PANORAMAS ET SYNTHÈSES 2

SYMÉTRIE MIROIR

Claire Voisin

Société Mathématique de France 1996

Rédigé avec le concours du ministère de l'éducation nationale,
de l'enseignement supérieur et de la recherche (D.I.S.T.N.B.).

SYMÉTRIE MIROIR

Claire Voisin

Ce texte expose certains travaux récents motivés par la mise en évidence du phénomène de symétrie miroir par les physiciens. Un chapitre y est consacré à la géométrie des variétés de Calabi-Yau, tandis que le suivant décrit, à titre de motivation, les idées venues de la théorie quantique des champs et qui sont à l'origine de cette découverte.

Les chapitres suivants traitent d'aspects plus spécialisés du sujet : le travail de Candelas, de la Ossa, Greene, Parkes, où est exploité le fait que sous l'hypothèse des miroirs, la variation de structure de Hodge d'une famille de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 détermine les invariants de Gromov-Witten de son miroir ; la construction de Batyrev, qui exhibe le phénomène de miroirs entre hypersurfaces des variétés toriques de Fano, à l'aide d'une classification combinatoire de ces dernières ; la construction mathématique du potentiel de Gromov-Witten et la preuve de sa propriété cruciale (il satisfait l'équation WDVV), qui permet de construire une connexion plate, sous-jacente à une variation de structure de Hodge dans le cas d'une variété de Calabi-Yau ; et pour finir, le calcul de Givental qui est une justification mathématique mystérieuse du calcul de Candelas et al.

This paper describes recent works motivated by the discovery of the mirror symmetry phenomenon by the physicists. One chapter is devoted to the geometry of Calabi-Yau manifolds, and the next one describes, as a motivation, the ideas from quantum field theory, which led to this discovery.

The other chapters deal with more specialised aspects of the subject : The work of Candelas, de la Ossa, Greene, Parkes, based on the fact that under the mirror symmetry hypothesis, the variation of Hodge structure of a Calabi-Yau threefold determines the Gromov-Witten invariants of its mirror ; Batyrev's construction which exhibits the mirror symmetry phenomenon between hypersurfaces of toric Fano varieties, after a combinatorial classification of the last ones ; the mathematical construction of the Gromov-Witten potential, and the proof of its crucial property (it satisfies the WDVV equation), which allows to construct a flat connection, underlying a variation of Hodge structure in the Calabi-Yau case ; and to conclude, Givental's computation, which is a mysterious mathematical justification of the computation of Candelas et al.

Classification AMS : 14D05 – 14D07 – 14J32 – 14M25 – 32G13 – 32G20 – 32L07 – 81T30 – 81T40 – 53C23 – 53C15.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce texte est la version écrite du cours que j'ai donné à l'Institut Henri Poincaré dans le cadre du semestre de géométrie algébrique du centre Émile Borel au printemps 95.

Le but de ce cours était de présenter les résultats récents liés à la symétrie miroir ; celle-ci étant loin d'être comprise mathématiquement, ces travaux se sont développés dans des directions diversifiées, depuis l'étude approfondie menée par Batyrev des familles d'hypersurfaces à fibré canonique trivial dans les variétés toriques de Fano, et la construction combinatoire de la famille miroir, jusqu'à la découverte du « produit quantique » sur la cohomologie d'une variété symplectique, qui dépasse largement le cadre de la symétrie miroir, mais a été motivée par le souci de définir mathématiquement des objets tels que le potentiel de Gromov-Witten, qui en est un ingrédient essentiel, et d'en prouver la propriété principale, à savoir qu'il satisfait « l'équation WDVV ».

Cette situation éclatée se trouve reflétée dans la division du livre en chapitres autonomes, qui tout en étant liés par des thèmes communs (variation de structure de Hodge, variétés de Calabi-Yau et leurs courbes rationnelles et, bien entendu, symétrie miroir) n'entretiennent pas forcément de liens logiques très structurés.

Cette introduction se propose néanmoins de procéder à une présentation synthétique du sujet, destinée à recentrer le livre autour de la symétrie miroir, et aussi à mettre en évidence le fait que les travaux mathématiques qu'elle a suscités, et qui sont décrits ici, si intéressants soient-ils en eux-mêmes, sont loin d'en fournir une justification aussi tangible que celle proposée par les physiciens dans le langage de la théorie des champs, (et malheureusement sur la base du formalisme de la quantification et des intégrales de Feynman qui semble impossible à justifier rigoureusement).

Les variétés de Calabi-Yau sont les variétés X compactes complexes kählériennes à fibré canonique trivial, c'est-à-dire possédant une forme holomorphe η partout non nulle, appartenant à $H^0(X, \bigwedge^n \Omega_X^n)$, où Ω_X est le fibré cotangent holomorphe de X et où $n = \dim X$.

Dans toute la suite, on supposera

$$H^2(\mathcal{O}_X) = \{0\},$$

bien que des études intéressantes aient été menées dans le cas des surfaces K3, (ce sont les variétés de Calabi-Yau simplement connexes de dimension 2), pour lesquelles cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite. Sous cette condition, le cône de Kähler de X est ouvert dans $H^2(X, \mathbb{R})$ et l'on peut introduire le «cône de Kähler complexifié» de cette variété, qui est l'un des aspects de l'espace des modules considéré par les physiciens. C'est l'ouvert

$$K(X) \subset H^2(X, \mathbb{C})/2i\pi H^2(X, \mathbb{Z})$$

défini par la condition :

$$\omega \in K(X) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\omega \text{ est une classe de Kähler.}$$

La symétrie miroir consiste essentiellement en l'existence d'une famille miroir $\{X'\}$ de variétés de Calabi-Yau de même dimension, telle que $K(X)$ uniformise (c'est-à-dire est un revêtement de) l'espace de modules Déf X des déformations de la structure complexe de X' et $K(X')$ uniformise celui de X. La nature exacte de ce revêtement n'est pas parfaitement comprise, mais il doit être fourni par un «marquage» partiel de la cohomologie de X' (resp. X).

Les courbes elliptiques ($n = 1$) fournissent l'exemple le plus simple de ce phénomène : le cône de Kähler complexifié $K(E)$ (qui ne dépend pas de la structure complexe de E) s'identifie canoniquement, par intégration sur E, à l'ensemble

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}\,;\ \operatorname{Re}\lambda > 0\big\}.$$

D'autre part, l'ensemble des structures complexes marquées sur E s'identifie par l'application des périodes à l'ensemble

$$\mathcal{H} = \big\{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\,\tau > 0\big\}$$

et les translations par $u \in \mathbb{Z}$ sur cet ensemble correspondent simplement à l'action des matrices triangulaires supérieures à diagonale identité et à coefficients entiers sur les marquages d'une courbe elliptique E (c'est-à-dire dans ce cas, les isomorphismes symplectiques $H^1(E, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ muni de la forme symplectique standard). L'application

$$\begin{aligned} K(E) &\longrightarrow \mathcal{H}/\mathbb{Z}, \\ \lambda &\longmapsto \tau = -\frac{\lambda}{2i\pi} \bmod \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donne donc une uniformisation telle que prédite par la symétrie miroir.

En dimension supérieure, un phénomène nouveau apparaît : la famille $\{X'\}$ est en général différente de la famille $\{X\}$, les variétés topologiques sous-jacentes étant différentes, simplement parce que leurs nombres de Betti le sont. Cependant, les nombres de Hodge de X', c'est-à-dire les nombres

$$h^{p,q}(X') := \dim H^{p,q}(X') =: \dim H^q(X', \Omega^p_{X'}),$$

se déduisent de ceux de X de la façon suivante.

L'uniformisation

$$K(X) \longrightarrow \text{espace de modules de } X'$$

induit, en un point $\omega \in K(X)$ d'image X', un isomorphisme

$$H^1(\Omega_X) \cong H^1(T_{X'})$$

au niveau des espaces tangents, où l'on a utilisé les identifications naturelles

$$T_{K(X),\omega} \cong H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^1(\Omega_X),$$

la seconde résultant de l'hypothèse $H^2(\mathcal{O}_X) = \{0\}$.

Plus généralement, comme il résulte de la « construction » de la symétrie miroir par les physiciens, on devrait avoir, pour tout p et q, des isomorphismes

$$H^q(\Omega^p_X) \cong H^q(\bigwedge^p T_{X'})$$

Finalement, le choix d'une n-forme holomorphe $\eta \in H^0(K_X)$ (où la forme η est unique à coefficient près) détermine des isomorphismes donnés par le produit intérieur

$$H^q(\bigwedge^p T_{X'}) \cong H^q(\Omega^{n-p}_{X'})$$

qui, composés avec les précédents, fournissent des isomorphismes non canoniques

$$H^q(\Omega^p_X) \cong H^q(\Omega^{n-p}_{X'})$$

et donc une série d'égalités :

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(X').$$

Rappelons finalement que d'après la théorie de Hodge on a pour chaque k une décomposition en somme directe

$$H^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

d'où la relation entre les nombres de Hodge et les nombres de Betti de X :

$$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X).$$

Lorsque $n = 3$, la comparaison des nombres de Hodge de X et X' entraîne celle des nombres de Betti. En effet :

- l'hypothèse $H^2(\mathcal{O}) = \{0\}$ entraîne $b_2 = h^{1,1}$;
- d'autre part, on a $h^{3,0} = 1$ et $h^{2,1} = h^{1,2}$ (car $H^1(\Omega^2_X)$ et $H^2(\Omega_X)$ sont duaux) ; d'où $b_3 = 2 + 2h^{2,1}$.

Finalement, $H^2(\mathcal{O}) = \{0\}$ équivaut par dualité de Serre à

$$H^1(K_X) = H^1(\mathcal{O}_X) = \{0\}$$

et donc à $b_1(X)=0$, de sorte que l'on a :

$$\begin{cases} b_1(X')=0, \\ b_2(X')=\frac{1}{2}\big(b_3(X)-2\big)=b_4(X'), \\ b_3(X')=2+2b_2(X). \end{cases}$$

Les constructions de familles miroirs dont on dispose actuellement relèvent essentiellement de la géométrie algébrique projective, la plus générale étant celle de Batyrev : celle-ci concerne les désingularisations partielles des hypersurfaces à fibré canonique trivial dans les variétés toriques de Fano. Ces dernières sont les compactifications de $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ à fibré anticanonique ample, et sur lesquelles l'action naturelle de $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ sur lui-même s'étend.

Batyrev montre que ces variétés sont en correspondance bijective avec des polyèdres convexes à sommets entiers dans $\mathbb{R}^{n+1}$, possédant 0 comme unique point entier intérieur, et tels que le polyèdre dual soit également à sommets entiers (propriété dite de réflexivité) : la famille miroir est alors obtenue par désingularisation partielle (en général le procédé de désingularisation n'est pas unique, malheureusement) de la famille des hypersurfaces à fibré canonique trivial dans la variété torique de Fano associée au polyèdre dual.

L'exemple le plus fameux d'une telle construction est celui des physiciens Candelas, de la Ossa, Green, Parkes dans l'article spectaculaire [43], remarquablement expliqué à l'usage des mathématiciens par Morrison [53]. On considère la famille de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 donnée par les hypersurfaces lisses de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$; une telle hypersurface a pour nombres de Hodge :

$$h^{1,1}=1, \quad h^{2,1}=101.$$

La famille miroir doit donc avoir pour nombres de Hodge

$$h^{1,1}=101, \quad h^{2,1}=1$$

et le nombre de paramètres pour les déformations de la structure complexe dans cette famille doit être égal à 1.

Cette famille est la suivante : considérons les polynômes quintiques (dépendant d'un paramètre complexe $\lambda\in\mathbb{C}$) de la forme

$$F_\lambda=\sum_{i=0}^{i=4}X_i^5+\lambda X_0\cdots X_4.$$

Chaque polynôme F_λ est invariant par le groupe

$$G=(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5/\operatorname{diag}$$

agissant sur $\mathbb{P}^4$ par multiplication des coordonnées par une racine cinquième de l'unité.

Le sous-groupe $H\subset G$ défini par la condition

$$(\alpha_0,\dots,\alpha_4)\in H \iff \sum_i \alpha_i=0 \quad \text{dans } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

agit sur $X_\lambda:=\operatorname{div}F_\lambda$ et l'action induite sur $H^{3,0}(X_\lambda)$ est triviale.

On peut alors montrer que le quotient $\widetilde{X_\lambda/H}$ admet une désingularisation naturelle, qui est de Calabi-Yau. La famille $\{\widetilde{X_\lambda/H}\}$, de dimension 1, est la famille miroir cherchée.

Morrison a expliqué du point de vue de la théorie de Hodge le calcul mené dans [43] ; les ingrédients essentiels sont les suivants. On recherche sur la courbe de coordonnée λ (en fait λ^5) une coordonnée canonique à l'infini ; de telles coordonnées naturelles existent en général sur l'espace de modules d'une variété de Calabi-Yau (ou plutôt la famille de Kuranishi, qui est lisse) et dépendent du choix d'un marquage partiel de la cohomologie : le point est que la monodromie autour de l'infini fournit naturellement un tel marquage.

Le logarithme t de la coordonnée q ainsi produite est alors supposé coïncider via l'application miroir avec la coordonnée naturelle existant sur le cône de Kähler complexifié de la famille initiale. Le second point est que le même marquage partiel de la cohomologie permet également de trivialiser le fibré $\mathcal{H}^{3,0}$, de rang 1, dont la fibre au point λ l'espace vectoriel $H^{3,0}(\widetilde{X_\lambda/H})$. On dispose donc d'une fonction de q donnée par la valeur des « accouplements de Yukawa » (il s'agit d'une forme cubique sur l'espace tangent à la famille), normalisés par la section trivialisante du fibré $\mathcal{H}^{3,0}$ sur le champ de vecteurs logarithmique $q\partial/\partial q$. Le développement en série entière est calculable explicitement et se déduit immédiatement de celui de certaines solutions de l'équation de Picard-Fuchs de la famille $\{X_\lambda\}$.

L'extraordinaire nouveauté mathématique de cet article réside alors dans l'identification de cette série $\psi(q)$ où $q = \mathrm{e}^t$ avec la série

$$5 + \sum_{d>0} N(d)\, \frac{\mathrm{e}^{td}}{1-\mathrm{e}^{td}}$$

où $N(d)$ est le nombre de courbes rationnelles immergées de degré d dans une quintique générale de $\mathbb{P}^4$. (Ce nombre devrait être fini, selon une conjecture de Clemens.)

La prédiction ainsi obtenue pour les $N(d)$ a été vérifiée pour $d \leq 4$, ce qui est tout à fait remarquable, étant donnée l'allure astronomique de ces nombres. Notons d'autre part que malgré le progrès accompli par Kontsevich [51] sur le problème de l'évaluation des $N(d)$, il n'existe actuellement pas de méthode permettant de calculer ces nombres autrement que un à un.

L'identification de ces deux séries est une conséquence de la construction « physique » de la symétrie miroir : la donnée d'une structure complexe sur X et d'un paramètre de Kähler complexifié $\omega = \alpha + i\beta$ déterminent par le théorème de Yau une métrique de Kähler-Einstein, de classe de Kähler α, tandis qu'à β correspond une classe de 2-formes fermées modulo des formes exactes et des formes d'intégrale multiple de $2i\pi$ sur tout cycle de dimension 2 de X. Ces données permettent de construire un « σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique » qui est donné par une action $S(\phi,\psi)$, pour ϕ une application d'une surface de Riemann Σ dans X, et ψ une section de $\phi^*(T_X)\otimes S$, S étant le fibré des spineurs correspondant au choix d'une structure Spin sur Σ.

La dépendance de cette action par rapport au choix d'une forme $\widetilde{\beta}$ représentant β n'influe guère sur la théorie, car $\widetilde{\beta}$ ne contribue à S que par le terme $\int_\Sigma \phi^*(\widetilde{\beta})$, de sorte qu'un choix différent $\widetilde{\beta}'$ modifie l'action par un « terme de bord » et par un terme qui prend des valeurs multiples de $2i\pi$ sur les surfaces sans bord : les termes de bord ne contribuent pas aux équations d'Euler-Lagrange décrivant les points critiques de S, et d'autre part seule l'exponentielle de l'action apparaît, par exemple dans le calcul des fonctions de corrélation.

L'action $S(\phi,\psi)$ est invariante (modulo un terme de bord) par une superalgèbre de Lie de dimension infinie de transformations infinitésimales, la « $N{=}2$-superalgèbre de Virasoro », dont la partie impaire, faite de « transformations supersymétriques » se comprend mieux si l'on représente $S(\phi,\psi)$ comme le développement en composantes d'une action $S(\Phi)$ associée aux applications superdifférentiables Φ d'une super-surface de Riemann Σ dans X. La partie paire de cette superalgèbre de Lie est faite de deux copies de l'algèbre de Virasoro, et reflète l'invariance conforme de l'action $S(\phi,\psi)$. La $N{=}2$-supersymétrie de cette action est une conséquence du fait que la métrique est kählérienne.

Les physiciens veulent représenter par quantification certaines fonctionnelles sur l'espace des solutions classiques des équations d'Euler, appelées « observables », sur un espace de Hilbert. La construction d'une telle représentation serait équivalente à la donnée des « fonctions de corrélation » de la théorie, c'est-à-dire les intégrales de Feynman

$$\big\langle \mathcal{O}_1(p_1)\cdots\mathcal{O}_r(p_r)\big\rangle = \int_{\Sigma,\phi,\psi}\prod_i \mathcal{O}_i\big((\phi,\psi)(p_i)\big)\,\mathrm{e}^{-S(\phi,\psi)}\,\mathrm{d}\Sigma\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi$$

les p_i étant des points fixés de Σ et les $\mathcal{O}_i$ des formes différentielles sur X, l'intégrale sur Σ signifiant l'intégrale sur les structures complexes de Σ, à isomorphisme près.

Les physiciens ont des arguments qui tendent à prouver que l'invariance par $N{=}2$-supersymétrie de l'action $S(\phi,\psi)$ peut être préservée au stade quantique (c'est-à-dire qu'une extension centrale de la superalgèbre est représentée sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de sorte que son action sur les observables coïncide avec le crochet d'opérateurs dans $\mathcal{H}$) précisément lorsque la métrique sur X est de Kähler-Einstein.

Ceci mène à associer à (X,ω) une représentation de la $N{=}2$-superalgèbre de Virasoro qui est à « charge centrale » $c = 3n$. D'après Segal [36], on peut voir cette représentation comme la version infinitésimale d'une « théorie des champs $N{=}2$-superconformes » associée à (X,ω). Selon Gepner, cette correspondance devrait être bijective (à condition de ne considérer que les représentations à « charges U(1) » entières). La symétrie miroir serait la nuance à apporter à cet énoncé et correspondrait au phénomène suivant : la $N{=}2$-superalgèbre admet quatre séries de générateurs

$$G_r^+,\quad G_r^-,\quad \overline{G}_r^+,\quad \overline{G}_r^-,\quad r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2},$$

dont la signification géométrique dépend de l'interprétation de la superalgèbre en termes de transformations supersymétriques : il se trouve que l'on peut construire une involution sur la superalgèbre, agissant sur les générateurs impairs par

$$\begin{aligned} G_r^+ &\longmapsto G_r^-, \quad G_r^- \longmapsto G_r^+\,,\\ \overline{G}_r^+ &\longmapsto \overline{G}_r^+, \quad \overline{G}_r^- \longmapsto \overline{G}_r^-\,, \end{aligned}$$

compatible avec le supercrochet de Lie.

Cette involution n'a pas de sens géométrique : l'idée est que la représentation obtenue en composant la représentation initiale avec cette involution est la représentation associée au miroir (X', ω'), ou encore qu'on a la même représentation, avec une indexation différente des générateurs qui doit s'interpréter géométriquement par le passage au miroir. De là découle formellement la comparaison des cohomologies de Dolbeault de X et de X' : en effet, suivant Witten [38], on peut identifier

$$\bigoplus_{p,q \geq 0} H^q\big(X, \overset{p}{\wedge} T_X\big)$$

au sous-ensemble de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ formé des états « chiraux-chiraux », c'est-à-dire annulés par les générateurs

$$G_r^+,\ \overline{G}_r^+, \quad \big(r \geq -\tfrac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad G_r^-,\ \overline{G}_r^- \quad \big(r \geq \tfrac{1}{2}\big),$$

la bigraduation (p,q) sur le second espace étant fournie par le couple des valeurs propres des opérateurs J_0, $\overline{J}_0$, où les opérateurs J_m, $\overline{J}_m$ pour $m \in \mathbb{Z}$ forment une série de générateurs pairs de la superalgèbre, appelée *courant* $\mathrm{U}(1)$, sur lesquels l'involution agit par

$$J_m \longmapsto -J_m, \quad \overline{J}_m \longmapsto \overline{J}_m.$$

De même

$$\bigoplus_{p,q \geq 0} H^q\big(X, \overset{p}{\wedge} \Omega_X\big)$$

s'identifie à l'ensemble des états « antichiraux-chiraux », c'est-à-dire annulés par

$$G_r^-,\ \overline{G}_r^+, \quad \big(r \geq -\tfrac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad G_r^+,\ \overline{G}_r^-, \quad \big(r \geq \tfrac{1}{2}\big),$$

la bigraduation $(-p,q)$ sur le second espace étant fournie par le couple des valeurs propres des opérateurs J_0, $\overline{J}_0$. Par définition les états chiraux-chiraux d'une théorie sont les états antichiraux-chiraux de la théorie obtenue en composant avec l'involution qui échange G^+ et G^- et la bigraduation subit simplement le changement $(p,q) \mapsto (-p,q)$, correspondant au changement de signe de J_0. Ce qui précède fournit donc une série d'isomorphismes

$$H^q(\Omega_X^p) \cong H^q(\overset{p}{\wedge} T_{X'})$$

pour le miroir (X', ω') de (X, ω).

Finalement, les hypothèses de la théorie des champs conformes (et plus particulièrement la correspondance états-champs d'opérateurs) permettent de construire un produit gradué sur l'espace d'états chiraux-chiraux (resp. antichiraux-chiraux), et en particulier puisque cet espace est de rang 1 en bidegré (n,n) (resp. $(-n,n)$), une forme homogène de degré n sur sa composante de bidegré $(1,1)$ (resp. $(-1,1)$), qui est isomorphe à $H^1(T_X)$ (resp. $H^1(\Omega_X)$).

L'interprétation de ces formes (les accouplements de Yukawa physiques) en termes de fonctions de corrélation du σ-modèle déterminé par (X, ω), et le développement asymptotique des intégrales de Feynman permettent alors à Witten [38] de décrire les accouplements obtenus sur $H^1(\Omega_X)$ et $H^1(T_X)$ respectivement, au moins dans le cas $n = 3$.

Le premier, qu'on notera Y^ω, ne dépend pas de la structure complexe de X et dépend par contre du paramètre ω ; le second, que l'on notera Y^η, ne dépend au contraire que de la structure complexe de X, et du choix d'une forme holomorphe $\eta \in H^{3,0}(X)$, dont le carré reflète le choix d'un isomorphisme $H^3(\wedge^3 T_X) \cong \mathbb{C}$. Witten donne les descriptions suivantes :

- la forme Y^η s'identifie au composé

$$S^3 H^1(T_X) \longrightarrow H^3(\overset{3}{\wedge} T_X) \overset{\eta^2}{\cong} \mathbb{C}\,;$$

- la forme Y^ω est donnée par la formule

$$Y^\omega(\gamma) = \int_X \gamma^3 \ + \sum_{0 \neq A \in H_2(X,\mathbb{Z})} N(A) \exp\Big(-\int_A \omega\Big)\Big(\int_A \gamma\Big)^3$$

où $N(A)$ est un nombre rationnel qui est un substitut adéquat pour le nombre de courbes rationnelles de classe A dans X, et est obtenu par une intégration sur l'ensemble des courbes rationnelles de classe A lorsque celui-ci n'est pas discret.

Comme les couples miroirs (X,ω) et (X',ω') ont par définition les mêmes théories conformes associées, leurs accouplements de Yukawa vont s'identifier *via* les identifications

$$H^1(T_X) \cong H^1(\Omega_{X'}), \quad H^1(T_{X'}) \cong H^1(\Omega_X)$$

pour un choix adéquat de η et η'.

C'est de là — et en supposant que le choix naturel de η' mentionné plus haut est le bon — que Candelas, de la Ossa, Green et Parkes déduisent l'identité des deux séries et donc la valeur des $N(d)$; bien entendu, la démarche suppose qu'on ait déterminé *a priori* la forme de l'application miroir, ce qui se fait par les coordonnées canoniques et qui est le point le plus délicat de [43].

Cette théorie donne un caractère d'évidence à la symétrie miroir qu'aucune approche mathématique n'a pu égaler jusqu'à présent.

Néanmoins, on ne peut guère la considérer comme satisfaisante du fait qu'elle repose sur la construction hypothétique de la correspondance entre variétés de Calabi-Yau munies d'un paramètre de Kähler complexifié et théories quantiques des champs $N=2$-superconformes. Par contre, il semble impossible, au vu de la justesse des prédictions issues de cette démarche, de ne pas admettre l'existence d'une telle correspondance ; le problème qui se pose naturellement, et qui paraît théoriquement plus important que la symétrie miroir elle-même, est de réaliser mathématiquement cette correspondance.

Les progrès mathématiques en direction d'une compréhension du principe de la symétrie miroir, dépassant la construction et l'étude d'exemples, résident essentiellement dans la construction de structures analogues sur les deux espaces de modules $K(X)$ et $\mathrm{Déf}\, X$ et dans la formulation de la symétrie miroir en termes d'identification de ces structures ; ces structures se formulent et se décrivent en termes de variations de structure de Hodge, qui sont l'objet mathématique le plus fin associé à une déformation de structure complexe.

La première analogie entre ces deux espaces de modules est la suivante. Rappelons que $K(X)$ est ouvert dans $H^2(X,\mathbb{C})/2i\pi H^2(X,\mathbb{Z})$ et donc admet naturellement une structure plate, c'est-à-dire la donnée locale d'un système de coordonnées, défini à des transformations affines près ; un premier résultat facile est l'existence d'une telle structure sur $\operatorname{Déf} X$, dépendant d'un marquage partiel de la cohomologie $H^n(X,\mathbb{Z})$, et donnée essentiellement par les périodes d'un générateur de $H^{n,0}(X)$ sur certaines classes d'homologie de X, qui donnent des coordonnées sur $\operatorname{Déf} X$. L'application miroir entre $K(X)$ et $\operatorname{Déf} X'$ est alors pratiquement déterminée par la condition de compatibilité avec ces structures plates.

Comme mentionné plus haut, on dispose pour une variété kählérienne X de la décomposition en somme directe de chacun de ses groupes de cohomologie $H^k(X,\mathbb{C}) \cong H^k(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$:

$$H^k(X,\mathbb{C}) \ = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

fournie par la théorie de Hodge et satisfaisant un certain nombre de conditions. Par exemple, $H^{p,q}(X)$ est le conjugué complexe de $H^{q,p}(X)$ et, pour $k = n = \dim X$, $H^{p,q}(X)$ est orthogonal à $H^{p',q'}(X)$ relativement à la forme d'intersection $\langle\ ,\ \rangle$ de $H^n(X)$ pour $(p',q') \neq (n-p, n-q)$. L'entier k étant fixé, l'application des périodes locale (ou marquée) de X associe à une déformation X_t de X, accompagnée d'un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de X_t avec X induisant un isomorphisme $H^k(X_t) \cong H^k(X)$, la décomposition de Hodge de X_t sur l'espace vectoriel fixé $H^k(X,\mathbb{C})$.

Il est plus agréable de considérer la variation correspondante de la filtration de Hodge

$$F^i H^k(X_t) = \bigoplus_{p \geq i} H^{p,k-p}(X_t)$$

qui jouit des deux propriétés remarquables suivantes :

- $F^i H^k(X_t)$ varie holomorphiquement avec t ;
- la différentielle de l'application des périodes satisfait la condition de « transversalité » de Griffiths

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(F^i H^k(X_t)\big) \subset F^{i-1} H^k(X_t).$$

L'application des périodes est fréquemment injective et pour les variétés de Calabi-Yau ; on peut montrer qu'elle est immersive pour $k = n$.

Le problème est que précisément à cause de la condition de transversalité, qui est une équation différentielle généralement non triviale, l'application des périodes n'est presque jamais surjective, de sorte qu'elle ne peut que rarement être utilisée telle quelle pour décrire l'espace de modules des déformations de la structure complexe d'une variété X.

Dans le cas des variétés de Calabi-Yau, il serait très intéressant de comprendre le lien entre l'application des périodes et la construction de la théorie conforme des champs proposée par les physiciens ; il n'est pas clair que la seconde doive déterminer la première, mais sans aucun doute la relation existe puisque, comme on l'a noté plus haut, les espaces $H^{p,q}(X)$ sont calculables du point de vue de la théorie superconforme associée à X.

Un autre lien plus précis est le fait que les accouplements de Yukawa sur l'espace tangent $H^1(T_X)$ à $\text{Déf}\,X$, calculés par les physiciens comme des fonctions de corrélation, ont une interprétation très simple en termes de variation de structure de Hodge : la forme η qui les normalise peut se prolonger comme une section du fibré de fibre $H^{n,0}(X_t)$ au point $t \in \text{Déf}\,X$; pour n champs de vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sur $\text{Déf}\,X$, on pose alors

$$Y^\eta(u_1, \ldots, u_n) = \big\langle \eta, {}_{u_1}\big(\cdots\big({}_{u_n}(\eta)\big)\cdots\big)\big\rangle$$

où les dérivées ${}_{u_i}(\eta)$ sont prises en considérant η comme une fonction à valeurs dans l'espace constant $H^n(X, \mathbb{C})$. Les conditions de polarisation et de transversalité entraînent aisément que ceci définit bien une forme symétrique homogène de degré n sur l'espace tangent à $\text{Déf}\,X$ au point X. Griffiths a par ailleurs montré que cette forme s'identifie au produit

$$S^n H^1(T_X) \longrightarrow H^n(\textstyle\bigwedge^n T_X) \overset{\eta^2}{\cong} \mathbb{C}$$

comme l'accouplement de Yukawa des physiciens. On a maintenant le résultat simple suivant, qu'on énoncera seulement dans le cas $n = 3$, qui est le plus souvent considéré dans ce livre :

Dans les coordonnées naturelles z_i sur $\text{Déf}\,X$ *déduites d'un marquage partiel de $H^3(X, \mathbb{Z})$, et pour un choix naturel de $\eta(z)$, section du fibré $\mathcal{H}^{3,0}$ de fibre $H^{3,0}(X_z)$ au point z, déduit du même marquage, la forme Y^η dépend d'un potentiel, i.e. il existe une fonction $F(z)$ telle que*

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} = Y^\eta\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big).$$

Le fait le plus remarquable en faveur de la symétrie miroir est l'existence de données analogues sur le cône de Kähler complexifié $K(X)$: le point est l'utilisation des invariants de Gromov-Witten de la variété symplectique sous-jacente à X pour construire un potentiel dont les dérivées vont permettre de construire une variation de structure de Hodge complexe paramétrée par $K(X)$. Les invariants de Gromov-Witten [76], [78], [83] sont des formes multilinéaires sur la cohomologie $H^*(X)$ d'une variété symplectique (X, ω), dépendant du choix d'une classe $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$

$$\Phi_{A,m} : H^*(X, \mathbb{Q})^{\otimes m} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Brièvement, $\Phi_{A,m}(\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m)$ est obtenue en intégrant la classe

$$\mathrm{pr}_1^* \beta_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_m^* \beta_m \in H^*(X^m)$$

sur l'image de l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{év}_m : W_{A,J,\nu} \times (\mathbb{P}^1)^{(m-3)} &\longrightarrow X^m \\ (\phi, x_1, \ldots, x_{m-3}) &\longmapsto \big(\phi(0), \phi(1), \phi(\infty), \phi(x_1), \ldots, \phi(x_{m-3})\big). \end{aligned}$$

Ici $W_{A,J,\nu}$ est l'ensemble des applications $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ telles que $\phi_*([\mathbb{P}^1]) = A$ satisfaisant l'équation de Cauchy-Riemann inhomogène

$$\bar{\partial}_J \phi = (\mathrm{Id}, \phi)^* \nu$$

pour un choix générique de structure pseudocomplexe J sur X compatible avec la forme symplectique ω, et de paramètre sur $\mathbb{P}^1 \times X$ égal à

$$\nu \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathrm{pr}_1^*(\Omega^{0,1}_{\mathbb{P}^1}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(T^{1,0}_{X,J})\big).$$

Le potentiel de Gromov-Witten est alors la fonction définie sur (un ouvert conjecturalement non vide de) $H^{\mathrm{pair}}(X) = \bigoplus_i H^{2i}(X,\mathbb{C})$ par la série

$$\Psi_\omega(\gamma) \ = \sum_{\substack{A\in H_2(X,\mathbb{Z})\\ m\geq 3}} \frac{1}{m\,!}\,\Phi_{A,m}(\gamma^{\otimes m}) \exp\Big(-\int_A \omega\Big).$$

Lorsque X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, le potentiel Ψ_ω ne change avec ω que par translation, modulo un terme quadratique en γ :

$$\Psi_{\omega'}(\gamma) = \Psi_\omega(\gamma - \omega' + \omega) + Q(\gamma), \quad \deg Q = 2.$$

C'est ce potentiel restreint à $H^2(X,\mathbb{C})$ que la symétrie miroir va identifier, dans les coordonnées canoniques et modulo une fonction quadratique, avec le potentiel décrit plus haut, dont dérivent les accouplements de Yukawa de la variation de structure de Hodge du miroir X', lorsque X est une variété de Calabi-Yau. En fait, supposant $n = 3$ pour simplifier, ce potentiel permet de construire une variation de structure de Hodge complexe paramétrée par $K(X)$ (moyennant des hypothèses de convergence) de la façon suivante. Les dérivées cubiques de Ψ_ω permettent de construire en tout point $\gamma \in H^{\mathrm{pair}}(X)$ où la série est convergente un produit « $\bullet_\gamma$ » sur $H^{\mathrm{pair}}(X)$ par la formule

$$\langle e_i \bullet_\gamma e_j, e_k\rangle = \frac{\partial^3 \Psi_\omega}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}$$

où e_i est une base de $H^{\mathrm{pair}}(X)$ et t_i les coordonnées linéaires correspondantes sur $H^{\mathrm{pair}}(X)$.

Une propriété essentielle des invariants de Gromov-Witten, vraie pour toutes les variétés symplectiques et trivialement satisfaite dans le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 est l'associativité du produit « $\bullet_\gamma$ ». On en déduit, suivant Dubrovin [75], que la connexion ∇ définie sur le fibré tangent (trivial) de la variété $H^{\mathrm{pair}}(X)$ par

$$\nabla_u(\sigma)(\gamma) = \mathrm{d}_u(\sigma)(\gamma) + u \bullet_\gamma \sigma$$

(d étant la connexion triviale et u, σ des champs tangents) est intégrable.

Finalement, dans le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3, le produit « $\bullet_\gamma$ » est compatible avec la graduation $H^{\mathrm{pair}}(X) = \bigoplus_i H^{2i}(X)$ pour tout γ. On en déduit que la restriction de ∇ à $H^2(X,\mathbb{C})$ est une connexion intégrable sur le fibré trivial de fibre $H^{\mathrm{pair}}(X)$ satisfaisant la condition de transversalité

$$\nabla F^i H^{\mathrm{pair}}(X) \subset F^{i-1} H^{\mathrm{pair}}(X) \otimes \Omega_{H^2(X)}$$

pour la filtration

$$F^3 H^{\mathrm{pair}} = H^0(X), \qquad F^2 H^{\mathrm{pair}} = H^0 \oplus H^2,$$

$$F^1 H^{\mathrm{pair}} = H^0(X) \oplus H^2 \oplus H^4, \quad F^0 H^{\mathrm{pair}} = H^{\mathrm{pair}}(X),$$

ce qui fournit la variation complexe de structure de Hodge annoncée.

À ce stade, on peut formuler la symétrie miroir en conjecturant que cette variation de structure de Hodge est celle de la famille miroir $\{X'\}$ *via* l'application miroir

$$K(X) \longrightarrow \mathrm{Déf}\, X'.$$

Le problème est qu'on n'a aucune raison de supposer qu'elle est d'origine géométrique, *i.e.* qu'elle correspond à la variation de structure de Hodge d'une famille de variétés paramétrée par $K(X)$.

Notons aussi que, même dans le cas décrit plus haut des quintiques de $\mathbb{P}^4$, l'égalité des deux potentiels décrits ci-dessus, ou ce qui revient au même, des deux séries entières considérées dans [43], reste une conjecture.

Cependant Givental en a donné une justification (malheureusement insuffisante du point de vue de la rigueur, du fait de l'usage de produits infinis, qui sont supposés avoir un sens en « cohomologie équivariante de Floer », mais dont le statut est incertain) très séduisante théoriquement et complètement indépendante de celle des physiciens. Givental note tout d'abord l'existence d'une structure de $\mathcal{D}$-module sur la cohomologie S^1-équivariante d'une variété symplectique $\widetilde{M}$, sous les conditions suivantes : $\widetilde{M}$ est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$ d'une variété symplectique M munie d'une action localement hamiltonienne de S^1, sur lequel cette action devient globalement hamiltonienne, la fonction hamiltonienne H satisfaisant

$$q^*H = H + 1$$

pour $q : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ engendrant l'action de $\mathbb{Z}$. Sur $\widetilde{M}$, la forme symplectique ω s'étend alors en une forme équivariante $\widetilde{\omega}$ dont la classe satisfait

$$q^*\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega} - h$$

où h est le générateur standard de $H^*_{S^1}(\text{point})$; si p est l'opérateur de multiplication par la classe de $\widetilde{\omega}$ dans $H^*_{S^1}(\widetilde{M})$, on a donc la relation

$$p \circ q^* - q^* \circ p = hq^*,$$

ce qui en convenant de traiter h comme un scalaire fournit la structure de $\mathcal{D}$-module cherchée, si on fait correspondre p à $h\partial/\partial t$ et q^* à la multiplication par e^t.

Givental applique cette construction au cas où M est l'espace des lacets de $\mathbb{P}^4$ et $\widetilde{M}$ son revêtement universel, l'action de S^1 étant donnée par la rotation des lacets. En fait, il approxime ce revêtement par la variété projective M_∞ limite directe des espaces de polynômes de Laurent

$$M_k = \mathbb{P}\Big(\Big\{ \sum_{i=-k}^{k} \phi_i z^i,\ \phi_i \in \mathbb{C}^5 \Big\}\Big),$$

l'action de $\mathbb{Z}$ sur M_∞ étant engendrée par la multiplication par z. La cohomologie S^1-équivariante de M_∞ a donc comme ci-dessus une structure de $\mathcal{D}$-module.

Givental construit alors une classe, qui se présente comme un produit infini dans $H^*_{S^1}(M_\infty)$, mais dont l'interprétation géométrique en termes de comptage de courbes rationnelles dans une quintique générale de $\mathbb{P}^4$ est claire, qui satisfait formellement, pour cette structure de $\mathcal{D}$-module, une équation différentielle qui n'est autre que l'équation de Picard-Fuchs de la famille miroir $\{\overline{X_\lambda/H}\}$ décrite plus haut. (Cette équation différentielle a pour coefficients des fonctions méromorphes de t et ses solutions sont exactement les périodes de la forme de type $(3,0)$ dont elle dépend, sur les cycles d'homologie localement constants : comme expliqué plus haut, ces périodes sont essentielles dans le calcul des coordonnées canoniques et de la normalisation des accouplements de Yukawa, sur lequel la construction de l'application miroir est basée.)

