de centre P_1 et P_2 respectivement.

Lemme. *Si D_1 et D_2 sont les diviseurs de F , $\Phi(P_i) = D_i$, on a $S_1 \simeq S \simeq S_2$, où S est la complète intersection de D_1 et D_2 .*

Démonstration. Soit un H_3 contenant P_1 , et $s \in S_1$ le choix d'un réglage dans la quadrique correspondante: H_3 rencontre P_2 en un unique point Q , qui n'est pas sur la courbe $\tilde{C}_1 \subset \mathbb{P}^5$.

En effet, sur \tilde{C}_1 , les hyperplans tangents contiennent P_1 , (voir §1), et sur P_2 les hyperplans tangents contiennent P_2 ; or P_1 et P_2 engendrent \mathbb{P}^5 . Donc par Q il passe une unique droite de la quadrique, dans le réglage défini par s . Ceci donne l'isomorphisme $S_1 = S$.

La partie primitive de la structure de Hodge de S_1 est déterminée par celle de X , (voir §1, prop. 3), et donc par le théorème de Torelli pour les surfaces $K3$, S_1 elle-même est déterminée par $\mathcal{P}(X)$.

S admet deux polarisations h_1 et h_2 qui la projettent respectivement sur $P'_1 \simeq P_2$ et $P'_2 \simeq P_1$. On note comme en §1: $S \xrightarrow{r_1} P'_1$, $S \xrightarrow{r_2} P'_2$.

Soient P_1 et P_2 deux plans disjoints dans \mathbb{P}^5 ; on considère la variété E , lieu des droites $(r_1(s), r_2(s))_{s \in S}$; clairement cette variété doit être contenue dans X ; comme c'est un diviseur dans une cubique lisse, ce doit être complète intersection dans \mathbb{P}^5 . Or, le degré de E est neuf; pour voir cela, soit l une droite de X ; on a $(l \cdot E)_X = \deg E/3$. Soit $\langle l, P_1 \rangle = H_1$, $\langle l, P_2 \rangle = H_2$ et $H = H_1 \cap H_2$: soit $l_1 = P_1 \cap H$ et $l_2 = P_2 \cap H$: les trois droites l , l_1 et l_2 sont trois droites disjointes dans une cubique lisse de dim.deux, et l'on doit compter les droites de X les rencontrant: il y en a trois.

E est donc complète intersection de deux cubiques dans \mathbb{P}^5 ; les cubiques du pinceau sont génériquement lisses, contiennent deux plans et ont la même surface $K3$ S associée, puisqu'elle est déterminée par E . Il n'y a donc pas de variation de structure de Hodge sur le pinceau, et donc, par Torelli infinitésimal, toutes les cubiques du pinceau sont isomorphes.

Démonstration du lemme 4, §2. Calcul de la thêta-caractéristique: Soit $P = P_1$: on rappelle (§1, lemme 8) que le plongement $C \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ est donné par le faisceau inversible $\mathcal{O}_P(1)|_C + \mathcal{O}_C(D_1)$ avec $C = C_1$, $P' = P'_1$. Mais la construction précédente montre que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_{C_1} = h_2|_{C_1}$, et donc la thêta-caractéristique $r(X)$ est donnée par $h_2 - h_1|_{C_1}$.

Calcul de la classe d'extension. La classe d'extension $k(X)$ est donnée par $h_2 - h_1$. En effet, or rappelle que k est caractérisée par la relation: $L_1 = \{u \in H^2(S_1, \mathbb{Z})^0 / u \cdot k = 0 \pmod{2}\}$ (lemme 5, §1). Or on a $(P_2 \cdot Q_1)_X = 1$, et donc $D_2 \cdot c_1 = 1$, où c_1 est la classe d'homologie d'une fibre de $s_1: D_1 \rightarrow S_1$, d'où: $(u \cdot k)_{S_1} \Leftrightarrow (s_1^* u \cdot s_1^* k \cdot D_2)_{D_1}$ pair; mais d'après le lemme 5, §1. $s_1^* k = 2l - g$: soit $(s_1^* u \cdot s_1^* k \cdot D_2)_{D_1} = (s_1^* u \cdot g \cdot D_2)_{D_1} = (u \cdot g)_S \pmod{2}$ puisque $S = D_1 \cap D_2$. On conclut en remarquant que $g = h_1 + h_2$. Enfin on utilise le corollaire 2, §2, pour conclure la démonstration du lemme 4.