Le texte se termine sur la description de cette construction un peu miraculeuse, mais qui touche sans aucun doute au plus près le phénomène de miroir, par son objet central, la géométrie symplectique de l'espace des lacets, qui est également l'objet étudié par les physiciens par la théorie des cordes et le σ-modèle.

Organisation du texte

Dans le premier chapitre sont rassemblés quelques résultats de géométrie algébrique ou kählérienne concernant les variétés de Calabi-Yau : l'existence des métriques de Kähler-Einstein, la lissité de la famille de Kuranishi, et quelques propriétés spécifiques de ces variétés du point de vue de la théorie de Hodge.

Le chapitre deux est consacré à une description de la symétrie miroir, telle qu'elle émerge de la « physique » ; d'une part les idées impliquées dans la théorie des champs conformes semblent d'un très grand enjeu scientifique, et d'autre part, comme expliqué dans cette introduction, on n'a pas actuellement d'intuition mathématique suffisante du phénomène de miroir pour remplacer la théorie des physiciens.

C'est la raison d'être de ce chapitre d'une inspiration un peu spéciale, et dont la lecture n'est nullement nécessaire à la compréhension des autres.

Les quatre autres chapitres sont consacrés aux aspects mathématiques de la symétrie miroir évoqués dans cette introduction.

Le chapitre trois explique, en partie suivant Morrison, les étapes du calcul mené dans [43], en introduisant les notions de théorie de Hodge nécessaires : accouplements de Yukawa, équations de Picard-Fuchs, théorème de la monodromie, description à la Griffiths de la cohomologie et de la filtration de Hodge d'une hypersurface par des résidus.

Le chapitre quatre introduit à la géométrie torique et est consacré à la construction de Batyrev. Sans entrer dans les développements les plus récents, on explique également, suivant Danilov et Khovanskii, le calcul des nombres de Hodge des hypersurfaces des variétés toriques, utilisé par Batyrev pour vérifier en partie sur ces exemples les prédictions des physiciens concernant la comparaison des nombres de Hodge d'une variété et de son miroir.

Les deux derniers chapitres sont liés par l'introduction à la cohomologie de Floer, qui sans être nécessaire ici, semble importante du fait qu'elle traite la cohomologie quantique du point de vue de la géométrie symplectique de l'espace des lacets.

Le chapitre cinq est consacré à la cohomologie quantique : on y décrit les invariants de Gromov-Witten et leur propriété cruciale de « scindage », et on explique les conséquences formelles de cette propriété, telles que l'associativité du produit quantique et l'équation aux dérivées partielles, dite WDVV, (Witten, Dijgraaf, Verlinde, Verlinde) satisfaite par le potentiel de Gromov-Witten.

Le chapitre six débute par une introduction à la cohomologie de Floer, et une description schématique de la preuve du théorème de comparaison entre la cohomologie de Floer et la cohomologie usuelle tensorisée par l'anneau de Novikov. Ce paragraphe a surtout pour but de justifier les produits infinis de Givental, en expliquant leur interprétation naturelle (en homologie) comme des « classes fondamentales d'homologie de Floer S^1-équivariantes ». Ce chapitre introduit en outre à la cohomologie S^1-équivariante, qui est le seul outil mathématique utilisé dans la construction de Givental.

Remerciements

Je désire remercier les organisateurs du semestre, A. Beauville, D. Eisenbud, J. Le Potier et C. Peskine, pour m'avoir offert la possibilité d'enseigner dans des conditions aussi idéales. Ma reconnaissance va également aux auditeurs de ce cours, pour l'aide que leurs questions et remarques m'ont apportée lors de la rédaction de ce texte. Enfin je remercie Krzysztof Gawedzki, qui a commenté de façon très constructive une version préliminaire du second chapitre, les rapporteurs pour les corrections et les améliorations qu'ils ont suggérées, et Michèle Audin pour sa lecture approfondie et critique et ses encouragements.

Ajouté sur épreuves

Dans le preprint (*), Givental propose une preuve de la « conjecture des miroirs » pour les variétés de Calabi-Yau de dimension 3 intersections complètes dans un espace projectif, utilisant en particulier les idées de (**), et validant les résultats de (***).

Dans ce cas, la conjecture énonce que le potentiel de Gromov-Witten d'une telle variété est lié de façon simple (et explicite) aux solutions de l'équation de Picard-Fuchs de la famille miroir (qui est déjà fournie par l'analyse des variétés toriques comme dans le chapitre 4).

Un tel résultat constitue un progrès spectaculaire par rapport à l'état des connaissances décrit dans ce livre.

(*) A. Givental : Equivariant Gromov-Witten invariants, preprint alg-geom 96.
(**) M. Kontsevich : Enumeration of rational curves via torus action, voir [51].
(***) A. Givental : Homological geometry I : Projective Hypersurfaces, voir [91].

1. VARIÉTÉS DE CALABI-YAU

Ce chapitre est consacré à la description des résultats connus sur la géométrie algébrique ou kählérienne des variétés de Calabi-Yau. Les deux théorèmes les plus généraux concernent précisément les deux aspects de l'espace de modules considéré par les physiciens : le cône de Kähler, que le théorème de Yau met en correspondance bijective avec les métriques de Kähler-Einstein, et l'espace de modules des déformations de la structure complexe, dont la version locale est la famille de Kuranishi, qui est lisse par le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov. On explique avec quelque détail la preuve de ce dernier théorème, ainsi que les théorèmes de «lissifiabilité» de Friedman et Kawamata-Namikawa qui permettent d'espérer la construction de nouvelles familles par lissification de variétés singulières (en fait à croisements normaux) à fibré canonique trivial. On conclut par une introduction à l'application des périodes, et par la description, due à Bryant et Griffiths, des solutions de dimension maximale de l'équation différentielle de transversalité pour les structures de Hodge de niveau 3 polarisées avec $h^{3,0} = 1$.

1.1. Théorème de Yau

1.1.1. Métriques hermitiennes

Soit X une variété complexe ; le fibré tangent réel $T_X^{\mathbb{R}}$ est muni de l'opérateur J de structure pseudocomplexe, satisfaisant $J^2 = -1$. Soit h une métrique hermitienne sur X, c'est-à-dire la donnée d'une métrique hermitienne h_x sur $T_X^{\mathbb{R}}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel grâce à J_x variant différentiablement avec $x \in X$. La forme hermitienne h se décompose en $h = g - i\omega$, avec g et ω réelles, J-invariantes, et les conditions

$$h(u, Jv) = -ih(u, v), h(u, v) = \overline{h(v, u)} \tag{1.1.1}$$

se traduisent par :

$$\omega(u, Jv) = g(u, v), \quad \omega(u, v) = -\omega(v, u) \tag{1.1.2}$$

Donc ω est une 2-forme réelle invariante par J. Cette dernière condition est équivalente à la suivante : J induit une décomposition en types

$$\bigwedge^2 \Omega_X^{\mathbb{C}} = \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2} , \tag{1.1.3}$$

avec
$$\Omega^{2,0} = \bigwedge^2 \Omega^{1,0}, \quad \Omega^{1,1} = \Omega^{1,0} \otimes \Omega^{0,1},$$
où $\Omega^{1,0} \subset \Omega_X^{\mathbb{C}}$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre i de J. On a alors :

ω est J-invariante si et seulement si ω est une section du fibré $\Omega^{1,1}$.

1.1.2. Métriques de Kähler

La métrique h est dite *kählérienne* si la forme ω associée est fermée. Sa classe dans $H^2(X, \mathbb{R})$ est appelée la *classe de Kähler* de la métrique h. Lorsque X admet une métrique kählérienne, la théorie de Hodge fournit une décomposition
$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$
donnée par la décomposition (1.1.3) pour les formes harmoniques. Le sous-espace $H^{1,1}$ est stable par conjugaison, donc a une structure réelle et l'on a :

Lemme 1.1. — *Soit X une variété kählérienne; alors les classes de Kähler forment un cône ouvert dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$.*

On a la caractérisation suivante des métriques de Kähler :

Lemme 1.2. — *Une métrique hermitienne h est kählérienne si et seulement si l'opérateur J est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de $g = \mathrm{Re}\, h$.*

1.1.3. Première classe de Chern

Le fibré canonique d'une variété complexe X est le fibré inversible de rang 1 engendré par $\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n$, pour des coordonnées locales holomorphes z_i ; ses fonctions de transition sont données par les déterminants des matrices jacobiennes de changement de coordonnées holomorphes $(\partial z'_i / \partial z_j)_{(i,j)}$. Si h est une métrique hermitienne sur (T_X, J), de matrice (h_{ij}) dans la base $\partial/\partial z_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, on en déduit une métrique h_{-K} sur le fibré anticanonique $-K = \wedge^n_{\mathbb{C}} T_X$, de matrice $\det(h_{ij})$ dans la base $\partial/\partial z_1 \wedge \ldots \wedge \partial/\partial z_n$. On définit la *courbure* de h_{-K} comme étant la 2-forme
$$\omega_{-K} = \frac{1}{2i\pi} \partial\bar{\partial}\, h_{-K} \tag{1.1.4}$$
indépendante du choix de la trivialisation holomorphe de $-K$.

Le lien avec la courbure de Ricci de (X, g) est le suivant. Si (X, h) est kählérienne, la courbure de Ricci de (X, g) est une 2-forme symétrique J-invariante puisque J est parallèle; elle fournit une 2-forme alternée de type $(1, 1)$ définie par :
$$\rho(u, v) = \mathrm{Ric}(Ju, v). \tag{1.1.5}$$
On a alors
$$\rho = 2\pi\, \omega_{-K} \tag{1.1.6}$$
grâce au lemme suivant.

Lemme 1.3. — *Si h est kählérienne, la connexion de Levi-Civita ∇ coïncide avec la connexion hermitienne D sur T_X.*

(Ceci a un sens si l'on identifie $T_X^{1,0}$ et $T_X^{\mathbb{R}}$).

On a alors :

$$\omega_{-K} = \frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{Trace}(R^D) \tag{1.1.7}$$

où

$$R^D = D^2 \in \overset{2}{\bigwedge}\,\Omega_X \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_X)$$

est l'opérateur de courbure de D. D'autre part, $\mathrm{Ric}(U,V)$ est la trace de l'application linéaire $W \mapsto R^{\nabla}(U,W)V$ et l'égalité (1.1.6) résulte alors du lemme 1.3, de la première identité de Bianchi et du fait que $R(\cdot\,,\cdot)W$ est de type $(1,1)$.

Définition 1.4. — La *première classe de Chern* $c_1^{\mathbb{R}}(X) \in H^2(X,\mathbb{R})$ est la classe de la 2-forme ω_{-K}.

Cette classe est en fait entière et ne dépend pas du choix de h. On peut la définir plus généralement pour n'importe quelle structure pseudocomplexe J sur X comme l'image dans $H^2(X,\mathbb{R})$ de la classe d'Euler du fibré complexe $\wedge^n_{\mathbb{C}} T_X$ de rang 1. Elle ne dépend donc que de la classe de déformation de la structure pseudocomplexe J.

1.1.4. Théorème de Yau

C'est la solution d'une conjecture de Calabi ; la version la plus générale établit l'existence de métriques de Kähler dont la courbure est proportionnelle à la forme de Kähler pour les variétés dont le fibré anticanonique est positif ou nul, au sens où pour une métrique hermitienne adéquate sur K^{-1}, la forme de courbure ω_{-K} correspondante est un multiple positif ou nul d'une forme de Kähler.

On appelle de telles métriques des *métriques de Kähler-Einstein.*

On se contentera de l'énoncé concernant le cas $c_1^{\mathbb{R}}(X) = 0$:

Théorème 1.5 (cf. [23]). — *Soit X une variété kählérienne compacte telle que $c_1^{\mathbb{R}}(X) = 0$, et soit $\alpha \in H^2(X,\mathbb{R})$ une classe de Kähler sur X ; il existe alors une unique métrique de Kähler $h = g - i\omega$, de forme de Kähler ω cohomologue à α, et satisfaisant la condition $\omega_{-K} = 0$.*

1.2. Le théorème de décomposition

On rappelle que l'holonomie d'une variété riemannienne (M,g) (calculée en un point m de M), est le groupe des transformations linéaires de $T_{M,m}$ obtenues par transport parallèle relativement à la connexion de Levi-Civita le long de lacets basés en m. L'holonomie restreinte est le sous-groupe obtenu en se restreignant aux lacets homotopes au lacet constant.

Le théorème suivant a été prouvé par Bogomolov [3] et indépendamment par Beauville [2].

Théorème 1.6. — *Soit X une variété compacte kählérienne telle que $c_1^{\mathbb{R}}(X) = 0$; alors un revêtement fini de X est isomorphe à un produit de tores complexes, de variétés compactes kählériennes simplement connexes de dimension $2m_i$ et d'holonomie égale à $\mathrm{Sp}(m_i)$, et de variétés compactes kählériennes simplement connexes de dimension n_j et d'holonomie $\mathrm{SU}(n_j)$.*

Outre le théorème de Yau, la démonstration utilise différents résultats profonds de géométrie différentielle :

(i) Le théorème de de Rham : soit M est une variété riemannienne complète simplement connexe, admettant une décomposition orthogonale parallèle

$$T_M = \bigoplus T_M^i \, ;$$

alors M est isomorphe comme variété riemannienne à un produit

$$M \cong \prod M_i \quad \text{avec} \quad T_M^i \cong \mathrm{pr}_{M_i}^* \, T_{M_i} \subset T_M.$$

(ii) La classification par Berger des groupes d'holonomie restreinte irréductibles.

Si M est kählérienne compacte à courbure de Ricci nulle, son groupe d'holonomie restreinte est contenu dans $\mathrm{SU}(n)$, avec $n = \dim_{\mathbb{C}} M$, et il en va alors de même des composantes M_i de la décomposition de de Rham de M.

Or il résulte de (ii) que les groupes d'holonomie restreinte irréductibles contenus dans $\mathrm{SU}(m_i)$ sont le groupe trivial, qui fournit les tores apparaissant dans l'énoncé du théorème 1.6, le groupe $\mathrm{SU}(m_i)$ lui-même, et pour $m_i = 2m_i'$, le groupe $\mathrm{Sp}(m_i')$, intersection du groupe $\mathrm{SO}(2m_i)$ avec le groupe des automorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de T_{M_i,m_i}, où $\mathbb{K}$ est le corps des quaternions, supposé agir sur T_{M_i,m_i} de façon compatible avec la métrique, au sens où g_i est invariante sous les trois structures complexes I, J, K données par l'action de $\mathbb{K}$ (on a $IJ = -JI = K$).

Les variétés à holonomie $\mathrm{Sp}(m_i')$ sont des composantes symplectiques holomorphes de la décomposition de de Rham, ce qui signifie qu'elles possèdent une 2-forme holomorphe partout non dégénérée. En effet, si I est la structure complexe initiale, la structure pseudocomplexe J parallèle déduite de l'action parallèle de $\mathbb{K}$ sur T_{M_i} fournit une 2-forme Ω de type $(2, 0)$ (relativement à I) sur M_i par la formule :

$$\Omega(u, v) = h(u, Jv) \tag{1.2.8}$$

où h est la métrique I-hermitienne correspondant à g_i. Comme Ω est de type $(2, 0)$ et parallèle, donc fermée, elle est holomorphe et on voit facilement qu'elle est n'est pas dégénérée. La proposition suivante montre enfin que l'holonomie contrôle les formes holomorphes sur les variétés kählériennes à courbure de Ricci nulle (ce qui entraîne en particulier la réciproque à l'assertion précédente) :

Proposition 1.7 (Bochner). — *Soit M une variété kählérienne compacte à courbure de Ricci nulle ; alors une section de $\Omega_M^{p,0}$ est parallèle si et seulement si elle est holomorphe.*

Elle entraîne que les variétés M à holonomie $\mathrm{SU}(m)$ où $m = \dim M$, satisfont la condition $h^0(\Omega_M^p) = 0$ pour $0 < p < m$ (en effet l'existence d'une forme holomorphe de degré intermédiaire restreindrait le groupe d'holonomie).

De façon similaire, les variétés M de dimension complexe $m = 2m'$ et à holonomie $\mathrm{Sp}(m')$ satisfont la condition $h^0(\Omega_M^2) = 1$. Ces variétés sont aussi appelées *variétés hyperkählériennes* car la structure quaternionique fournit une famille continue de structures complexes pour laquelle la métrique g initiale reste kählérienne.

Enfin, cette proposition montre que l'holonomie globale d'une variété kählérienne M à courbure de Ricci nulle est contenue dans $\mathrm{SU}(n)$ si et seulement si M possède une n-forme différentielle holomorphe partout non nulle, c'est-à-dire si le fibré canonique de M est trivial.

Définition 1.8. — On dit que X est une *variété de Calabi-Yau* si X est compacte kählérienne à fibré canonique trivial.

Dans les chapitres suivants, on considérera uniquement les variétés de Calabi-Yau à holonomie :

$$\mathrm{SU}(n), \quad n = \dim X > 2.$$

D'après ce qui précède, ces variétés satisfont la condition

$$h^0(\Omega_X^2) = 0$$

et la théorie de Hodge montre alors que

$$H^{1,1}(X) = H^2(X, \mathbb{C}).$$

Le cône de Kähler est alors ouvert dans $H^2(X, \mathbb{R})$ d'après le lemme 1.1. Il contient donc des classes entières et le théorème de plongement de Kodaira montre que ces variétés sont algébriques.

1.3. Lissité de la famille locale de déformations

On esquisse la preuve du théorème suivant, dû à Bogomolov [4], Tian [18], Todorov et récemment redémontré à l'aide d'un formalisme plus algébrique par Ran [15].

Théorème 1.9. — *Soit X une variété kählérienne compacte à fibré canonique trivial ; alors la famille universelle locale des déformations de X est lisse.*

Soit J l'opérateur de structure complexe de X. Il définit une décomposition :

$$T_X \otimes \mathbb{C} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}. \tag{1.3.9}$$

Une petite déformation J_t de la structure pseudocomplexe J détermine une section α_t de $T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$ de la façon suivante : à J_t correspond une décomposition

$$T_X \otimes \mathbb{C} = T_{X_t}^{1,0} \oplus T_{X_t}^{0,1}. \tag{1.3.10}$$

Notant pr_1 et pr_2 les projections induites par (1.3.9), on pose :

$$\alpha_t = \mathrm{pr}_{1\,|\,T_{X_t}^{0,1}} \circ \left(\mathrm{pr}_{2\,|\,T_{X_t}^{0,1}}\right)^{-1} \in \mathrm{Hom}(T_X^{0,1}, T_X^{1,0}). \tag{1.3.11}$$

1.3.1. Condition d'intégrabilité

Par définition, les champs de vecteurs de type $(0,1)$ pour J_t sont de la forme :

$$\chi + \alpha_t(\chi), \quad \chi \in T_X^{0,1}. \tag{1.3.12}$$

La condition d'intégrabilité pour J_t s'écrit

$$\big[T_{X_t}^{0,1}, T_{X_t}^{0,1}\big] \subset T_{X_t}^{0,1}, \tag{1.3.13}$$

c'est-à-dire :

$$\big[\chi + \alpha_t(\chi), \chi' + \alpha_t(\chi')\big] \in T_{X_t}^{0,1}, \quad \forall \chi, \chi' \in T_X^{0,1}. \tag{1.3.14}$$

Pour que la propriété (1.3.14) soit vraie pour tous les champs de type $(0,1)$ sur X, il suffit qu'elle soit vraie pour des champs

$$\chi = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \quad \chi' = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},$$

correspondant à des coordonnées holomorphes locales z_i pour $i = 1, \ldots, n$. Mais on a alors :

$$\begin{aligned}
&[\chi, \chi'] = 0,\\
&\big[\chi, \alpha_t(\chi')\big] = \bar{\partial}_{z_i}\Big(\alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)\Big) \in T_X^{1,0},\\
&\big[\alpha_t(\chi'), \chi\big] = -\bar{\partial}_{z_j}\Big(\alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)\Big) \in T_X^{1,0}.
\end{aligned}$$

Finalement $[\alpha_t(\partial/\partial\bar{z}_i), \alpha_t(\partial/\partial\bar{z}_j)] \in T_X^{1,0}$ par l'intégrabilité de la structure pseudo-complexe J. Pour que (1.3.14) soit satisfait, il faut donc que pour tous i, j, on ait :

$$\bar{\partial}_{z_i}\Big(\alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)\Big) - \bar{\partial}_{z_j}\Big(\alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big)\Big) = -\Big[\alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\Big), \alpha_t\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)\Big], \tag{1.3.15}$$

ce qui s'écrit de façon compacte sous la forme :

$$\bar{\partial}\alpha_t = -\big[\alpha_t, \alpha_t\big]. \tag{1.3.16}$$

Supposons maintenant que α_t soit développable en série entière de t :

$$\alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots.$$

Si on suppose $J_0 = J$, on a $\alpha_0 = 0$ et l'équation (1.3.16), considérée au premier ordre, fournit la condition :

$$\bar{\partial}\alpha_1 = 0. \tag{1.3.17}$$

On s'intéresse aux déformations de la structure complexe modulo l'action des difféomorphismes de X ; il est immédiat de vérifier que l'action infinitésimale de ces difféomorphismes modifie α_1 par l'ajout d'un terme de la forme $\bar{\partial}\chi$, où χ est une section arbitraire de $T_X^{1,0}$. On a donc :

Proposition 1.10. — *Les déformations au premier ordre de la structure complexe J sont paramétrées par le groupe de cohomologie de Dolbeault* :

$$H^1(T_X) = \operatorname{Ker}\Bigl(\bar\partial : T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,1} \to T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,2}\Bigr)\Big/\operatorname{Im}\Bigl(\bar\partial : T_X^{1,0} \to T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,1}\Bigr).$$

Pour montrer la lissité, il suffit, par des principes généraux dus à Kodaira et Artin, de prouver que pour toute classe $\bar\alpha_1 \in H^1(T_X)$, il existe une série formelle $t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots$ solution de (1.3.16), où $\alpha_1 \in T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,1}$ est $\bar\partial$-fermée et représente $\bar\alpha_1$.

Supposons qu'on ait trouvé

$$\alpha_t^n = t\alpha_1 + \cdots + t^n\alpha_n$$

satisfaisant (1.3.16) à l'ordre n ; on cherche alors α_{n+1} telle que

$$\alpha_t^{n+1} = t\alpha_1 + \cdots + t^{n+1}\alpha_{n+1}$$

satisfasse (1.3.16) à l'ordre $n+1$, ce qui équivaut à la condition :

$$\bar\partial\alpha_{n+1} = -\sum_{i\le n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]. \tag{1.3.18}$$

Le second terme est une section $\bar\partial$-fermée de $T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,2}$ et l'on doit prouver qu'elle est exacte. Le point est le suivant : K_X étant trivial, le choix d'une section holomorphe non nulle de K_X fournit par produit intérieur un isomorphisme

$$\operatorname{int} : T_X^{1,0} \cong \Omega_X^{n-1}.$$

On va montrer par récurrence l'existence de α_{n+1} satisfaisant l'équation (1.3.18) et la condition supplémentaire

$$\partial\bigl(\operatorname{int}(\alpha_{n+1})\bigr) = 0\,;$$

le fait qu'on puisse imposer $\partial(\operatorname{int}(\alpha_1)) = 0$ est une conséquence facile de la théorie de Hodge.

Utilisons maintenant :

Proposition 1.11 (Tian). — *Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in T_X^{1,0}\otimes\Omega_X^{0,1}$; alors* :

$$\begin{aligned}\operatorname{int}\bigl([\alpha_1,\alpha_2]\bigr) = \partial\bigl(\alpha_1 \bullet \operatorname{int}(\alpha_2)\bigr) - \eta\bigl(\partial\bigl(\operatorname{int}(\alpha_1)\bigr)\bigr)\wedge\operatorname{int}(\alpha_2)&\\ + \operatorname{int}(\alpha_1)\wedge\eta\bigl(\partial\bigl(\operatorname{int}(\alpha_2)\bigr)\bigr)&,\end{aligned}$$

où dans le premier terme « $\bullet$ » est donné par le produit intérieur sur $T_X^{1,0}$ et le produit extérieur sur $\Omega_X^{0,1}$ et où η est l'isomorphisme $K_X\otimes\Omega_X^{0,1} \cong \Omega_X^{0,1}$ donné par la même section de K_X.

On déduit de cette formule que si $\partial(\mathrm{int}(\alpha_i)) = 0$ pour $i \leq n$, la forme

$$\mathrm{int}\Big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\Big)$$

est ∂-exacte. Or c'est une forme de type $(n-1,2)$ qui est aussi $\bar\partial$-fermée ; la théorie de Hodge (voir [6], [21]) entraîne par l'argument ci-dessous que $\mathrm{int}\big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\big)$ est aussi $\bar\partial$-exacte. D'où l'existence d'une $(0,1)$-forme α_{n+1} à valeurs dans $T_X^{0,1}$ satisfaisant l'équation (1.3.18), définie par $\mathrm{int}(\alpha_{n+1}) = \phi$ avec

$$\bar\partial\phi = \mathrm{int}\Big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\Big). \tag{1.3.19}$$

Pour continuer la récurrence, il reste simplement à noter que la forme ϕ peut être choisie ∂-fermée, ce qui se voit de la façon suivante.

Soient Δ le laplacien (pour ∂ ou pour $\bar\partial$) associé à une métrique kählérienne sur X et qui agit sur les formes différentielles de X en préservant le type, et H le projecteur sur l'espace $\mathcal{H}$ des formes Δ-harmoniques ; on a les égalités suivantes

$$\Delta = \partial\partial^* + \partial^*\partial = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial \tag{1.3.20}$$

et des décompositions (compatibles avec la bigraduation complexe) de l'espace $\bigoplus A^{\bullet,\bullet}(X)$ des formes différentielles complexes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X en somme directe orthogonale

$$A^{\bullet,\bullet}(X) = \mathcal{H}^{\bullet,\bullet} \oplus \partial\big(A^{\bullet-1,\bullet}(X)\big) \oplus \partial^*\big(A^{\bullet+1,\bullet}(X)\big), \tag{1.3.21}$$

$$A^{\bullet,\bullet}(X) = \mathcal{H}^{\bullet,\bullet} \oplus \overline\partial\big(A^{\bullet,\bullet-1}(X)\big) \oplus \overline\partial^*\big(A^{\bullet,\bullet+1}(X)\big). \tag{1.3.22}$$

D'après (1.3.21), on a

$$H\Big(\mathrm{int}\Big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\Big)\Big) = 0$$

car $\mathrm{int}\big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\big)$ est ∂-exacte et donc, d'après (1.3.22) et le fait que cette forme, étant $\bar\partial$-fermée, est orthogonale à $\mathrm{Im}\,\bar\partial^*$

$$\mathrm{int}\Big(-\sum_{i\leq n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]\Big) = \bar\partial\psi.$$

Si l'on décompose maintenant ψ suivant (1.3.21), soit $\psi = H\psi + \partial u + \partial^* v$, on obtient :

$$\bar\partial\psi = \bar\partial\partial u + \bar\partial\partial^* v. \tag{1.3.23}$$

Mais le terme de gauche est ∂-exact, ainsi que $\bar\partial\partial u$, tandis que $\bar\partial\partial^* v \in \mathrm{Im}\,\partial^*$ car les opérateurs $\bar\partial$ et ∂^* commutent, de sorte qu'en fait $\bar\partial\partial^* v = 0$ puisque $\mathrm{Im}\,\partial$ et $\mathrm{Im}\,\partial^*$ sont en somme directe. On a donc $\bar\partial\psi = \bar\partial\partial u$ et on peut prendre $\phi = \partial u$, qui est bien ∂-fermée. □

1.3.2. La démonstration de Ran

Sa preuve est plus algébrique, mais elle utilise essentiellement les mêmes ingrédients : l'isomorphisme

$$\mathrm{int} : T_X^{1,0} \cong \Omega_X^{n-1}$$

et la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham.

Le raisonnement est le suivant. Soit $A_n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^{n+1}$, et soit $\pi : \mathcal{X}_n \to A_n$ une déformation à l'ordre n de X. On en déduit une classe d'extension $\eta \in H^1(T_{\mathcal{X}_{n-1}/A_{n-1}})$ correspondant à la suite exacte :

$$0 \to T_{\mathcal{X}_{n-1}/A_{n-1}} \longrightarrow T_{\mathcal{X}_n \mid \mathcal{X}_{n-1}} \longrightarrow \pi^*\big(T_{A_n \mid A_{n-1}}\big) \to 0. \tag{1.3.24}$$

L'obstruction (qui vit dans $H^2(T_X)$) apparaissant dans (1.3.18) à construire α_{n+1} ou encore à étendre $\pi : \mathcal{X}_n \to A_n$ en $\pi : \mathcal{X}_{n+1} \to A_{n+1}$ s'exprime simplement en considérant la suite exacte :

$$0 \to T_X \longrightarrow T_{\mathcal{X}_n/A_n} \longrightarrow T_{\mathcal{X}_{n-1}/A_{n-1}} \to 0. \tag{1.3.25}$$

La suite exacte longue associée fournit un cobord

$$\delta : H^1(T_{\mathcal{X}_{n-1}/A_{n-1}}) \longrightarrow H^2(T_X)\,;$$

cette obstruction est alors égale à $\delta(\eta)$. Le fait que $\delta(\eta) = 0$ provient maintenant de l'existence de l'isomorphisme

$$\mathrm{int}_n : T_{\mathcal{X}_n/A_n} \cong \Omega^{n-1}_{\mathcal{X}_n/A_n}$$

(comme K_X est trivial, $K_{\mathcal{X}_n/A_n}$ est trivial), et de la théorie de Hodge qui montre que les fibrés de Hodge sont compatibles aux changements de base.

1.4. Lissifiabilité des variétés de Calabi-Yau à croisements normaux

Soit X une variété de dimension n à croisements normaux, c'est-à-dire

$$X = \bigcup_{i=1}^{i=N} X_i$$

avec X_i lisse algébrique ou kählérienne de dimension n, telle que toutes les intersections $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ soient transverses : localement X est isomorphe à l'hypersurface d'équation $z_1 \cdots z_r = 0$ dans un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ pour un certain $r \leq n+1$.

Le problème que l'on considère concerne la possibilité de *lissifier* X, c'est-à-dire de trouver une variété lisse $\mathcal{X}$ et un morphisme propre et plat $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ tels que

$$X \cong \pi^{-1}(0).$$

Pour $t \neq 0$ et t petit, les fibres X_t sont alors lisses. Il existe pour cela une condition combinatoire assez simple, dégagée par Friedman [9]. Soit

$$D = \operatorname{Sing}(X)\,;$$

on construit sur D un fibré en droites $\mathcal{O}_D(-X)$ par la formule :

$$\mathcal{O}_D(-X) = \mathcal{I}_{X_1}/\mathcal{I}_D \cdot \mathcal{I}_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_D} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_D} \mathcal{I}_{X_N}/\mathcal{I}_D \cdot \mathcal{I}_{X_N}, \tag{1.4.26}$$

où les faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}_{X_i}$ et $\mathcal{I}_D$ sont définis de la manière suivante. Soit $x \in X$ et soit $x \in U \subset X$ un ouvert isomorphe à un voisinage de 0 dans l'hypersurface définie par $z_1 \cdots z_{r(x)}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, l'isomorphisme envoyant x sur 0. Alors $\mathcal{I}_D$ est engendré au voisinage de x par les fonctions $z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_{r(x)}$ pour $i \leq r(x)$, et $\mathcal{I}_{X_i}$ est engendré au voisinage de x par 1 si $x \notin X_i$, et par $z_{k(i)}$ sinon, où $k(i) \leq r(x)$ est défini par la condition « $z_{k(i)}$ s'annule sur l'image de $X_i \cap U$ ».

Si $X \subset Y$ est une hypersurface, avec Y lisse, on a :

$$\mathcal{O}_D(-X) \cong \mathcal{O}_Y(-X)_{|D}.$$

On en déduit :

Proposition 1.12 (Friedman). — *Une condition nécessaire pour la lissifiabilité de X est $\mathcal{O}_D(-X) \cong \mathcal{O}_D$.*

Lorsque cette condition est satisfaite on dit que X est *d-semi-stable*. La variété X à croisements normaux a un fibré canonique inversible puisqu'elle est localement intersection complète. On suppose maintenant $K_X \cong \mathcal{O}_X$. On a :

Théorème 1.13 (Kawamata-Namikawa [11]). — *Soit X une variété à croisements normaux, à fibré canonique trivial, d-semi-stable, et satisfaisant les conditions* :

- $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = \{0\}$;
- $H^{n-2}\big(X^{[0]}, \mathcal{O}_{X^{[0]}}\big) = \{0\}$ *où* $X^{[0]} := \bigsqcup X_i$.

Alors X est lissifiable.

L'idée est d'introduire la notion de *structure logarithmique* sur X, c'est-à-dire un recouvrement U_λ d'un voisinage de $\mathrm{Sing}(X)$ dans X et pour chaque λ, des fonctions $z_1^\lambda, \ldots, z_{n+1}^\lambda$ sur U_λ, telles que z_i^λ soit inversible pour $i > r(\lambda)$ et qu'il existe une immersion $\phi : U_\lambda \to \mathbb{C}^{n+1}$ réalisant U_λ comme un voisinage de zéro dans l'hypersurface $z_1 \cdots z_{r(\lambda)} = 0$, avec $z_i^\lambda = \phi^*(z_i)$ pour $i \leq r(\lambda)$. On demande de plus que sur $U_\lambda \cap U_\mu$ on ait pour une certaine permutation σ de $\{1, \ldots, n+1\}$, $z_i^\lambda = u_{\lambda\mu}^i z_{\sigma(i)}^\mu$ pour $i \leq n+1$ avec la condition « $u_{\lambda\mu}^i$ est inversible et $\prod_i u_{\lambda\mu}^i = 1$ ».

Une telle structure logarithmique existe si et seulement si X est d-semi-stable (*cf.* [11]). On a la notion de déformation logarithmique (comme il est usuel, on notera $\mathcal{X}$ une famille de déformations et X sa fibre centrale).

Soient $D_1, \ldots, D_m$ les composantes connexes de D. Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre locale artinienne et s_i pour $i = 1, \ldots, m$ des éléments de l'idéal maximal M_A de A. La donnée de $s_i \in M_A$ équivaut à la donnée d'une structure de $\mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_m]]$-algèbre sur A. On dit que

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

est une *déformation logarithmique de X paramétrée par $s_1, \ldots, s_m$* si π est plate, $X \cong \pi^{-1}(0)$ et s'il existe un recouvrement ouvert U_λ d'un voisinage de D dans $\mathcal{X}$ et des fonctions $z_1^\lambda, \ldots, z_{n+1}^\lambda$ sur U_λ, satisfaisant l'équation

$$\prod_i z_i^\lambda = s_i \quad \text{pour } U_\lambda \cap D_i \neq \emptyset.$$

On impose la même condition que ci-dessus pour le passage de U_λ à U_μ. Ces données doivent induire la structure logarithmique initiale sur X.

Kawamata et Namikawa montrent que sous les hypothèses du théorème, le foncteur de déformation logarithmique, défini sur la catégorie des $\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_m]]$-algèbres locales artiniennes est non obstrué, ce qui signifie *grosso modo* qu'il est «représentable» par un schéma formel lisse au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_m]]$. Ceci entraîne la lissifiabilité (en admettant qu'on peut passer de la catégorie formelle à la catégorie analytique), car si on a une déformation logarithmique analytique $\mathcal{X}\to B\to V$ au-dessus d'un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{C}^m$, où la seconde application est une submersion, un point $s\in B$ au dessus d'un point $t\in V$ suffisamment proche de zéro et satisfaisant $t_i\neq 0$ pour tout $i\leq m$ paramètre une fibre X_s lisse.

La preuve de la lissité est très semblable à celle de Ran. Une structure logarithmique sur la variété à croisements normaux X permet de construire un complexe de formes logarithmiques $\Omega_X^\bullet(\log)$ qui satisfait la condition :

$$\bigwedge^n\bigl(\Omega_X(\log)\bigr)\cong K_X\cong \mathcal{O}_X\,. \tag{1.4.27}$$

Avec les notations précédentes, $\Omega_X(\log)$ est le $\mathcal{O}_X$-module libre engendré dans les ouverts U_λ par Ω_{U_λ} et par les $\mathrm{d}z_i^\lambda/z_i^\lambda$ pour $i\leq n+1$, avec la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n+1}\frac{\mathrm{d}z_i^\lambda}{z_i^\lambda}=0.$$

(Sur $U=X-\operatorname{Sing}(X)$, il est simplement égal à Ω_U.) On pose :

$$\Omega_X^k(\log)=\bigwedge^k\Omega_X(\log).$$

Ces complexes ont une suite spectrale de Hodge vers de Rham qui dégénère en E_1 ; d'autre part les déformations logarithmiques du premier ordre sont paramétrées par $H^1(T_X(\log))$ où $T_X(\log)$ est le fibré dual de $\Omega_X(\log)$, avec obstruction dans $H^2(T_X(\log))$. La trivialité de K_X donne un isomorphisme :

$$T_X(\log)\cong\Omega_X^{n-1}(\log). \tag{1.4.28}$$

Comme dans la preuve de Ran, le point essentiel pour obtenir la lissité consiste alors à prouver que pour une déformation logarithmique $\pi:\mathcal{X}\to B$ de X, le faisceau

$$R^1\pi_*T_{\mathcal{X}/B}(\log)$$

est localement libre sur B, où $T_{\mathcal{X}/B}(\log)\cong(\Omega_{\mathcal{X}/B}(\log))^*$ est la version relative des faisceaux décrits ci-dessus. Mais c'est une conséquence de l'isomorphisme

$$T_{\mathcal{X}/B}(\log)\cong\Omega^{n-1}_{\mathcal{X}/B}(\log)$$

et de la proposition suivante, due à Steenbrink, qui est une conséquence de la théorie de Hodge mixte.

Proposition 1.14. — *Si $\pi:\mathcal{X}\to B$ est une déformation logarithmique de X, les faisceaux $R^\ell\pi_*\Omega^k_{\mathcal{X}/B}(\log)$ sont localement libres sur B.*

1.5. L'application des périodes

1.5.1. Système local et filtration de Hodge

Soit $\pi : X \to B$ une famille propre et lisse, à fibres projectives ou kählériennes de dimension n. Pour tout $b \in B$, on notera :

$$X_b := \pi^{-1}(b).$$

L'image directe $R^n\pi_*\mathbb{Z}$ est un système local sur B ; localement $R^n\pi_*\mathbb{Z} \cong H^n(X_0, \mathbb{Z})$, donné par une trivialisation $\mathcal{C}^\infty : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$.

On note $\mathcal{H}^n$ le fibré holomorphe $R^n\pi_*\mathbb{Z} \otimes \mathcal{O}_B$.

Il est muni de la connexion intégrable de Gauss-Manin ∇ pour laquelle les sections parallèles sont les sections de $R^n\pi_*(\mathbb{C})$.

Sur $H^n(X_b, \mathbb{C})$, on a la décomposition de Hodge

$$H^n(X_b, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X_b) \tag{1.5.29}$$

avec $H^{p,q}(X_b) \cong H^q(X_b, \Omega^p_{X_b})$. Soit :

$$F^pH^n(X) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,n-r}(X).$$

On a alors :

Théorème 1.15 (Griffiths [10]). — *La donnée de $F^pH^n(X_b) \subset H^n(X_b, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^n_{(b)}$ pour tout b dans B définit un sous-fibré holomorphe $F^p\mathcal{H}^n \subset \mathcal{H}^n$.*

Notons que le rang de $F^pH^n(X_b)$ est indépendant de b, l'argument étant que les nombres $h^{p,q}(X_b)$ sont semi-continus inférieurement sur B tandis que leur somme pour $p + q = k$ est constante, égale au nombre de Betti $b_k(X_b)$. Ceci suffit à entraîner que le sous-espace $F^pH^n(X_b) \subset H^n(X_b, \mathbb{C})$ varie de façon $\mathcal{C}^\infty$ par la théorie de Hodge (*cf.* [6]).

La preuve de Griffiths est la suivante. On note tout d'abord qu'on peut trivialiser de façon $\mathcal{C}^\infty$ la famille $\mathcal{X}$ au-dessus de B

$$\mathcal{X} \cong X_0 \times B$$

pour un petit voisinage B de 0, de sorte que les fibres de l'application induite $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{X} \to X_0$ sont des sous-variétés complexes de $\mathcal{X}$ (cet énoncé est prouvé par exemple dans la seconde partie de [10]).

Si $\eta = (\eta_b)_{b \in B}$ est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré de fibre $F^pH^n(X_b)$, on peut par la théorie de Hodge la représenter par une famille $\tilde{\eta}_b$ de formes différentielles sur les fibres, variant de façon $\mathcal{C}^\infty$, et telle que $\tilde{\eta}_b$ soit de type $(n, 0) + \cdots + (p, n - p)$ sur X_b.

L'hypothèse faite sur la trivialisation entraîne alors que la forme $\tilde{\eta}$ induite sur $\mathcal{X}$, de restriction $\tilde{\eta}_b$ sur X_b et de produit intérieur avec les vecteurs tangents horizontaux nuls, est de type $(n,0)+\cdots+(p,n-p)$ sur $\mathcal{X}$. Le théorème résulte alors de la formule de Cartan-Lie, qui calcule $\nabla_\chi\eta(0)$, pour χ un champ tangent à B par

$$\nabla_\chi\eta(0) = \text{classe de } \mathrm{int}_{\widetilde{\chi}}(\mathrm{d}\tilde{\eta})_{|X_0} \text{ dans } H^n(X_0,\mathbb{C}), \tag{1.5.30}$$

où $\widetilde{\chi}$ est le relèvement horizontal de χ sur $\mathcal{X}$. En effet, si χ est de type $(0,1)$ sur B, $\widetilde{\chi}$ est de type $(0,1)$ sur $\mathcal{X}$, grâce à l'hypothèse faite sur la trivialisation, de sorte que $\mathrm{int}_{\widetilde{\chi}}(\mathrm{d}\tilde{\eta})_{|X_0}$ est une forme (fermée) de type $(n,0)+\cdots+(p,n-p)$, et donc de classe dans $F^pH^n(X_0)$.

Une façon plus algébrique de voir ce théorème consiste à introduire le complexe de de Rham holomorphe relatif

$$\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B} = \bigoplus \bigwedge^k \Omega_{\mathcal{X}/B}$$

muni de la différentielle verticale. On a

$$\mathbb{R}^n\pi_*(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B}) = \mathcal{H}^n,$$

car ce complexe est une résolution de $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$. On a alors

$$F^p\mathcal{H}^n = \mathbb{R}^n\pi_*\big(0 \to \bigwedge^p \Omega_{\mathcal{X}/B} \to \cdots \to \bigwedge^n \Omega_{\mathcal{X}/B} \to 0\big), \tag{1.5.31}$$

ce qui rend évident le caractère holomorphe de la filtration de Hodge. $\square$

On a de plus :

Théorème 1.16 (Griffiths [10]). — *La connexion de Gauss-Manin satisfait la condition de transversalité :*

$$\nabla F^p\mathcal{H}^n \subset F^{p-1}\mathcal{H}^n \otimes \Omega_B.$$

En reprenant la construction et les notations de la preuve à la Griffiths du théorème 1.15, ceci résulte encore de la formule (1.5.30). Prenons maintenant χ de type $(1,0)$ sur B : comme $\tilde{\eta}$ est de type $(n,0)+\cdots+(p,n-p)$ sur $\mathcal{X}$, la forme $\mathrm{int}_{\widetilde{\chi}}(\mathrm{d}\tilde{\eta})_{|X_0}$ est de type $(n,0)+\cdots+(p-1,n-p+1)$ sur X_0, ce qui montre que $\nabla_\chi\eta(0)$ est bien dans $F^{p-1}H^n(X_0)$.

Comme ci-dessus, ce théorème peut aussi se voir plus algébriquement en notant que ∇ peut se construire de la façon suivante. On a la suite exacte

$$0 \to \Omega^{\bullet-1}_{\mathcal{X}/B} \otimes \pi^*\Omega_B \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}/\pi^*\Omega^2_B \wedge \Omega^{\bullet-2}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B} \to 0 \tag{1.5.32}$$

et ∇ s'obtient simplement comme la flèche $\mathbb{R}^n\pi_*(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{R}^n\pi_*(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B})\otimes\Omega_B$ fournie par la suite exacte longue associée à (1.5.32). $\square$

1.5.2. Différentielle de l'application des périodes

L'application des périodes $\mathcal{P}$ associe à un élément b de B le drapeau :

$$F^pH^n(X_b) \subset H^n(X_b,\mathbb{C}) \cong H^n(X_0,\mathbb{C}).$$

Sa différentielle est donc décrite par une série d'applications

$$\phi_p : T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(F^pH^n(X_b), H^n(X_b,\mathbb{C})/F^pH^n(X_b)\big)$$

satisfaisant les conditions de compatibilité évidentes :

$$\phi_{p|F^{p+1}H^n(X_b)} = \phi_{p+1} \mod F^pH^n(X_b).$$

En termes de connexion, ϕ_p est obtenue à l'aide du composé

$$F^p\mathcal{H}^n \subset \mathcal{H}^n \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^n \otimes \Omega_B \longrightarrow \mathcal{H}^n/F^p\mathcal{H}^n \otimes \Omega_B, \tag{1.5.33}$$

qui est une application $\mathcal{O}_B$-linéaire. Par transversalité, on trouve que $\mathrm{Im}\,\phi_p(T_{B(b)})$ se factorise à travers le quotient $(F^p\mathcal{H}^n/F^{p+1}\mathcal{H}^n)_b = H^{n-p}(\Omega^p_{X_b})$ et qu'elle est à valeurs dans $(F^{p-1}\mathcal{H}^n/F^p\mathcal{H}^n)_b = H^{n-p+1}(\Omega^{p-1}_{X_b})$. On a alors :

Théorème 1.17 (Griffiths [10]). — *La flèche*

$$\phi_p : T_{B(b)} \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(H^{n-p}(\Omega^p_{X_b}), H^{n-p+1}(\Omega^{p-1}_{X_b})\big)$$

construite ci-dessus est égale à la composée :

$$T_{B(b)} \xrightarrow{\rho} H^1(T_{X_b}) \xrightarrow{\text{prod. int.}} \mathrm{Hom}\big(H^{n-p}(\Omega^p_{X_b}), H^{n-p+1}(\Omega^{p-1}_{X_b})\big) \tag{1.5.34}$$

où ρ est l'application de Kodaira-Spencer classifiant les déformations infinitésimales.

Dans la preuve de Griffiths, ceci se voit en notant que l'application de Kodaira-Spencer (*cf.* proposition 1.10)

$$\rho : T_{B,b} \longrightarrow H^1(T_{X_b})$$

se réalise avec les notations introduites dans le § 1.5.1, en associant à χ, un champ holomorphe sur B, la forme $\bar\partial\widetilde{\chi}_{|X_b}$, qui est une $(0,1)$-forme à valeurs dans T_{X_b}, et en analysant la composante de type $(p-1, n-p+1)$ de la forme $\mathrm{int}_{\widetilde{\chi}}(\mathrm{d}\tilde\eta)_{|X_b}$.

Dans la version algébrique, ce résultat se voit en remarquant que ρ est la flèche de cobord associée à la suite exacte

$$0 \to T_{X_b} \longrightarrow T_{\mathcal{X}|X_b} \longrightarrow \pi^*(T_{B(b)}) \to 0 \tag{1.5.35}$$

et en utilisant la description (1.5.32) de ∇. $\square$

Corollaire 1.18. — *Soient X une variété de Calabi-Yau de dimension n et $\mathcal{M}$ la famille universelle locale des déformations de X ; alors l'application des périodes $\mathcal{P}$ définie sur $\mathcal{M}$, à valeurs dans une variété de drapeaux sur $H^n(X)$, est une immersion.*

En effet la première composante ϕ_n (où $n = \dim X$) de $\mathrm{d}\mathcal{P}$ est égale, d'après le théorème 1.5.3, à la flèche

$$H^1(T_{X_b}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(H^0(K_{X_b}), H^1(\Omega^{n-1}_{X_b})\big) \tag{1.5.36}$$

donnée par le produit intérieur. Comme K_{X_b} est trivial, cette flèche est clairement un isomorphisme.

1.5.3. Domaine des périodes local

La décomposition de Hodge $H^n = \bigoplus H^{p,q}$ est sujette à des conditions supplémentaires liées à la forme d'intersection $\langle\ ,\ \rangle$ sur $H^n(X)$. Celle-ci est entière, unimodulaire symétrique si n est pair, antisymétrique sinon. On a alors :

(i) $H^{p,q} \perp H^{p',q'}$ si $p + p' \neq n$;

(ii) la forme hermitienne

$$(\eta, \eta') = (-1)^{n(n-1)/2} i^{p-q} \langle \eta, \bar{\eta}' \rangle$$

est définie positive sur $H^{p,q}_{\mathrm{prim}}$ lorsque $p + q = n$.

Ici on suppose X algébrique, munie d'une classe de Kähler entière ω. On a alors le théorème fort de Lefschetz, qui dit que

$$\omega^{n-k} : H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2n-k}(X, \mathbb{Q}), \tag{1.5.37}$$

est un isomorphisme (de structures de Hodge), et la décomposition de Lefschetz qui en découle :

$$H^s(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{2r \leq s} \omega^r \wedge H^{s-2r}(X, \mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} \tag{1.5.38}$$

où

$$H^k(X, \mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Ker}(\omega^{n-k+1}) \subset H^k(X, \mathbb{Q}).$$

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3 avec $H^1(X) = \{0\}$, on a :

$$H^3(X) = H^3(X)_{\mathrm{prim}}.$$

Ayant fixé une polarisation, c'est-à-dire une classe ω comme ci-dessus (qui ne dépendra pas de b et devra donc être pour tout b une classe de Kähler sur X_b), on travaille avec l'application des périodes polarisée, c'est-à-dire avec la variation de structure de Hodge sur H^n_{prim}.

Le domaine des périodes local $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des filtrations de rang correct sur $H^n(X, \mathbb{C})_{\mathrm{prim}}$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) ci-dessus, avec

$$H^{p,q} = F^p H^n \cap \overline{F^q H^n}$$

et la condition :

(iii) $F^p H^n \cap \overline{F^{q+1} H^n} = \{0\}$ si $p + q = n$.

1.5.4. Domaine des périodes global

Si on considère des familles $\pi : \mathcal{X} \to B$ où B n'est pas simplement connexe, on ne peut pas trivialiser globalement $R^n\pi_*\mathbb{Z}$. On a une opération de monodromie :

$$\rho : \pi_1(B, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(H^n(X_b, \mathbb{Z}), \langle\ ,\ \rangle\big) =: \Gamma \tag{1.5.39}$$

obtenue en trivialisant la famille $\mathcal{X}$ de façon $\mathcal{C}^\infty$ le long de chemins dans B. On a une action évidente $F^\bullet \mapsto \phi(F^\bullet)$ de Γ sur $\mathcal{D}$ pour $\phi \in \Gamma$ et on peut quand même définir l'application des périodes :

$$\mathcal{P} : B \to \mathcal{D}/\Gamma. \tag{1.5.40}$$

***Remarque 1.19.* —** En général $\mathcal{P}$ ne peut pas être surjective à cause de la condition de transversalité (théorème 1.16) qui entraîne :

$$\mathcal{P}_*(T_B) \subset T_{\mathcal{D},\mathrm{hor}} := \bigoplus \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1}). \tag{1.5.41}$$

1.6. Variétés de Calabi-Yau de dimension 3

Bryant et Griffiths [1] analysent la condition de transversalité dans ce cas : on se donne le réseau $H^3(X,\mathbb{Z})$ muni de sa forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$. On considère l'application des périodes pour les formes holomorphes, c'est-à-dire la flèche :

$$b \in B \longmapsto H^{3,0}(X_b) \subset H^3(X_0,\mathbb{C}).$$

Comme le rang de $H^{3,0}$ est égal à 1, c'est une application à valeurs dans $\mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$. La filtration de Hodge

$$\mathcal{H}^{3,0} \subset F^2\mathcal{H}^3 \subset F^1\mathcal{H}^3 \subset F^0\mathcal{H}^3 = H^3(X_0,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_B \tag{1.6.42}$$

satisfait les conditions :

(a) $F^2\mathcal{H}^3_b$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $H^3(X_b,\mathbb{C}) \cong H^3(X_0,\mathbb{C})$ (voir 1.5.3 (i)).

(b) $\mathrm{d}(\mathcal{H}^{3,0}) \subset F^2\mathcal{H}^3$ par transversalité (théorème 1.16), où $\mathrm{d}(\mathcal{H}^{3,0})$ est le sous-fibré de $\mathcal{H}^3$ engendré sur $\mathcal{O}_B$ par les dérivées des sections holomorphes de $\mathcal{H}^{3,0}$ par rapport aux champs holomorphes sur B ;

(c) en fait, on a $\mathrm{d}(\mathcal{H}^{3,0}) = F^2\mathcal{H}^3$ du fait que K_{X_b} est trivial (voir la preuve du corollaire 1.18) ;

(d) $F^1\mathcal{H}^3 = \mathcal{H}^{3,0\perp}$ (voir 1.5.3 (i)).

1.6.1. Structure de contact sur $\boldsymbol{P(H^3(X_0},\mathbb{C}))$

Décrivons maintenant la construction de Bryant et Griffiths. La forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$ munit $\mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$ d'une structure de contact, c'est-à-dire d'une distribution de codimension 1 définie localement par une 1-forme α, définie à multiplication par une fonction non-nulle près, satisfaisant la condition $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^N \neq 0$, où $2N+1 = \dim \mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$. On a

$$T_{\mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C})),\Omega} \cong H^3(X_0,\mathbb{C})/\langle\Omega\rangle$$

et α_Ω est simplement la forme $\langle\Omega,\cdot\rangle$ sur $H^3(X_0,\mathbb{C})/\langle\Omega\rangle$ (qui dépend bien sûr du choix de Ω dans la droite $\langle\Omega\rangle \in \mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$). On a :

***Lemme 1.20.* —** *Soit $Z \subset \mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$ une variété intégrale de la structure de contact (i.e. telle que $\alpha_{|Z} = 0$) ; alors $\dim Z \leq N$ et pour tout $z \in Z$, $T_{Z,z} \subset z^\perp/\langle z\rangle$ est totalement isotrope pour la forme symplectique induite par $\langle\ ,\ \rangle$.*

En effet, $\alpha_{|Z} = 0$ implique $\mathrm{d}\alpha_{|Z} = 0$ et il est immédiat de vérifier qu'en tout point $\Omega \in \mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C}))$ on a la relation : « $\mathrm{d}\alpha_{(\Omega)}{}_{|\{\alpha=0\}}$ (où $\{\alpha=0\} \subset T_{\mathbb{P}(H^3(X_0,\mathbb{C})),\Omega}$ est l'hyperplan déterminé par α_Ω est égale à la forme symplectique induite par $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\Omega^\perp/\langle\Omega\rangle$) ». Comme $T_{Z,\Omega} \subset \Omega^\perp/\langle\Omega\rangle$ est totalement isotrope pour cette forme symplectique, on a bien $\dim Z \leq N$. $\square$

Supposons qu'on ait une variété intégrale Z de la structure de contact de dimension N. Pour $z \in Z$, on pose :

$$H^{3,0} = F^3H^3 = \langle z \rangle, \quad F^2H^3 = \langle z, T_{Z,z} \rangle, \quad F^1H^3 = z^{\perp}. \tag{1.6.43}$$

Lemme 1.21. — *La formule* (1.6.43) *définit une variation de structure de Hodge de poids* 3 *avec* $h^{3,0} = 1$, *sur l'ouvert où* Z *est lisse et où la filtration* (1.6.42) *satisfait la condition de polarisation* 1.5.3 (ii).

En effet, les conditions de polarisation 1.5.3 (i) sont satisfaites grâce au lemme 1.20. Les espaces F^2H^3/F^3H^3 et F^1H^3/F^2H^3 ont la dimension correcte N car $\dim Z = N$. D'autre part, par définition de F^2H^3, la première condition de transversalité $\mathrm{d}(H^{3,0}) \subset F^2H^3$ est satisfaite et il suffit de prouver qu'il en est de même de la seconde condition de transversalité $\mathrm{d}(F^2H^3) \subset F^1H^3$. Mais en prenant des coordonnées x_i sur Z et un relèvement $z \mapsto \tilde{z}$ avec $\tilde{z} \in H^3(X_0, \mathbb{C})$, on a $\langle \tilde{z}, \partial/\partial x_i(\tilde{z}) \rangle = 0$. Si on dérive par rapport à x_j, sachant que

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{z}), \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{z}) \Big\rangle = 0 \quad \text{(lemme 1.20)},$$

on obtient

$$\Big\langle \tilde{z}, \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(\tilde{z}) \Big\rangle = 0,$$

ou encore $\mathrm{d}(F^2H^3) \subset F^1H^3$. $\square$

Les variations de structure de Hodge de variétés de Calabi-Yau de dimension 3, et plus généralement les variations de structure de Hodge de dimension maximale, de poids 3 avec $h^{3,0} = 1$, fournissent inversement, d'après les conditions (a) et (c) ci-dessus, des variétés intégrales de la structure de contact sur $\mathbb{P}(H^3(X_0, \mathbb{C}))$. D'après (b) et (d), une telle variation de structure de Hodge est nécessairement construite comme en (1.6.43), à partir de la variété intégrale associée.

Ces variétés intégrales sont par ailleurs faciles à construire : on peut construire une application birationnelle préservant les structures de contact entre $\mathbb{P}(V)$, pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension $2N+2$ muni d'une structure symplectique et $\mathbb{P}(\Omega_M)$ où $M = \mathbb{P}(W)$, W étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $N+2$ et la structure de contact sur $\mathbb{P}(\Omega_M)$ étant donnée par la 1-forme tautologique. Les variétés intégrales de dimension maximale de la structure de contact sur $\mathbb{P}(\Omega_M)$ se projetant de façon immersive sur M sont simplement obtenues localement en partant d'une hypersurface $f = 0$ dans M et en lui associant $Z = \{(x, \mathrm{d}f_x),\ f(x) = 0\}$.

1.7. Exemples de variétés de Calabi-Yau

1.7.1. Intersections complètes

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ définie par les équations $F_1 = \cdots = F_k = 0$ avec $k \leq n$ et $\deg(F_i) = d_i$. Pour un choix générique des F_i, la variété X est lisse de dimension $(n-k)$; le fibré canonique de X se calcule par la formule d'adjonction. La suite exacte

$$0 \to T_X \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n|X} \longrightarrow \bigoplus_{i \leq k} \mathcal{O}_X(d_i) \to 0 \tag{1.7.44}$$

montre que :

$$K_X = K_{\mathbb{P}^n|X}\big(\textstyle\sum d_i\big).$$

Or $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$, par la suite exacte d'Euler :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\big)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n} \to 0. \tag{1.7.45}$$

Donc K_X est trivial lorsque $\sum d_i = n+1$. Par le théorème de Lefschetz ces variétés satisfont :

$$H^0(\Omega^i_X) = \{0\} \quad \text{pour} \quad 0 < i < n-k.$$

Lorsque $n-k \neq 2$, on peut montrer que l'on construit ainsi une famille complète de déformations. On peut également faire cette construction dans des espaces projectifs inhomogènes à singularités isolées et plus généralement dans des variétés toriques de Fano (voir le chapitre 4).

1.7.2. Quotients et désingularisations

Cette construction est valable surtout en dimension 3 (le point est de désingulariser en préservant la condition $K_X \cong \mathcal{O}_X$) ; on se contentera de l'exemple suivant. Soit X une variété de Calabi-Yau de dimension 3, i une involution sur X, agissant trivialement sur la forme de type $(3,0)$ de X. Les points fixes de i forment alors une union de courbes lisses disjointes C_k ; on a alors :

Lemme 1.22. — *L'éclaté $\widetilde{X/i}$ de X/i le long de $\bigsqcup C_k$ est lisse à fibré canonique trivial.*

En effet, $\widetilde{X/i}$ est aussi le quotient de $\widetilde{X}$ (éclatement de X le long de $\bigsqcup C_k$) par le relèvement $\tilde{i}$ de i. L'involution $\tilde{i}$ a pour points fixes l'union disjointe des diviseurs exceptionnels E_k au-dessus de C_k. On a sur $\widetilde{X}$:

$$K_{\widetilde{X}} = \tau^*(K_X) + \sum E_k = \sum E_k = r^* K_{\widetilde{X/i}} + \sum E_k \tag{1.7.46}$$

où τ est l'application d'éclatement et r est l'application quotient. Donc $r^* K_{\widetilde{X/i}}$ est trivial et $K_{\widetilde{X/i}}$ est de torsion dans $\mathrm{Pic}(\widetilde{X/i})$. D'autre part, ce fibré a une section non nulle, puisque la forme de type $(3,0)$ de $\widetilde{X}$ est invariante sous $\tilde{i}$. Donc $K_{\widetilde{X/i}}$ est trivial. □

Plus généralement, Roan [16] a construit une désingularisation à fibré canonique trivial pour les quotients de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 par un groupe abélien préservant la forme de type $(3,0)$ (ce résultat a été également obtenu par Markushevich [13]).

1.8. Miroirs

Soit X une variété de Calabi-Yau de dimension $n \neq 2$, satisfaisant (*cf.* 1.2) :

$$h^i(\mathcal{O}_X) = 0, \quad 0 < i < n.$$

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_X$ des classes d'isomorphismes d'une structure complexe X_t sur X (obtenue par déformation de la structure complexe initiale) et de la donnée d'un «paramètre de Kähler complexifié» sur X_t, c'est-à-dire d'une classe

$$\omega = \alpha + i\beta \ \text{ définie modulo } 2\pi i\, H^2(X_t, \mathbb{Z}),$$

où $\beta \in H^2(X_t, \mathbb{R})$ est définie modulo $2\pi H^2(X_t, \mathbb{Z})$ et $\alpha \in H^2(X_t, \mathbb{R})$ est dans le cône de Kähler de X_t.

L'espace $\mathcal{M}_X$ est naturellement muni d'une structure locale de produit, puisque le paramètre ω varie localement dans un ouvert de $H^2(X_t, \mathbb{C})$ (lemme 1.1), et que $H^2(X_t, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel localement constant, indépendant de t.

Globalement, $\mathcal{M}_X$ n'a pas nécessairement la forme d'un produit, d'une part à cause de la monodromie qui peut agir sur $H^2(X_t, \mathbb{C})$ et d'autre part parce que le cône de Kähler peut dépendre de t (on sait cependant par [22] qu'il est localement constant sur le complémentaire d'une union dénombrable d'hypersurfaces de l'espace des modules de X).

1.8.1. Conjecture sur les miroirs

Il devrait exister une variété de Calabi-Yau X' avec $\dim X' = \dim X$ et un isomorphisme

$$M : \mathcal{M}_X \cong \mathcal{M}_{X'}$$

ayant comme principale propriété de préserver la structure locale de produit en échangeant les facteurs. De sorte que déformer X à paramètre de Kähler complexifié constant serait équivalent à déformer le paramètre de Kähler complexifié de X', la structure complexe de X' étant fixée.

Il semblerait plus prudent de supposer que cet isomorphisme miroir n'existe que sur un ouvert de Zariski du revêtement universel de $\mathcal{M}_X$ et $\mathcal{M}_{X'}$. Il faut aussi noter que la «conjecture» ne peut pas être vraie telle quelle, simplement car il existe des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 0$, et que leurs miroirs devraient être des variétés avec $h^{1,1} = 0$, donc non-kählériennes. Il n'en reste pas moins que cette prédiction des physiciens est largement confirmée, bien que non comprise mathématiquement (voir les chapitres 3 et 4).

Infinitésimalement, cette propriété de M se traduit de la façon suivante. La structure locale de produit de $\mathcal{M}_X$ provient de la décomposition naturelle

$$T_{\mathcal{M}_X,(X,\omega)} = H^1(T_X) \oplus H^1(\Omega_X), \tag{1.8.47}$$

où le premier terme décrit les déformations infinitésimales de la structure complexe (proposition 1.10) et le second terme celles du paramètre de Kähler complexifié. Alors la différentielle M_* doit se scinder en la somme directe de deux isomorphismes :

$$H^1(T_X) \cong H^1(\Omega_{X'}), \quad H^1(\Omega_X) \cong H^1(T_{X'}). \tag{1.8.48}$$

Plus généralement, on devrait avoir une série d'isomorphismes :

$$H^p(\overset{q}{\bigwedge} T_X) \cong H^p(\overset{q}{\bigwedge} \Omega_{X'}). \tag{1.8.49}$$

Comme on a $H^p(\wedge^q T_X) \cong H^p(\wedge^{n-q} \Omega_X)$ par la trivialité de K_X, on en déduit que tous les nombres de Hodge de X', et donc tous ses nombres de Betti, sont déterminés par ceux de X.

1.8.2. Un exemple

La construction qui suit a été proposée indépendamment par Borcea [5] et Voisin [20] ; (d'autres auteurs [17], [19] ont par ailleurs travaillé dans une direction semblable en étudiant la symétrie miroir pour les variétés hyperkählériennes (*cf.* 1.2) qui ne sera pas abordée dans ce texte, puisqu'on n'y considère que les variétés de Calabi-Yau X avec $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$).

Les surfaces K3, (voir [24]), sont les surfaces kählériennes simplement connexes à fibré canonique trivial. Elles forment l'une des rares classes de variétés pour lesquelles le théorème de Torelli est connu :

Théorème 1.23 (cf. [24]). — *Soit S, S' deux surfaces* K3 *telles qu'il existe un isomorphisme de structures de Hodge ϕ : $(H^2(S,\mathbb{Z}), \langle\,,\,\rangle) \cong (H^2(S',\mathbb{Z}), \langle\,,\,\rangle)$; alors S est isomorphe à S'.*

Un autre fait remarquable est la surjectivité de l'application des périodes marquées $\mathcal{P}$ qui, à S, associe la droite

$$\langle \omega_S \rangle = H^{2,0}(S) \subset H^2(S,\mathbb{C}) \cong L_{\mathbb{C}}$$

où $L_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ et $L_{\mathbb{Z}}$ est un réseau pair unimodulaire de rang 22 et de signature $(3,19)$. La classe ω_S est sujette aux conditions de polarisation $\langle \omega_S, \omega_S \rangle = 0$ et $\langle \omega_S, \overline{\omega}_S \rangle > 0$ (*cf.* 1.5.3), définissant le domaine des périodes $\mathcal{D}$ construit sur $(L, \langle\,,\,\rangle)$. On a :

Théorème 1.24 (cf. [24]). — *L'application des périodes marquées $\mathcal{P}$ est surjective.*

On considère des familles de surfaces S de type K3 obtenues comme revêtement double d'une surface rationnelle T, ramifié le long d'une courbe C. Par l'application des périodes et par la version fine du théorème de Torelli, elles sont essentiellement caractérisées par l'existence d'une involution i, agissant comme un automorphisme de la structure de Hodge sur $H^2(S,\mathbb{Z})$, de sorte que

$$i^*(\omega_S) = -\omega_S.$$

Cette involution doit alors satisfaire la condition que la signature de $\langle\,,\,\rangle_{|H^2(S,\mathbb{Z})^-}$ soit égale à $(2, \operatorname{rang} H^2(S,\mathbb{Z})^- - 2)$, où $H^2(S,\mathbb{Z})^-$ est l'ensemble des classes anti-invariantes sous i. L'involution i sur $(L_{\mathbb{Z}}, \langle\,,\,\rangle)$ étant fixée, le domaine des périodes $\mathcal{D}_i$ pour une telle famille est alors égal à $\mathcal{D} \cap \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}^-)$. La famille de surfaces K3 ainsi obtenue ne dépend que de la classe de conjugaison de i sous $\operatorname{Aut}(L_{\mathbb{Z}}, \langle\,,\rangle)$.

On associe à une telle surface S, et au choix d'une courbe elliptique E, obtenue comme le revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en quatre points et donc munie d'une involution j au-dessus de $\mathbb{P}^1$, la variété de Calabi-Yau X de dimension 3, satisfaisant $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$, obtenue par désingularisation (1.7.2) du quotient $E \times S/(j, i)$. On notera N le nombre de composantes de la courbe de ramification de $S \to T$ et N' la somme des genres de ces composantes ; on a :

Proposition 1.25 (cf. [20]). — *Les nombres de Hodge de X sont donnés par la formule suivante*

$$h^{1,1}(X) = 11 + 5N - N', \quad H^{2,1}(X) = 11 + 5N' - N. \tag{1.8.50}$$

La famille miroir est alors obtenue en construisant une « involution miroir » i' sur $L_{\mathbb{Z}}$ de la façon suivante : on montre que, mis à part un petit nombre d'exceptions, il existe un plan hyperbolique $P \subset L_{\mathbb{Z}}^-$, unique à automorphisme de $(L_{\mathbb{Z}}, \langle\, ,\, \rangle, i)$ près d'après les travaux de Nikulin [14]. L'involution i' est alors définie par

$$i' = i \circ r_P,$$

où r_P est la réflexion par rapport au plan P. Sa classe de conjugaison ne dépend que de celle de i.

Toujours d'après [14], la classe de conjugaison de i est essentiellement caractérisée par le rang de $L_{\mathbb{Z}}^-$ et le rang du noyau de la réduction de $\langle\, ,\, \rangle_{|L_{\mathbb{Z}}^-}$ modulo 2. (En fait, il y a un invariant de type « parité » plus subtil prenant la valeur 0 ou 1.) Ces invariants se calculent aisément à l'aide des invariants N et N' de la famille de surfaces K3 avec involution déterminée par i, ce qui permet de conclure.

Théorème 1.26 (cf. [20]). — *On a $N(i) = N'(i')$ et $N(i') = N'(i)$, de sorte que par la formule* 1.8.50, *on a pour les familles de variétés de Calabi-Yau X (resp. X') déterminées par l'involution i (resp. i'), l'inversion des nombres de Hodge prédite par la symétrie miroir* :

$$h^{1,1}(X) = h^{2,1}(X'), \quad h^{2,1}(X) = h^{1,1}(X').$$

On peut enfin associer à i un second domaine $\mathcal{D}'_i$, paramétrant des « paramètres de Kähler complexifiés i-invariants » par la formule :

$$\mathcal{D}'_i = \big\{\eta \in L_{\mathbb{C}}^+ \,;\, \langle \mathrm{Re}\,\eta, \mathrm{Re}\,\eta\rangle > 0\big\}.$$

Dans [20], sont construits des isomorphismes miroirs

$$M : \mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}'_{i'}, \quad M' : \mathcal{D}'_i \cong \mathcal{D}_{i'}$$

qui à l'aide du théorème de Torelli 1.23, et combinés avec l'application miroir pour les courbes elliptiques décrite dans l'introduction, permettent de construire l'application miroir entre le sous-espace de $\mathcal{M}_X$ paramétrant les déformations de X de la forme $\widetilde{E \times S}/(j,i)$ munies d'un paramètre de Kähler complexifié de la forme

$$\lambda = \operatorname{pr}_1^* \lambda_E + \operatorname{pr}_2^* \lambda_S,$$

où $\lambda_S \in \mathcal{D}'_i$, et l'espace analogue pour la famille $\{X'\}$ associée à i' : à un tel couple (X, λ) correspond la période τ_E de E, la droite $\langle \omega_S \rangle \in \mathcal{D}_i$, le paramètre de Kähler λ_E sur E et le paramètre $\lambda_S \in \mathcal{D}'_i$.

Comme dans l'introduction, on construit le miroir $(E', \lambda_{E'})$ de (E, λ) par la formule

$$\tau_{E'} = i\lambda_E, \quad \lambda_{E'} = -i\tau_E$$

et on pose d'autre part

$$\langle \omega_{S'} \rangle = M'(\lambda_S), \quad \lambda_{S'} = M\big(\langle \omega_S \rangle\big),$$

ce qui fournit le couple miroir (X', λ').

2. ORIGINE «PHYSIQUE» DE LA CONJECTURE

Ce chapitre a pour but de décrire les idées en provenance de la physique mathématique qui ont permis de mettre en évidence le phénomène de miroir.

On commence par décrire au niveau classique la théorie des champs considérée par les physiciens, à l'aide d'une introduction aux supervariables, ce qui mène au point essentiel : l'invariance classique de l'action par « $N=2$-supersymétrie » lorsque la variété riemannienne image est kählérienne.

On s'efforce ensuite de décrire le cheminement qui conduit les physiciens par « quantification » à associer à (X, ω) une théorie des champs $N=2$-superconformes, et la manière dont formellement la symétrie miroir est construite comme une involution sur la $N=2$-superalgèbre de symétries infinitésimales de l'action agissant sur ses représentations.

On explique enfin, suivant Lerche-Vafa-Warner et Witten, comment la cohomologie de Dolbeault de X se calcule à partir de la théorie des champs $N=2$-superconformes associée à (X, ω) et comment les prédictions concernant la comparaison des nombres de Hodge et les accouplements de Yukawa de (X, ω) et de son miroir (X', ω') se déduisent de cette construction formelle de la symétrie miroir au niveau des théories $N=2$-superconformes.

2.1. Le σ-modèle $N = 2$-supersymétrique

2.1.1. Le σ-modèle bosonique en dimension 2

Soit (M, g) une variété riemannienne; le σ-modèle bosonique en dimension 2 étudie l'espace des applications $\phi : \Sigma \to M$, où Σ est une surface de Riemann de métrique γ, muni de l'action (énergie) :

$$S(\phi, \gamma) = \int_\Sigma |\mathrm{d}\phi|^2. \tag{2.1.1}$$

Cette action est invariante par *changement d'échelle*, *i.e.*

$$S(\phi, \gamma) = S(\phi, \mathrm{e}^h \cdot \gamma)$$

pour toute fonction réelle h sur Σ.

De plus S est invariante sous les difféomorphismes de Σ :

$$S(\phi,\gamma) = S(\phi\circ\psi, \psi^*\gamma).$$

Donc S est invariante par *transformations conformes*

$$S(\phi,\gamma) = S(\phi\circ\psi,\gamma) \tag{2.1.2}$$

pour une transformation conforme ψ de Σ.

Lorsque (M,g) est kählérienne, $S(\phi)$ peut se réécrire de la façon suivante. Les structures complexes sur M et Σ permettent de définir $\bar\partial\phi \in \Omega^{0,1}_\Sigma \otimes \phi^* T^{1,0}_M$ comme la partie antilinéaire de $\mathrm{d}\phi$. Si α est la forme de Kähler de la métrique sur M, on a alors :

$$S(\phi) = \int_\Sigma \phi^*\alpha + \int_\Sigma 2|\bar\partial\phi|^2, \tag{2.1.3}$$

où le premier terme est constant sous les déformations de ϕ telles que $\phi_{|\partial\Sigma}$ reste constant, puisque α est fermée. Si on se donne de plus une 2-forme fermée β sur M, on peut aussi considérer l'action :

$$S(\phi) = \int_\Sigma |\mathrm{d}\phi|^2 + \int_\Sigma \phi^*(\beta). \tag{2.1.4}$$

Le second terme est constant sous les déformations de ϕ à bord constant, donc n'intervient pas dans les équations d'Euler-Lagrange décrivant les points critiques de S ; de plus, si on modifie β par une forme exacte, l'action est modifiée seulement par une intégrale sur le bord de Σ. Finalement, si (M,g) est kählérienne avec forme de Kähler α, une 2-forme fermée β fournit un paramètre de Kähler complexifié (*cf.* 1.8) $\omega = \alpha + i\beta$ et, en combinant (2.1.3) et (2.1.4), une action

$$S(\phi) = \int_\Sigma \phi^*\omega + \int_\Sigma 2|\overline{\partial}\phi|^2, \tag{2.1.5}$$

où dans le second terme, la norme est calculée à l'aide des métriques hermitiennes induites par γ sur Σ (en fait l'intégrale ne dépend que de la classe conforme de γ) et g_α sur M.

2.1.2. Supervariables

Soit Λ l'algèbre extérieure de dimension infinie,

$$\Lambda = \varinjlim_k \wedge(\mathbb{R}^k). \tag{2.1.6}$$

On peut écrire

$$\Lambda = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

(décomposition suivant la parité du degré) et l'algèbre commutative Λ^+ est naturellement une somme directe

$$\Lambda^+ = \mathbb{R} \oplus \Lambda^+_s, \tag{2.1.7}$$

où $\mathbb{R} = \Lambda^0$ et $\Lambda_s^+ = \Lambda_{>0}^+$ est constitué d'éléments nilpotents. On pose :

$$\mathbb{R}^{m,n} = (\Lambda^+)^m \times (\Lambda^-)^n. \tag{2.1.8}$$

C'est le prototype des *supervariétés de dimension* (m, n).

Sa topologie est la suivante : (2.1.7) fournit une projection $\pi : \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^m$ et les ouverts de $\mathbb{R}^{m,n}$ sont les $\pi^{-1}(U)$ avec $U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert.

Les fonctions *superdifférentiables* sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{m,n}$ sont décrites de la façon suivante. Notons

- $x_i = x_i^0 + x_i^s$ pour $i = 1, \ldots, m$ les coordonnées paires, obtenues par projection de $\mathbb{R}^{m,n}$ sur ses composantes Λ^+ et
- θ^j pour $j = 1, \ldots, n$ les coordonnées impaires.

Alors une fonction Φ superdifférentiable (à valeurs dans Λ) sur U doit s'écrire comme une série en les θ^j (nécessairement finie puisque les θ^j anticommutent) :

$$\Phi = \sum_{I=\{i_1<\cdots<i_k\}} \Phi_I(x_1, \ldots, x_m)\theta^{i_1} \cdots \theta^{i_k}, \tag{2.1.9}$$

où Φ_I est à valeurs dans Λ, ne dépend que des coordonnées paires, et est superdifférentiable au sens suivant. Soit ϕ_I la restriction de Φ_I à $\{x_i^s = 0\,;\ i = 1, \ldots, m\}$. Alors ϕ_I doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$ et Φ_I est le développement de Taylor de ϕ_I en les variables x_i^s :

$$\Phi_I(x_1, \ldots, x_m) = \sum_J \frac{1}{J\,!} \frac{\partial^J \phi_I}{\partial x^J(x_1^0, \ldots, x_m^0)} (x^s)^J \tag{2.1.10}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_m)$ et $(x^s)^J = (x_1^s)^{j_1} \cdots (x_m^s)^{j_m}$.

Une supervariété de dimension (m, n) doit être recouverte par des ouverts homémorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^{m,n}$ et les fonctions de transition doivent être données par des transformations superdifférentiables inversibles :

$$\begin{cases} \theta'^j = \Psi_j(x_1, \ldots, x_m, \theta^1, \ldots, \theta^n), \\ x_i' = \Phi_i(x_1, \ldots, x_m, \theta^1, \ldots, \theta^n), \end{cases} \tag{2.1.11}$$

où les Ψ_j sont superdifférentiables à valeurs dans Λ^- et les Φ_i sont superdifférentiables à valeurs dans Λ^+. L'inversibilité de cette transformation est garantie localement par la non-annulation du « superdéterminant » (*cf.* [40]) de la matrice jacobienne.