§4. Conclusion. Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbb{P}^5

Cette partie contient peu d'éléments nouveaux, du moins au niveau des méthodes de démonstration: on étend d'abord le résultat de la §2 (\mathcal{P} est de degré 1 sur \mathcal{H} , en codimension au moins 2 sur \mathcal{H} , par une étude des singularités de l'image; Ensuite, on prouve que l'application des périodes est de rang maximum sur l'ouvert des cubiques non-singulières, et en corollaire, que l'image de Δ par l'extension \mathcal{P}' de \mathcal{P} à l'ouvert de lissité de l'hypersurface Δ , le long duquel la monodromie est finie [9, 10], est disjointe de celle de U (cubiques lisses). Il reste à faire une étude locale le long de Δ pour prouver que \mathcal{P}' est de rang maximum, sur le complémentaire d'un fermé de codimension deux dans $\mathbb{P}^{5,5}$. On conclut par des raisonnements élémentaires que \mathcal{P}' est de degré un.

Lemme 1. *Il existe un fermé de codimension ≥ 2 dans $\mathcal{H} \cap U$ sur lequel on a $\mathcal{P}_p^{-1}(\mathcal{P}_p(x)) = \{x\}$. Dans cet énoncé, \mathcal{P}_p est considérée comme prolongée aux cubiques qui possèdent une singularité ordinaire.*

Démonstration. On verra plus loin que \mathcal{P}_p est finie, donc son relèvement aux normalisées est un isomorphisme. On remarque que \mathcal{H} est singulière en codimension 1, le long des cubiques contenant deux plans, soit \mathcal{H}' ; \mathcal{H}' a en fait trois composantes, selon l'allure de l'intersection des plans. Les deux premières composantes, (deux plans disjoints ou deux plans se rencontrant en un point), présentent le croisement normal de deux branches, comme on le voit sur la désingularisée, dans laquelle elles sont dédoublées; par contre deux plans se rencontrant suivant une droite entraînent l'existence d'un troisième plan et il y a trois branches qui se croisent le long de cette troisième composante. On sait que ces composantes ont des images distinctes dans $\Gamma \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ (§3). Si on regarde maintenant les singularités en codimension un de l'image de H , elles proviennent de singularités de l'image inverse dans $\tilde{\mathcal{D}}$. Or on sait que cette image est lisse lorsqu'il y a un seul plan, puisqu'elle est définie par le fait que la classe du plan reste de type (2,2). Par contre lorsqu'il y a deux plans, les deux branches correspondantes se croisent, et s'il y a trois plans, il y a de même trois branches, dont les équations sont liées par la relation $P_1 + P_2 + P_3 = h^2$.

En normalisant \mathcal{H} et son image $\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}$, on obtient une application $\mathcal{P}_{\text{norm}}$ qui est de degré 1, ce qui prouve par le compte des cardinaux des fibres que \mathcal{P}_p elle-même est de degré 1.

La formule de Picard-Lefschetz, pour les singularités ordinaires d'hypersurfaces, montre que la monodromie locale, le long de Δ est d'ordre deux; le théorème de prolongement le plus faible, montre alors que \mathcal{P} s'étend en une application \mathcal{P}' toujours à valeurs dans \mathcal{D} , mais qui ne se relève plus localement, puisque la monodromie opère non-trivialement, plus précisément, par symétrie par rapport à un cycle évanescent et de type (2,2); on montre maintenant que si X est non-singulière, il n'y a pas d'élément primitif de self-intersection ∓ 2 ;

De façon plus précise, on va voir dans la proposition suivante que l'image de U et celle de Δ sont disjointes.

Proposition 1. *La structure de Hodge d'une cubique non-singulière ne peut pas posséder un élément entier de type (2, 2), primitif, et de self-intersection ∓ 2 .*

Corollaire. *Cela entraîne en particulier que \mathcal{P} est non-ramifiée dans U .*

Démonstration. Pour le corollaire, on remarque que comme \mathcal{P} se relève localement dans U , et que son relevé est de rang maximum, \mathcal{P} est ramifiée là où la projection $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ l'est. Mais une hypersurface de ramification doit être laissée fixe (point par point) par un élément de Γ . Or la droite $H^{3,1}(X) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{C})$ doit être contenue dans un espace propre de cet élément de Γ . Pour que cela soit possible le long d'une hypersurface, cet espace propre doit être un hyperplan, et donc g est une symétrie par rapport à un élément entier primitif de type (2, 2), et de self-intersection ∓ 2 .

Soit U cette classe et $D = \Phi(u) \in H^2(F, \mathbb{Z})$; on sait, d'après [2], que D est primitif, vérifie $g_2 \cdot D = 0$, et que $-1/6 \cdot g^2 \cdot D^2 = (u \cdot u)_X$. Le cas $(u \cdot u)_X = -2$ est donc exclu car cela entraîne $g^2 \cdot D^2 > 0$, tandis que $g^3 \cdot D = 0$, ce qui est contradictoire avec le théorème de l'indice appliqué à une surface lisse intersection complète de deux sections hyperplanes de F .

On suppose donc que D satisfait: i) $g^3 \cdot D = 0$, ii) $-1/6 g^2 \cdot D^2 = 2$, iii) $g_2 \cdot D = 0$. Par abus de notation, on note encore D la restriction de ce diviseur à une surface S_i (§3). Comme la classe de S_i dans F est égale à $1/3(g^2 - g_2)$, sur S_i , D vérifie les conditions numériques suivantes: $D^2 = -4$, $g \cdot D = 0$; on rappelle d'autre part que si C_x dénote la classe d'une courbe C_x , $x \in I$, on a les relations: (lemme 2, §3) $K_{S_i} = C_x + i_1(C_x)$; $g = 2C_x + i_1(C_x)$ et $j_*(C_x) = 1/18 g^3$ (j l'injection de S_i dans F).

On en déduit qu'on a également $D \cdot C_x = 0 = D \cdot i_1(C_x) = D \cdot K_{S_i}$.

Avec $C_x^2 = 1$, $C_x \cdot K_{S_i} = 5$, et $\chi(\mathcal{O}_{S_i}) = 6$, on peut appliquer Riemann-Roch au diviseur $\mathcal{O}_{S_i}(C_x - D)$, en notant que $K_{S_i} - (C_x - D) = i_1(C_x) + D$.

Il vient: $h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(C_x - D)) + h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(i_1(C_x) + D)) \geq 2$.

Or comme g est ample, on a certainement $h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(D)) = 0 = h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(-D))$, D étant orthogonal à g et non-trivial.

On en déduit que $h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(C_x - D)) \leq h^0(C, \mathcal{O}_{C_x}(C_x - D)) \leq 1$, car une section lisse de $\mathcal{O}_{S_i}(C_x)$ est non-rationnelle, et $d^0(C_x - D|_C) = 1$. Le même raisonnement est valable pour le second terme, et l'on en déduit les égalités:

$$\begin{aligned} h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(C_x - D)) &= 1 = h^0(C_x, \mathcal{O}_{C_x}(C_x - D)) \\ &= h^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(C_x + D)) = h^0(C_x, \mathcal{O}_{C_x}(C_x - D)), \end{aligned}$$

les dernières provenant du fait que $-D$ vérifie des conditions numériques identiques. Mais sur C_x on a $\mathcal{O}_S(C_x)|_{C_x} \equiv (l)$; soit $C_x - D|_{C_x} \equiv (z)$ et $C_x + D|_{C_x} \equiv (z')$; alors $(2l) \equiv (z + z')$; (z, z') sont des points de C_x .