Étant donnée une variété usuelle M de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut construire une supervariété de dimension $(m, 0)$ avec $m = \dim M$, en remplaçant les ouverts de M, homéomorphes à des ouverts U de $\mathbb{R}^m$, par $\pi^{-1}(U)$ et en prenant pour fonctions de transition entre deux tels ouverts les développements de Taylor (2.1.10) des fonctions de transition des ouverts correspondants de M.

Définition 2.1. — Le *superplan* est la supervariété $\mathbb{R}^{2,2}$.

Il admet des coordonnées globales x_i, θ^α pour $i = 1,2$ et $\alpha = 1,2$. En fait, $\mathbb{R}^2$ étant muni de la métrique euclidienne, les coordonnées θ^α doivent être comprises comme correspondant au choix d'une base e_α de l'espace $\mathcal{S}$ des spineurs de $\mathbb{R}^2$.

On rappelle (voir [34]) que l'espace des spineurs de $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\rangle)$ pour n pair est la représentation irréductible unique de l'algèbre de Clifford $C(n)$ engendrée par $\mathbb{R}^n$,

$$C(n) = \bigoplus_r (\mathbb{R}^n)^{\otimes r}/I,$$

où I est engendré par les relations

$$x \cdot x = -\langle x, x\rangle 1, \quad x \in \mathbb{R}^n\ ;$$

Les vecteurs $u \in \mathbb{R}^n$, avec n pair, agissent sur l'espace $\mathcal{S}$ des spineurs (action de Clifford) du fait de l'inclusion de $\mathbb{R}^n$ dans l'algèbre de Clifford $C(n)$.

Le couple (θ^1, θ^2) décrit donc un spineur de $\mathbb{R}^2$, à coefficients dans Λ^-. De cette manière, toutes les considérations qui suivent ont un sens sur n'importe quelle surface de Riemann munie d'une structure spin qui détermine un fibré de spineurs $\mathcal{S}$ sur lequel les vecteurs tangents agissent par action de Clifford.

2.1.3. Supersymétrie

Définition 2.2. — Un *générateur de supersymétrie* est un champ de vecteur impair.

Ceci a le sens suivant : l'algèbre des fonctions superdifférentiables sur une supervariété est une superalgèbre

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-,$$

où $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) est l'ensemble des fonctions à valeurs dans Λ^+ (resp. Λ^-).

Cela signifie que les éléments de $\mathcal{F}^+$, dits *pairs*, commutent avec tous les éléments de $\mathcal{F}$, tandis que les éléments de $\mathcal{F}^-$, dits *impairs*, anticommutent ; la décomposition $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$ est compatible avec la structure d'algèbre, de sorte que $\mathcal{F}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. Un champ de vecteurs impair X est une dérivation impaire de $\mathcal{F}$, ce qui veut dire qu'il satisfait la *règle de Leibniz tordue* :

$$_X(fg) = (_Xf)g + (-1)^{\deg f} f(_Xg) \tag{2.1.12}$$

pour des éléments homogènes f, g de $\mathcal{F}$.

On vérifie que si X, Y sont des dérivations impaires, le supercommutateur

$$\{X, Y\} := X \circ Y + Y \circ X$$

est une dérivation paire.

Sur $\mathbb{R}^{2,2}$ on considère les « dérivations spinorielles » (ce sont des champs de vecteurs impairs dont le caractère covariant est spinoriel) :

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i \sum_\beta \theta^\beta \frac{\partial}{\partial_{\alpha\beta}}, \tag{2.1.13}$$

où $\partial/\partial_{\alpha\beta}$ est le champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^2$ obtenu par *contraction* des spineurs e_α, e_β, la contraction étant le composé :

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \longrightarrow T^*_{\mathbb{R}^2} \cong T_{\mathbb{R}^2}\,, \tag{2.1.14}$$

où les deux isomorphismes sont donnés par les métriques et la flèche du milieu est duale de l'application donnée par l'action de Clifford.

Il est immédiat de vérifier la règle de supercommutation :

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 2i\frac{\partial}{\partial_{\alpha\beta}}\cdot \tag{2.1.15}$$

Définition 2.3. — La $N=1$-*superalgèbre de Poincaré* est la superalgèbre de Lie engendrée comme espace vectoriel par les D_α et par l'algèbre de Lie du groupe des translations-rotations de $\mathbb{R}^2$.

On montre facilement la stabilité de cet espace par le (super)commutateur (par exemple, (2.1.15) montre que le supercommutateur de générateurs impairs est dans l'algèbre de Poincaré usuelle). Du fait que les D_α sont des champs impairs, à caractère spinoriel, ils n'agissent pas sur les « superchamps » scalaires (c'est-à-dire les fonctions superdifférentiables paires).

Par contre, si (ϵ_α) est une section du fibré dual du fibré des spineurs, à coefficients dans Λ^-, on peut construire une action infinitésimale de

$$Q = \sum_\alpha \epsilon_\alpha D_\alpha\,,$$

appelée *transformation supersymétrique*, sur les superchamps scalaires par la règle :

$$\delta_Q\Phi = \sum_\alpha \epsilon_\alpha D_\alpha \Phi. \tag{2.1.16}$$

Soit Φ un superchamp scalaire sur $\mathbb{R}^{2,2}$; d'après (2.1.9), ce superchamp admet l'expression suivante

$$\Phi = \phi + \sum_\alpha \theta^\alpha\psi_\alpha + \theta^\alpha\theta^\beta F_{\alpha\beta} \tag{2.1.17}$$

où ϕ est une fonction paire appelée *composante bosonique* de Φ, les ψ_α sont impaires (à caractère spinoriel) et appelées les *composantes fermioniques* de Φ, et $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, dont les composantes sont appelées *paramètres auxiliaires*, est paire et doit être vue comme une section de $\bigwedge^2(\mathcal{S})$. On a par définition de D_α

$$\begin{aligned}\delta_Q\Phi = \sum_\alpha \epsilon_\alpha\psi_\alpha + \sum_{\alpha,\beta}\epsilon_\alpha\theta^\beta F_{\alpha\beta} + i\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_\alpha\theta^\beta\partial_{\alpha\beta}\phi \\ + \text{termes de degré 2 en } \theta,\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

ce qui donne immédiatement la formule suivante pour l'action de δ_Q sur les composantes fermioniques et bosoniques de Φ :

$$\delta_Q\phi = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \psi_\alpha\,, \quad \delta_Q\psi_\alpha = \sum_\beta \epsilon_\beta (F_{\alpha\beta} - i\partial_{\alpha\beta}\phi). \tag{2.1.19}$$

2.1.4. Intégrale de Berezin

L'intégrale de Berezin d'une fonction paire superdifférentiable Φ à support compact sur $\mathbb{R}^{m,n}$ consiste à intégrer au sens usuel sur $\mathbb{R}^m$ le coefficient du terme de plus haut degré en les θ du développement (2.1.9) de Φ. Sur $\mathbb{R}^{2,2}$, la fonction Φ étant développée comme en (2.1.17), on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{2,2}} \Phi\, \mathrm{d}^2x\, \mathrm{d}^2\theta = \int_{\mathbb{R}^2} F_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2 x, \tag{2.1.20}$$

où $F_{\alpha\beta} \in \bigwedge^2(\mathcal{S})$ peut être vue comme une fonction grâce à la trivialisation naturelle du fibré $\bigwedge^2(\mathcal{S})$. On a le lemme suivant.

Lemme 2.4. — *Soit Φ un superchamp scalaire à support compact et (ϵ_α) une section de $\mathcal{S}^*$ (à coefficients dans Λ^-), annulée par l'opérateur de Dirac (i.e. (ϵ_α) est la somme d'un spineur holomorphe et d'un spineur antiholomorphe* [34]) ; *alors $\int_{\mathbb{R}^{2,2}} \delta_Q \Phi = 0$.*

Ceci résulte du fait que l'accroissement $\delta_Q F_{\alpha\beta}$ est une divergence sur $\mathbb{R}^2$.

Ce lemme montre que l'intégrale de Berezin est invariante sous les transformations supersymétriques à paramètre holomorphe ou antiholomorphe, et ceci est la raison de l'invariance par supersymétrie du σ-modèle supersymétrique.

2.1.5. Le σ-modèle supersymétrique

On considère une variété riemannienne (M, g) de classe $\mathcal{C}^\infty$, que l'on peut voir comme une supervariété paire (*cf.* 2.1.2). On munit les superchamps scalaires à valeurs dans M (*i.e.* les applications superdifférentiables $\Phi : \mathbb{R}^{2,2} \to M$, où $\mathbb{R}^{2,2}$ pourrait aussi bien être remplacée par n'importe quelle supersurface de Riemann) de l'action suivante :

$$S(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^{2,2}} \sum_{i,j,\alpha} g_{ij} \circ \Phi\, D^\alpha \Phi^i D_\alpha \Phi^j\, \mathrm{d}^2x\, \mathrm{d}^2\theta, \tag{2.1.21}$$

où les indices i, j réfèrent à un choix de coordonnées y^i sur M (l'expression à intégrer étant en fait indépendante des coordonnées), et $D^\alpha = \sum_\beta C^{\alpha\beta} D_\beta$, $C_{\alpha\beta}$ décrivant la métrique sur le fibré des spineurs $\mathcal{S}$, de sorte que le terme à intégrer est en fait un produit scalaire

$$\big\langle (D_\alpha \Phi^i), (D_\alpha \Phi^i) \big\rangle,$$

où $(D_\alpha\Phi^i) \in \mathcal{S}^* \otimes \phi^*(T_M)$. Il faut noter ici que $g_{ij} \circ \Phi$ est obtenue à partir de $g_{ij} \circ \phi$ (où ϕ est la composante bosonique de Φ) par un développement de Taylor en la partie de degré supérieur à 1 en les thêta comme dans (2.1.10).

La partie bosonique de $S(\Phi)$, c'est-à-dire celle qui ne dépend que de ϕ, est exactement l'action $S(\phi)$ de (2.1.1). Cette action jouit à la fois de l'invariance conforme (2.1.2) et de l'invariance par transformations supersymétriques à paramètre holomorphe ou antiholomorphe, comme il résulte du lemme 2.4.

Le superchamp Φ admet un développement en composantes (*cf.* (2.1.17))

$$\Phi^j = \phi^j + \sum_\alpha \theta^\alpha \psi^j_\alpha + \theta^\alpha \theta^\beta F^j_{\alpha\beta}\,, \tag{2.1.22}$$

où par la définition d'une fonction superdifférentiable, le $2m$-uple (ψ^j_α) se transforme comme une section de $\phi^* TM^{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{S}$.

Les « paramètres auxiliaires » $F^j_{\alpha\beta}$ peuvent être éliminés algébriquement en appliquant les équations de champs. En fait, on vérifie aisément en développant $S(\Phi)$ et en l'écrivant sous la forme $S(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^2} L(\Phi)$, que $L(\Phi)$ est un polynôme non-homogène de degré 2 en les $F^j_{\alpha\beta}$, le terme homogène de degré 2 étant égal à

$$\sum_{ij\alpha\beta} C^{\alpha\beta} g_{ij}(\phi) F^i_{\alpha\beta} F^j_{\alpha\beta}\,,$$

de sorte qu'on peut obtenir une action $S(\phi,\psi)$ ne dépendant plus que des composantes bosoniques et fermioniques de Φ, en extrémisant $S(\Phi)$ par rapport à $F^j_{\alpha\beta}$; on obtient la formule suivante :

$$F^j_{\alpha\beta} = \sum_{ik} \Gamma^j_{ik} \psi^i_\alpha \psi^k_\beta, \tag{2.1.23}$$

où les Γ^j_{ik} sont les symboles de Christoffel de g dans les coordonnées y_j.

En adoptant la notation holomorphe

$$z = x_1 + i x_2, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$$

et la décomposition des spineurs complexifiés en holomorphes $(\mathrm{d}z^{1/2})$ et antiholomorphes $(\mathrm{d}\bar z^{1/2})$, les sections (ψ^j_α) de $\phi^* TM^{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{S}$ seront décomposées en

$$\psi^i_+ \in \phi^* TM^{\mathbb{C}} \otimes K^{1/2} \quad \text{et} \quad \psi^i_- \in \phi^* TM^{\mathbb{C}} \otimes \overline{K}^{1/2}$$

où K est le fibré canonique de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ou plus généralement de la surface de Riemann sur laquelle on travaille. On a alors la formule suivante :

$$\begin{aligned} S(\phi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^2} 4\Big(& g_{k\ell}(\phi)\partial_z\phi^k \partial_{\bar z}\phi^\ell + \sqrt{-1}\, g_{k\ell}(\phi)\psi^k_- \nabla_z \psi^\ell_- \\ & + \sqrt{-1}\, g_{k\ell}(\phi)\psi^k_+ \nabla_{\bar z}\psi^\ell_+ + \tfrac{1}{2} R_{k\ell mn}\psi^k_+\psi^\ell_+\psi^m_-\psi^n_- \Big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Dans cette formule, l'apparition de la connexion de Levi-Civita ∇ de M et de son tenseur de courbure $R_{ijk\ell}$ est due au développement en séries de Taylor de $g_{ij}(\Phi)$ qui fait apparaître les dérivées de la métrique jusqu'au deuxième ordre. Comme l'action $S(\phi,\psi)$ est obtenue en extrémisant par rapport à $F^j_{\alpha\beta}$, elle reste invariante sous les transformations supersymétriques (2.1.19), en remplaçant $F^j_{\alpha\beta}$ par sa valeur (2.1.23). Dans la notation holomorphe, (2.1.19) devient alors :

$$\begin{cases} \delta_Q \phi^k = \epsilon\psi^k_+ + \bar\epsilon\psi^k_-\,, \\ \delta_Q \psi^k_+ = i\epsilon\partial_z\phi^k - \bar\epsilon \sum_{\ell m} \psi^\ell_- \Gamma^k_{\ell m}\psi^m_+\,, \\ \delta_Q \psi^k_- = i\bar\epsilon\partial_{\bar z}\phi^k - \epsilon \sum_{\ell m} \psi^\ell_+ \Gamma^k_{\ell m}\psi^m_-\,, \end{cases} \tag{2.1.25}$$

où ϵ, (resp. $\bar\epsilon$) est une section holomorphe de $K^{-1/2}$ (resp. antiholomorphe de $\overline{K}^{-1/2}$).

2.1.6. N=2-supersymétrie

Alvarez-Gaumé et Freedman [26] ont montré que le σ-modèle supersymétrique jouit d'une seconde forme d'invariance par supersymétrie lorsque (M, g) est kählérienne. L'algèbre de Poincaré $N=2$-supersymétrique est la superalgèbre de Lie obtenue en adjoignant à l'algèbre de Poincaré $N = 1$-supersymétrique (voir la définition 2.3), un second ensemble de générateurs impairs D'_α satisfaisant la règle (2.1.15)

$$\{D'_\alpha, D'_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta} \tag{2.1.26}$$

et « supercommutant » avec les D_α

$$\{D'_\alpha, D_\beta\} = 0. \tag{2.1.27}$$

Alvarez-Gaumé et Freedman cherchent sous quelle condition l'action $S(\phi, \psi)$ est invariante sous des transformations supersymétriques de la forme :

$$\begin{cases} \delta'_Q \phi^i = \sum_j f^i_j(\epsilon\psi^j_+ + \bar{\epsilon}\psi^j_-)\,, \\ \delta'_Q \psi^i_+ = i\epsilon \sum_j h^i_j(\partial_z\phi^j) - \bar{\epsilon}\sum_{k\ell} \psi^k_- S^i_{k\ell}\psi^\ell_+\,, \\ \delta'_Q \psi^i_- = i\bar{\epsilon} \sum_j h^i_j(\partial_{\bar{z}}\phi^j) - \epsilon\sum_{k\ell} \psi^k_+ S^i_{k\ell}\psi^\ell_-\,, \end{cases} \tag{2.1.28}$$

où f^i_j et h^i_j sont supposées être des sections de $\operatorname{End} TM$, telles que les composantes $\delta_\alpha, \delta'_\alpha$ de δ_Q, δ'_Q, (où $\delta_Q = \sum_\alpha \epsilon_\alpha\delta_\alpha$ et $\delta'_Q = \sum_\alpha \epsilon_\alpha\delta'_\alpha$ en revenant à la notation non-holomorphe) satisfassent les règles d'anticommutation (2.1.26) et (2.1.27).

Mais on voit facilement que la condition (2.1.26) entraîne que $f^i_j = (h^i_j)^{-1}$, tandis que la règle (2.1.27) entraîne que $f^i_j = -h^i_j$, de sorte que f^i_j doit définir une structure pseudocomplexe J sur M. Finalement, la condition que $S(\phi, \psi)$ soit invariante sous (2.1.28) entraîne par un calcul immédiat que J est parallèle pour ∇ et que la métrique g_{ij} est J-invariante (et donc que la métrique est kählérienne par le lemme 1.2). On vérifie alors que pour $S^i_{jk} = \sum_\ell \Gamma^i_{j\ell} f^\ell_k$, on a bien l'invariance recherchée.

2.2. Quantification

2.2.1. Structure symplectique sur l'espace des solutions classiques

On se donne une théorie de champs $\phi : V \to M$, $\dim V = d$ avec une action

$$S(\phi) = \int_{V^d} L(x, \phi(x), \partial_i\phi, \ldots)\,\mathrm{d}\mu \tag{2.2.29}$$

où μ est une forme volume sur V et L est un lagrangien défini sur l'espace des n-jets d'applications de V dans M (dans ce qui suit, on supposera $n = 1$, ce qui est le cas qui nous intéresse).

On considère l'espace $\mathcal{M}$ des solutions des équations d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire des points critiques de S : en prenant des coordonnées y_ν sur M et x_i sur V, on a des coordonnées x_i, y_ν, y_ν^i sur l'espace des 1-jets de V dans M et ϕ est un point critique de S si et seulement si pour toute section différentiable $X = (X_\nu)$ de $\phi^*(T_M)$ s'annulant sur ∂V, on a :

$$\delta_X S := \int_V \Big(\sum_\nu X_\nu \frac{\partial L}{\partial y_\nu} + \sum_{i,\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial y_i} \Big) \mathrm{d}\mu = 0.$$

Posant $\mathrm{d}\mu_i = (-1)^i \operatorname{int}(\partial/\partial x_i)\,\mathrm{d}\mu$, on trouve en intégrant par parties la formule

$$\delta_X S = \int_{\partial V} \sum_\nu X_\nu \frac{\partial L}{\partial y_\nu^i} \mathrm{d}\mu_i + \int_V \sum_\nu X_\nu \Big(\frac{\partial L}{\partial y_\nu} - \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial y_\nu^i} \Big) \mathrm{d}\mu$$

valable pour tout accroissement $X \in \phi^* T_M$ de ϕ, de sorte que l'annulation de $\delta_X S$, lorsque $X_{|\partial V} = 0$, équivaut aux équations

$$\forall \nu, \quad \frac{\partial L}{\partial y_\nu} - \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial y_\nu^i} = 0.$$

Lorsque ces équations, dites d'*Euler-Lagrange*, sont satisfaites, pour tout X dans $\mathcal{C}^\infty(\phi^* T_M)$, on a une forme η_X de degré $(d-1)$ sur V,

$$\eta_X = \sum_\nu X_\nu \frac{\partial L}{\partial y_\nu^i} \mathrm{d}\mu_i,$$

telle que

$$\forall V' \subset V, \quad \delta_{X_{|V'}} S\big(\phi_{|V'}\big) = \int_{\partial V'} \eta_X \,.$$

On vérifie que η_X ne dépend pas du choix de coordonnées, et donc est définie globalement. Si on s'est donné une classe d'homologie d'hypersurfaces $W \subset V$, (on s'intéresse souvent au cas où une coordonnée temporelle sur V est distinguée, $V \cong W \times [a,b]$, de sorte que les équations d'Euler-Lagrange deviennent des équations d'évolution pour $\phi_{|W}$ et que la donnée de W fait partie du problème), on peut alors construire une 2-forme fermée ω sur $\mathcal{M}$ (qui induit une structure symplectique sur un quotient adéquat de $\mathcal{M}$) de la façon suivante. Ayant choisi une hypersurface W dans cette classe d'homologie, on définit une 1-forme Θ_W sur $\mathcal{M}$ par la formule :

$$\Theta_W(X) = \int_W \eta_X \,.$$

Si W est changée en W' avec $\partial V_{W',W} = W' - W$, on a

$$\Theta_{W'}(X) - \Theta_W(X) = \int_{\partial V_{W',W}} \eta_X = \delta_X S\big(\phi_{|V_{W',W}}\big),$$

de sorte que la différence $\Theta_{W'} - \Theta_W$ est une forme exacte sur $\mathcal{M}$, ce qui entraîne que $\omega = \mathrm{d}\Theta_W$ est indépendante du choix de W.

Cette structure symplectique sur $\mathcal{M}$ explique essentiellement le théorème de Nœther, qui à toute symétrie infinitésimale de S associe une fonction sur $\mathcal{M}$ de façon compatible avec le crochet de Lie et le crochet de Poisson (si $V \cong W \times [a,b]$, cette fonction devient une intégrale première des équations d'évolution). En fait, on considère simplement la fonction :

$$h_X(\phi) = \int_W \mu_X.$$

Comme X est une symétrie infinitésimale de S, on a $\delta_{X|V'} S(\phi_{|V'}) = 0$ pour tout $V' \subset V$ et donc η_X est fermée, ce qui entraîne que h_X ne dépend pas du choix de W.

Par la quantification, on cherche à représenter sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ d'«états» un certain ensemble de fonctionnelles «observables» munies du crochet de Poisson défini par ω (en général, il s'agit seulement d'une représentation projective). On voudrait en outre réaliser les «fonctions de corrélation» $\langle f_1(x_1)\cdots f_k(x_k)\rangle$, calculées par définition à l'aide du produit scalaire dans $\mathcal{H}$, comme des intégrales fonctionnelles

$$\int_\phi f_1\big(\phi(x_1)\big)\ldots f_k\big(\phi(x_k)\big)\, \mathrm{e}^{-S(\phi)}\,\mathrm{d}\phi, \tag{2.2.30}$$

où les f_i sont certaines fonctions sur M et $x_i \in V$.

Plus précisément, supposant pour simplifier $d = 2$, on devrait avoir un état $\Omega \in \mathcal{H}$, appelé le «vide», tel que, pour des fonctions f_i sur M et $x_i \in \mathbb{P}^1$, on ait :

$$\begin{aligned} \big\langle f_1(x_1)\cdots f_k(x_k)\big\rangle &= \int_{\phi:\mathbb{P}^1\to M} f_1\big(\phi(x_1)\big)\cdots f_k\big(\phi(x_k)\big)\, \mathrm{e}^{-S(\phi)}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \big\langle \Phi_{f_1(x_1)}\circ\cdots\circ\Phi_{f_k(x_k)}(\Omega), \Omega\big\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

où $\Phi_{f_i(x_i)}$ est l'opérateur associé à la fonctionnelle $\phi \mapsto f_i(\phi(x_i))$.

Dans le cas du σ-modèle bosonique en dimension 2, on a d'après (2.1.2) l'invariance de l'action par transformations conformes, et donc si on prend pour Σ le disque épointé Δ^* ou $\mathbb{C}^*$, on a une infinité de symétries infinitésimales de l'action, correspondant à l'algèbre de Lie dite de *Virasoro*, des champs de vecteurs holomorphes ou antiholomorphes sur Δ^*, engendrés par les $z^n\partial/\partial z$ et les $\bar z^n\partial/\partial\bar z$ pour $n \in \mathbb{Z}$. L'invariance conforme est préservée au niveau quantique si l'on peut représenter l'algèbre de Lie correspondante sur $\mathcal{H}$ de sorte que son action sur les observables corresponde au crochet d'opérateurs dans $\mathcal{H}$.

2.2.2. Théorie des champs conformes

Si on peut représenter l'algèbre de Virasoro (ou une extension centrale), on espère, par «intégration», construire une théorie des champs conformes, c'est-à-dire le système de données suivant, formalisé par Segal (*cf.* [29], [36] et [37]).

Si Σ est une surface de Riemann, de métrique γ, avec bords ℓ_i pour $i \in I$ et ℓ_j pour $j \in J$, munis d'une paramétrisation $\chi_i^+ : S^1 \cong \ell_i$ préservant l'orientation pour $i \in I$ et $\chi_j^- : S^1 \cong \ell_j$ inversant l'orientation pour $j \in J$, γ étant normalisée près des bords de Σ, on doit associer une «amplitude»

$$A(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-) \in \mathrm{Hom}\big(\mathcal{H}^{\otimes I}, \mathcal{H}^{\otimes J}\big), \tag{2.2.32}$$

où $\mathcal{H}$ est un espace hermitien. On doit se figurer ces amplitudes comme étant obtenues par l'intégrale fonctionnelle de la façon suivante : à $(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-)$, l'intégrale

$$\int_{\substack{\phi : \Sigma \to M \\ \phi \circ \chi_\ell = \eta_\ell}} \exp(-S(\phi))\,\mathrm{d}\phi \tag{2.2.33}$$

associe une fonction $\Psi_{\Sigma,\gamma,\chi_i^+,\chi_j^-}$ sur le produit $LM^I \times LM^J$ paramétrant les

$$\eta_i : S^1 \to M, \quad (i \in I), \quad \eta_j : S^1 \to M, \quad (j \in J).$$

À supposer qu'on ait un espace hermitien $\mathcal{H}$ convenable de fonctions sur LM, $\Psi_{\Sigma,\gamma,\chi_i^+,\chi_j^-}$ serait alors le noyau permettant de construire $A(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-)$.

Ces amplitudes doivent satisfaire les axiomes :

(i) Invariance par difféomorphismes de $(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-)$.

(ii) Recollement : soient $(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-)$, $(\Sigma', \gamma', \chi'^+_{i'}, \chi'^-_{j'})$, des données comme ci-dessus, et soit $(\Sigma'', \gamma'', \chi''^+_{i''}, \chi''^-_{j''})$ obtenue en recollant Σ et Σ' le long des bords $\ell_{i_1} \subset \Sigma$, $\ell_{j'_1} \subset \Sigma'$ grâce à l'isomorphisme $\chi'^-_{j'_1} \circ (\chi^+_{i_1})^{-1}$. Les indices i'' sont dans $I'' = I \cup I' - \{i_1\}$ et les indices j'' sont dans $J'' = J \cup J' - \{j'_1\}$. On doit alors avoir

$$A(\Sigma'', \gamma'', \chi''^+_{i''}, \chi''^-_{j''}) = \mathrm{Trace}_{i_1, j'_1} A(\Sigma', \gamma', \chi'^+_{i'}, \chi'^-_{j'}) \otimes A(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-) \tag{2.2.34}$$

dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^{\otimes I''}, \mathcal{H}^{\otimes J''})$.

(iii) Invariance conforme : pour h une fonction réelle sur Σ, nulle près du bord, on doit avoir

$$A(\Sigma, \mathrm{e}^h\gamma, \chi_i^+, \chi_j^-) = C(h) A(\Sigma, \gamma, \chi_i^+, \chi_j^-). \tag{2.2.35}$$

D'après ces axiomes, toutes les amplitudes doivent se calculer à l'aide des amplitudes pour le disque (qui vont donner le « vide ») pour la sphère privée de trois disques, et pour les anneaux avec bords paramétrés, l'un « sortant » l'autre « rentrant ».

Le fait que l'on puisse considérer les représentations de l'algèbre de Virasoro comme une version infinitésimale des théories des champs conformes provient de la possibilité de considérer le semi-groupe $\mathcal{A}$ des anneaux avec bords paramétrés comme un substitut pour une « complexification de $\mathrm{Diff}^+ S^1$ » (de sorte que l'algèbre de Virasoro est l'algèbre de Lie de ce semi-groupe).

La structure holomorphe sur ce semi-groupe est donnée par la description d'un tel anneau par deux applications $f_0, f_1 : D \to \mathbb{P}^1$ s'étendant en des applications lisses sur le bord $\partial D \cong S^1$ du disque D et satisfaisant $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = \infty$, $\mathrm{Im}\, f_0 \cap \mathrm{Im}\, f_1 = \emptyset$, modulo l'action de $\mathbb{C}^* = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1, \{0, \infty\})$. On pose alors

$$A = \mathbb{P}^1 - (\mathrm{Im}\, f_0 \cup \mathrm{Im}\, f_1),$$

avec paramétrisation des bords donnée par $f_{i|\partial D}$. Le groupe $\mathrm{Diff}^+ S^1$ est vu comme un bord de cet espace ($\mathrm{Im}\, f_0 = \mathrm{Im}\, f_1$) et l'espace tangent à $\mathcal{A}$ le long de ce bord s'identifie à la complexification de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}^+ S^1$, c'est-à-dire à l'algèbre de Virasoro.

Les physiciens donnent des arguments pour montrer que la construction d'une telle théorie conforme par quantification du σ-modèle bosonique en dimension 2 à valeurs dans (M, g) (rappelons que est M compacte) est possible lorsque la courbure de Ricci de (M, g) est nulle.

Ils pensent de même que si (M, g) est kählérienne, à courbure de Ricci nulle, on peut par quantification du σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique, obtenir une représentation d'une extension centrale de la « $N{=}2$-superalgèbre de Virasoro », c'est-à-dire la superalgèbre de Lie de symétries infinitésimales de l'action (2.1.21), contenant l'espace tangent aux transformations conformes (les champs de vecteurs (anti)holomorphes sur le disque épointé) et les deux familles de supersymétries infinitésimales (paramétrées par des spineurs (anti)holomorphes).

On peut aussi inclure un terme de la forme (2.1.4) dans l'action $S(\Phi)$, ce qui mène à la conclusion suivante.

Soit X une variété de Calabi-Yau satisfaisant la condition $h^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et soit $\omega = \alpha + i\beta$ un paramètre de Kähler complexifié sur X (*cf.* 1.8) ; α détermine une métrique de Kähler-Einstein (théorème 1.5) et β contribue à l'action comme dans (2.1.5). Ces données devraient permettre de construire une théorie des champs $N{=}2$-superconforme à charge centrale $c = 3n$ avec $n = \dim X$ (la charge centrale est un coefficient associé à la représentation de l'extension centrale de la superalgèbre de Virasoro (§ 2.4)), par quantification du σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique construit en (2.1.24), modifié par l'ajout du terme $i\int_\Sigma \phi^*(\beta)$. Le fait que β puisse être choisie modulo $2\pi H^2(X, \mathbb{Z})$ résulte du fait que $\exp(-S(\phi, \psi))$ ne dépend de β que modulo $2\pi H^2(X, \mathbb{Z})$, au moins si on travaille avec des surfaces Σ compactes.

2.3. Conjecture de Gepner

Gepner [30] a conjecturé que la correspondance entre variétés de Calabi-Yau munies d'un paramètre de Kähler complexifié et théorie des champs $N{=}2$-superconformes, dont la construction a été esquissée ci-dessus, est bijective à condition de ne considérer que les théories superconformes à charges U(1) entières (*cf.* 2.4 pour le sens de cette expression). En fait, le phénomène de miroir serait précisément la nuance à apporter à cet énoncé.

La base de sa conjecture est la construction suivante. Il part d'une certaine série discrète de théories $N{=}2$-superconformes E_k à charge centrale $c_k = 3k/(k+2)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il construit alors des théories $N{=}2$-superconformes $E_{(k_1,\ldots,k_r)}$ à charges centrales

$$c_{(k_1,\ldots,k_r)} = \sum_i c_{k_i} = 3\sum_i \frac{k_i}{k_i+2}$$

en prenant essentiellement un sous-espace adéquat du produit tensoriel des E_{k_i}. Posons maintenant

$$M = \operatorname{ppcm}(k_i+2)_{i=1,\ldots,r}.$$

Lemme 2.5. — *La condition* $3\sum_i \frac{k_i}{k_i+2} = 3(r-2)$ *est équivalente à la condition : « les hypersurfaces* $Y \subset \mathbb{P}(M/(k_i+2))$ *de degré* M *sont à fibré canonique trivial ».*

Ici, $\mathbb{P}(M/(k_i+2))$ est l'*espace projectif inhomogène* défini comme le quotient de $\mathbb{C}^r - \{0\}$ par l'action suivante de $\mathbb{C}^*$:

$$g_z\big((x_1,\ldots,x_r)\big) = \big(z^{M/(k_1+2)}x_1,\ldots,z^{M/(k_r+2)}x_r\big).$$

La coordonnée projective X_i étant de degré $M/(k_i+2)$, les hypersurfaces de degré M sont définies par des polynômes $F(X_1,\ldots,X_r)$ engendrés par les monômes $X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$ satisfaisant la condition

$$\sum_\ell i_\ell \frac{M}{k_\ell+2} = M.$$

Si l'on fait abstraction des singularités de $\mathbb{P}(M/(k_i+2))$, la preuve du lemme 2.5 est la suivante. On peut calculer le fibré canonique de $\mathbb{P}(M/(k_i+2))$ (au moins en codimension 2) de la façon suivante. On a une application naturelle

$$\phi : \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}\big(M/(k_i+2)\big) \tag{2.3.36}$$

obtenue comme le passage au quotient de

$$\begin{cases} \psi : \mathbb{C}^r - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^r - \{0\}, \\ (x_1,\ldots,x_r) \longmapsto \big(x_1^{M/(k_1+2)},\ldots,x_r^{M/(k_r+2)}\big). \end{cases} \tag{2.3.37}$$

L'application ϕ est clairement ramifiée à l'ordre $M/(k_i+2)-1$ le long de l'hyperplan $H_i = \{X_i = 0\}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \phi^* K_{\mathbb{P}(M/(k_i+2))} &= K_{\mathbb{P}^{r-1}} - \sum_i \Big(\frac{M}{k_i+2} - 1\Big) H_i \\ &= -\Big(\sum_i \frac{M}{k_i+2}\Big) H. \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Une hypersurface $Y \subset \mathbb{P}(M/(k_i+2))$ de degré d a donc par la formule d'adjonction un fibré canonique trivial (en codimension 2) lorsque

$$d = \sum_i \frac{M}{k_i+2}\cdot$$

En particulier, les hypersurfaces de degré M sont à fibré canonique trivial (en codimension 2) lorsque $\sum_i (k_i+2)^{-1} = 1$, ce qui prouve le lemme. $\square$

Or pour des raisons « physiques », Gepner doit imposer cette condition sur la charge pour que $E_{(k_1,\ldots,k_r)}$ soit obtenue par quantification du σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique à valeurs dans une variété de Calabi-Yau de dimension $(r-2)$.

En fait, il conjecture plus précisément que $E_{(k_1,\ldots,k_r)}$ correspond à l'hypersurface de Fermat $Y \subset \mathbb{P}((M/(k_i+2))$ décrite par l'équation $\sum_i X_i^{k_i+2}$, avec sa polarisation canonique. Dans le cas où $r=5$, $k_1 = \cdots = k_r = 3$, correspondant à l'hypersurface quintique de Fermat dans $\mathbb{P}^4$, il montre les faits suivants en faveur de cette conjecture :

(i) l'hypersurface de Fermat Y_5 et la théorie $E_{(3,\ldots,3)}$ ont le même groupe de symétries discrètes ;

(ii) les déformations infinitésimales de Y_5 munie d'un paramètre de Kähler complexifié et de $E_{(3,\ldots,3)}$ sont isomorphes, en tant que représentation de ce groupe discret.

2.4. Symétrie miroir

L'algèbre de Virasoro $N{=}2$-superconforme à générateur central C a quatre séries de générateurs impairs G^+_s, G^-_s, $\overline{G}^+_s$, $\overline{G}_s$ avec $s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, correspondant aux développements en séries de Laurent des deux séries de générateurs de supersymétrie, chacune étant paramétrée par un spineur holomorphe ou antiholomorphe sur $\mathbb{C}^*$; elle admet comme générateurs pairs les L_m, $\overline{L}_m$ pour $m \in \mathbb{Z}$, correspondant aux développements en séries de Laurent des champs de vecteurs holomorphes ou antiholomorphes sur $\mathbb{C}^*$; elle contient aussi deux séries de générateurs pairs J_m pour $m \in \mathbb{Z}$, appelées «courant U(1)» et représentant l'opérateur de structure complexe sur X.

Les charges U(1) mentionnées plus haut sont les valeurs propres des opérateurs $J_0, \overline{J}_0$. Une représentation à charge centrale c envoie C sur $c\,\mathrm{Id}$. Les relations de (super)commutation sont les suivantes :

(a) tous les crochets entre générateurs barrés et non-barrés sont triviaux.

(b) $\{G^+_s, G^+_r\} = \{G^-_s, G^-_r\} = \{\overline{G}^+_s, \overline{G}^+_r\} = \{\overline{G}^-_s, \overline{G}^-_r\} = 0$.

(c) Les relations non triviales sont essentiellement les suivantes :

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}C, \\ \{G^+_r, G^-_s\} = 2L_{r+s} - (r-s)J_{r+s} + \frac{1}{3}\big(r^2 - \frac{1}{4}\big)\delta_{r+s,0}C \end{cases} \tag{2.4.39}$$

et des relations semblables à (2.4.39) avec les générateurs barrés. L'existence du phénomène de miroir provient de l'observation suivante : la superalgèbre admet une involution :

$$\begin{cases} G^+_r \mapsto G^-_r, & G^-_r \mapsto G^+_r, \\ \overline{G}^+_r \mapsto \overline{G}^+_r, & \overline{G}^-_r \mapsto \overline{G}^-_r, \\ J_m \mapsto -J_m, & \overline{J}_m \mapsto \overline{J}_m. \end{cases} \tag{2.4.40}$$

Cette involution agit sur les représentations de la superalgèbre, ce qui produit évidemment des théories $N{=}2$-superconformes isomorphes. Cependant, lorsque la théorie provient de la géométrie, c'est-à-dire est obtenue par quantification du σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique associé à une variété de Calabi-Yau X munie d'un paramètre de Kähler complexifié ω, les générateurs G^+, G^-, $\overline{G}^+$, $\overline{G}^-$ ont une signification géométrique précise (*cf.* (2.1.25), (2.1.28)) et ne peuvent pas être ainsi échangés. Le miroir de (X,ω) devrait être précisément le couple (X',ω') correspondant (en admettant la conjecture de Gepner) à la théorie conforme «miroir» obtenue en faisant agir l'involution (2.4.40), isomorphe à la première, mais avec un marquage différent des générateurs de supersymétrie.

2.4.1. Exemples

Greene et Plesser [31] ont travaillé sur les modèles de Gepner (*cf.* 2.3) et plus précisément sur le modèle $E_{(3,\dots,3)}$, qui correspond à la quintique de Fermat Y de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$. Cette hypersurface admet le groupe de symétrie $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5/\mathrm{diag}$, agissant sur $\mathbb{P}^4$ par

$$(\zeta_1,\dots,\zeta_5)^*(X_1,\dots,X_5) = (\zeta_1X_1,\dots,\zeta_5X_5) \tag{2.4.41}$$

où $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est identifié au groupe des racines cinquièmes de l'unité. Le sous-groupe $G \subset (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5/\mathrm{diag}$ formé des automorphismes de Y agissant trivialement sur la forme de type $(3,0)$ de Y est défini par la relation $\sum_i \alpha_i = 0$.

Ce groupe G agit sur la théorie conforme $E_{(3,\ldots,3)}$ associée et on peut former, pour chaque sous-groupe $H \subset G$, une théorie superconforme $E^H_{(3,\ldots,3)}$, construite à partir de l'espace des invariants sous H dans $E_{(3,\ldots,3)}$. Le groupe G admet une forme bilinéaire non-dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_i \alpha_i\beta_i$) et donc, pour tout sous-groupe $H \subset G$, on a un sous-groupe $H^\perp \subset G$.