Comme C_x est génériquement non-hyperelliptique on trouve que $l = z = z'$, et donc que $D|_{C_x}$ est trivial. Soit C' le diviseur effectif sur S_l équivalent à $C_x - D$; la considération du pinceau des courbes $(C_x)_{x \in l}$ sur S_l se rencontrant uniquement au point l , montre que C' doit être une somme de composantes de fibres C_x . Mais comme $-D = C' - C_x$ n'est pas effectif, ces fibres doivent être réductibles.

On conclut avec le lemme suivant:

Lemme 3. *Si X est non-singulière il n'y a pas de fibre C_x réductible dans une surface S_l générique. \square*

Admettant pour le moment que le prolongement \mathcal{P}' de \mathcal{P} le long de Δ reste de rang maximum, on conclut comme suit: pour prouver que \mathcal{P} est de degré 1 il suffit de prouver que pour K une hypersurface invariante sous l'action de $\mathbb{P}GL(5)$ générique (à préciser générique) on a $\mathcal{P}'^{-1}(\mathcal{P}'(K)) = K$, puisque ces hypersurfaces séparent les orbites sous l'action de $\mathbb{P}GL(5)$, par définition du quotient.

Soit Σ le fermé de codimension deux de \mathbb{P}^{55} qui contient:

- le lieu de ramification de \mathcal{P} , et éventuellement les cubiques admettant un automorphisme
- la contre-image dans \mathcal{H} du lieu de \mathcal{D}_p au dessus duquel \mathcal{P}_p n'est pas un isomorphisme
- $\text{Sing}(\Delta)$, ou encore les cubiques admettant une singularité non-ordinaire.

On note que $\Sigma \cap \mathcal{H}$ est encore de codimension deux dans \mathcal{H} , comme le prouvent les lemmes précédents. Soit $U'' = \mathbb{P}^N \setminus \Sigma$: les hypersurfaces génériques seront celles qui satisfont les propriétés suivantes:

- $K \cap U''$ est non singulière
- $K \cap \Sigma$ est de codimension deux dans K
- $K \cap \Sigma \cap \mathcal{H}$ est de codimension deux dans $K \cap \mathcal{H}$.

Soit K ainsi choisie, et supposons que $\mathcal{P}'^{-1}(\mathcal{P}'(K))$ contient une seconde composante, soit K' , alors $K' \cap K$ rencontre U'' par la deuxième condition; comme \mathcal{P}' est de rang maximum dans U'' , l'image de K doit être singulière le long de $\mathcal{P}'(K' \cap K)$; cela entraîne que $\mathcal{P}'|_K$ est de degré au moins deux au-dessus de $\mathcal{P}'(K' \cap K)$; notons $K'' = \mathcal{P}'^{-1}(\mathcal{P}'(K' \cap K)) \cap K$. Comme $\mathcal{P}'^{-1}(\mathcal{P}'(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$, et que K'' rencontre \mathcal{H} en codimension un dans $K \cap \mathcal{H}$, par la condition trois, K'' rencontre \mathcal{H} dans U'' , et sur $K'' \cap \mathcal{H} \cap U''$, \mathcal{P}' est de degré au moins deux, ce qui contredit la définition de Σ .

On montre dans ce qui suit l'assertion utilisée à plusieurs reprises, savoir: l'application des périodes, prolongée aux cubiques possédant une singularité ordinaire reste de rang maximal; l'espace tangent utilisé est naturellement $(R/J_X)_3$ pour le quotient $U'/\mathbb{P}GL(5)$, au point X , où R est l'anneau des polynômes homogènes, J_X l'idéal jacobien de X ; pour $\tilde{\mathcal{D}}$, on rappelle l'identification de l'espace tangent à $\tilde{\mathcal{D}}$ au point $P = \{D_1 \subset D_2\}$, avec $\text{Hom}(D_1, D_2/D_1)$, où $D_2 = (H^4(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C})^{D_1}$ et $D_1 = H^1(X, \Omega_X^3) \subset D_2$ est la droite des périodes.

L'application \mathcal{P}' , le long de Δ n'est pas localement liftable; soit Δ_0 un morceau de courbe qui rencontre transversalement Δ au point 0; \mathcal{X}_0 a une singularité ordinaire en x_0 , où s'évanouit une petite sphère S_t^4 des fibres \mathcal{X}_t voisines; sur le réseau localement constant $H^4(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z})$, la monodromie autour de 0 opère par symétrie par rapport à ce cycle évanescant: la structure de Hodge limite est point fixe de s ; pour montrer que $\Delta_0 \xrightarrow{\mathcal{P}'} \mathcal{D}$ est de rang maximal, il suffit de prouver que $\Delta'_0 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{P}}'} \tilde{\mathcal{D}}$ l'est, où $\Delta'_0 \xrightarrow{t=u^2} \Delta_0$ est un changement de base qui permet de lifter \mathcal{P}' en $\tilde{\mathcal{P}}'$; le graphe de \mathcal{X}' dans $\mathbf{IP}^5 \times \Delta'_0$ a alors une singularité ordinaire en $(x_0, 0)$, qui se résoud par éclatement, de sorte que la fibre totale $(\tilde{\mathcal{X}}')_0$ en 0 est devenue le diviseur réduit à croisement normal constitué de $\tilde{\mathcal{X}}'_0$ (éclaté de \mathcal{X}_0 en x_0) et d'une quadrique exceptionnelle Q_4 qui découpe sur $\tilde{\mathcal{X}}'_0$ une quadrique Q_3 , projectivée du cône tangent à \mathcal{X}_0 en x_0 ; dans cette situation, la sphère évanouissante devient le cycle primitif de Q_4 , générateur de $H_4(Q_4 \setminus Q_3, \mathbf{Z})$; la suite exacte de Clemens-Schmid se réduit alors à la suite suivante:

$$0 \rightarrow H_6(\mathcal{X}'_u) \rightarrow H^4((\tilde{\mathcal{X}}')_0) \rightarrow H^4(\mathcal{X}'_u) \rightarrow 0$$

et la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit:

$$0 \rightarrow H^4((\tilde{\mathcal{X}}')_0) \rightarrow H^4(\tilde{\mathcal{X}}'_0) \oplus H^4(Q_4) \rightarrow H^4(Q_3) \rightarrow 0;$$

il y a une vraie structure de Hodge sur $(\tilde{\mathcal{X}}')_0$, induite par cette suite, et la suite exacte de Clemens-Schmid est une suite exacte de structures de Hodge, lorsque $H^4(\mathcal{X}'_u)$ est muni de la structure de Hodge limite.

On déduit de cela que $H^4((\tilde{\mathcal{X}}')_0)$ est isomorphe à la somme directe orthogonale $H^4(\tilde{\mathcal{X}}'_0) \oplus \langle d \rangle$, où d est de type $(2, 2)$ et de self-intersection 2. Admettant que l'on peut reconstruire $H^4(\mathcal{X}_0)$ à partir de H^4_{lim} , ce qui est à peu près évident, on voit que $\tilde{\mathcal{P}}'(0)$ donne essentiellement la structure de Hodge sur $\tilde{\mathcal{X}}'_0$.