Greene et Plesser ont montré par le calcul des « fonctions de partition » que $E^H_{(3,\ldots,3)}$ et $E^{H^\perp}_{(3,\ldots,3)}$ sont miroirs l'une de l'autre au sens décrit ci-dessus. Ceci suggère que les quotients Y/H et $Y/H^\perp$, munis du paramètre canonique donné par $c_1(\mathcal{O}_Y(1))$ sont miroirs l'un de l'autre. Ceci a été établi partiellement, mais rigoureusement par Roan [16], qui a montré les égalités de dimensions correspondant à (1.8.48).

Théorème 2.6. — *Il existe une désingularisation* (*canonique*) $\widetilde{Y/H}$ *de* Y/H, *à fibré canonique trivial*, *telle qu'on ait les égalités* :

$$h^1(T_{\widetilde{Y/H}}) = h^1(\Omega_{\widetilde{Y/H^\perp}}), \quad h^1(T_{\widetilde{Y/H^\perp}}) = h^1(\Omega_{\widetilde{Y/H}}). \tag{2.4.42}$$

2.5. Théorie N = 2-superconforme et cohomologie de Dolbeault

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert de la représentation ; on définit (voir [35]) des sous-espaces $R_{c,c}$ (resp. $R_{a,c}$) de dimension finie de $\mathcal{H}$, appelés espaces d'états (*chiraux,chiraux*) (resp. (*antichiraux,chiraux*)) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_{c,c} = \Big\{x \in \mathcal{H} \,;\, & G^+_{n-1/2}(x) = \overline{G}^+_{n-1/2}(x) = 0,\\ & G^-_{n+1/2}(x) = \overline{G}^-_{n+1/2}(x) = 0,\ n \geq 0\Big\}, \end{aligned} \tag{2.5.43}$$

$$\begin{aligned} R_{a,c} = \Big\{x \in \mathcal{H} \,;\, & G^+_{n+1/2}(x) = \overline{G}^+_{n-1/2}(x) = 0,\\ & G^-_{n-1/2}(x) = \overline{G}^-_{n+1/2}(x) = 0,\ n \geq 0\Big\}. \end{aligned} \tag{2.5.44}$$

Notons que $R_{a,c}$ est obtenu en échangeant G^+ et G^- dans la définition de $R_{c,c}$, de sorte que l'involution (2.4.40) échange les espaces $R_{a,c}$ et $R_{c,c}$ (ce qui signifie que l'espace $R_{c,c}$ de la théorie initiale est égal à l'espace $R_{a,c}$ de la théorie obtenue en faisant agir (2.4.40)).

En utilisant les règles de (super)commutation (2.4.39), on voit que $R_{c,c}$ et $R_{a,c}$ sont stables par J_0 et $\overline{J}_0$, ce qui les munit d'une bigraduation, les valeurs propres de J_0 et $\overline{J}_0$ étant supposées entières (*cf.* 2.3, 2.4). Les bidegrés pour $R_{c,c}$ sont de la forme $(-p,q)$ avec $p,q \in \mathbb{N}$ et les bidegrés pour $R_{a,c}$ sont de la forme (p,q) avec $p,q \in \mathbb{N}$.

La charge centrale c étant égale à $3n$, il est montré dans [35] que $R^{-n,n}_{c,c}$ est de rang 1, tandis que $R^{n;n}_{a,c}$ est de rang 1. Lorsque la théorie est obtenue par quantification du σ-modèle $N=2$-supersymétrique associé à une variété de Calabi-Yau X munie d'un paramètre de Kähler complexifié ω, ces espaces ont l'interprétation suivante :

$$R_{c,c} \cong \bigoplus_{p,q} H^q(\bigwedge^p T_X), \tag{2.5.45}$$

$$R_{a,c} \cong \bigoplus_{p,q} H^q(\Omega_X^p) \tag{2.5.46}$$

où $H^q(\wedge^p T_X)$ a le bidegré $(-p,q)$, où $H^q(\Omega_X^p)$ a le bidegré (p,q) et les isomorphismes préservent les bigraduations.

Comme l'involution miroir (2.4.40) échange $R_{a,c}$ et $R_{c,c}$, ces isomorphismes expliquent la série d'isomorphismes (1.8.48) si l'application miroir du § 1.8 correspond à l'involution (2.4.40) au niveau des théories superconformes associées (*cf.* 2.4).

Intuitivement, ces isomorphismes devraient être obtenus de la façon suivante. Comme on travaille sur le σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ doit être un espace de sections du fibré sur LX dont la fibre au point $\eta : S^1 \to X$ de LX est l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\eta^*(\Omega_X^\bullet)$.

D'après les relations (2.4.39), les états annulés par $G^+_{n+1/2}$, $G^-_{n+1/2}$, $\overline{G}^+_{n+1/2}$, $\overline{G}^+_{n+1/2}$ pour $n \geq 0$ sont aussi annulés par $\overline{L}_m$ et L_m pour $m > 0$, ce qui suggère qu'ils sont donnés par des sections de $\Omega_X^\bullet$ puisque les L_m représentent l'action infinitésimale de Diff S^1 sur $\mathcal{H}$. D'autre part, sur ces états, les opérateurs $G^+_{-1/2}$, $G^-_{-1/2}$, $\overline{G}^+_{-1/2}$ $\overline{G}^-_{-1/2}$, s'identifient aux opérateurs ∂, ∂^*, $\bar\partial$, $\bar\partial^*$ de X.

Dans [35], il est également montré qu'on peut construire une structure d'anneau commutatif bigradué sur chacun des espaces $R_{c,c}$, $R_{a,c}$. Combinées avec les isomorphismes (peut-être non-canoniques)

$$R_{c,c}^{-n,n} \cong \mathbb{C}, \quad R_{a,c}^{n,n} \cong \mathbb{C}, \tag{2.5.47}$$

et avec les isomorphismes (2.5.45), (2.5.46), elles fournissent des formes homogènes de degré n sur $H^1(\Omega_X)$ et sur $H^1(T_X)$, appelées *accouplements de Yukawa*, que l'on notera Y_1 et Y_2 :

$$\begin{cases} Y_1 : S^n H^1(\Omega_X) \cong S^n R_{a,c} \longrightarrow R_{a,c}^{n,n} \cong \mathbb{C}, \\ Y_2 : S^n H^1(T_X) \cong S^n R_{c,c} \longrightarrow R_{c,c}^{-n,n} \cong \mathbb{C}. \end{cases} \tag{2.5.48}$$

Les formes homogènes construites sur $R_{a,c}$ et $R_{c,c}$ dépendent uniquement des données de la théorie conforme, et ne sont donc pas modifiées par passage à la théorie miroir : on en déduit que les isomorphismes miroirs de (1.8.48)

$$H^1(T_X) \cong H^1(\Omega_{X'}), \quad H^1(T_{X'}) \cong H^1(\Omega_X) \tag{2.5.49}$$

transforment à un coefficient près Y_2^X en $Y_1^{X'}$ et $Y_2^{X'}$ en Y_1^X.

2.6. Interprétation de Witten

Witten [38] interprète la symétrie miroir de façon un peu plus géométrique : le σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique du § 2.1.5 est décrit par l'action $S(\phi,\psi)$ de (2.1.24) après élimination des paramètres auxiliaires. En décomposant $\psi \in \mathcal{S}\otimes\phi^*T_X\otimes\mathbb{C}$ suivant les spineurs holomorphes et antiholomorphes, on peut écrire :

$$S(\phi,\psi)=S(\phi,\psi_+,\psi_-),$$

où $\psi_+\in K^{1/2}\otimes\phi^*T_X$ et $\psi_-\in\overline{K}^{1/2}\otimes\phi^*T_X$.

Lorsque X est munie d'une structure complexe, on peut décomposer $TX\otimes\mathbb{C}$ en $TX^{1,0}\oplus TX^{0,1}$. L'action devient alors $S(\phi,\psi_+,\bar\psi_+,\psi_-,\bar\psi_-)$ où :

$$\begin{aligned}&\psi_+\in K^{1/2}\otimes\phi^*TX^{1,0}, &&\bar\psi_+\in K^{1/2}\otimes\phi^*TX^{0,1},\\ &\psi_-\in \overline{K}^{1/2}\otimes\phi^*T_X^{1,0}, &&\bar\psi_-\in \overline{K}^{1/2}\otimes\phi^*T_X^{0,1}.\end{aligned}$$

Witten propose alors de construire deux modèles à partir de cette action, en tordant les fibrés dans lesquels $\psi_+,\bar\psi_+,\psi_-,\bar\psi_-$ prennent leurs valeurs.

- Dans le modèle A, on prend :

$$\begin{aligned}&\psi_+\in \phi^*T_X^{1,0}, &&\bar\psi_+\in K\otimes\phi^*TX^{0,1},\\ &\psi_-\in \overline{K}\otimes\phi^*T_X^{1,0}, &&\bar\psi_-\in \phi^*T_X^{0,1}.\end{aligned}$$

- Dans le modèle B, on prend :

$$\begin{aligned}&\psi_+\in K\otimes\phi^*T_X^{1,0}, &&\bar\psi_+\in \phi^*TX^{0,1},\\ &\psi_-\in \overline{K}\otimes\phi^*T_X^{1,0}, &&\overline{\psi}_-\in \phi^*T_X^{0,1}.\end{aligned}$$

La symétrie miroir échangerait alors les modèles A et B, à condition de passer à une variété miroir X'.

2.6.1. Accouplements de Yukawa

Witten calcule les accouplements de Yukawa Y_1 définis par Lerche-Vafa-Warner sur $H^1(\Omega_X)\cong H^2(X,\mathbb{C})$ comme des fonctions de corrélation du modèle A :

$$Y_1(\omega_1,\dots,\omega_n)=\int_{\phi,\psi,\chi}\mathcal{O}_1(p_1)\cdots\mathcal{O}_n(p_n)\exp\bigl(-S(\phi,\psi,\chi)\bigr)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\chi. \tag{2.6.50}$$

Dans cette expression :

- $\chi=\psi_++\bar\psi_-\in\phi^*T_X$;
- ψ résume les variables fermioniques restantes ;
- les p_i sont des points de $\mathbb{P}^1$;

• si, dans des coordonnées locales x_k sur X, une 2-forme fermée représentant la classe ω_i s'écrit

$$\sum_{k,\ell} \alpha_{k\ell}\, \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_\ell\,,$$

alors la fonctionnelle $\mathcal{O}_i(p_i)$ est définie par

$$\mathcal{O}_i(p_i)(\phi,\chi) = \sum_{k\ell} \alpha_{k\ell}\big(\phi(p_i)\big)\chi_k\chi_\ell\,; \tag{2.6.51}$$

• l'intégration s'effectue sur toutes les applications $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ (et le résultat ne dépend pas du choix des p_i).

L'ensemble des applications $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ se scinde en composantes correspondant aux classes d'homologie $\phi_*([\mathbb{P}^1]) \in H_2(X,\mathbb{Z})$.

On rappelle d'autre part que, ω étant la forme de Kähler associée à la métrique sur X, la partie bosonique de S s'écrit

$$S(\phi) = \int_\Sigma \phi^*\omega + \int_\Sigma 2\|\bar\partial\phi\|^2 \tag{2.6.52}$$

où le premier terme ne dépend que de la classe d'homologie $\phi_*([\mathbb{P}^1])$ tandis que le second terme est positif et s'annule exactement sur les applications holomorphes $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$. L'intégrale (2.6.50) s'écrit donc

$$\sum_{\alpha\in H_2(X,\mathbb{Z})} \exp\Big(-\int_\alpha \omega\Big) \int_{\phi_\alpha,\psi,\chi} \mathcal{O}_1(p_1)\cdots\mathcal{O}_n(p_n)\,\mathrm{e}^{-S'(\phi,\psi,\chi)}\,\mathrm{d}\phi_\alpha\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\chi \tag{2.6.53}$$

où ϕ_α parcourt l'ensemble des applications $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ telles que $\phi_*([\mathbb{P}^1]) = \alpha$ et S' est l'action obtenue en retranchant le terme topologique $\int_\Sigma \phi^*\omega$ de S.

Witten affirme alors que l'intégrale

$$\int_{\phi_\alpha,\psi,\chi} \mathcal{O}_1(p_1)\cdots\mathcal{O}_n(p_n)\exp\big(-S'(\phi,\psi,\chi)\big)\,\mathrm{d}\phi_\alpha\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\chi$$

ne dépend de la métrique qu'à un coefficient près lorsque les ω_i sont fermées, de sorte qu'en changeant g en tg et en faisant tendre t vers $+\infty$, la partie bosonique de S' étant positive, cette intégrale se réduit à une intégrale sur l'ensemble des ϕ_α annulant la partie bosonique de S', c'est-à-dire sur l'ensemble des applications holomorphes $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ de classe α. Il en résulte la formule suivante :

$$Y_1(\omega_1,\dots,\omega_n) = \int_X \omega_1\dots\omega_n + \sum_{\substack{\alpha\in H_2(X,\mathbb{Z})\\ \alpha\neq 0}} \exp\Big(-\int_\alpha\omega\Big)\, n(\alpha) \int_\alpha \omega_1 \cdots \int_\alpha \omega_n \tag{2.6.54}$$

où $n(\alpha) \in \mathbb{Q}$ est une intégrale sur la famille des applications holomorphes de classe α.

On reviendra au chapitre 5 sur la signification du terme $\int_\alpha \omega_1 \cdots \int_\alpha \omega_n$ dans cette formule et, dans le cas de la dimension 3, sur le calcul de $n(\alpha)$.

Les accouplements de Yukawa Y_2 sur $H^1(T_X)$ sont calculés comme des fonctions de corrélation du modèle B, les observables correspondant alors à des $(0,1)$-formes à valeurs dans $T_X^{1,0}$. Par des arguments similaires, Witten montre que l'intégrale fonctionnelle se ramène alors à une intégrale sur l'ensemble des applications constantes $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$, c'est-à-dire sur X. La formule est alors la suivante

$$Y_2(u_1, \ldots, u_n) = \langle \kappa^2, u_1 \cdots u_n \rangle_X, \tag{2.6.55}$$

où κ est une section holomorphe de K_X, donc définie à un coefficient près ; $u_1 \cdots u_n$, qui appartient à $H^n(\wedge^n T_X)$, est le cup-produit des classes $u_i \in H^1(T_X)$ et $\langle\, ,\, \rangle_X$ est l'accouplement parfait $H^n(\bigwedge^n T_X) \otimes H^0(K_X^{\otimes 2}) \to H^n(K_X) = \mathbb{C}$.

3. TRAVAUX DE CANDELAS-DE LA OSSA-GREEN-PARKES

Ce chapitre est consacré aux variations de structure de Hodge des variétés de dimension 3 ; dans la première partie, on montre comment l'application des périodes marquée permet de construire des coordonnées naturelles sur l'espace des déformations de la structure complexe marquée d'une telle variété ; on décrit également les accouplements de Yukawa sur l'espace tangent à ces déformations en termes de variation infinitésimale de structure de Hodge et on montre que, normalisés de façon naturelle, ils dépendent d'un potentiel dans ces coordonnées.

On explique ensuite, suivant Morrison, comment ces considérations s'étendent sur le bord de l'espace des modules, et après avoir esquissé la preuve du théorème sur la quasiunipotence de la monodromie, on montre, pour une famille de dimension 1, l'existence d'une coordonnée naturelle q au voisinage d'une dégénérescence maximalement unipotente. Cette coordonnée est donnée par l'exponentielle de certaines périodes, (déterminées par l'action de monodromie), qui sont des solutions d'une équation de Picard-Fuchs. Après avoir défini ces dernières, on explique le calcul de leurs coefficients pour des familles d'intersections complètes à l'aide de la représentation de la cohomologie par des résidus de formes différentielles méromorphes.

On montre finalement comment ces techniques se combinent dans [43] pour donner une série entière $\psi(q)$, calculant les accouplements de Yukawa normalisés appliqués au champ logarithmique $q\partial/\partial q$ pour la famille miroir de la famille des quintiques de $\mathbb{P}^4$, et on conclut comme dans [43] que l'identification de cette série avec le potentiel de Gromov-Witten des quintiques permet de prédire pour tout d le nombre (conjecturalement fini) de courbes rationnelles génériquement plongées de degré d dans une quintique générale.

3.1. Coordonnées spéciales et accouplements de Yukawa

On considère dans ce chapitre des variétés de Calabi-Yau X de dimension 3 avec $b_1(X) = 0$. On sait d'après le théorème 1.9 que la famille universelle locale B des déformations de X est lisse, de dimension $h^1(T_X) = h^1(\Omega_X^2)$.

3.1.1. Coordonnées spéciales sur B

Soit
$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B, \quad X \cong X_0 := \pi^{-1}(0)$$
la déformation universelle de X paramétrée par B. On suppose que B est simplement connexe ; on a alors un isomorphisme canonique :
$$R^3\pi_*(\mathbb{Z}) \cong H^3(X_0, \mathbb{Z}).$$
Le groupe $H^3(X_0, \mathbb{Z})$, de cohomologie entière modulo torsion, est muni de sa forme d'intersection $\langle\ ,\ \rangle$ qui est alternée et unimodulaire. Soit $(\kappa_b)_{b\in B}$ une section holomorphe non nulle en 0 du fibré en droites $\mathcal{H}^{3,0}$ (théorème 1.15), ce qui signifie que $b \mapsto \kappa_b$ est une fonction holomorphe à valeurs dans $H^3(X_0, \mathbb{C})$ qui s'identifie canoniquement à $H^3(X_b, \mathbb{C})$, et $\kappa_b \in H^{3,0}(X_b)$ pour tout point b de B.

Le lemme suivant montre que le choix adéquat d'une base symplectique de $H_3(X_0, \mathbb{Z})$ permet d'une part de « normaliser » $(\kappa_b)_{b\in B}$ et d'autre part de construire des coordonnées canoniques sur B.

Lemme 3.1. — *Pour un choix convenable de $(\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_0, \dots, \beta_N)$, $N = h^1(\Omega^2_X)$, formant une base symplectique de $H_3(X_0, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire pour laquelle la forme $\langle\ ,\ \rangle$ satisfait $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \langle\beta_i, \beta_j\rangle = 0$ et $\langle\alpha_i, \beta_j\rangle = \delta_i^j$, on a dans un voisinage de 0*
$$\int_{\alpha_0} \kappa_b \neq 0,$$
de sorte qu'on peut déterminer une section κ' de $\mathcal{H}^{3,0}$ par la condition $\int_{\alpha_0} \kappa'_b = 1$ et les fonctions $z_i(b) = \int_{\alpha_i} \kappa'_b$ pour $i > 0$ fournissent des coordonnées sur B au voisinage de 0.

Démonstration. — On peut trouver un élément primitif $\alpha_0 \in H_3(X_0, \mathbb{Z})$ tel que $\int_{\alpha_0} \kappa_0 \neq 0$ puisque $\kappa_0 \neq 0$. On a donc $\int_{\alpha_0} \kappa_b \neq 0$ dans un voisinage de 0, et la section κ' est définie par $\kappa'_b = \kappa_b / \int_{\alpha_0} \kappa_b$. Pour une base symplectique $(\alpha_0, \dots, \beta_N)$ comme ci-dessus, étendant α_0, considérons l'application $\phi : B \to \mathbb{C}^N$, donnée par $\phi^* z_i = \int_{\alpha_i} \kappa'$. Sa différentielle en 0 est donnée par le composé :
$$T_{B,0} \xrightarrow{\mathrm{d}(\kappa')_0} H^3(X_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\int_{\alpha_i}} \mathbb{C}^N. \tag{3.1.1}$$
D'après le théorème 1.17, l'application $\mathrm{d}(\kappa')_0$, modulo $\mathcal{H}^{3,0}(X_0)$, est donnée par le composé
$$T_{B,0} \cong H^1(T_{X_0}) \overset{\kappa'_0}{\cong} H^1(\Omega^2_{X_0}) \subset H^3(X_0, \mathbb{C})/H^{3,0}(X_0). \tag{3.1.2}$$
Comme $\int_{\alpha_0} (\mathrm{d}(\kappa')_0(T_{B0})) = 0$, $\mathrm{d}\phi_0$ n'est pas un isomorphisme si et seulement si il existe $\eta \in F^2H^3(X_0)$ tel que $\int_{\alpha_i} \eta = 0$ pour $i = 0, \dots, N$, ce qui équivaut au fait que η appartient au sous-espace engendré sur $\mathbb{C}$ par les α_i (où l'on utilise la dualité de Poincaré $H_3 \cong H^3$).

Considérons sur $F^2H^3(X_0)$ la forme hermitienne

$$h(u,v) = i\langle u, \bar{v}\rangle\,;$$

d'après 1.5.3 (ii), elle est non-dégénérée de signature $(+, -\cdots, -)$. Si on a η comme ci-dessus, η satisfait $i\langle \eta, \bar{\eta}\rangle = 0$ (puisque $\langle \alpha_i\rangle$ est totalement isotrope et stable par conjugaison) et $\int_{\alpha_0} \eta = 0$. Cela n'est possible que si la projection α_0' de α_0 dans F^2H^3 (parallèlement à $\overline{F^2H^3}$) satisfait $h(\alpha_0', \alpha_0') \le 0$. Or la projection de $H_3(X_0, \mathbb{Z}) \cong H^3(X_0, \mathbb{Z})$ dans F^2H^3 forme un réseau et donc ne peut pas être contenue dans l'ensemble défini par la condition $h(\eta, \bar{\eta}) \le 0$. Si on a choisi un élément α_0 de $H_3(X_0, \mathbb{Z})$ satisfaisant $h(\alpha_0', \alpha_0') > 0$ et $\int_{\alpha_0} \kappa_0 \neq 0$, ce qui précède montre que $d\phi_0$ est un isomorphisme et que les z_i fournissent des coordonnées sur B au voisinage de 0. $\square$

3.1.2. Accouplements de Yukawa

On rappelle que les accouplements de Yukawa Y_2 (*cf.* (2.6.55)) sur $H^1(T_{X_0}) \cong T_{B0}$ sont donnés par la forme cubique

$$Y_2 : S^3H^1(T_{X_0}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{3.1.3}$$

dépendant du choix de $\kappa \in H^{3,0}(X_0)$, définie par

$$Y_2(u_1, u_2, u_3) = \langle \kappa^2, u_1 \cdot u_2 \cdot u_3\rangle, \tag{3.1.4}$$

où $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \in H^3(\bigwedge^3 T_{X_0})$ et $\langle\ ,\ \rangle$ est donné par la dualité de Serre.

On adoptera la notation Y_2^κ pour l'accouplement Y_2 défini par la forme κ.

En considérant comme plus haut $(\kappa_b)_{b\in B}$ comme une application holomorphe $\kappa : B \to H^3(X_0, \mathbb{C})$, on va montrer :

Lemme 3.2. — *Soit $(\kappa_b)_{b\in B}$ une section holomorphe de $\mathcal{H}^{3,0}$ et soient x_i des coordonnées sur B ; alors*

$$Y_2^{\kappa_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \Big\langle \kappa_0, \frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(0)\Big\rangle_{H^3(X_0,\mathbb{C})}. \tag{3.1.5}$$

Le lemme résulte de la transversalité, des conditions de polarisation 1.5.3 (i) et du théorème 1.17. On a d'abord

$$\Big\langle \kappa_0, \frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(0)\Big\rangle_{H^3(X_0,\mathbb{C})} = \Big\langle \kappa_0, \Big(\frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(0)\Big)^{0,3}\Big\rangle$$

où $(\eta)^{0,3}$ est la projection de η dans $H^{0,3}(X_0) \cong H^3(\mathcal{O}_{X_0})$ et le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la dualité de Serre entre $H^0(K_{X_0})$ et $H^3(\mathcal{O}_{X_0})$; d'autre part, par application répétée des théorèmes 1.16 et 1.17, on voit que

$$\Big(\frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(0)\Big)^{0,3} = \kappa_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \in H^3(\mathcal{O}_{X_0}) \tag{3.1.6}$$

où $\partial/\partial x_i \cdot \partial/\partial x_j \cdot \partial/\partial x_k \in H^3(\wedge^3 T_{X_0}) \cong H^3(K_{X_0}^{-1})$. Finalement, il suffit de noter l'égalité suivante pour $\kappa \in H^0(K_{X_0})$ et $\chi \in H^3(K_{X_0}^{-1})$

$$\langle \kappa, \kappa \cdot \chi \rangle = \langle \kappa^2, \chi \rangle, \tag{3.1.7}$$

où le premier crochet est la dualité de Serre entre $H^0(K_{X_0})$ et $H^3(\mathcal{O}_{X_0})$ et le second crochet est la dualité de Serre entre $H^0(K_{X_0}^{\otimes 2})$ et $H^3(K_{X_0}^{-1})$. ∎

Une propriété remarquable des coordonnées spéciales et de la normalisation de $(\kappa_b)_{b\in B}$ construites ci-dessus est le fait suivant.

Proposition 3.3. — *Soit $\{\alpha_0, \ldots, \beta_N\}$ une base symplectique de $H_3(X_0, \mathbb{Z})$, permettant de construire la section normalisée κ' de $\mathcal{H}^{3,0}$ et des coordonnées z_i comme dans le lemme* 3.1 ; *alors les accouplements de Yukawa $Y_2^{\kappa'}(\partial/\partial z_i, \partial/\partial z_j, \partial/\partial z_k)$ dépendent d'un potentiel, i.e. il existe une fonction $F(z_1, \ldots, z_n)$ telle que :*

$$Y_2^{\kappa'}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big) = \frac{\partial^3 F}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}\cdot \tag{3.1.8}$$

La proposition résulte des lemmes 3.4 et 3.5 suivants. Soient

$$\phi_i(z_1, \ldots, z_n) = \int_{\beta_i} \kappa', \qquad i = 1, \ldots, n,$$

où κ' est vue comme une fonction de (z_i) puisque les z_i sont des coordonnées sur B.

Lemme 3.4. — *On a* $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial z_j} = \dfrac{\partial \phi_j}{\partial z_i}\cdot$

En effet, on sait que $\mathrm{Im}(d\kappa')_b \subset F^2H^3(X_b)$ est totalement isotrope pour la forme d'intersection $\langle\, , \rangle$ sur $H^3(X_0, \mathbb{C})$. D'autre part, par définition de z_i et ϕ_i, et du fait que $\int_{\alpha_0} \kappa' = 1$, on a :

$$\kappa' = \beta_0 + \sum_{j>0} z_j \beta_j - \sum_{j>0} \phi_j \alpha_j - \Big(\int_{\beta_0} \kappa'\Big)\alpha_0. \tag{3.1.9}$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial \kappa'}{\partial z_i} = \beta_i - \sum_{j>0} \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i} \alpha_j - \frac{\partial(\int_{\beta_0} \kappa')}{\partial z_i} \alpha_0\,. \tag{3.1.10}$$

L'égalité $\langle \partial\kappa'/\partial z_i, \partial\kappa'/\partial z_j \rangle = 0$, qui est due aux conditions de polarisations et au fait que chacune de ces sections est dans $F^2\mathcal{H}^3$ par transversalité, donne alors immédiatement le lemme. ∎

Il existe donc une fonction $F(z_1, \ldots, z_n)$ telle que $\phi_i = \partial F/\partial z_i$.

Lemme 3.5. — *On a* $\dfrac{\partial^3 F}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} = -Y_2^{\kappa'}(\dfrac{\partial}{\partial z_i}, \dfrac{\partial}{\partial z_j}, \dfrac{\partial}{\partial z_k})$.

En effet, on note que par transversalité, $\dfrac{\partial^2 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j}$ appartient à $F^1H^3(X_b) = H^{3,0}(X_b)^\perp$ et donc :

$$\Big\langle \kappa', \frac{\partial^2 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j} \Big\rangle = 0. \tag{3.1.11}$$

Cela donne :

$$\Big\langle \frac{\partial \kappa'}{\partial z_k}, \frac{\partial^2 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j} \Big\rangle + \Big\langle \kappa', \frac{\partial^3 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} \Big\rangle = 0. \tag{3.1.12}$$

En vertu du lemme 3.2, on a donc :

$$Y_2^{\kappa'}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big) = -\Big\langle \frac{\partial \kappa'}{\partial z_k}, \frac{\partial^2 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j} \Big\rangle.$$

D'autre part, d'après (3.1.10), on a :

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{\partial \kappa'}{\partial z_k}, \frac{\partial^2 \kappa'}{\partial z_i \partial z_j} \Big\rangle &= \Big\langle \beta_k - \sum_{\ell>0} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial z_k}\alpha_\ell - \frac{\partial}{\partial z_k}\Big(\int_{\beta_0} \kappa'\Big)\alpha_0, \\ &\qquad - \Big(\sum_{\ell>0} \frac{\partial^2 \phi_\ell}{\partial z_i \partial z_j}\alpha_\ell + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\Big(\int_{\beta_0} \kappa'\Big)\alpha_0\Big)\Big\rangle \\ &= \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^3 F}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}, \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

ce qui prouve le lemme 3.5 et donc la proposition 3.3. ∎

La proposition 3.3 est une justification mathématique partielle de la symétrie miroir ; en effet, si la symétrie miroir existe, on a une identification locale de l'espace des déformations de la structure complexe de X et de celui des déformations du paramètre de Kähler complexifié de son miroir, qui possède, en tant que quotient par un groupe de translations d'un ouvert dans un espace vectoriel, une structure plate canonique (*i.e.* des coordonnées définies à transformation linéaire près).

Les accouplements de Yukawa Y_1 (*cf.* (2.6.54)) dépendent d'autre part clairement d'un potentiel, de sorte que la proposition 3.3 fournit de façon naturelle une partie de la structure prédite par la symétrie miroir, à supposer que l'application miroir identifie bien les structures plates naturelles de ces deux espaces.

Notons finalement que le système de coordonnées et plus généralement la structure plate fournis par le lemme 3.1 dépendent du choix de la base symplectique choisie (en fait cette dernière ne dépend que de la donnée de α_0 et du sous-espace totalement isotrope engendré par les α_i), ce qui indique que la symétrie miroir n'est bien définie que sur les espaces de structures complexes marquées.

3.2. Dégénérescences

3.2.1. Extension de la filtration de Hodge

Soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ une application propre et plate, avec $\mathcal{X}$ lisse et $\dim B = 1$, et soit $0 \in B$ tel que $X = \pi^{-1}(0)$ soit singulière. Quitte à se restreindre à un voisinage de 0 dans B, on peut alors supposer que π est lisse au-dessus de $B^* = B - \{0\}$. Sur B^*, on dispose du fibré $\mathcal{H}^n$ muni de sa filtration de Hodge $F^\bullet\mathcal{H}^n$ (*cf.* 1.5). Le théorème suivant est dû à Katz [50] et, dans un cadre plus général, à Schmidt [56].

Théorème 3.6. — *On peut étendre le fibré $\mathcal{H}^n$ sur B^* en un fibré $\overline{\mathcal{H}}^n$ sur B, tel que la connexion de Gauss-Manin ∇ s'étende en une connexion à singularités logarithmiques* :

$$\nabla : \overline{\mathcal{H}}^n \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}^n \otimes \Omega_B(\log 0) \tag{3.2.14}$$

et tel que la filtration de Hodge s'étende en une filtration $F^\bullet\overline{\mathcal{H}}^n$ de $\overline{\mathcal{H}}^n$ par des sous-fibrés.

Par continuité, la propriété de transversalité (théorème 1.16) reste vraie pour la filtration de Hodge étendue :

$$\nabla(F^p\overline{\mathcal{H}}^n) \subset F^{p-1}\overline{\mathcal{H}}^n \otimes \Omega_B(\log 0). \tag{3.2.15}$$

Dans le cas géométrique que nous considérons, cette extension est obtenue de la façon suivante (*cf.* [57], [58]).

En prenant un revêtement de B ramifié en zéro, et en effectuant des transformations birationnelles le long de la fibre centrale, on peut supposer que X est un diviseur réduit à croisements normaux (théorème de réduction semi-stable de Mumford). On considère alors sur $\mathcal{X}$ le complexe $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B}(\log X)$ défini de la façon suivante. Pour une coordonnée t sur B centrée en 0, et des fonctions $z_1, \dots, z_r$ à différentielles indépendantes sur $\mathcal{X}$, π est décrite localement par

$$\pi^*(t) = z_1 \cdots z_r. \tag{3.2.16}$$

On appelle

$$\Omega_{\mathcal{X}/B}(\log X)$$

le quotient du faisceau *engendré* par $\Omega_{\mathcal{X}}$ et les $\mathrm{d}z_i/z_i$ par la relation

$$\pi^*\Big(\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) = \sum_i \frac{\mathrm{d}z_i}{z_i} = 0$$

et on pose :

$$\Omega^k_{\mathcal{X}/B}(\log X) = \bigwedge^k \Omega_{\mathcal{X}/B}(\log X).$$

On définit alors l'extension du fibré de Hodge par

$$\overline{\mathcal{H}}^n = R^n\pi_*\big(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B}(\log X)\big) \tag{3.2.17}$$

et l'extension de la filtration de Hodge par

$$F^p\overline{\mathcal{H}}^n = R^n\pi_*\big(0 \to \Omega^p_{\mathcal{X}/B}(\log X) \to \cdots \to \Omega^n_{\mathcal{X}/B}(\log X) \to 0\big). \tag{3.2.18}$$

Supposons maintenant que les fibres X_b soient des variétés à fibré canonique trivial de dimension n ; le théorème 3.6 permet d'étendre à B les accouplements de Yukawa Y_2 définis sur B^*. En effet, la condition de transversalité (3.2.15) permet de définir comme en 1.5.2 des applications $\mathcal{O}_B$-linéaires

$$\phi_p : TB(\log 0) \to \operatorname{Hom}\big(F^p/F^{p+1}\overline{\mathcal{H}}^n, F^{p-1}/F^p\overline{\mathcal{H}}^n\big) \tag{3.2.19}$$

où $T_B(\log 0)$, qui est par définition le dual du faisceau $\Omega_B(\log 0)$ des formes holomorphes sur B^* à singularités logarithmiques en 0, est engendré au voisinage de 0 par le champ $t\partial/\partial t$; par composition des applications ϕ_p, on construit alors une flèche :

$$S^nTB(\log 0) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Hom}\big(\overline{\mathcal{H}}^{n,0}, \overline{\mathcal{H}}^{0,n}\big). \tag{3.2.20}$$

Or la définition de la filtration $F^p\overline{\mathcal{H}}^n$ et la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour les faisceaux $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/B}(\log X_0)$ montrent que $\overline{\mathcal{H}}^{n,0} = R^0\pi_*K_{\mathcal{X}/B}$ et $\overline{\mathcal{H}}^{0,n} = R^n\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sont duaux, de rang 1 dans notre cas. Choisissons une section non-nulle $(\kappa_b)_{b\in B}$ de $\overline{\mathcal{H}}^{n,0}$; on a donc un accouplement de Yukawa normalisé :

$$\begin{cases} Y_2^\kappa : S^nTB(\log 0) \longrightarrow \mathcal{O}_B, \\ \qquad (t\partial/\partial t)^{\otimes n} \longmapsto \big\langle \kappa, \psi\big((t\partial/\partial t)^{\otimes n}\big)(\kappa)\big\rangle. \end{cases} \tag{3.2.21}$$

Considérons maintenant, comme dans [43] et [53], des familles de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$; on suppose qu'on dispose d'une famille de dimension 1 qui est un ouvert de Zariski Δ^* d'une courbe Δ, paramétrant des déformations singulières de X. Dans le lemme 3.1, on a montré l'existence locale d'une normalisation privilégiée $\kappa \in \mathcal{H}^{3,0}$ et d'une coordonnée spéciale z sur l'ouvert Δ^* dépendant du choix d'une base symplectique de $H^3(X_0, \mathbb{Z})$, lorsque Δ^* est, au voisinage de chacun de ses points t, la famille universelle locale de la fibre X_t.

Comme la base Δ^* est de dimension 1, ces choix identifient les accouplements de Yukawa à une fonction $\Phi^* = Y_2^\kappa(\partial/\partial z, \partial/\partial z, \partial/\partial z)$ sur Δ^*. Les considérations développées en 3.2.1 montrent que l'on peut également construire une telle fonction Φ dans un voisinage de $0 \in \Delta - \Delta^*$; en effet le choix d'une coordonnée q sur Δ au voisinage de 0 et d'une section $\kappa \in \overline{\mathcal{H}}^{3,0}$ permettent de définir

$$\Phi = Y_2^\kappa\Big(q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}\Big). \tag{3.2.22}$$

On va montrer maintenant, suivant [53], que sous une hypothèse convenable sur la monodromie du système local $H^3_{\mathbb{Z}}$ autour de 0, on a un choix canonique de κ_b^2 et de coordonnée z. Un rôle essentiel est joué par la théorie de Hodge (mixte) et le théorème de la monodromie rappelés dans le paragraphe suivant.

3.2.2. Théorie de Hodge mixte et monodromie

Soit $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$, une famille de variétés algébriques (on entend par là qu'il existe un plongement de $\mathcal{X}$ dans $\Delta \times \mathbb{P}^K$ au-dessus de Δ), où Δ est un disque, et π est lisse au-dessus de Δ^*. On notera X la fibre centrale.

Soit b un point de Δ^* ; le groupe $\pi_1(\Delta^*, b) \cong \mathbb{Z}$ agit sur $H^n(X_b, \mathbb{Z})$ *via* le difféomorphisme de X_b obtenu par trivialisation $\mathcal{C}^\infty$ de la famille $\mathcal{X}$ sur le revêtement universel de Δ^*. L'endomorphisme de monodromie $T \in \mathrm{Aut}(H^n(X_b, \mathbb{Z}))$ est défini comme l'image du générateur canonique de $\pi_1(\Delta^*, b)$.

Théorème 3.7. — *L'endomorphisme T est quasiunipotent, ce qui signifie qu'il existe k et $m \in \mathbb{N}$ tels que $(T^k - 1)^m = 0$.*

Une démonstration de ce théorème, due à Borel [48], utilise le fait suivant, qui est une conséquence du calcul de la courbure du domaine des périodes polarisées « dans les directions horizontales ».

Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur, muni de sa métrique hyperbolique ; soit $\mathcal{D}$ le domaine des périodes polarisées construit sur un espace vectoriel réel H muni d'une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ (*cf.* 1.5.3), un entier k (le niveau) et des nombres de Hodge $h^{p,q}$ avec $p+q = k$ satisfaisant $\sum_p h^{p,q} = \dim H$ étant donnés ; $\mathcal{D}$ est un espace homogène sous le groupe $G = \mathrm{Aut}(H, \langle\ ,\ \rangle)$ et donc admet une métrique G-invariante. On a alors pour une normalisation correcte de la métrique sur $\mathcal{D}$

Proposition 3.8. — *Soit $\mathcal{P} : \mathbb{H} \to \mathcal{D}$, une application horizontale (i.e. satisfaisant la condition de transversalité) ; alors $\mathcal{P}$ diminue les distances, i.e.*

$$d_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)\big) \leq d_{\mathbb{H}}(x, y). \tag{3.2.23}$$

La proposition implique le théorème de la façon suivante : $\mathbb{H}$ est le revêtement universel de Δ^* et sur $\mathbb{H}$, le système local $(H^n_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{prim}}$ est trivial, ce qui fournit un espace vectoriel polarisé $H = H^n_{\mathrm{prim}}(X_t, \mathbb{R})$ pour $t \in \mathbb{H}$. (Il est important de noter que par la décomposition de Lefschetz (1.5.38), il suffit de montrer le théorème pour l'action de monodromie sur la cohomologie primitive $(H^n_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{prim}}$ relativement à la polarisation fournie par le plongement projectif de $\mathcal{X}$.) On a donc une application des périodes polarisées $\mathcal{P} : \mathbb{H} \to \mathcal{D}$, obtenue en regardant la variation de structure de Hodge sur la cohomologie primitive de degré n de la famille induite $\mathcal{X}_{\mathbb{H}}$. On sait que $\mathcal{P}$ diminue les distances et satisfait

$$\mathcal{P}(z+1) = T\mathcal{P}(z), \tag{3.2.24}$$

où T agit sur $\mathcal{D}$ comme en 1.5.4. Or dans $\mathbb{H}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{H}}(z_n, z_n+1) = 0$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n = \infty$; pour une suite z_n satisfaisant cette condition, on trouve donc :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{P}(z_n), T\mathcal{P}(z_n)\big) = 0. \tag{3.2.25}$$

Écrivant $\mathcal{P}(z_n) = g_n\mathcal{P}(z_0)$ avec $g_n \in G$, et utilisant l'invariance de la métrique $d_{\mathcal{D}}$ sous G, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{P}(z_0), g_n^{-1} T g_n \mathcal{P}(z_0)\big) = 0. \tag{3.2.26}$$

Cela montre que la suite $g_n^{-1}Tg_n$ est adhérente au stabilisateur dans G de $\mathcal{P}(z_0)$ qui est compact par les conditions de polarisation 1.5.3 (ii). Les valeurs propres de T sont donc de module 1, et comme T est défini sur $\mathbb{Z}$, les valeurs propres de T sont des racines de l'unité. $\square$

En fait, il existe un énoncé plus précis, qui utilise le fait que, en supposant T unipotent, *i.e.* après un changement de base de degré k, $N = \log T$ est un morphisme de structure de Hodge mixte, pour la structure de Hodge mixte sur la fibre limite, tel que $N(W_kH^n) \subset W_{k-2}H^n$.

Comme on aura besoin plus loin de cette structure de Hodge mixte, on explique brièvement suivant [57] comment on peut la construire sur $H^n_{\lim} = \overline{\mathcal{H}}{}^n_0$.

Une *structure de Hodge mixte* sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V est la donnée d'une filtration croissante $W_\bullet V$ définie sur $\mathbb{Q}$ et d'une filtration (de Hodge) décroissante $F^\bullet V$, induisant une structure de Hodge pure de poids k sur le gradué Gr_k^W associé à W.

La filtration de Hodge sur $\overline{\mathcal{H}}{}^n_0$ est décrite en (3.2.18).

Soit $\Omega_{\mathcal{X}}(\log X)$ le fibré sur $\mathcal{X}$ engendré localement par $\Omega_{\mathcal{X}}$ et les $\mathrm{d}z_i/z_i$, avec les notations de (3.2.16) (où l'on avait utilisé la version relative $\Omega_{\mathcal{X}/B}(\log X)$).

Soient $\Omega^k_{\mathcal{X}}(\log X) = \bigwedge^k \Omega_{\mathcal{X}}(\log X)$ et

$$W'_k\Omega^p_{\mathcal{X}}(\log X) = \Omega^k_{\mathcal{X}}(\log X) \wedge \Omega^{p-k}_{\mathcal{X}} \subset \Omega^p_{\mathcal{X}}(\log X). \tag{3.2.27}$$

On construit le complexe $B^k = \sum\limits_{p+q=k} A^{p,q}$ associé au complexe double

$$A^{p,q} = \Omega^{p+q+1}_{\mathcal{X}}(\log X)/W'_q\Omega^{p+q+1}_{\mathcal{X}}(\log X) \tag{3.2.28}$$

muni des différentielles

- $\mathrm{d} : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ (donnée par la différentielle extérieure) et
- $\mathrm{d}' : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ (induite par le produit extérieur avec $\pi^*\,\mathrm{d}t/t$).

On peut montrer que l'inclusion

$$\Omega^p_{\mathcal{X}}(\log X)_{|X} \subset A^{p,0} \tag{3.2.29}$$

donnée par le produit extérieur avec $\pi^*(\mathrm{d}t/t)$, donne un quasi-isomorphisme

$$\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}(\log X)_{|X} \xrightarrow[\sim]{\text{qis}} B^\bullet. \tag{3.2.30}$$

La filtration $W_kH^n_{\lim}$ est alors induite par la filtration suivante sur $A^{\bullet\bullet}$:

$$W_kA^{p,q} = W'_{2q+k-n+1}\Omega^{p+q+1}_{\mathcal{X}}(\log X)/W'_q\Omega^{p+q+1}_{\mathcal{X}}(\log X). \tag{3.2.31}$$

Il est clair que $W_{2n}H^n_{\lim} = H^n_{\lim}$ et $W_{-1}H^n_{\lim} = \{0\}$; d'autre part, on montre que

$N(W_k H^n_{\lim}) \subset W_{k-2} H^n_{\lim}$ en notant que N s'identifie à un coefficient près au résidu de la connexion logarithmique (3.2.14) et que celle-ci est donnée par la suite exacte courte

$$0 \to \Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/B}(\log X) \otimes \Omega_B(\log 0) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}_{\mathcal{X}}(\log X) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}_{\mathcal{X}/B}(\log X) \to 0 \tag{3.2.32}$$

qui fournit :

$$R^n\pi_*(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/B}(\log X)) \longrightarrow R^n\pi_*(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/B}(\log X)) \otimes \Omega_B(\log 0).$$

Ces deux faits entraînent immédiatement :

Théorème 3.9. — *L'endomorphisme de monodromie T est quasiunipotent d'ordre $n+1$, c'est-à-dire satisfait $(T^k-1)^{n+1} = 0$ sur $H^n(X_b, \mathbb{Z})$.*

En fait, dans le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$, cet énoncé plus fin résulte immédiatement du théorème 3.7, puisque le rang de $H^3(X, \mathbb{Z})$ est égal à 4.

3.2.3. Normalisation de κ et choix de coordonnées

On revient désormais au cas d'une famille $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,1} = 1$ et on suppose que Δ est un disque centré en 0 et que X_b est lisse pour $b \neq 0$; on fait l'hypothèse suivante : l'endomorphisme de monodromie $T \in \mathrm{Aut}\,(H^3(X_b, \mathbb{Z}))$ est *maximalement unipotent*, c'est-à-dire :

$$(T-1)^4 = 0, \quad (T-1)^3 \neq 0.$$

De façon équivalente,

$$N = \log T = -\big((1-T) + \cdots + \tfrac{1}{3}(1-T)^3\big)$$

satisfait $N^4 = 0$ et $N^3 \neq 0$. On a donc pour un élément $x \in H^3(X_b, \mathbb{Q})$

$$H^3(X_b, \mathbb{Q}) = \langle x, Nx, N^2x, N^3x \rangle$$

et l'image de N^3 est de rang 1. Le groupe $\mathrm{Im}\, N^3 \cap H^3(X_b, \mathbb{Z})$ est donc engendré par un élément e_0, déterminé au signe près. Comme e_0 est annulé par N, il est invariant par T. Si κ est une section holomorphe du fibré $\overline{\mathcal{H}}^{3,0}$, on peut donc définir sur $B^* \cong \Delta^*$ une fonction

$$g_0(z) = \langle e_0, \kappa_z \rangle_{H^3(X_z, \mathbb{C})}. \tag{3.2.33}$$

En fait, g_0 s'étend holomorphiquement sur Δ, car elle est univaluée et à croissance bornée par une puissance de $|\log z|$. On a alors :

Lemme 3.10. — *Si $\kappa_0 \neq 0$ dans $\overline{\mathcal{H}}^{3,0}_0$, on a $g_0(0) \neq 0$.*

Cela résulte de l'existence d'une structure de Hodge mixte sur la fibre limite $H^3_{\lim}$ dont la construction a été esquissée ci-dessus.

Pour la filtration par le poids $W_\bullet H^3_{\rm lim}$, le gradué $\operatorname{Gr}^W_i H^3_{\rm lim}$ est muni d'une structure de Hodge pure de poids i pour $0 \leq i \leq 6$, induite par la filtration de Hodge sur $H^3_{\rm lim}$ (*cf.* (3.2.18)) et on a :

$$(3.2.34) \qquad \begin{cases} N^k(W_i H^3_{\rm lim}) \subset W_{i-2k} H^3_{\rm lim}\,, \\ N^k : \operatorname{Gr}^W_{3+k} H^3_{\rm lim} \cong \operatorname{Gr}^W_{3-k} H^3_{\rm lim}\,, \end{cases}$$

où l'isomorphisme est un isomorphisme de structures de Hodge de degré $-2k$. On en déduit facilement que

$$W_0 = \operatorname{Im} N^3 = \operatorname{Ker} N, \quad W_5 = \operatorname{Ker} N^3 = \operatorname{Im} N.$$

Comme la structure de Hodge sur $\operatorname{Gr}^W_6 H^3_{\rm lim}$ est pure de poids 6 et de rang 1, elle est purement de type $(3,3)$, ce qui entraîne que $\overline{\mathcal{H}}^{3,0}_0 \not\subset W_5 H^3_{\rm lim} = \operatorname{Ker} N^3$. Comme $N = \log T$ satisfait la condition $\langle Nx, y\rangle = -\langle x, Ny\rangle$, on a $\operatorname{Ker} N^3 = (\operatorname{Im} N^3)^\perp$ (sur $\mathbb{Q}$), et donc on a $\langle \kappa_0, e_0\rangle \neq 0$, ce qui prouve le lemme.

Comme $\operatorname{Im} N^2$ est de rang 2, il existe un vecteur $e_1 \in \operatorname{Im} N^2 \cap H^3(X_z, \mathbb{Z})$ qui engendre $(\operatorname{Im} N^2 \cap H^3(X_z,\mathbb{Z}))/e_0$. L'élément e_1 est déterminé à une transformation $e_1 \mapsto \pm e_1 + k e_0$ près. Considérons la fonction :

$$(3.2.35) \qquad g_1(z) = \langle e_1, \kappa_z\rangle.$$

C'est une fonction multivaluée sur B, à croissance bornée par une puissance de $|\log z|$ et sa monodromie autour de 0 est égale à :

$$g_1\big(\mathrm{e}^{2i\pi} z\big) - g_1(z) = \langle Te_1, \kappa_z\rangle - \langle e_1, \kappa_z\rangle.$$

Or, comme e_1 est dans $\operatorname{Im} N^2$, on a $Te_1 = (1+N)e_1$. Il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $Ne_1 = m e_0$ et l'on obtient :

$$(3.2.36) \qquad g_1\big(\mathrm{e}^{2i\pi} z\big) - g_1(z) = m g_0(z).$$

La fonction

$$\frac{g_1(z)}{m g_0(z)} - \frac{1}{2i\pi} \log z$$

est alors univaluée et à croissance bornée par une puissance de $|\log z|$, donc holomorphe sur Δ. La fonction $t = g_1(z)/m g_0(z)$ fournit donc une coordonnée pour le revêtement universel de Δ^*, définie à l'addition d'une constante rationnelle k/m près. Si la condition

$$(*) \qquad m = \pm 1$$

est satisfaite, t est définie à l'addition d'une constante entière près et $q = \mathrm{e}^{2i\pi t}$ donne une coordonnée canonique sur B au voisinage de 0.

Moyennant la condition (*), on a donc montré l'existence d'une normalisation canonique de κ^2, donnée par

$$\kappa'^2 = \frac{\kappa^2}{g_0(x)^2} \tag{3.2.37}$$

et d'une coordonnée canonique q sur B au voisinage d'un point où la variété dégénère et autour duquel la monodromie est maximalement unipotente. Les accouplements de Yukawa étendus comme en (3.2.21) sont alors simplement décrits par une fonction :

$$\Phi(q) = Y_2^{\kappa'}\Big(q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}\Big). \tag{3.2.38}$$

3.3. Le calcul de Candelas–de la Ossa–Green–Parkes

Considérons les hypersurfaces quintiques X dans $\mathbb{P}^4$, définies par une équation homogène F de degré 5. Ce sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 satisfaisant :

$$h^{2,1}(X) = 101, \quad h^{1,1}(X) = 1. \tag{3.3.39}$$

Le cas particulier de la variété de Fermat X_F

$$F = \sum_{i=0}^{i=4} X_i^5$$

a été évoqué dans 2.4.1, où on a « montré » que le miroir de X_F était la désingularisation (théorème 2.6) du quotient de X_F par le groupe $G \subset (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5/\operatorname{diag}$ défini par la condition $\sum_i \alpha_i = 0$. La variété $Y = \widetilde{X_F/G}$ est de Calabi-Yau et satisfait :

$$h^{2,1}(Y) = 1 = h^1(T_Y), \quad h^{1,1}(Y) = 101. \tag{3.3.40}$$

La famille de dimension 1 des déformations de Y est facile à trouver : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la variété X_λ d'équation

$$F_\lambda = \sum_{i=0}^{i=4} X_i^5 + \lambda \prod_{i=0}^{i=4} X_i$$

est également invariante sous G et les déformations Y_λ de Y sont données par les quotients $\widetilde{X_\lambda/G}$. En fait, le paramètre correct est plutôt $\psi = \lambda^5$ car X_λ est isomorphe à $X_{\eta\lambda}$ lorsque $\eta^5 = 1$.

Lorsque λ tend vers l'infini dans $\mathbb{P}^1$, la variété X_λ dégénère ; il est prouvé dans [43] que la monodromie est maximalement unipotente et satisfait la condition (*). On dispose donc d'une coordonnée canonique q à l'infini et d'une trivialisation κ' de $\overline{\mathcal{H}}_0^{3,0}$ définie au signe près.

Identifions $H^2(X, \mathbb{C})/2i\pi H^2(X, \mathbb{Z})$ à $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ grâce au générateur $H = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ de $H^2(X, \mathbb{Z})$. L'application miroir (*cf.* 1.8.1) doit fournir une application $M : U \to \mathbb{P}^1$ où l'ouvert

$$U \subset H^2(X, \mathbb{C})/2i\pi H^2(X, \mathbb{Z}) \tag{3.3.41}$$

est défini par la condition $\operatorname{Re} z > 0$.

Soit t le paramètre sur le revêtement universel de U, défini par

$$\omega_t = -2i\pi t H\,;$$

alors t satisfait $\operatorname{Im} t > 0$; soit $t' = \dfrac{1}{2i\pi}\log q$ le paramètre canonique à l'infini construit ci-dessus (et défini à une constante entière près). Alors pour $|q| < 1$, on doit avoir $\operatorname{Im} t' > 0$.

La première hypothèse de [43] est que l'application miroir est décrite à l'infini par la condition $M^*(t') = t$.

D'autre part, d'après 2.4, M_* doit être compatible avec les accouplements de Yukawa Y_1, Y_2 lorsque Y_2 est correctement normalisé, au sens où

$$Y_1(\omega)(\phi,\phi,\phi) = Y_2\big(M(\omega)\big)(M_*\phi, M_*\phi, M_*\phi).$$

La seconde hypothèse est que la trivialisation de $\overline{\mathcal{H}}{}^{3,0}_0$ définie dans (3.2.37) donne au signe près la normalisation correcte de Y_2. L'identification des accouplements de Yukawa Y_1 et Y_2 fournit alors :

$$Y_2^{\kappa'}\big(\mathrm{e}^{2i\pi t}\big)\Big(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big) = Y_1(-2i\pi t H)(H,H,H) \tag{3.3.42}$$

soit encore

$$\Phi(q) = Y_1(-2i\pi t H)(H,H,H),$$

où $q = \mathrm{e}^{2i\pi t}$ et Φ est la fonction holomorphe définie en (3.2.38). D'autre part, la formule (2.6.54) fournit, compte tenu du calcul des $n(\alpha)$ (*cf.* 5.6), la formule

$$Y_1\big(\mathrm{e}^{-2i\pi t H}\big)(H,H,H) = \int_X H^3 + \sum_{d>0} n(d) d^3 \,\frac{\mathrm{e}^{2i\pi d t}}{(1-\mathrm{e}^{2i\pi d t})} \tag{3.3.43}$$

où $n(d)$ est le nombre de courbes rationnelles de degré d génériquement plongées dans une quintique générale X, en supposant que ces courbes sont rigides. En comparant les développements de chacune de ces fonctions en puissances de $\mathrm{e}^{2i\pi t}$, on voit que la connaissance de $\Phi(q)$ comme série entière de q permet de prédire le nombre de courbes rationnelles dans une quintique générale en tout degré. Les prédictions ont été vérifiées jusqu'en degré 4 (*cf.* [45], [46] et [51]).

3.3.1. Calcul des accouplements de Yukawa normalisés

Il reste à voir comment on peut calculer la fonction $\Phi(q)$ de (3.2.38). Calculer les accouplements de Yukawa pour une normalisation algébrique de κ et dans des coordonnées algébriques ne présente pas de difficulté (d'après [44] et [47], c'est un calcul purement algébrique (*cf.* 3.5)) ; la principale difficulté consiste à calculer la section normalisée κ' de (3.2.37) et la coordonnée canonique q, qui ont manifestement un caractère transcendant. Dans la section suivante on explique la notion d'équation de Picard-Fuchs, et on calcule ces équations plus ou moins explicitement. Au § 3.5, on montre comment ces équations permettent de conclure l'argument de [43].

3.4. Équations de Picard-Fuchs

Soit B une courbe lisse et soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ une application propre et lisse ; soit ω une section holomorphe du fibré $\mathcal{H}^{n,0} = R^0\pi_* K_{\mathcal{X}/B}$. Soit t une coordonnée sur B ; en utilisant la connexion de Gauss-Manin ∇ sur $\mathcal{H}^n$ (*cf.* 1.5.1) ; on peut définir des sections holomorphes ω_k de $\mathcal{H}^n$ par

$$\omega_k = (\nabla_{\partial/\partial t})^k(\omega). \tag{3.4.44}$$

Pour un certain $N \leq \dim \mathcal{H}^n$, on a bien sûr une relation à coefficients méromorphes

$$\omega_N = \sum_{i<N} \alpha_i(t)\omega_i\,. \tag{3.4.45}$$

Définition 3.11. — L'équation $\dfrac{\partial^N \phi}{\partial t^N} = \displaystyle\sum_{i<N} \alpha_i(t) \dfrac{\partial^i \phi}{\partial t^i}$ est appelée *équation de Picard-Fuchs* de $(\mathcal{X}, \omega)$.

Supposons maintenant que $N = \dim \mathcal{H}^n$, c'est-à-dire que les $\omega_k(b)$ forment une base de $\mathcal{H}^n_b = H^n(X_b, \mathbb{C})$, pour b générique et $0 \leq k \leq N-1$. On a alors :

Lemme 3.12. — *Les solutions de l'équation de Picard-Fuchs sont les fonctions (multivaluées) $\phi_\alpha = \langle \alpha, \omega\rangle$, où les α sont les sections plates de $\mathcal{H}_n := (\mathcal{H}^n)^*$.*

Il est clair en effet que les ϕ_α sont des solutions, puisque par platitude de α, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\big(\langle \alpha, \omega\rangle\big) = \big\langle \alpha, \nabla_{\partial/\partial t}(\omega)\big\rangle.$$

D'autre part comme les $\omega_k(b)$, où $0 \leq k \leq N-1$, forment une base de la fibre $\mathcal{H}^n_b$ pour b générique, les ϕ_α engendrent un espace de dimension N de solutions et donc engendrent toutes les solutions. ∎

On considère des familles de dimension 1 d'hypersurfaces $X_t \subset \mathbb{P}^{n+1}$. On étudie la variation de structure de Hodge sur $H^n(X_t)$, ou comme dans le cas décrit plus haut, sur $H^n(X_t)^G$ où G est un groupe fini agissant sur X_t. On supposera pour simplifier que la famille X_t est donnée par un pinceau $F_t = F + tH$, où H est G-invariant dans le second cas. On va montrer comment la représentation par résidus de la cohomologie de X_t permet de calculer les équations de Picard-Fuchs.

3.4.1. Calcul de la cohomologie de X_t par résidus

Soient $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface lisse d'équation $F = 0$ et $U = \mathbb{P}^{n+1} - X$. On a l'application résidu

$$H^{k+1}(U) \longrightarrow H^k(X)$$

(obtenue par intégration sur la fibre du bord d'un voisinage tubulaire de X dans $\mathbb{P}^{n+1}$), qui fournit un isomorphisme

$$H^{n+1}(U) \cong \mathrm{Ker}\big(H^n(X) \to H^{n+2}(\mathbb{P}^{n+1})\big),$$

comme on le voit en combinant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de $\mathbb{P}^{n+1}$ par U et un voisinage tubulaire de X dans $\mathbb{P}^{n+1}$, et l'isomorphisme de Thom, (*cf.* [47]). Si n est impair, on a $H^{n+1}(U) \cong H^n(X)$. Comme U est affine, $H^{n+1}(U)$ est le quotient de l'espace des $(n+1)$-formes holomorphes fermées par celui des formes holomorphes exactes. En effet,

$$0 \to \mathcal{O}_U \to \cdots \to \Omega_U^{n+1} \to 0 \tag{3.4.46}$$

est une résolution de $\mathbb{C}$ sur U et on a $H^i(\Omega_U^p) = 0$ pour $i > 0$. En fait, on peut (d'après Grothendieck [49]) ne considérer que les formes holomorphes sur U, méromorphes le long de X. Ces formes s'écrivent

$$\frac{P}{F^k}\Omega, \quad \text{où} \quad \Omega = \sum_i (-1)^i X_i \,\mathrm{d}X_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}X_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X_{n+1}$$

et P est un polynôme homogène de degré $(kd - n - 2)$ si $d = \deg F$.

Le lemme suivant est une conséquence du théorème 3.14 qui sera démontré plus loin.

Lemme 3.13 (Griffiths [47]). — *La classe de la forme* $\dfrac{P}{F^k}\Omega$ *est nulle dans* $H^{n+1}(U, \mathbb{C})$ *si et seulement si*

$$\frac{P}{F^k}\Omega = \mathrm{d}\Phi, \quad \Phi \in H^0\big(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}((k-1)X)\big).$$

Considérons maintenant un pinceau

$$F_t = F + tH$$

et soit

$$\omega_t = \mathrm{Res}_{X_t}(P\Omega/F_t)$$

une section holomorphe du fibré $t \to H^0(K_{X_t})$. Il est clair que la connexion de Gauss-Manin pour la cohomologie des ouverts U_t s'obtient en différentiant les formes $P_t\Omega/F_t^k$ par rapport à t, et comme l'application résidu est plate, il vient :

$$\nabla_{\partial/\partial t}\omega_t = \mathrm{Res}_{X_t}\Big(\frac{-HP}{F_t^2}\Omega\Big). \tag{3.4.47}$$

En continuant à différentier par rapport à t et en appliquant le lemme 3.13, on voit que pour obtenir l'équation de Picard-Fuchs, il suffit de trouver des fonctions $\alpha_i(t)$ pour $0 \leq i \leq N-1$ (qui seront en fait algébriques) et une forme $\Phi \in H^0(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(NX))$, telle que

$$d\Phi = (-1)^N (N!)\,\frac{H^N P}{F^{N+1}}\Omega - \sum_{i<N} \alpha_i(t)(-1)^i (i\,!)\,\frac{H^i P}{F^{i+1}}\Omega. \tag{3.4.48}$$

3.4.2. Filtration de Hodge et filtration par l'ordre du pôle

Le théorème suivant, qui précise le lemme 3.13, rend très simple le calcul des coefficients $\alpha_i(t)$ de l'équation de Picard-Fuchs, au moins dans le cas de la famille X_λ de 3.3.

Théorème 3.14 (Griffiths).

(i) *Les résidus le long de $X = V(F)$ de formes méromorphes $\dfrac{P}{F^{k+1}}\,\Omega$ engendrent $F^{n-k}H^n_{\mathrm{prim}}(X)$.*

De plus on a :

(ii) *La classe de $\operatorname{Res}\Big(\dfrac{P}{F^{k+1}}\,\Omega\Big)$ est nulle si et seulement si $\dfrac{P}{F^{k+1}}\,\Omega = \mathrm{d}\Phi$ avec $\Phi \in H^0(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX))$.*

(iii) *Pour qu'il existe un polynôme Q et une forme $\Phi \in H^0(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX))$ tels que*

$$\frac{P}{F^{k+1}}\,\Omega = \frac{Q}{F^k}\,\Omega + \mathrm{d}\Phi,$$

il faut et il suffit que P appartienne à $J_F^{(k+1)d-n-2}$, où J_F est l'idéal jacobien engendré par les dérivées partielles $\partial F/\partial X_i$.

La preuve de (i) et (ii) se fait de la façon suivante.

En notant ${}^c\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX)$ le faisceau des formes différentielles holomorphes fermées de degré $\bullet$ sur U et méromorphes à pôle d'ordre au plus k le long de X, on a pour $k \geq 2$ et $p+1 \geq 2$ une suite exacte :

$$0 \to {}^c\Omega^p_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k-1)X\big) \longrightarrow \Omega^p_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k-1)X\big) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } {}^c\Omega^{p+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX) \to 0. \tag{3.4.49}$$

(On vérifie en effet qu'une forme fermée de degré au moins 2 à pôle d'ordre k le long de X est localement au voisinage de X la différentielle d'une forme à pôle d'ordre $(k-1)$ le long de X.) Comme les formes holomorphes de degré $n+1$ sur $\mathbb{P}^{n+1}$ sont fermées, on a

$${}^c\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k+1)X\big) = \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k+1)X\big)$$

et on obtient donc pour $k \leq n$ une série de suites exactes courtes :

$$\begin{cases} 0 \to {}^c\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX) \longrightarrow \Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k+1)X\big) \to 0, \\ 0 \to {}^c\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k-1)X\big) \longrightarrow \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k-1)X\big) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } {}^c\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX) \to 0, \\ \cdots \\ 0 \to {}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X) \longrightarrow \Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } {}^c\Omega^{n-k+2}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2X) \to 0. \end{cases} \tag{3.4.50}$$

Finalement on a la suite exacte :

$$0 \to {}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}} \longrightarrow {}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X) \xrightarrow{\ \mathrm{Res}\ } {}^c\Omega^{n-k}_X \to 0. \tag{3.4.51}$$

Or il résulte de la théorie de Hodge que $F^{n-k}H^n(X) \cong H^k({}^c\Omega_X^{n-k})$. En appliquant le théorème d'annulation de Bott aux suites exactes longues associées à (3.4.50), on trouve une série d'isomorphismes :

$$
\text{(3.4.52)} \qquad \begin{cases} H^0(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k+1)X)\big)/\mathrm{d}\big(H^0\big(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX)\big)\big) \cong H^1({}^c\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX)), \\ H^1\big({}^c\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX)\big) \cong H^2\big({}^c\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big((k-1)X\big)\big), \\ \dots \\ H^{k-1}\big({}^c\Omega^{n-k+2}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2X)\big) \cong H^k\big({}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X)\big). \end{cases}
$$

Enfin (3.4.51) fournit un isomorphisme :

$$
\begin{aligned} \text{(3.4.53)} \qquad & H^k({}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}(X)\big) \\ & \cong \operatorname{Ker}\big\{H^k({}^c\Omega_X^{n-k}) \to H^{k+1}\big({}^c\Omega^{n-k+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}\big)\big\} = F^{n-k}H^n(X)_{\mathrm{prim}}. \end{aligned}
$$

On a donc montré que

$$
H^0\big(\Omega^{n+1}_{\mathbb{P}^{n+1}}((k+1)X)\big)/\mathrm{d}H^0\big(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX))\big)
$$

est isomorphe à $F^{n-k}H^n_{\mathrm{prim}}(X)$, ce qui prouve (i) et (ii).

Pour prouver (iii), on note que les sections de $\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX)$ sont de la forme

$$
\Phi = \sum_i \frac{P_i}{F^k}\,\Omega_i
$$

où $\Omega_i = \operatorname{int}(\partial/\partial X_i)(\Omega)$ et $\deg P_i = kd - n - 1$. On a donc :

$$
\begin{aligned} \text{(3.4.54)} \qquad \mathrm{d}\Phi &= \frac{\mathrm{d}(\sum_i P_i\Omega_i)}{F^k} - k\,\frac{\mathrm{d}F}{F^{k+1}} \wedge \sum_i P_i\Omega_i \\ &= \frac{\mathrm{d}(\sum_i P_i\Omega_i)}{F^k} - k\,\frac{(\sum_i P_i\partial F/\partial X_i)}{F^{k+1}}\,\Omega - \deg F\,\frac{A}{F^k}, \end{aligned}
$$

où

$$
A = \sum_i (-1)^i P_i\,\mathrm{d}X_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}X_i} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{n+1}
$$

Par identification des termes de degré maximal en $1/F$, on en conclut que

$$
\frac{P}{F^{k+1}}\,\Omega = \mathrm{d}\Phi + \frac{Q}{F^k}\,\Omega
$$

pour $\Phi \in H^0(\Omega^n_{\mathbb{P}^{n+1}}(kX))$ comme ci-dessus, équivaut à

$$
P = -k\sum_i P_i\,\frac{\partial F}{\partial X_i},
$$

ce qui prouve (iii). $\square$

Considérons la famille X_λ du § 3.3 et la forme $\omega_\lambda = \operatorname{Res}_{X_\lambda} \Omega/F_\lambda$, où :

- $F_\lambda = F + \lambda H$,
- F est l'équation de Fermat,
- H est le polynôme G-invariant $\prod_i X_i$.

La forme ω_λ est G-invariante. Les résidus $\operatorname{Res}_{X_\lambda}(H^k/F_\lambda^{k+1})\Omega$ sont donc des éléments de $H^3(X_\lambda)^G \cong H^3(Y_\lambda)$. On sait d'après le § 3.4.1 que

$$(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^i(\omega) = (-1)^i i\,!\operatorname{Res}_{X_\lambda} \frac{H^i}{F_\lambda^{i+1}}\,\Omega.$$

Pour $i \leq 3$, on vérifie que l'image de $(-1)^i i\,!\operatorname{Res}_{X_\lambda} \dfrac{H^i}{F_\lambda^{i+1}}\,\Omega$ par la projection $F^{3-i}H^3(Y_\lambda) \to H^{3-i,i}(Y_\lambda)$ n'est pas nulle (l'espace but est de rang 1 pour tout i).

Le calcul des coefficients $\alpha_i(\lambda)$ de l'équation de Picard-Fuchs pour $0 \leq i \leq 3$ se fait alors de la manière suivante. On sait que l'idéal jacobien J_{F_λ} est égal à l'anneau de polynômes en degrés strictement supérieurs à 15. On peut donc écrire :

$$(-1)^4 4\,!\,H^4 = \sum_i P_i \frac{\partial F}{\partial X_i}\cdot \tag{3.4.55}$$

D'après la formule (3.4.54), les P_i permettent de construire explicitement une forme $\Phi \in H^0(\Omega^3_{\mathbb{P}^4}(3X))$ et un polynôme Q_4 de degré 15, tous deux G-invariants, tels que :

$$(-1)^4 4\,!\,\frac{H^4}{F_\lambda^5}\,\Omega = \mathrm{d}(\Phi) + \frac{Q_4}{F_\lambda^4}\,\Omega\,. \tag{3.4.56}$$

D'après le lemme 3.13, on a donc :

$$(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^4(\omega) = (-1)^4 4\,!\operatorname{Res}_{X_\lambda} \frac{H^4}{F_\lambda^5}\,\Omega = \operatorname{Res}_{X_\lambda} \frac{Q_4}{F_\lambda^4}\,\Omega. \tag{3.4.57}$$

Le coefficient $\alpha_3(\lambda)$ de l'équation de Picard-Fuchs est alors déterminé de la façon suivante. On doit avoir :

$$(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^4(\omega) = \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_i(\lambda)(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^i(\omega). \tag{3.4.58}$$

Or les $(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^i(\omega)$, pour $i < 3$, engendrent $F^2H^3(Y_\lambda)$. Donc $\alpha_3(\lambda)$ est déterminé par la condition : « $\operatorname{Res}_{X_\lambda} Q_4/F_\lambda^4\Omega$ et $\alpha_3(\lambda)\operatorname{Res}_{X_\lambda}(-1)^3 3\,!\,H^3/F_\lambda^4\,\Omega$ ont la même projection dans $H^{0,3}(Y_\lambda)$ », ce qui, par le théorème 3.14 (iii), est équivalent à :

$$Q_4 - \alpha_3(\lambda)(-1)^3 3\,!\,H^3 \in J^{15}_{F_\lambda}. \tag{3.4.59}$$

Les autres coefficients se calculent de la même manière, par réduction successive de l'ordre du pôle.

Remarque 3.15. — On a calculé l'équation de Picard-Fuchs de la famille Y_λ munie de la forme G-invariante ω_λ. Il est en fait préférable de travailler avec la forme $\omega'_\lambda = \lambda\omega_\lambda$, qui fournit une section holomorphe du fibré $\mathcal{H}^{3,0}(Y_\lambda)$ invariante sous les transformations $\lambda \mapsto \zeta\lambda$ avec $\zeta^5 = 1$ et non nulle à l'infini. L'équation de Picard-Fuchs de ω'_λ se déduit immédiatement de celle de ω_λ par des transformations linéaires ($\nabla_{\partial/\partial\lambda}\omega'_\lambda = \lambda\nabla_{\partial/\partial\lambda}\omega_\lambda + \omega_\lambda \cdots$). Finalement, pour obtenir l'équation de Picard-Fuchs de (Y_ψ, ω'_ψ), $\psi = \lambda^5$, il suffit de noter que

$$\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{1}{5\lambda^4}\frac{\partial}{\partial\lambda}$$

et d'effectuer les transformations linéaires évidentes.

3.5. Fin du raisonnement

On explique d'abord comment se calculent les accouplements de Yukawa pour la famille X_λ, normalisés par la section ω, c'est-à-dire la fonction $Y_2^\omega(\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\lambda, \partial/\partial\lambda)$ du paramètre λ, où $\omega = \operatorname{Res}_{X_\lambda} \Omega/F_\lambda$. On utilise pour cela le lemme 3.2 et sa démonstration qui donnent :

$$Y_2^\omega\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big) = \Big\langle \omega, \big((\nabla_{\partial/\partial\lambda})^3\omega\big)^{0,3}\Big\rangle, \tag{3.5.60}$$

où « ^{0,3} » désigne la projection dans $\mathcal{H}^{0,3}$ et le crochet est la dualité de Serre entre $H^0(K_{X_\lambda})$ et $H^3(\mathcal{O}_{X_\lambda})$. On a vu que :

$$(\nabla_{\partial/\partial\lambda})^3(\omega) = (-1)^3 3!\operatorname{Res}_{X_\lambda}\frac{H^3}{F_\lambda^4}\Omega.$$

Enfin, d'après le théorème 3.14, on a une application surjective

$$\begin{aligned} H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(15)\big)^G &\longrightarrow H^3(X_\lambda, \mathbb{C})^G \cong H^3(Y_\lambda, \mathbb{C}),\\ P &\longmapsto \operatorname{Res}_{X_\lambda} P\Omega/F_\lambda^4, \end{aligned} \tag{3.5.61}$$

qui induit un isomorphisme

$$H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(15)\big)^G / J^{15}_{F_\lambda} \cong H^3(\mathcal{O}_{Y_\lambda}). \tag{3.5.62}$$

Pour calculer le deuxième membre de (3.5.60), il reste donc seulement à utiliser le théorème suivant, dû à Griffiths et Carlson [44] : soient F un polynôme homogène de degré d sur $\mathbb{P}^{n+1}$ et R_F son anneau jacobien, c'est-à-dire le quotient de l'anneau de polynômes de $\mathbb{P}^{n+1}$ par l'idéal jacobien de F.

Théorème 3.16. — *Si F définit une hypersurface lisse $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, il existe un isomorphisme $\eta : R_F^{(n+2)d-2(n+2)} \cong \mathbb{C}$ tel que via les isomorphismes $H^k(X, \Omega_X^{n-k})_{\mathrm{prim}} \cong R_F^{(k+1)d-n-2}$ fournis par le théorème* 3.14, *le cup-produit*

$$H^k(X, \Omega_X^{n-k})_{\mathrm{prim}} \otimes H^{n-k}(X, \Omega_X^k)_{\mathrm{prim}} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{3.5.63}$$

s'identifie au produit

$$R_F^{(k+1)d-n-2} \otimes R_F^{(n-k+1)d-n-2} \longrightarrow R_F^{(n+2)d-2(n+2)} \tag{3.5.64}$$

suivi de l'isomorphisme η.

Explicitement, η est simplement induit à un coefficient universel près par l'application :

$$P \longmapsto \mathrm{Res}_0\Big(\frac{P}{\partial F/\partial X_0 \cdots \partial F/\partial X_{n+1}}\,\mathrm{d}X_0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X_{n+1}\Big).$$

Remarque 3.17. — Pour calculer les accouplements de Yukawa de la famille Y_λ, normalisés par la section ω (qu'on voit maintenant comme une section du fibré de fibre $H^{3,0}(Y_\lambda)$), appliqués au champ $\partial/\partial\lambda$, il suffit de les calculer pour la famille X_λ et de diviser par le cardinal de G. D'autre part :

$$Y_2^{\omega'_\psi}\Big(\frac{\partial}{\partial\psi}, \frac{\partial}{\partial\psi}, \frac{\partial}{\partial\psi}\Big) = \Big(\frac{1}{5^3}\lambda^{10}\Big) Y_2^{\omega_\lambda}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big).$$

Supposons qu'on fasse un changement de coordonnées à l'infini $q = q(1/\psi)$ et qu'on change ω'_ψ en $\kappa'_\psi = f(\psi)\omega'_\psi$; on a alors

$$\begin{aligned}\Phi(q) = Y_2^{\kappa'}\Big(q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}\Big) &= f(\psi)^2 Y_2^{\omega'_\psi}\Big(q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}, q\frac{\partial}{\partial q}\Big)\\ &= \frac{f(\psi)^2 q(1/\psi)^3\psi^6}{q'(1/\psi)^3} Y_2^{\omega'}\Big(\frac{\partial}{\partial\psi}, \frac{\partial}{\partial\psi}, \frac{\partial}{\partial\psi}\Big)\end{aligned} \tag{3.5.65}$$

qu'on peut écrire comme une fonction de q en inversant la série $q(1/\psi)$.

On connaît enfin l'équation de Picard-Fuchs de la famille Y_ψ et de la section ω'_ψ d'après 3.4. La fonction $f(\psi)$ cherchée est égale à $1/\int_{e_0}\omega'_\psi$, où e_0 engendre l'homologie entière invariante par monodromie autour de l'infini (*cf.* (3.2.33)). Or on sait que $\int_{e_0}\omega'_\psi$ engendre sur $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation de Picard-Fuchs sans monodromie autour de l'infini (lemme 3.12). La fonction $f(\psi)$ est donc déterminée par l'équation de Picard-Fuchs à un coefficient β près. De même, la fonction $q(1/\psi)$ est caractérisée par la formule

$$\frac{1}{2i\pi}\log(q) = \frac{\int_{e_1}\omega'_\psi}{\int_{e_0}\omega'_\psi} \tag{3.5.66}$$

où e_1 doit être une classe d'homologie entière vérifiant la condition $Ne_1 = e_0$. Si on a déterminé e_0, $\int_{e_1}\omega'_\psi$ doit être une solution de l'équation de Picard-Fuchs ayant exactement pour monodromie $\int_{e_0}\omega'_\psi$ autour de l'infini et cela la détermine modulo $\alpha\int_{e_0}\omega'_\psi$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Si on a fixé les deux coefficients complexes β et α ci-dessus, la formule (3.5.65) ainsi que le développement des solutions de l'équation de Picard-Fuchs fournissent la fonction $\Phi(q)$, comme série entière de q.

Il reste évidemment encore à distinguer les solutions de l'équation de Picard-Fuchs correspondant à des classes d'homologie entière. Comme on a seulement à fixer les deux constantes α, β introduites ci-dessus, ceci peut se faire en explicitant les cycles d'intégration e_0, e_1 et en calculant les premiers termes du développement asymptotique de $\int_{e_i}\omega'_\psi$.

4. TRAVAUX DE BATYREV

Le but de ce chapitre est la description des premiers travaux de Batyrev sur la symétrie miroir entre hypersurfaces dans les variétés toriques. On explique, suivant Fulton [66], la construction d'une variété torique de dimension n à partir d'un « éventail » dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire d'une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en cônes convexes polyédraux rationnels.

On développe la traduction de certaines propriétés ou notions géométriques (lissité ou $\mathbb{Q}$-factorialité, diviseurs de Cartier, diviseur canonique, amplitude des fibrés inversibles) en termes combinatoires (cônes simpliciaux sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, fonctions linéaires par morceaux sur $\mathbb{R}^{n+1}$, fonction support, convexité).

Ceci permet d'établir facilement la correspondance bijective entre variétés toriques de Fano (le diviseur canonique doit être de Cartier, et d'inverse ample) et polyèdres réflexifs ; Batyrev construit la symétrie miroir $\{X\} \mapsto \{X'\}$ entre certaines désingularisations d'hypersurfaces à fibré canonique trivial dans les variétés toriques de Fano comme l'involution qui à un polyèdre réflexif associe son dual.

Dans un second temps, on explique comment on peut calculer (en principe) les $h^{p,q}$ de certaines désingularisations de ces hypersurfaces, en utilisant des résultats de Danilov et Khovanski, et on montre, suivant Batyrev, l'égalité $h^1(T_X) = h^1(\Omega_{X'})$, où X et X' sont comme ci-dessus, ce qui est la première des prédictions des physiciens concernant la comparaison des nombres de Hodge de X et de son miroir.

4.1. Variétés toriques

Soient N un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n et M son dual. On se donne dans $N_{\mathbb{R}}$ un système Σ de cônes convexes σ polyédraux et rationnels, c'est-à-dire engendrés comme cônes convexes par un nombre fini de points de N, tels que $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$ et satisfaisant les conditions suivantes :

(i) Si σ' est une face de σ et $\sigma \in \Sigma$, alors $\sigma' \in \Sigma$.

(ii) Si σ, σ' sont dans Σ, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face de σ et une face de σ'.

On construit alors une variété torique $\mathbb{P}_\Sigma$ de dimension n associée à Σ de la façon suivante. Munissons M d'une base, de sorte que $m \in M$ s'écrit $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, on pose :

$$U_\sigma = \operatorname{Spec} A_\sigma, \quad \text{où} \quad A_\sigma = \mathbb{C}\Big[\prod X_i^{m_i}\Big]_{(m_i) \in \sigma^*}$$

(le dual σ^* est l'ensemble des points $m \in M$ positifs ou nuls sur σ).

Les U_σ forment un recouvrement affine ouvert de $\mathbb{P}_\Sigma$.

Si $\sigma' \subset \sigma$ est une face, on a une inclusion $\sigma^* \hookrightarrow \sigma'^*$, fournissant un morphisme $A_\sigma \to A_{\sigma'}$ dont on vérifie aisément qu'il induit une inclusion ouverte $j_{\sigma'\sigma} : U_{\sigma'} \hookrightarrow U_\sigma$.

Les ouverts U_σ se recollent dans $\mathbb{P}_\Sigma$ en utilisant la propriété (ii) : soit $\sigma'' = \sigma \cap \sigma'$; alors l'intersection $U_\sigma \cap U_{\sigma'}$ dans $\mathbb{P}_\Sigma$ est égale à $U_{\sigma''}$ qui est naturellement contenu dans U_σ *via* $j_{\sigma''\sigma}$ et dans $U_{\sigma'}$ *via* $j_{\sigma''\sigma'}$.

4.1.1. Compacité et lissité

Lemme 4.1. — *La variété $\mathbb{P}_\Sigma$ est complète si et seulement si $N_\mathbb{R}$ est égal à la réunion des cônes de Σ.*

Pour voir que cette condition est nécessaire, on note que $\mathbb{P}_\Sigma$ contient
$$U_0 = \operatorname{Spec} A_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1^\pm, \dots, X_n^\pm] = (\mathbb{C}^*)^n.$$
Soit $n = (n_1, \dots, n_n) \in N$; alors U_0 contient $(\lambda^{n_1}, \dots, \lambda^{n_n})$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si $\mathbb{P}_\Sigma$ est complète, il doit exister un cône σ tel que $\lim_{\lambda\to 0}(\lambda^{n_1}, \dots, \lambda^{n_n})$ existe dans U_σ. Mais clairement, cette limite existe si et seulement si $n \in \sigma$ (*cf.* [66] pour la réciproque). ∎

Dans la suite, on supposera toujours que $\mathbb{P}_\Sigma$ est complète.

Lemme 4.2. — *La variété $\mathbb{P}_\Sigma$ est lisse si et seulement si chaque cône $\sigma \in \Sigma$ est engendré par $e_1, \dots, e_{k(\sigma)}$, où les e_i sont des éléments de N indépendants, pouvant se compléter en une $\mathbb{Z}$-base de N.*

En effet, la suffisance de cette condition vient du fait que si σ est engendré par $e_1, \dots, e_{k(\sigma)}$, que l'on peut compléter en une base $e_1, \dots, e_n$ de N dans la base duale, σ^* est décrit par la condition $m_i \geq 0$ où $i \leq k(\sigma)$, et on a donc un isomorphisme
$$A_\sigma \cong \mathbb{C}\big[X_1, \dots, X_{k(\sigma)}, X^\pm_{k(\sigma)+1}, \dots, X_n^\pm\big]$$
et donc aussi
$$U_\sigma \cong \mathbb{C}^{k(\sigma)} \times (\mathbb{C}^*)^{n-k(\sigma)}$$
(voir [66] pour la réciproque). ∎

4.1.2. Action de $(\mathbb{C}^*)^n$

Le tore $T := (\mathbb{C}^*)^n$ agit sur chaque ouvert U_σ, c'est-à-dire sur chaque algèbre A_σ par
$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda^*(X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}) = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_n^{m_n} X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}\,. \tag{4.1.1}$$
Ces actions sont clairement compatibles sur les intersections $U_\sigma \cap U_{\sigma'}$ et fournissent donc une action de T sur $\mathbb{P}_\Sigma$, justifiant le terme de variété torique. L'action de T permet par ailleurs de construire une stratification de $\mathbb{P}_\Sigma$ par des T-orbites qui sont isomorphes à des $(\mathbb{C}^*)^k$. On peut décrire explicitement cette stratification en fonction de la donnée du système Σ de la manière suivante. Soit σ un cône de Σ ; soit $N_\sigma \subset N$ le sous-réseau engendré par σ et soit $M_\sigma := N_\sigma^\perp$. On définit alors $O_\sigma \subset U_\sigma$ par les équations $X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} = 0$ pour $m = (m_1, \dots, m_n) \in \sigma^* - M_\sigma$. On vérifie facilement que O_σ est une orbite sous T et est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{n-k(\sigma)}$, où $k(\sigma)$ est le rang du réseau engendré par σ.

4.2. Diviseurs de Weil et de Cartier

Les *diviseurs de Weil* d'une variété algébrique irréductible sont définis comme les combinaisons à coefficients entiers d'hypersurfaces irréductibles, tandis que les *diviseurs de Cartier* sont définis comme les données de fonctions méromorphes g_i sur les ouverts U_i d'un recouvrement, définies à une fonction inversible près, et satisfaisant la condition : « g_i/g_j est inversible sur $U_i \cap U_j$ ».

À un diviseur de Cartier est associé un diviseur de Weil (son intersection avec l'ouvert U_i est le diviseur de la fonction g_i), mais l'équivalence entre les deux notions n'a lieu que si la variété est normale et localement factorielle (les idéaux de codimension 1 dans les anneaux locaux aux points fermés doivent être principaux).

Comme les variétés toriques ne satisfont pas en général cette dernière condition, on décrit ci-dessous, suivant [66], leurs diviseurs de Weil et de Cartier séparément. On s'intéresse en fait aux classes de diviseurs modulo les diviseurs principaux, c'est-à-dire les diviseurs d'une fonction méromorphe sur la variété considérée, et c'est pourquoi il suffit dans les deux cas d'étudier les diviseurs invariants sous l'action du tore T.

4.2.1. Diviseurs de Weil

La description des diviseurs de Weil T-invariants est immédiate. En effet, le cône $\{0\} \in \Sigma$ fournit une T-orbite $O_0 = U_0$ de dimension n. Les diviseurs de Weil T-invariants sont donc nécessairement les composantes de dimension $(n-1)$ de $\mathbb{P}_\Sigma - U_0$, qui sont les adhérences des T-orbites de dimension $(n-1)$, c'est-à-dire des orbites O_σ, où σ est un cône de dimension 1. Un tel σ possède un unique générateur $v \in N$ (v est l'unique point entier non divisible de σ) et on notera D_v le diviseur de Weil correspondant.

4.2.2. Diviseurs de Cartier

Un diviseur de Cartier T-invariant donne sur chaque U_σ une fonction rationnelle ϕ_σ préservée à un coefficient près par l'action de T et définie modulo une fonction inversible dans U_σ ; sur $U_\sigma \cap U_{\sigma'}$, la fonction $\phi_\sigma/\phi_{\sigma'}$ doit être inversible.

La fonction ϕ_σ étant un vecteur propre pour l'action de T s'écrit nécessairement comme un monôme :

$$\phi_\sigma = \prod_i X_i^{m_i(\sigma)}.$$

Le fait que cette fonction soit définie sur U_σ modulo une fonction inversible (T-invariante) entraîne que $m(\sigma) := (m_1(\sigma), \ldots, m_n(\sigma))$ est défini modulo M_σ, ce qui montre que la fonction $h_\sigma = \langle m(\sigma), \cdot \rangle$ sur $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ est une donnée équivalente à celle de la restriction du diviseur de Cartier considéré à U_σ. Finalement, la condition d'inversibilité de $\phi_\sigma/\phi_{\sigma'}$ sur $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma''}$ est équivalente à la condition $m(\sigma) - m(\sigma') \in M_{\sigma''}$, ou encore $h_\sigma = h_{\sigma'}$ sur $\sigma \cap \sigma' = \sigma''$. On a donc montré :

Proposition 4.3. — *Il existe une correspondance bijective entre diviseurs de Cartier T-invariants sur $\mathbb{P}_\Sigma$ et fonctions h sur $N_\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : sur chaque cône σ, la fonction h est de la forme $\langle m(\sigma), \cdot \rangle$ pour un point $m(\sigma) \in M$.*

***Remarque 4.4.* —** Il est clair d'après la description qui précède que les diviseurs de Cartier principaux correspondent aux fonctions h globalement définies par un élément de M.

Il reste maintenant à voir comment on passe dans la description ci-dessus des diviseurs de Cartier aux diviseurs de Weil. Soit h une fonction sur $N_{\mathbb{R}}$ comme ci-dessus, et soit D_h le diviseur de Cartier correspondant.

***Lemme 4.5.* —** *Le diviseur de Weil* $\operatorname{div}(D_h)$ *associé est égal à* $\sum_v h(v)D_v$, *où* v *parcourt l'ensemble des générateurs des cônes de dimension* 1 *de* Σ.

En effet, les ouverts $\operatorname{Spec} A_\sigma$, pour $\dim\sigma = 1$, couvrent le complémentaire d'un ensemble de codimension 2 dans $\mathbb{P}_\Sigma$, il suffit donc de calculer $\operatorname{div}(L_h)$ dans les ouverts U_σ correspondants. Or soit $v \in N$ le générateur entier de σ, et soit $m(\sigma) \in M$ un point définissant $h_{|\sigma}$. Par définition D_h est alors représenté dans U_σ par la fonction rationnelle $X_1^{m_1(\sigma)} \dots X_n^{m_n(\sigma)}$. Or on rappelle (*cf.* 4.1.2) que D_v est défini dans U_σ par n'importe quelle équation $\prod_i X_i^{m_i}$ telle que $\langle m, v\rangle = 1$ et $m = (m_1, \dots, m_n)$ (si $m(v) = 0$, $\prod_i X_i^{m_i}$ est inversible dans U_σ). Il en résulte immédiatement que la multiplicité de D_v dans $\operatorname{div}(D_h) \cap U_\sigma$ est égale à $\langle m(\sigma), v\rangle = h(v)$.

4.2.3. Diviseur canonique

La variété $\mathbb{P}_\Sigma$ est lisse en codimension 1 puisque les ouverts U_σ tels que $\dim\sigma = 1$, qui recouvrent le complémentaire U d'un sous-ensemble algébrique de codimension 2 d'après 4.1.2, sont lisses en vertu du lemme 4.2. On va calculer un diviseur canonique T-invariant de $\mathbb{P}_\Sigma$, c'est-à-dire le diviseur d'une forme canonique méromorphe sur l'ouvert de lissité U de $\mathbb{P}_\Sigma$. Pour cela, on considère la forme différentielle T-invariante de degré n sur $U_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$:

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}X_1}{X_1} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}X_n}{X_n}. \tag{4.2.2}$$

Pour calculer le pôle de cette forme le long du diviseur D_v dans l'ouvert U_σ (où v engendre σ), on prend $m \in M$ tel que $\langle m, v\rangle = 1$. L'algèbre A_σ est alors égale à $\mathbb{C}[X^m, X^{\pm m'}]$, où $X^m = \prod_i X_i^{m_i}$ et m' parcourt $v^\perp$. Pour une constante $C \in \mathbb{C}^*$, on a alors :

$$\Omega = C\,\frac{\mathrm{d}X^m}{X^m} \wedge \frac{\mathrm{d}X^{m'_1}}{X^{m'_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\mathrm{d}X^{m'_{n-1}}}{X^{m'_{n-1}}}, \tag{4.2.3}$$

où $\{m'_1, \dots, m'_{n-1}\}$ est une base de $v^\perp$. Comme les $X^{m'}$ sont inversibles dans U_σ et fournissent avec X^m des coordonnées sur U_σ, il est clair d'après (4.2.3) que Ω ne s'annule pas sur U_σ et a exactement un pôle d'ordre 1 le long de D_v.

On a donc exhibé un diviseur de Weil $\sum_v D_v$ dont la restriction à U est anticanonique. La proposition 4.3 et le lemme 4.5 fournissent immédiatement la proposition suivante.

***Proposition 4.6.* —** *Le diviseur anticanonique de* U *s'étend en un diviseur de Cartier sur* $\mathbb{P}_\Sigma$ *si et seulement si il existe une fonction* h *sur* $N_{\mathbb{R}}$ *qui prend la valeur* 1 *sur les générateurs des cônes de dimension* 1 *de* Σ, *et telle que pour tout* $\sigma \in \Sigma$, *il existe* $m(\sigma) \in M$ *tel que* $h_{|\sigma} = \langle m(\sigma), \cdot\rangle$.

Une telle fonction h est alors appelée *fonction support* de Σ. Si elle existe, on a bien sûr :

$$K_{\mathbb{P}_\Sigma}^{-1} \cong \mathcal{O}(D_h) \tag{4.2.4}$$

4.3. Polyèdres et variétés toriques

Soit $\mathbb{P}_\Sigma$ une variété torique et soit h une fonction sur $N_\mathbb{R}$ définissant un diviseur de Cartier D_h, c'est-à-dire donnée par une collection $\{m(\sigma)\}$ de points de M telle que $h = \langle m(\sigma), \cdot\rangle$ sur σ. Le diviseur de Cartier correspondant est alors donné par la collection de fonctions $X^{m(\sigma)}$ sur U_σ ; on notera

$$L_h = \mathcal{O}(D_h)$$

le fibré inversible associé.

4.3.1. Sections de L_h

Comme L_h est T-invariant, ses sections sont engendrées par des vecteurs propres pour l'action de T, c'est-à-dire par des monômes si on les identifie à des fonctions rationnelles grâce à la section méromorphe $(X^{m(\sigma)})$. Un monôme $X^m = \prod_i X_i^{m_i}$ est une section de L_h si et seulement si sur chaque ouvert U_σ, la section $X^m \cdot X^{m(\sigma)}$ n'a pas de pôle dans U_σ. Mais, par définition de l'algèbre A_σ des fonctions sur U_σ, on a $X^m \cdot X^{m(\sigma)} \in A_\sigma$ si et seulement si $m + m(\sigma) \in \sigma^*$. On a donc montré :

Lemme 4.7. — *Les sections T-invariantes de L_h s'identifient aux points entiers $m \in \Delta_h := \bigcap\limits_\sigma (-m(\sigma) + \sigma^*)$.*

Remarque 4.8. — Il est clair que des points entiers distincts de Δ_h fournissent des sections correspondant à des caractères différents de T. Donc l'ensemble des points entiers de Δ_h est en bijection avec une base de $H^0(L_h)$.

4.3.2. Engendrement global et amplitude de L_h

Lemme 4.9. — *Le diviseur L_h est engendré par ses sections globales si et seulement si la fonction h est convexe.*

Les sections globales de L_h ont été décrites dans le lemme précédent.

Soit maintenant σ un cône de Σ de dimension n et soit $p_\sigma \in \mathbb{P}_\Sigma$ le point T-invariant qui lui correspond (*cf.* 4.1.2). Par définition, p_σ est décrit dans U_σ par les équations $\prod_i X_i^{m_i} = 0$ pour $m = (m_i) \in \sigma^* - \{0\}$. Soit alors s une section T-invariante de L_h et écrivons :

$$\frac{s}{X^{m(\sigma)}} = \prod_i X_i^{m_i} \quad \text{où } m \in \Delta_h.$$

Alors $\prod_i X_i^{m_i + m_i(\sigma)}$ appartient à A_σ et s'annule en p_σ si et seulement si s s'annule en p_σ. Or cette fonction s'annule sur p_σ si $m_i + m_i(\sigma) \neq 0$ pour au moins un i. Le point p_σ n'est donc pas un point de base de $|L_h|$ si et seulement si le monôme $1/\prod_i X_i^{m_i(\sigma)}$ correspond à une section globale de L_h, ce qui équivaut à :

$$-m(\sigma) \in \bigcap_{\sigma'} -m(\sigma') + \sigma'^*. \tag{4.3.5}$$

Ceci équivaut au fait que $\langle m(\sigma), \cdot\rangle$ est inférieure ou égale à $\langle m(\sigma'), \cdot\rangle = h_{|\sigma'}$ sur σ', et comme $\langle m(\sigma), \cdot\rangle = h_{|\sigma}$ sur σ, cela signifie que le graphe de h est supporté au dessus de son hyperplan d'appui en un point de σ. Donc h est convexe si et seulement si aucun des points p_σ n'est un point de base de $|L_h|$. Pour finir la preuve du lemme, il suffit de noter que le lieu des points de base de $|L_h|$ est T-invariant, donc contient un point p_σ s'il n'est pas vide. $\square$

On peut montrer de la même façon le résultat suivant :

Lemme 4.10. — *Le fibré inversible L_h est ample si et seulement si h est strictement pseudoconvexe, au sens où pour tout cône σ de dimension n et pour tout cône $\sigma' \neq \sigma$ de dimension n, la fonction $\langle m(\sigma), \cdot\rangle$ est inférieure ou égale à h sur σ', l'inégalité étant stricte sur $\sigma' - \sigma \cap \sigma'$.*

4.3.3. Polyèdres et variétés toriques

Soit D_h un diviseur de Cartier T-invariant ample sur $\mathbb{P}_\Sigma$; d'après le lemme 4.7, les sections T-invariantes de L_h^k correspondent bijectivement aux points entiers de $k\Delta_h$, où le polyèdre Δ_h est défini dans le lemme 4.7. Comme L_h est ample, on a :

$$\mathbb{P}_\Sigma \cong \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_k H^0(\mathbb{P}_\Sigma, L_h^k) \cong \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[X_0^{m_0}\cdots X_n^{m_n}]_{(m_i/m_0)\in\Delta_h}\Big), \tag{4.3.6}$$

où la graduation du second anneau est donnée par m_0. Si h est strictement positive sauf en 0 (ce qui équivaut à $D_h = \sum_v n(v)D_v$, avec $n(v) > 0$ pout tout générateur v d'un cône de dimension 1 de Σ), il est clair que $\Delta := \Delta_h$ contient 0 dans son intérieur et est à sommets entiers. En effet, par définition, Δ s'identifie alors au dual du polyèdre convexe Δ^* défini par :

$$\Delta^* = \big\{x \in N_\mathbb{R}\,;\ h(x) \leq 1\big\}. \tag{4.3.7}$$

On a donc :

$$\Delta = \big\{x \in M_\mathbb{R}\,;\ \langle x, y\rangle \geq -1,\ \forall y \in \Delta^*\big\}. \tag{4.3.8}$$

Les sommets de Δ correspondent donc bijectivement aux faces de Δ^* de dimension $(n-1)$, ou encore aux cônes σ de dimension n de Σ, par stricte pseudoconvexité de h. Or par hypothèse, les faces de Δ^* de dimension $(n-1)$ sont définies par des équations $\langle m, \cdot\rangle = 1$ pour un point entier $m \in M$; cela implique clairement que Δ est à sommets entiers. D'autre part, d'après (4.3.8), 0 est intérieur à Δ.

Étant donné un polyèdre convexe Δ dans M satisfaisant les conditions ci-dessus, on lui associe comme en (4.3.6) une variété projective

$$\mathbb{P}_\Delta = \operatorname{Proj}\big(\mathbb{C}[X_0^{m_0}\ldots X_n^{m_n}]_{(m_i/m_0)\in\Delta}\big).$$

Notons maintenant la description de $\mathbb{P}_\Delta$ comme variété torique polarisée (c'est-à-dire munie d'un diviseur de Cartier T-invariant ample). Soit $\Delta^* \subset N_\mathbb{R}$ le polyèdre dual de Δ :

$$\Delta^* = \big\{x \in N_\mathbb{R}\,;\ \langle x, y\rangle \geq -1,\ \forall y \in \Delta\big\}. \tag{4.3.9}$$

On prend comme système de cônes Σ les cônes sur les faces de Δ^*. La polarisation, c'est-à-dire la donnée d'un diviseur de Cartier ample, est donnée de la façon suivante.

On prend la fonction h_Δ, linéaire sur chaque cône de Σ et telle que $h_\Delta(x) \leq 1$ définisse le polyèdre Δ^*. On veut montrer que h_Δ est définie sur chaque cône σ par un élément $m(\sigma) \in M$. Il suffit de le voir pour les cônes de dimension n, pour lesquels cela résulte du fait que Δ^* est le dual de Δ et que Δ est à sommets entiers : les cônes de dimension n de Σ sont les cônes sur les faces de dimension $(n-1)$ de Δ^* définies par une équation $\langle m, \cdot \rangle = 1$, où $-m$ est un sommet de Δ; donc $m \in M$. Sur un tel cône, la fonction $h = \langle m, \cdot \rangle$ est donc bien définie par un élément de M, ce qui fournit un diviseur de Cartier T-invariant par la proposition 4.3, ample par le lemme 4.10.

4.4. Variétés toriques de Fano

***Définition 4.11.* —** La variété torique $\mathbb{P}_\Sigma$ est dite *de Fano* si son diviseur anticanonique est de Cartier et ample.

D'après la proposition 4.6, il existe alors une fonction support h_Δ, prenant la valeur 1 sur tous les générateurs entiers de cônes de dimension 1 de Σ et définie sur chaque cône σ par un élément $m(\sigma) \in M$. D'après le lemme 4.10, l'amplitude de $K_{\mathbb{P}_\Sigma}^{-1}$ équivaut au fait que h est strictement pseudoconvexe.

Donnons maintenant la caractérisation suivante des polyèdres convexes Δ à sommets entiers et contenant 0 dans leur intérieur, tels que la polarisation naturelle de $\mathbb{P}_\Delta$ soit égale au diviseur de Cartier anticanonique donné comme le lieu des pôles de la section Ω de $K_{\mathbb{P}_\Delta}$ (*cf.* (4.2.2)).

***Lemme 4.12.* —** *Le diviseur de Cartier naturel D_{h_Δ} de $\mathbb{P}_\Delta$ est égal à $-\operatorname{div}(\Omega)$ si et seulement si Δ^* est à sommets entiers.*

En effet, si on a l'égalité, la fonction h_Δ déterminant la polarisation doit être la fonction support, et donc doit satisfaire $h_\Delta(v) = 1$ pour tout générateur d'un cône de dimension 1 de Σ. Mais comme Σ est construit sur Δ^* comme dans 4.3.3, ces cônes de dimension 1 sont les cônes sur les sommets de Δ^*. Par définition, la fonction h_Δ vaut 1 sur les sommets de Δ^* : un tel sommet s'écrit de façon unique λv avec $v \in N$ et $\lambda > 0$. Si on a également $h_\Delta(v) = 1$, on doit donc avoir $\lambda = 1$ et Δ^* est bien à sommets entiers. Inversement, il est immédiat de vérifier que si Δ^* est à sommets entiers, la fonction linéaire par morceaux qui vaut 1 sur le bord de Δ^* est la fonction support du système de cônes construit sur Δ^*. $\square$

On introduit la notion suivante, due à Batyrev.

***Définition 4.13.* —** Un polyèdre convexe rationnel $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ est dit *réflexif* s'il est à sommets entiers, contient 0 dans son intérieur et si son dual $\Delta^* \subset N_\mathbb{R}$ satisfait les mêmes conditions.

Par bidualité, il est clair que si Δ est réflexif, alors Δ^* est également réflexif. On a établi :

Proposition 4.14 (cf. [60], [61]). — *Les variétés toriques de Fano de dimension n polarisées par $-\operatorname{div}(\Omega)$, où Ω la forme méromorphe de* (4.2.2), *correspondent bijectivement aux polyèdres réflexifs $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ avec* $\operatorname{rang} M = n$. *L'application $\Delta \mapsto \Delta^*$ entre polyèdres réflexifs fournit donc une involution sur l'ensemble de ces variétés.*

Le lien avec la symétrie miroir est le suivant [60]. Pour chaque variété torique de Fano, la famille des hypersurfaces dans $|K^{-1}|$ fournit une famille de variétés à fibré canonique trivial (malheureusement singulières en général). La famille miroir serait simplement la famille des hypersurfaces à fibré canonique trivial dans la variété torique de Fano obtenue par action de cette involution. À cause des singularités, cette construction ne marche réellement bien qu'en dimension 3. Les sections suivantes expliquent comment on peut construire dans ce cas des désingularisations à fibré canonique trivial, et détaillent le calcul des nombres de Hodge des variétés obtenues, de manière à prouver l'inversion des nombres de Hodge prédite par la symétrie miroir (*cf.* (1.8.48)).

4.5. Désingularisation

Soit $\mathbb{P}_\Delta$ une variété torique de Fano; on va construire une désingularisation partielle $\tau : \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$ satisfaisant la propriété

$$\tau^*(K_{\mathbb{P}_\Delta}) = K_{\mathbb{P}_\Sigma} \tag{4.5.10}$$

et qui est non singulière en codimension 3.

Dans le cas particulier où $n = 4$, les singularités de $\mathbb{P}_\Sigma$ sont isolées et les hypersurfaces génériques dans le système linéaire $|\tau^*(K^{-1}_{\mathbb{P}_\Delta})| = |K^{-1}_{\mathbb{P}_\Sigma}|$ ne rencontrent pas le lieu singulier de $\mathbb{P}_\Sigma$ (on sait que ce système linéaire est engendré par ses sections globales, d'après le lemme 4.9) et donc sont lisses d'après Bertini, et à fibré canonique trivial par la formule d'adjonction.

On procède de la façon suivante. La variété torique $\mathbb{P}_\Delta$ est associée au système des cônes sur les faces de $\Delta^* \subset N_{\mathbb{R}}$. On va maintenant subdiviser (ou trianguler) le bord du polyèdre Δ^* en imposant les conditions suivantes :

(i) les sommets de la triangulation sont exactement les points de $N \cap \partial\Delta^*$;

(ii) les faces de dimension k du polyèdre subdivisé sont l'enveloppe convexe de $k+1$ vecteurs (entiers).

On prend alors pour Σ l'ensemble des cônes sur les faces du polyèdre subdivisé. On dispose d'une application naturelle $\tau : \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$, définie de la façon suivante. Si σ est dans Σ, il existe un cône σ' sur une face de Δ^* tel que $\sigma \subset \sigma'$. On a donc une inclusion ${\sigma'}^* \subset \sigma^*$ qui fournit $\tau^* : A_{\sigma'} \to A_\sigma$ et définit un morphisme de U_σ dans $U_{\sigma'}$.

Ces morphismes se recollent pour définir un morphisme $\tau : \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$ qui est birationnel puisque c'est un isomorphisme sur les ouverts denses $U_0 = \operatorname{Spec} A_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$ de $\mathbb{P}_\Sigma$ et $\mathbb{P}_\Delta$.

Lemme 4.15. — *L'application τ satisfait la condition*

$$\tau^*(K_{\mathbb{P}_\Delta}) = K_{\mathbb{P}_\Sigma}\,. \tag{4.5.11}$$

En effet, cela résulte de la fonctorialité de la description des diviseurs de Cartier en termes de fonctions sur $N_{\mathbb{R}}$ (prop. 4.3) : il est immédiat de voir que si h définit un diviseur de Cartier D_h sur $\mathbb{P}_\Delta$ comme dans 4.2.2, le diviseur de Cartier $\tau^* D_h$ sur $\mathbb{P}_\Sigma$ est défini par la même fonction h.

Rappelons qu'une fonction h correspond au diviseur anticanonique si et seulement si elle prend la valeur 1 sur les générateurs entiers des cônes de dimension 1 (prop. 4.6). Or le diviseur anticanonique de $\mathbb{P}_\Delta$ correspond à la fonction h égale à 1 au bord de Δ^* et linéaire par morceaux. Les sommets de la triangulation de Δ^* définissant Σ sont, par définition, exactement les points de $N \cap \partial\Delta^*$ et h vaut 1 en chacun de ces points. Ces points engendrent sur $\mathbb{Q}$ les cônes de dimension 1 de Σ ; comme h est localement définie par une équation à coefficients entiers, ces points sont en fait les générateurs entiers des cônes de dimension 1 de Σ. Il en résulte que h est bien la fonction support de Σ et que D_h est le diviseur canonique de $\mathbb{P}_\Sigma$. $\square$

L'utilité de ce procédé réside dans le lemme suivant

Lemme 4.16. — *La variété $\mathbb{P}_\Sigma$ est lisse en codimension* 3.

On utilise le lemme 4.2 ; comme les ouverts U_σ définis par les cônes σ de dimension inférieure ou égale à 3 recouvrent le complémentaire d'un sous-ensemble de codimension 4, il suffit de vérifier que ces ouverts sont lisses, ce qui est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4.17. — *Soient e_1, e_2, e_3 des points de $\mathbb{Z}^n$ indépendants sur $\mathbb{Q}$; on suppose qu'il existe une fonction linéaire h sur $\mathbb{Z}^n$ telle que $h(e_i) = 1$ et que les seuls points de $\mathbb{Z}^n$ contenus dans l'enveloppe convexe des e_i sont les points e_i. Alors il est possible de compléter e_1, e_2, e_3 en une base de $\mathbb{Z}^n$.*

Le lemme 4.17 entraîne le lemme 4.16 grâce au lemme 4.2 car, par définition de Σ, tous les points entiers de $\partial\Delta^*$ sont des sommets de la triangulation et tous les cônes de dimension 3 de Σ sont des cônes sur l'enveloppe convexe de trois points $e_i \in N \cap \partial\Delta^*$ satisfaisant nécessairement les hypothèses du lemme 4.17.

La preuve du lemme 4.17 est élémentaire. Il suffit de voir que si on a une relation $\sum_i \alpha_i e_i = mu$ avec $\alpha_i, m \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathbb{Z}^n$, alors m divise α_i. Les hypothèses $h(e_i) = 1$ et h entière donnent $\sum_i \alpha_i = mh(u)$ avec $h(u) \in \mathbb{Z}$. Notons que l'on peut remplacer α_i par $\alpha_i + m\beta_i$ avec $\beta_i \in \mathbb{Z}$, de sorte que α_i/m est défini modulo $\mathbb{Z}$ et satisfait $\sum_i (\alpha_i/m)e_i \in \mathbb{Z}^n$. Sachant que $\sum_i \alpha_i/m$ est un entier, il est alors immédiat de voir qu'on peut imposer les conditions $(\alpha_i/m) \notin \mathbb{Z}^3$, $\alpha_i/m \geq 0$ et $\sum_i \alpha_i/m = 1$ si m ne divise pas les α_i, ce qui produit un point entier différent des sommets dans l'enveloppe convexe des e_i. $\square$

Remarque 4.18. — En fait, même en dimension supérieure, la désingularisation partielle construite ci-dessus jouit de très bonnes propriétés : c'est une variété « quasiment lisse » (*cf.* [63]), ce qui signifie qu'elle est localement représentable comme quotient d'une variété lisse par un groupe abélien fini, et ses hypersurfaces génériques, bien que singulières, ont des structures de Hodge pures sur leurs groupes de cohomologie (*cf.* [68]).

Dans la suite, on considérera des hypersurfaces à fibré canonique trivial génériques $Z_f \subset \mathbb{P}_\Delta$ pour f dans $H^0(-K_{\mathbb{P}_\Delta})$ et leur désingularisation partielle $\widehat{Z_f} = \tau^{-1}(Z_f)$ qui est une hypersurface de $\mathbb{P}_\Sigma$. D'après la formule d'adjonction et le lemme 4.15, $\widehat{Z_f}$ est à fibré canonique trivial. On va montrer comment calculer les nombres de Hodge $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$ et $h^{n-2,1}(\widehat{Z_f})$, ce qui a un sens en vertu de la remarque 4.18. Si l'on désire ne travailler qu'avec des variétés lisses, on peut supposer $n = 4$ dans ce qui suit.

4.6. Calcul de la cohomologie de $\widehat{Z_f}$

4.6.1. Résultats de Danilov et Khovanskii

Soit $\mathbb{P}_\Delta$ une variété torique polarisée associée à un polyèdre convexe à sommets entiers $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ (*cf.* 4.3.3). Soit $Z_0 \subset U_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$ une hypersurface obtenue par restriction d'un diviseur Z de $\mathbb{P}_\Delta$ avec $Z \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\Delta}(1)|$.

Définition 4.19. — On dit que Z_0 est Δ-*régulière* si Z rencontre transversalement toutes les strates de $\mathbb{P}_\Delta$ (*cf.* 4.1.2), c'est-à-dire a une intersection lisse avec toutes les orbites O_σ de $\mathbb{P}_\Delta$.

Pour toute variété algébrique X, les groupes de cohomologie à support compact $H^k_c(X)$ sont munis de structures de Hodge mixtes (*cf.* [65]). On dispose donc de la notion de nombre de Hodge $h^{p,q}(H^k_c(X)) = h^{p,q}(\mathrm{Gr}^{p+q}_W H^k_c(X))$ et on pose :

$$e_{p,q}(X) = \sum_k (-1)^k h^{p,q}\big(H^k_c(X)\big). \tag{4.6.12}$$

Le résultat de Danilov et Khovanskii [64] consiste en le calcul de $e_{p,q}(Z_0)$ en fonction du polyèdre Δ. Ce calcul fournit tous les nombres de Hodge des hypersurfaces lisses et régulières de variétés toriques à cause des propriétés suivantes de $e_{p,q}$:

Proposition 4.20.

(i) *Si X est lisse et compacte, on a* $e_{p,q}(X) = (-1)^{p+q} h^{p,q}(X)$.

(ii) *Si X est stratifiée par des variétés X_i localement fermées, on a* :

$$e_{p,q}(X) = \sum_i e_{p,q}(X_i).$$

La propriété (i) est immédiate car si X est lisse et compacte, ses structures de Hodge mixtes sont pures et on a alors $h^{p,q}(H^k_c(X)) = 0$ pour $k \neq p+q$.

La propriété (ii) se prouve par récurrence sur le nombre de strates et en utilisant la suite exacte longue de cohomologie à support compact. ∎

Danilov et Khovanskii calculent d'abord le nombre $\sum_q e_{p,q}(Z_0)$. Pour cela, ils travaillent avec un raffinement de Σ fournissant une résolution des singularités $\tau : \mathbb{P}_{\Delta'} \to \mathbb{P}_\Delta$, telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) le diviseur $D := \mathbb{P}_{\Delta'} - U_0$ est un diviseurs à croisements normaux ;

(ii) la variété $Z' = \tau^{-1}(Z)$ est lisse et $D_{Z'} := D \cap Z'$ est un diviseur à croisements normaux dans Z'.

L'existence d'une telle résolution est montrée dans [63].

La seconde propriété résulte du fait que Z_0 est Δ-régulière. Le calcul de $\sum_q e_{p,q}(Z_0)$ se fait alors de la façon suivante : on considère le complexe $\Omega^{\bullet}_{Z',D_{Z'}}$

$$\Omega^{\bullet}_{Z',D_{Z'}} = \mathrm{Ker}(\Omega^{\bullet}_{Z'} \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{D_{Z'}}). \tag{4.6.13}$$

Celui-ci permet de calculer la cohomologie à support compact de $Z_0 = Z' - D_{Z'}$ et sa filtration de Hodge, du fait que $D_{Z'}$ est à croisements normaux (*cf.* [65]) :

$$\begin{cases} H^k_c(Z_0) = \mathbb{H}^k(\Omega^{\bullet}_{Z',D_{Z'}}), \\ F^p H^k_c(Z_0) = \mathbb{H}^k\big(0 \to \Omega^p_{Z',D_{Z'}} \to \cdots \to \Omega^{n-1}_{Z',D_{Z'}} \to 0\big). \end{cases} \tag{4.6.14}$$

On en déduit immédiatement :

$$\sum_q e_{p,q}(Z_0) = (-1)^p \chi(Z', \Omega^p_{Z',D_{Z'}}).$$

On a par ailleurs une série de suites exactes :

$$0 \to \Omega^{p-1}_{Z',D_{Z'}}(-Z') \longrightarrow \Omega^p_{\mathbb{P}_{\Delta'},D_{|Z'}} \longrightarrow \Omega^p_{Z',D_{Z'}} \to 0 \tag{4.6.15}$$

qui donnent une résolution de $\Omega^p_{Z',D_{Z'}}$ par les faisceaux $\Omega^{p+k}_{\mathbb{P}_{\Delta'},D_{|Z'}}(kZ')$ et donc la formule

$$\begin{aligned} \chi(Z', \Omega^p_{Z',D_{Z'}}) &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \chi\big(\Omega^{p+k+1}_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}{}_{|Z'}\big((k+1)Z'\big)\big) \\ &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \big(\chi(\Omega^{p+k+1}_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}\big((k+1)Z'\big) - \chi\big(\Omega^{p+k+1}_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}(kZ')\big)\big). \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

Notons $\ell^*(\Delta)$ le nombre de points entiers intérieurs à Δ. La proposition suivante exprime les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi\big(\Omega^{p+k+1}_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}(kZ')\big)$ en fonction de $\ell^*(k\Delta)$.