Rappelant que $\tilde{\mathcal{X}}'_0$, par projection de centre x_0 , s'identifie à l'éclatement de \mathbf{IP}^4 le long d'une surface K3 S_0 , complète intersection de type $(2, 3)$, on obtient: $H^4(\tilde{\mathcal{X}}'_0) \simeq H^2(S_0) \oplus H^4(\mathbf{IP}^4)$; le théorème de Torelli pour les surfaces K3 algébriques permet alors de conclure que \mathcal{P}' restreinte à Δ est de degré un sur son image, et le théorème de Torelli infinitésimal pour les surfaces K3 (S_0 est non-singulière) montre que \mathcal{P}' est de rang maximal dans la direction tangente à Δ .

Il reste à analyser le comportement de $\tilde{\mathcal{P}}'$ dans la direction normale. Sur Δ'_0 , on a le réseau constant $H^4(\mathcal{X}'_u, \mathbf{Z})$, dont les sphères évanouissantes S_u , prolongées par d , comme on l'a vu, au point 0, constituent une section horizontale; soit $(w_u)_{u \in \Delta'}$ une section holomorphe du sous-fibré $D_1 \subset D_2$. La règle pour calculer $D\tilde{\mathcal{P}}'(0) \cdot w_0$ consiste à dériver (w_u) dans $H^4(\mathcal{X}'_u, \mathbf{C})$, qui est plat, et regarder le résultat dans D_2/D_1 ; mais clairement on a $D\tilde{\mathcal{P}}'(0) \cdot w_0 \cdot d = \lim_{u \rightarrow 0} [D\tilde{\mathcal{P}}'(u) \cdot w_u] \cdot S_u$, (voir remarque 1), où d est la sphère limite et le second « \cdot » désigne le cup produit. Il suffit donc de prouver que le second terme n'est pas nul, lorsque w_0 est non-nulle. Soit T un «vecteur» normal à Δ . On prend $\Delta_0 \rightarrow \mathbf{IP}^{5,5}$, $t \rightarrow F_0 + tT$; lifté à Δ'_0 , cela donne $\Delta'_0 \rightarrow \mathbf{IP}^{5,5}$, $u \rightarrow F_0 + u^2T$: on a les lemmes suivants:

Lemme 3. *La direction normale à Δ est caractérisée par $T(x_0) \neq 0$ (x_0 le point singulier de \mathcal{X}_0). \square*

Lemme 4. $w_u = \text{Res}_{x_u} \Omega / F_u^2$ où $\Omega = \Sigma(-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \wedge d\hat{X}_i \wedge \dots \wedge dX_5$, se prolonge en une section holomorphe de D_1 au point 0.

Le lemme 4 est prouvé dans [8-II].

Suivant [6], on rappelle que si F est une équation de X , $H^1(X, \Omega_X^3)$ est obtenu par le résidu de Ω / F^2 tandis que $H^2(X, \Omega_X^2)^0$, s'identifie aux résidus des formes méromorphes $P\Omega / F^3$ où P est homogène de degré trois, défini modulo J_X . Avec cette représentation, à un coefficient près, (indépendant de X), le cup-produit par une classe T dans $H^1(\mathcal{X}'_u, T_{x_u}) \simeq (R/J_{F_u})_3$, appliqué à w_u , est exactement le résidu de $T\Omega / F_u^3$. Comme le vecteur tangent à la déformation est uT , il s'agit de voir que: $\lim_{u \rightarrow 0} \int_{S_u} \text{Res}_{x_u} uT\Omega / F_u^3 \neq 0$. Comme le résidu en cohomologie a

un sens local, on peut se placer sur l'ouvert affine $X_0 \neq 0$ de \mathbb{P}^5 , et T étant pris égal à X_0^3 , on a en fait à prendre le résidu de $udx_1 \wedge \dots \wedge dx_5 / f_u^3$; par un changement de coordonnées holomorphes justifié car les sphères S_u sont dans un voisinage arbitraire de x_0 , on peut supposer que $f_u = \Sigma x_i^2 - u^2$; on éclate alors $U_0 \times \Delta'_0$ au point $(x_0, 0)$; dans $\mathbb{P}^5 \times U_0 \times \Delta'_0$ l'éclaté est défini par les équations:

$U_0 x_i = uX_i$ pour $i \geq 1$, et $x_i X_j = x_j X_i$; le transformé strict de la famille \mathcal{X}' est alors contenu dans $Q_4 \times U_0 \times \Delta$ où $Q_4 = \left\{ \sum_1^5 X_i^2 = X_0^2 \right\}$, est la quadrique composante de $(\tilde{\mathcal{X}}')_0$; Q_4 rencontre $\tilde{\mathcal{X}}'_0$ dans $(\tilde{\mathcal{X}}')_0$ suivant la section hyperplane $X_0 = 0$, et les sphères S_u , liftées, convergent vers la sphère $\sum_1^5 (X_i / X_0)^2 = 1$, avec X_i / X_0 réels, qui est le cycle fondamental de $Q_4 \setminus Q_3$. On peut donc se placer dans l'ouvert $U = \{X_0 \neq 0\}$, où $\widetilde{U_0 \times \Delta'_0}$, admet les coordonnées (u, y_i) , la projection π étant donnée par: $x_i = u y_i$; on a alors $\pi^*(udx_1 \wedge \dots \wedge dx_5 / f_u^3) = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_5 (\Sigma y_i^2 - 1)^3$, et donc l'intégrale du résidu de $\pi^* w_u$ sur la sphère S_u est une constante non-nulle, car ce résidu engendre la cohomologie primitive de la quadrique affine $Q_0 = U \cap (\tilde{\mathcal{X}}')_0$.

1. *Remarque.* A priori, $D\mathcal{P}'_u \cdot w_u$ est dans D_2 / D_1 , et S_u n'est pas de type (2, 2), donc le produit n'est pas défini, mais la limite l'est, et ne dépend que de $D\tilde{\mathcal{P}}'_0 \cdot w_0$ car S_0 est orthogonale à $D_1(0)$; ce que l'on calcule plutôt est

$$\lim_{u \rightarrow 0} d/du \int_{S_u} w_u = \int_{\tilde{S}_u} d/du w_u$$

où $d/du w_u$ est la dérivée de Gauss-Manin appliquée à la section (w_u) .

2. *Remarque.* On n'a pas utilisé explicitement de théorème de prolongement fort, qui nécessite en particulier une compactification du domaine des périodes et une désingularisation de Δ ; mais le théorème «d'algébrisation» est utilisé dans toute sa force lorsque l'on relève une hypersurface en une hypersurface algébrique de \mathbb{P}^N .

Conclusion. A ce point, on a prouvé l'énoncé suivant: $\mathcal{P}: U/\text{IPGl}(5) \rightarrow \Gamma \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ est de degré un: pour obtenir le théorème de Torelli global, il faut faire apparaître

l'action en cohomologie des automorphismes d'une cubique, au niveau de l'application des périodes: suivant une suggestion d'A. Beauville, on raisonne de la façon suivante:

Soit $\tilde{U} \rightarrow U$ la famille des cubiques «marquées», soit ensemblistement: $\tilde{U} = \{(X, \varphi), X \in U, \gamma \text{ un isomorphisme: } (H^4(X, \mathbf{Z}), h^2) \xrightarrow{\gamma} (L, u)\}$, où (L, u) est une représentation fixée du couple $(H^4(X, \mathbf{Z}), h^2)$; $\mathbb{P}G\ell(5)$ opère naturellement sur \tilde{U} , et on a le lemme suivant:

Lemme. $\mathbb{P}G\ell(5)$ opère sans point fixe. \square

Le quotient $\tilde{U}/\mathbb{P}G\ell(5)$ est alors non-singulier, et l'application des périodes $\tilde{\mathcal{P}}$ y est définie à valeurs dans $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{P}((L \otimes \mathbf{C})^{\text{prim}})$; ($\tilde{\mathcal{D}}$ est un ouvert d'une quadrique lisse); par le théorème de Torelli infinitésimal, $\tilde{\mathcal{P}}$ est étale; comme $\tilde{\mathcal{P}}$ est de degré un, $\tilde{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme sur son image: soit alors $i: (H^4(X, \mathbf{Z}), h^2) \rightarrow (H^4(X', \mathbf{Z}), h'^2)$ un isomorphisme de structures de Hodge: cela signifie que $\tilde{\mathcal{P}}(X, \gamma) = \tilde{\mathcal{P}}(X', \gamma')$ où γ et γ' rendent commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (H^4(X, \mathbf{Z}), h^2) & \xrightarrow{\gamma} & (L, u) \\ & \searrow i & \downarrow \gamma'^{-1} \\ & & (H^4(X'; \mathbf{Z}), h'^2) \end{array}$$

on en déduit que $(X, \gamma) = (X', \gamma')$ modulo l'action de $\mathbb{P}G\ell(5)$, d'où l'existence de $\Phi: X \approx X'$ tel que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (H^4(X, \mathbf{Z}), h^2) & \xrightarrow{\gamma} & (L, u) \\ & \searrow \Phi^{*-1} & \downarrow \gamma'^{-1} \\ & & (H^4(X'; \mathbf{Z}), h'^2) \end{array}$$

soit commutatif: i.e. $\Phi^{*-1} = i$.

Bibliographie

0. Beauville, A.: Jacobiennes intermédiaires et variétés de Prym. Ann. de l'ENS **10**, 309-391 (1977)
1. Beauville, A.: Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Diff. Geom. **18**, 755-782 (1983)
2. Beauville, A., Donagi, R.: The variety of lines of a cubic fourfold. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 **301**, 703-706 (1985)
3. Clemens, H., Griffiths, P.: The intermediate Jacobienne of the cubic three fold. Ann. Math. **95**, 281-356 (1972)
- Clemens, H.: On the surjectivity of the Abel-Jacobi mapping. Ann. Math. **117**, 71-76 (1983)
4. Conte, A., Murre, J.P.: The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves. Math. Ann. **238**, 79-88 (1978)
5. Donagi, R.: Generic Torelli for projective hypersurfaces. Comp. Math. Vol. **50**, 325-353 (1983)
6. Carlson, J., Griffiths, P.: Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem: Dans «journées de géométrie algébrique d'Angers (1979)
7. Griffiths, P., Harris, J.: Infinitesimal variation of Hodge structure, (II). Comp. Math. **50**, 207-265 (1983)

8. Griffiths, P.: Periods of certain rational integrals I, II. *Ann. Math.* **90**, 460–541 (1969)
9. Griffiths, P.: Periods of integrals on algebraic manifolds III. *Publ. IHES* **38**, 125–179 (1970)
10. Griffiths, P., Schmid, W.: Recent developments in Hodge theory: A discussion of techniques and results: Dans discrete subgroups of Lie groups. Oxford Univ. Press (1973)
11. Friedman, R.: The period map at the boundary of moduli: dans *Topics in transcendental algebraic geometry*. *Ann. Math. Stud.* **106**, 183–208 (1984)
12. Friedman, R.: A new proof of the Torelli theorem for $K3$ surfaces. *Ann. Math.* **120**, 237–269 (1984)
13. Peters, C., Steenbrink, J.: Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem for projective hypersurfaces, Dans *classification of algebraic and analytic manifolds*: Boston: Birkhäuser (1983), Katata symposium
14. Mumford, D.: Theta characteristic of an algebraic curve. *Ann. l'ENS* **4**, 181–192 (1971)
15. Tjurin, A.: On the Fano surface of a non-singular cubic in \mathbb{P}^4 . *Math. USSR Izv.* **4**, n° 6 (1970)
16. Tjurin, A.: Intersections of quadrics. *Russ. Math. Surv.* **30**, 51–105 (1975)
17. Séminaire de géométrie, Palaiseau 81–82, périodes et modules des surfaces $K3$. *Astérisque* **126**, 1985

Oblatum 15-XI-1985 & 24-III-1986