Proposition 4.21 (cf. [64]). — *On a* :

$$\chi\big(\mathbb{P}_{\Delta'}, \Omega^p_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}(kZ')\big) = C^n_p \ell^*(k\Delta) \quad \textit{pour } k > 0,$$

$$\chi(\mathbb{P}_{\Delta'}, \Omega^p_{\mathbb{P}_{\Delta'},D}) = (-1)^n C^n_p.$$

La formule (4.6.16) devient donc :

$$\begin{aligned} \chi(Z', \Omega^p_{Z',D_{Z'}}) &= (-1)^p \sum_q e_{p,q}(Z_0) \\ &= (-1)^{n+1} C^n_{p+1} + \sum_{k\geq 1} (-1)^k C^n_{p+1+k} \big(\ell^*\big((k+1)\Delta\big) - \ell^*(k\Delta)\big) \\ &\qquad + C^n_{p+1}\ell^*(\Delta), \end{aligned} \tag{4.6.17}$$

ce qui se réécrit immédiatement sous la forme :

$$(-1)^p \sum_q e_{p,q}(Z_0) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k C^{n+1}_{p+2+k} \ell^*\big((k+1)\Delta\big) + (-1)^{n+1} C^n_{p+1}. \tag{4.6.18}$$

Pour conclure, on utilise le théorème 4.22 énoncé ci-dessous, du type Lefschetz pour les variétés toriques, et une récurrence sur la dimension pour montrer que la connaissance de $\sum_q e_{p,q}(Z_0)$ suffit à déterminer $e_{p,q}(Z_0)$.

Théorème 4.22 (cf. [64]). — *Soit $Z_0 \subset (\mathbb{C}^*)^n$ une hypersurface Δ-régulière; alors :*

$$\begin{cases} h^{p,q}\big(H_c^k(Z_0)\big) = 0 & \textit{pour } k < n-1, \\ h^{p,q}\big(H_c^{n-1}(Z_0)\big) = 0 & \textit{pour } p+q > n-1, \\ h^{p,q}\big(H_c^k(Z_0)\big) = h^{p,q}\big(H_c^{k+2}((\mathbb{C}^*)^n)\big) & \textit{pour } k > n-1. \end{cases} \tag{4.6.19}$$

La première égalité résulte du fait que Z_0 est une variété affine de dimension $(n-1)$ (*cf.* [67]) ; la seconde résulte du fait que Z_0 est lisse. □

Le théorème donne $e_{p,q}(Z_0)$ pour $p+q > n-1$. Prenons une compactification lisse Z' de Z_0 comme plus haut. On a une stratification de Z' par des variétés affines toriques Z'_σ (*cf.* 4.1.2), la strate ouverte étant égale à Z_0. Par récurrence sur la dimension, on peut supposer connus les $e_{p,q}(Z'_\sigma)$ pour toutes les autres strates. D'après la proposition 4.20 (ii), on a d'autre part :

$$e_{p,q}(Z') = e_{p,q}(Z_0) + \sum_{\sigma \neq \{0\}} e_{p,q}(Z'_\sigma). \tag{4.6.20}$$

On connaît donc $e_{p,q}(Z')$ pour $p+q > n-1$; mais Z' est lisse et compacte, et on connaît donc également $e_{p,q}(Z')$ pour $p+q < n-1$ par dualité de Poincaré. Donc on connaît $e_{p,q}(Z_0)$ pour $p+q < n-1$ (par la formule (4.6.20) et en supposant connues les $e_{p,q}(Z'_\sigma)$, $\sigma \neq \{0\}$). On peut alors déduire de $\sum_q e_{p,q}(Z_0)$ la valeur de $e_{p,q}(Z_0)$.

Le calcul décrit ci-dessus ne donne pas en général un algorithme explicite pour obtenir $e_{p,q}(Z_0)$; on peut cependant en déduire la valeur de $e_{n-2,1}(Z_0)$ de la façon suivante : la formule (4.6.18) pour $p = n-2$, combinée avec le théorème 4.22, fournit l'égalité

$$\begin{aligned}(-1)^{n-2}\big(e_{n-2,1}(Z_0) + e_{n-2,0}(Z_0)\big) + (-1)^{n-1}C_{n-1}^n \\ = (-1)^{n+1}C_{n-1}^n - \ell^*(2\Delta) + (n+1)\ell^*(\Delta),\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

où l'on a utilisé l'égalité (théorème 4.22)

$$e_{n-2,n-2}(Z_0) = e_{n-1,n-1}(\mathbb{C}^*)^n = -C_{n-1}^n,$$

c'est-à-dire :

$$e_{n-2,1}(Z_0) + e_{n-2,0}(Z_0) = (-1)^{n-1}\ell^*(2\Delta) + (-1)^n(n+1)\ell^*(\Delta). \tag{4.6.22}$$

Danilov et Khovanskii prouvent alors en utilisant le raisonnement décrit ci-dessus :

Proposition 4.23. — *On a :*

$$\begin{aligned} h^{n-1,0}(Z_0) &= (-1)^{n-1}e_{n-1,0}(Z_0) = \ell^*(\Delta), \\ h^{n-2,0}(Z_0) &= (-1)^{n-1}e_{n-2,0}(Z_0) = \sum_{\operatorname{codim}\theta=1} \ell^*(\theta). \end{aligned}$$

Dans la seconde formule, θ parcourt les faces de codimension 1 du polyèdre Δ initial. On peut donc finalement exprimer le nombre de Hodge $h^{n-2,1}(Z_0)$ en fonction des caractéristiques numériques du polyèdre Δ pour $n \geq 4$ puisque

$$h^{n-2,1}(Z_0) = (-1)^{n-1} e_{n-2,1}(Z_0) \quad \text{pour } n \geq 4.$$

Corollaire 4.24. — *On a :*

$$h^{n-2,1}(Z_0) = \ell^*(2\Delta) - (n+1)\ell^*(\Delta) - \sum_{\operatorname{codim}\theta=1} \ell^*(\theta). \tag{4.6.23}$$

Remarque 4.25. — Lorsque Δ est un polyèdre réflexif, ses faces de codimension 1 sont décrites par des équations $\langle m^*, \cdot\, \rangle = 1$ où $m^* \in N$ est entier, puisque le polyèdre dual est à sommets entiers. Les points entiers u intérieurs à 2Δ satisfont l'inégalité $\langle m^*, u\rangle < 2$ pour toutes les faces de codimension 1 de Δ, et donc $\langle m^*, u\rangle \leq 1$. On en conclut qu'on a $\ell^*(2\Delta) = \ell(\Delta)$ où $\ell(\Delta)$ est le nombre de points entiers contenus dans Δ et $\ell^*(\Delta) = 1$ pour des raisons analogues.

4.6.2. Le calcul de Batyrev

On revient aux hypersurfaces $\widehat{Z_f} \subset \mathbb{P}_\Sigma$, de dimension $(n-1)$, à fibré canonique trivial et on calcule $h^{n-2,1}(\widehat{Z_f}) = (-1)^{n-1} e_{n-2,1}(\widehat{Z_f})$. En utilisant la proposition 4.20, on voit que

$$e_{n-2,1}(\widehat{Z_f}) = \sum_{\sigma'} e_{n-2,1}(\widehat{Z_f}_{\sigma'}), \tag{4.6.24}$$

où σ' parcourt tous les cônes du raffinement Σ (*cf.* 4.5) et $\widehat{Z_f}_{\sigma'}$ est l'intersection de $\widehat{Z_f}$ avec l'orbite correspondant à σ' (*cf.* 4.1.2).

Il s'agit donc de décrire les composantes de bord $\widehat{Z_f} - \widehat{Z_f}_0$.

Rappelons que l'éventail Σ est obtenue par triangulation de Δ^* et satisfait la condition « les générateurs de cônes de dimension 1 de Σ sont les points entiers de $\Delta^* - \{0\}$ ». Pour chaque cône de dimension 1 de Σ de générateur $v \in N$, il existe donc une unique face θ^* de Δ^* telle que v appartienne à l'intérieur de θ^*. D'autre part, d'après 4.1.2, à v correspond un diviseur D_v de $\mathbb{P}_\Sigma$ ayant un ouvert dense isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ (qui est l'orbite $O_{\mathbb{R}+v}$, qu'on notera dans la suite O_v) et à θ^* correspond le cône $\widetilde{\theta^*}$ sur θ^* qui appartient au système de cônes définissant $\mathbb{P}_\Delta$, et donc une strate $O_{\widetilde{\theta^*}}$ de $\mathbb{P}_\Delta$ isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{n-k}$, où $\dim\theta^* = k-1$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 4.26. — *L'application* $\tau : \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$ *satisfait* $\tau(O_v) = O_{\widetilde{\theta^*}}$.

Cela résulte en effet des définitions des strates O_v et $O_{\widetilde{\theta^*}}$. Comme v est dans θ^*, d'après 4.5, l'application τ envoie $\operatorname{Spec} A_v$ dans $\operatorname{Spec} A_{\widetilde{\theta^*}}$. Mais

$$A_v = \mathbb{C}[X^m]_{\langle m,v\rangle \geq 0}$$

et O_v est défini par les X^m tels que $\langle m, v\rangle = 1$. D'autre part, $O_{\widetilde{\theta^*}} \subset \operatorname{Spec} A_{\widetilde{\theta^*}}$ est défini par les équations X^m pour $m \in \widetilde{\theta^*}^* - \widetilde{\theta^*}^\perp$. Comme v est un point intérieur de θ^*, on a $m(v) > 0$ pour tout $m \in \widetilde{\theta^*}^* - \widetilde{\theta^*}^\perp$ et donc X^m s'annule sur O_v. On a donc bien $\tau(O_v) \subset O_{\widetilde{\theta^*}}$ et l'égalité résulte du fait que T agit transitivement et de façon compatible avec τ sur chacune de ces variétés. ∎

Le lemme 4.26 montre immédiatement que $O_v \cap \widehat{Z_f}$ est fibré en $(\mathbb{C}^*)^k$ au-dessus de $Z_{f,\widetilde{\theta^*}}$, pour la face θ^* de Δ^* de dimension k telle que v soit intérieur à θ^*. Il est par ailleurs clair par T-équivariance de τ que toutes les strates de $\widehat{Z_f}$ sont fibrées en $(\mathbb{C}^*)^\ell$ sur des strates de Z_f. Comme la cohomologie à support compact de $(\mathbb{C}^*)^\ell$ satisfait

$$h^{p,q}\big(H^k_c(\mathbb{C}^{*\ell})\big) = 0 \quad \text{pour } p \neq q,$$

on voit qu'une strate de $\widehat{Z_f}$ ne peut contribuer à $e_{n-2,1}(\widehat{Z_f})$ que si la strate correspondante de Z_f satisfait $e_{n-3,0} \neq 0$ ou $e_{n-2,1} \neq 0$. Mais, d'après le théorème 4.22, la dernière inégalité n'est possible que pour la strate ouverte, dont on connaît déjà la contribution ; de même, la première inégalité n'est possible que pour une strate $Z_{f,\widetilde{\theta^*}}$ de dimension au moins égale à $(n-3)$.

Pour qu'une strate $\widehat{Z_f}_\sigma$ au-dessus de $Z_{f,\widetilde{\theta^*}}$ contribue alors à $e_{n-2,1}(\widehat{Z_f})$, il faut que ses fibres au-dessus de $Z_{f,\widetilde{\theta^*}}$ soient de dimension au moins égale à 1, et on a finalement trouvé que les seules strates de $\widehat{Z_f}$ contribuant à $e_{n-2,1}(\widehat{Z_f})$ sont les composantes de O_v, où v est un point intérieur de θ^* avec $\dim\theta^* = 1$. Comme on a

$$h^{0,0}\big(H^1_c(\mathbb{C}^*)\big) = 1 = h^{1,1}\big(H^2_c(\mathbb{C}^*)\big)$$

et que $\tau^{-1}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}})^0$ a exactement $\ell^*(\theta^*)$ composantes fibrées en $\mathbb{C}^*$ au-dessus de $Z_{f,\widetilde{\theta^*}}$ pour $\dim\theta^* = 1$, le lemme 4.26 montre que la contribution de l'ouvert dense fibré en $\mathbb{C}^*$

$$\tau^{-1}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}})^0 \subset \tau^{-1}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}})$$

à $e_{n-2,1}(\widehat{Z_f})$ est égale à :

$$\ell^*(\theta^*)e_{n-3,0}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}}) = (-1)^{n-1}\ell^*(\theta^*)h^{n-3,0}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}}).$$

La proposition 4.23 donne finalement

$$h^{n-3,0}(Z_{f,\widetilde{\theta^*}}) = \ell^*(\theta) \tag{4.6.25}$$

où $\theta \subset \Delta$ est la face duale de θ^*. (Il faut noter pour cela que l'adhérence de $O_{\widetilde{\theta^*}}$ dans $\mathbb{P}_\Delta$ est isomorphe à $\mathbb{P}_\theta$.) On a donc montré :

Proposition 4.27. — *Le nombre de Hodge $h^{n-2,1}(\widehat{Z_f})$ est calculé par la formule*

$$h^{n-2,1}(\widehat{Z_f}) = \ell(\Delta) - (n+1) - \sum_{\operatorname{cod}\theta=1} \ell^*(\theta) + \sum_{\operatorname{cod}\theta=2} \ell^*(\theta^*)\ell^*(\theta) \tag{4.6.26}$$

où l'on a identifié les faces θ de codimension 2 de Δ et les faces θ^* de dimension 1 de Δ^*.

4.6.3. Calcul de $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$

On suit toujours [60] et [61]. On explique comment calculer $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$. On suppose $n \geq 4$. On a alors $h^{2,0}(\widehat{Z_f}) = 0$ et donc $\operatorname{rang}\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widehat{Z_f}) = h^{1,1}(\widehat{Z_f})$. Batyrev montre le résultat suivant.

Proposition 4.28. — *Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widehat{Z_f})$ est engendré par les classes des composantes de $\widehat{Z_f} - Z_{f,0}$ où $Z_{f,0}$ est la partie affine $\widehat{Z_f} \cap (\mathbb{C}^*)^n$ de $\widehat{Z_f}$.*

D'autre part, ces composantes ne sont pas indépendantes. En effet, le groupe qu'elles engendrent contient les restrictions des diviseurs T-invariants de $\mathbb{P}_\Sigma$ (notons qu'il n'y a plus lieu ici de distinguer sur $\mathbb{Q}$ les diviseurs de Weil et les diviseurs de Cartier de $\mathbb{P}_\Sigma$ car tous les cônes de Σ sont par construction simpliciaux, c'est-à-dire sont engendrés par des sommets indépendants, et donc les fonctions linéaires à valeurs dans $\mathbb{Q}$ sur ces cônes sont exactement déterminées par leurs valeurs sur les sommets).

Or, on a noté dans la remarque 4.4 l'existence de n relations dans $\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}_\Sigma)$ données par le fait que les fonctions globalement linéaires sur N et entières (définies par un élément de M) correspondent à des diviseurs de Cartier principaux. Batyrev montre que ces relations engendrent toutes les relations entre les composantes de bord. On trouve donc :

$$h^{1,1}(\widehat{Z_f}) = \operatorname{rang}\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widehat{Z_f}) = (\text{nombre de composantes de } \widehat{Z_f} - Z_f^0) - n.$$

On utilise maintenant le lemme 4.26 qui montre que les diviseurs D_v de $\mathbb{P}_\Sigma$ ont un ouvert dense O_v fibré en $(\mathbb{C}^*)^k$ sur une orbite $O_{\widetilde{\theta^*}}$ de $\mathbb{P}_\Delta$ pour θ^* une face de dimension k de Δ^*.

• Si $k+1 = n$, l'orbite $O_{\widetilde{\theta^*}}$ est de dimension 0 et ne rencontre donc pas Z_f. Chacune des strates $O_{\widetilde{\theta^*}}$ fournit par ailleurs $\ell^*(\theta^*)$ composantes de $\mathbb{P}_\Sigma - U_0$ puisque les points intérieurs de θ^* fournissent exactement (d'après le lemme 4.26) les diviseurs T-invariants de $\mathbb{P}_\Sigma$ contractés sur $O_{\widetilde{\theta^*}}$.

• Si $k+1 = n-1$, l'orbite $O_{\widetilde{\theta^*}}$ est de dimension 1 et rencontre Z_f en exactement $\ell^*(\theta)+1$ points, où $\theta \subset \Delta$ est la face duale de θ^*, comme il résulte du lemme 4.7.

• Finalement, si $k+1 < n-1$, l'intersection $O_{\widetilde{\theta^*}} \cap Z_f$ est irréductible et non vide par amplitude.

On en déduit que le nombre de composantes de $\widehat{Z_f} - Z_f^0$ est donné par la somme :

$$\begin{cases} \ell(\Delta^*) - 1 & (\text{nombre de composantes de } \mathbb{P}_\Sigma - U_0) \\ -\sum\limits_{\dim\theta^*=n-1} \ell^*(\theta^*) & (\text{correspondant aux diviseurs } D_v \text{ ne rencontrant pas } \widehat{Z_f}) \\ +\sum\limits_{\dim\theta^*=n-2} \ell^*(\theta)\ell^*(\theta^*) & (\text{correspondant aux diviseurs } D_v \text{ dont l'intersection} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{avec } \widehat{Z_f} \text{ est réductible}). \end{cases}$$

On a donc montré :

***Proposition 4.29.* —** *Le nombre $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$ est calculé par la formule*

$$h^{1,1}(\widehat{Z_f}) = \ell(\Delta^*) - 1 - n - \sum_{\dim\theta^*=n-1} \ell^*(\theta^*) + \sum_{\dim\theta^*=n-2} \ell^*(\theta)\ell^*(\theta^*) \tag{4.6.27}$$

où comme plus haut θ^* est une face de Δ^* et θ est la face duale de Δ.

En comparant les propositions 4.28 et 4.29, on constate que $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$ est obtenu en remplaçant Δ par Δ^* dans l'expression de $h^{n-2,1}(\widehat{Z_f})$. On a donc montré le théorème suivant.

***Théorème 4.30.* —** *L'involution $\Delta \mapsto \Delta^*$ entre polyèdres réflexifs échange les nombres de Hodge $h^{1,1}(\widehat{Z_f})$ et $h^{n-2,1}(\widehat{Z_{f^*}})$ où $Z_f \subset \mathbb{P}_\Delta$ est définie par une section générique de $-K_{\mathbb{P}_\Delta}$ et $Z_{f^*} \subset \mathbb{P}_{\Delta^*}$ est définie par une section générique de $-K_{\mathbb{P}_{\Delta^*}}$, en accord avec la propriété* (1.8.47) *des miroirs.*

***Remarque 4.31.* —** On n'a pas néanmoins construit la symétrie miroir comme une involution entre les familles $\{\widehat{Z_f}\}$, $\{\widehat{Z_{f^*}}\}$ du fait que la classe de déformation de $\widehat{Z_f}$ dépend du choix de la désingularisation $\tau : \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$.

5. COHOMOLOGIE QUANTIQUE

Ce chapitre décrit d'abord la formulation axiomatique des invariants de Gromov-Witten due à Kontsevich et Manin, qui présente l'intérêt de faire émerger la structure d'«opérade», en les définissant comme une série d'invariants polynomiaux à valeurs dans la cohomologie de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ et en mettant en évidence la naturalité des propriétés qu'ils satisfont, et qui reflètent l'existence de certaines opérations universelles sur les $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (restriction au bord, oubli d'un point, *etc.*).

Toujours d'après [78], on explique comment l'équation WDVV, satisfaite par le potentiel de Gromov-Witten, se déduit de ces axiomes. On décrit également, suivant Dubrovin, le lien entre cette équation (satisfaite par une fonction sur une variété M munie de coordonnées) et la platitude d'une certaine connexion sur le fibré tangent de M construite à l'aide de cette fonction. On applique ensuite ces considérations à la construction d'une variation complexe de structure de Hodge paramétrée par un ouvert de $H^2(X, \mathbb{C})$, où X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3 avec $h^{2,0} = 0$.

On explique finalement des résultats moins ambitieux théoriquement, mais suffisants pour les applications mentionnées ci-dessus, obtenus par Gromov, Ruan, Ruan-Tian : la définition (dépendant seulement de la donnée d'une structure symplectique) d'une version restreinte des invariants de Gromov-Witten, en termes de comptage de courbes rationnelles, et la preuve de la propriété cruciale de scindage.

Le chapitre se termine par une section consacrée à la formule d'Aspinwall et Morrison, qui calcule la contribution à la cohomologie quantique de la famille (de dimension trop grande) des revêtements ramifiés de degré k d'une courbe rationnelle rigide dans une variété de Calabi-Yau de dimension 3. Cette formule permet de calculer la cohomologie quantique d'une variété de Calabi-Yau de dimension 3 dont toutes les courbes rationnelles génériquement plongées sont rigides, en fonction du nombre de ces dernières dans chaque classe d'homologie.

5.1. Formulation de Kontsevich et Manin

Kontsevich et Manin [78] ont donné sur un mode axiomatique la définition la plus générale des invariants de Gromov-Witten, et dans cette généralité leur existence et les propriétés qu'ils sont supposés satisfaire ne sont pas rigoureusement établies.

Étant donnée une variété algébrique V (ou plus généralement une variété symplectique), ces invariants devraient être décrits par une série d'applications

$$H_{A,g,k} : H^*(V^k) \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k}) \tag{5.1.1}$$

pour $A \in H_2(V, \mathbb{Z})$ et g, k des entiers tels que $g \geq 2$, ou $g = 1$ et $k \geq 1$, ou $g = 0$ et $k \geq 3$, de sorte que l'espace des modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ des courbes de genre g avec k points marqués stables (voir [74]) est bien défini. On notera

$$c_1(V) = c_1(-K_V) \in H^2(V, \mathbb{Z}),$$

qui est défini dans tous les cas considérés ci-dessus (*cf.* 1.1.3) puisque la simple donnée d'une structure symplectique détermine une classe de déformations de structures pseudocomplexes (*cf.* [76], [86]).

5.1.1. Construction virtuelle

Supposons qu'on dispose pour chaque A, g, k comme ci-dessus, d'un espace de modules $\mathrm{Mor}_A(g, V, k)$ de courbes holomorphes k-pointées de genre g et de classe A dans V, de la dimension réelle « correcte » (c'est-à dire calculée par la formule de Riemann-Roch)

$$d = 2\big(c_1(V)A - (g-1)(n-3) + k\big), \quad n = \dim_{\mathbb{C}} V.$$

On pense à $\mathrm{Mor}_A(g, V, k)$ comme étant l'ensemble des données $(\phi, x_1, \ldots, x_k)$ où $\phi : C \to V$ est une application holomorphe telle que $\phi_*([C]) = A$, où C est une courbe de genre g, et les x_i sont des points de C, modulo l'action des automorphismes ψ de C :

$$\psi\big((\phi, x_1, \ldots, x_k)\big) = \big(\phi \circ \psi, \psi^{-1}(x_1), \ldots, \psi^{-1}(x_k)\big).$$

On a donc d'une part une application classifiante

$$\pi : \mathrm{Mor}_A(g, V, k) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,k}$$

(qu'on aimerait être propre) et d'autre part une application d'évaluation

$$\begin{cases} \text{év} : \mathrm{Mor}_A(g, V, k) \longrightarrow V^k, \\ \qquad (\phi, x_1, \ldots, x_k) \longmapsto \big(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_k)\big) \end{cases} \tag{5.1.2}$$

et l'application $H_{A,g,k}$ devrait alors être définie par :

$$H_{A,g,k}(\alpha) = \pi_* \circ \text{év}^*(\alpha). \tag{5.1.3}$$

La construction de $\mathrm{Mor}_A(g, V, k)$ est problématique, en particulier parce que certaines composantes du schéma de Hilbert des courbes de genre g et de classe A dans V n'ont pas la dimension correcte (*cf.* 5.6).

Le schéma de Hilbert ne répond d'autre part pas réellement au problème, car il ne paramètre pas une famille de courbes stables.

On expliquera au § 5.2 comment cette construction peut se réaliser partiellement par l'étude des solutions de l'« équation de Cauchy-Riemann avec un terme inhomogène » pour une structure pseudocomplexe générique sur V (voir [81], [82], [83]) : le résultat principal de [83] permet essentiellement de calculer les expressions $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,k}} H_{A,g,k}(\alpha)$.

5.1.2. Axiomes

(A1) Pour $\alpha \in H^\ell(V^k)$, on doit avoir :

$$\deg\bigl(H_{A,g,k}(\alpha)\bigr) = \ell + 2\bigl(-(c_1(V)\cdot A) + (g-1)n\bigr).$$

(A2) L'application $H_{A,g,k}$ doit être équivariante pour l'action naturelle du groupe symétrique S_k sur V^k et $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$.

(A3) Soit 1_V le générateur canonique de $H^0(V)$; alors si (g,k) est tel que $(g,k-1)$ est dans l'ensemble considéré plus haut, de sorte que l'application d'oubli du k-ième point $\pi_k : \overline{\mathcal{M}}_{g,k} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,k-1}$ est définie, on a :

$$H_{A,g,k}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{k-1}\otimes 1_V) = \pi_k^*(H_{A,g,k-1}\bigl(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{k-1})\bigr). \tag{5.1.4}$$

De plus, $H_{A,0,3}(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes 1_V)$ doit valoir $\int_V \alpha_1\wedge\alpha_2$ pour $A=0$, et 0 sinon.

(A4) Soit $\beta\in H^2(V)$ la classe d'un diviseur ; alors, lorsque π_k est définie, on doit avoir

$$\pi_{k*}(H_{A,g,k}(\alpha\otimes\ldots\otimes\alpha\otimes\beta)) = (\beta\cdot A)H_{A,g,k-1}(\alpha\otimes\ldots\otimes\alpha) \tag{5.1.5}$$

(A5) Lorsque $g=0$ et $A=0$ (de sorte que l'on considère les applications constantes (pseudo) holomorphes de $\mathbb{P}^1$ dans V), on doit avoir :

$$H_{0,0,k}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_i \deg\alpha_i \neq 2n,\\ \Bigl(\int_V \alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k\Bigr)1_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{5.1.6}$$

(A6) Soient $g_1+g_2=g$ et $k_1+k_2=k$; on a alors une application

$$\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g_1,k_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,k_2+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,k}$$

qui à $(C_1,x_1,\ldots,x_{k_1+1})$ et $(C_2,y_1,\ldots,y_{k_2+1})$ associe la courbe $C = C_1 \bigcup_{x_{k_1+1}=y_{k_2+1}} C_2$ avec les points marqués $x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots y_{k_2}$. On demande alors

$$\begin{aligned}\phi^*\bigl(H_{A,g,k}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k)\bigr) \\ = \sum_{\substack{A_1+A_2=A\\ \sigma,\tau}} g^{\sigma\tau} & H_{A_1,g_1,k_1+1}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{k_1}\otimes e_\sigma)\\ &\otimes H_{A_2,g_2,k_2+1}(\alpha_{k_1+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_k\otimes e_\tau)\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

où e_σ est une base de $H^*(V)$ et $g^{\sigma\tau}$ est la matrice inverse de la matrice d'intersection $\langle e_\sigma, e_\tau\rangle$.

5.1.3. Justification heuristique des axiomes

• L'axiome A1 provient immédiatement du calcul de la dimension virtuelle de $\mathrm{Mor}_A(g,V,k)$ (*cf.* 5.1.1) et de la dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ qui est égale à $3g-3+k$.

• L'axiome A2 provient de l'équivariance par rapport à S_k du diagramme d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_A(g,V,k) & \xrightarrow{\text{év}} & V^k \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,k} & & \end{array} \tag{5.1.8}$$

• L'axiome A3 provient de ce que si π_k est définie, on a trois flèches d'oubli du k-ième point

$$\pi_k : V^k \to V^{k-1},\ \pi_k : \mathrm{Mor}_A(g,V,k) \to \mathrm{Mor}_A(g,V,k-1),\ \pi_k : \overline{\mathcal{M}}_{g,k} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,k-1}$$

qui font du diagramme précédent le « pull-back » du diagramme d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_A(g,V,k-1) & \xrightarrow{\text{év}} & V^{k-1} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,k-1}\,. & & \end{array} \tag{5.1.9}$$

Or une classe $\alpha \in H^*(V^k)$ est de la forme $\beta \otimes 1_V$ avec $\beta \in H^*(V^{k-1})$ si et seulement si elle est égale à $\pi_k^*\beta$. Ce qui précède entraîne alors immédiatement que $H_{A,g,k}(\alpha) = \pi_k^*(H_{A,g,k-1}(\beta))$. Par ailleurs, dans le cas où $g=0$ et $k=3$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est réduit à un point, et on a

$$H_{A,g,k}(\alpha) = \int_{\mathrm{Mor}_A(0,V,3)} \text{év}^*(\alpha) \quad \text{pour } \alpha \in H^*(V^3).$$

Notons maintenant que si $A \neq 0$, l'application $\pi_2 \circ \text{év} : \mathrm{Mor}_A(0,V,3) \to V^2$ est à fibres de dimension positive, car les applications holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \to V$ de classe A sont non constantes, de sorte que pour x_1, x_2, x_3 fixés dans $\mathbb{P}^1$ et $x_3' \in \mathbb{P}^1$ distinct de x_3, on a $(f, x_1, x_2, x_3) \neq (f, x_1, x_2, x_3')$ dans $\mathrm{Mor}_A(0,V,3)$, ce qui fournit les fibres de dimension positive. On a donc clairement :

$$\int_{\mathrm{Mor}_A(0,V,3)} \text{év}^*(\pi_2^*\beta) = 0 \quad \text{pour } \beta \in H^*(V^2).$$

Par contre, lorsque $A=0$, l'application $\text{év} : \mathrm{Mor}_0(0,V,3) \to V^3$ s'identifie à l'inclusion de la diagonale $\{(v,v,v), v \in V\} \subset V^3$ et donc la dernière assertion de A3 est claire.

• Pour voir A5, notons que si H_{α_i} sont des cycles de classes correspondant par dualité de Poincaré à α_i, $H_{A,g,k}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k)$ est la classe de cohomologie du cycle

$$V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_k}} = \big\{(C, x_1, \ldots, x_k)\,;\ \exists\, f : C \to V,\ f_*([C]) = A \text{ et } f(x_i) \in H_{\alpha_i}\big\}.$$

Supposons maintenant que H_{α_k} est un diviseur effectif et que π_k est définie. Il est alors clair que π_k restreinte à $V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_k}}$ est finie, de degré égal à $A\cdot\alpha_k$ sur son image $V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_{k-1}}}$ puisque pour $(C,x_1,\ldots,x_{k-1})$ dans $V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_{k-1}}}$ on peut choisir le point x_k tel que $(C,x_1,\ldots,x_k)$ appartienne à $V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_k}}$ arbitrairement parmi les points d'intersection de $f(C)$ et H_{α_k}.

• Enfin, l'axiome A6 se justifie de la façon suivante. Les notations sont les mêmes ; on veut calculer la classe de l'intersection du cycle $V_{A,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_k}}$ avec

$$\phi\big(\overline{\mathcal{M}}_{g_1,k_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,k_2+1}\big).$$

On voit immédiatement que c'est la réunion, pour toutes les décompositions de A en somme A_1+A_2, des cycles formés des couples $((C_1,x_1,\ldots,x_{k_1+1}),(C_2,y_1,\ldots,y_{k_2+1}))$ tels qu'il existe des applications holomorphes $f_i: C_i\to V$ représentant A_i pour $i=1,2$ et telles que $f_1(x_i)\in H_{\alpha_i}$, $f_2(y_j)\in H_{\alpha_{k_1+j}}$ et $f_1(x_{k_1+1})=f_2(y_{k_2+1})$. La dernière condition s'écrit encore :

$$\big(f_1(x_{k_1+1}),f_2(y_{k_2+1})\big)\in\Delta\subset V\times V.$$

Or la diagonale Δ de $V\times V$ est homologue à $\sum_{\sigma,\tau}g^{\sigma\tau}H_\sigma\times H_\tau$ où les H_σ sont des cycles de classe de cohomologie e_σ. L'ensemble ci-dessus est donc homologue à

$$\sum_{\sigma,\tau}g^{\sigma\tau}V_{A_1,H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_{k_1}},H_\sigma}\times V_{A_2,H_{\alpha_{k_1+1}},\ldots,H_{\alpha_k},H_\tau},$$

ce qui « montre » l'axiome A6.

5.2. Travaux de Ruan et Tian

5.2.1. Invariants de Gromov-Witten mixtes

On considérera uniquement le cas du genre 0, bien que les travaux de Ruan et Tian concernent les courbes pseudoholomorphes de genre quelconque. Leurs résultats permettent de construire les invariants

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}H_{A,0,n}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n)$$

(qui seront les seuls utilisés dans la suite) essentiellement pour les variétés symplectiques (V,ω) dites *monotones*, c'est-à-dire telles que $c_1(V)$ soit un multiple positif ou nul de la classe de ω.

Plus généralement, Ruan et Tian construisent pour de telles variétés des *invariants mixtes* $\Phi_A(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\mid\beta_1,\ldots,\beta_\ell)$ tels que

$$\Phi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\beta_1,\ldots,\beta_\ell)=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\ell+3}}H_{A,0,\ell+3}(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\alpha_3\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_\ell)$$

et dont la principale vertu, outre les propriétés d'(anti)symétrie par rapport aux permutations des α ou des β (proposition 5.2) est la propriété suivante :

$$\begin{aligned}(5.2.10)\quad \Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \beta_1,\dots,\beta_\ell) &= \sum_{\substack{i_1<\dots<i_r,\, r\le\ell\\ A_1+A_2=A}} \sum_{\sigma,\tau} g^{\sigma\tau}\Phi_{A_1}(\alpha_1,\dots,\alpha_s,e_\sigma \mid \beta_{i_1},\dots,\beta_{i_r})\\ &\qquad\qquad \times \Phi_{A_2}(\alpha_{s+1},\dots,\alpha_k,e_\tau \mid \beta_{j_1},\dots,\beta_{j_{\ell-r}}),\end{aligned}$$

où e_σ est une base de $H^{2*}(V)$, $g^{\sigma\tau}$ est l'inverse de la matrice d'intersection, s est un entier fixé et $j_1<\cdots<j_{\ell-r}$ est l'ensemble ordonné complémentaire de $\{i_1,\dots,i_r\}$.

5.2.2. Description des invariants

Soit (V,ω) une variété symplectique ;

- on fait l'hypothèse

$$c_1(V)=\lambda[\omega]\in H^2(V,\mathbb{Z}),\quad \lambda\ge 0$$

- ou bien l'hypothèse plus faible suivante, dite de *monotonie faible* :

si $A\in H_2(V,\mathbb{Z})$ est telle que $(\omega,A)>0$ et $(c_1(V),A)\ge 3-n$ alors $(c_1(V),A)\ge 0$.

Cette hypothèse entraîne que si J est une structure pseudocomplexe compatible avec ω (ce qui signifie que ω est J-invariante et $\omega(v,Jv)>0$, $v\in TV$, $v\neq 0$) les courbes pseudoholomorphes rationnelles non constantes $f:\mathbb{P}^1\to V$ dans V satisfont la condition

$$\big(c_1(V),f_*([\mathbb{P}^1])\big)\ge 0.$$

En effet, pour une telle courbe pseudoholomorphe que l'on peut supposer génériquement plongée, on a bien sûr $(\omega,f_*([\mathbb{P}^1]))>0$ et, comme J est générique,

$$\big(c_1(V),f_*([\mathbb{P}^1])\big)\ge 3-n$$

puisque la dimension de l'espace des courbes pseudoholomorphes génériquement plongées de classe A donnée modulo l'action de $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$ est correcte, c'est-à-dire égale à

$$2\big((c_1(V),A)+n-3\big)$$

(voir [81], [86]) et ce nombre doit être positif ou nul.

Tian et Ruan considèrent les application $f:C\to V$ satisfaisant l'équation de Cauchy-Riemann avec un terme inhomogène. Dans le cas où $g=0$ et donc $C\cong\mathbb{P}^1$, cela signifie qu'on fixe sur $\mathbb{P}^1\times V$ une section ν de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\mathcal{E}$ dont la fibre au point (t,v) est l'espace des applications $\mathbb{C}$-antilinéaires de $T_{\mathbb{P}^1,t}$ dans $T_{V,v}$. Pour une application différentiable $f:\mathbb{P}^1\to V$, on peut construire $\bar\partial f$ (*cf.* 2.1.1), qui est la partie $\mathbb{C}$-antilinéaire de $\mathrm{d}f\in\operatorname{Hom}(T_{\mathbb{P}^1},f^*T_V)$ et l'équation de Cauchy-Riemann avec terme inhomogène ν est alors :

$$(5.2.11)\qquad \bar\partial f=(\mathrm{Id},f)^*\nu.$$

Pour J et ν fixées, on notera $W_{J,\nu,A}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{P}^1$ dans V satisfaisant l'équation (5.2.11) et telles que $f_*([\mathbb{P}^1]) = A$.

On peut montrer que pour (J,ν) générique, $W_{J,\nu,A}$ est lisse, naturellement orientée (voir [81]) et de dimension $2(c_1(V)\cdot A+n)$.

Cet énoncé n'est plus vrai pour les courbes pseudoholomorphes, c'est-à-dire solutions de (5.2.11) avec $\nu=0$, comme le montre le cas d'une variété avec $c_1=0$.

Dans ce cas, la dimension virtuelle de $W_{J,0,A}$ est égale à $2n$, qui est indépendant de A ; or partant d'une courbe pseudoholomorphe $f : \mathbb{P}^1 \to V$, on peut construire des familles de courbes pseudoholomorphes de dimension arbitrairement grande, constituées d'applications $g : \mathbb{P}^1 \to V$ de la forme $g = f\circ\phi$ où $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est une application rationnelle.

Cet énoncé se prouve par application du théorème de Sard en montrant que la linéarisée de l'équation (5.2.11) fournit une application surjective de l'espace tangent à la variété paramétrant les triplets (f,J,ν), en un point où (5.2.11) est satisfait, dans l'espace des sections de $\Omega^{0,1}_{\mathbb{P}^1}\otimes f^*T^{1,0}_{V,J}$, ce qui entraîne que l'espace de toutes les solutions (f,J,ν) de (5.2.11) est lisse à fibres de dimension finie au-dessus de l'espace des paramètres (J,ν).

Pour tout entier k, on dispose d'une application d'*évaluation*

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{év}_k : W_{J,\nu,A}\times(\mathbb{P}^1)^k &\longrightarrow V^k,\\ (f,x_1,\dots,x_k) &\longmapsto \big(f(x_1),\dots,f(x_k)\big). \end{aligned}\right. \tag{5.2.12}$$

On a alors (*cf.* [76], [81], [82], [83]) :

Théorème 5.1. — *Si V est faiblement monotone et J, ν sont génériquement choisies, le bord de l'image de* $\mathrm{év}_k$ *est de dimension de Haussdorf inférieure ou égale à*

$$2\big(c_1(V)\cdot A+n\big)+2k-2.$$

De même, si $(x_1,\dots,x_\ell)$ est choisi génériquement dans $(\mathbb{P}^1)^\ell$, l'image par $\mathrm{év}_k$ *de $W_{J,\nu,A}\times(x_1,\dots,x_\ell)\times(\mathbb{P}^1)^{k-\ell}$ dans V^k a un bord de dimension de Haussdorf inférieure ou égale à*

$$2(c_1(V)\cdot A+n)+2(k-\ell)-2.$$

Les invariants $\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \beta_1,\dots,\beta_\ell)$ sont alors des invariants multilinéaires définis de la façon suivante.

Soient $x_1,\dots,x_k$ des points choisis génériquement dans $\mathbb{P}^1$; les classes α_i, β_j sont des classes dans $H^*(V)$ modulo torsion. Quitte à les remplacer par des multiples $n_i\alpha_i$, $m_j\beta_j$, on peut supposer que α_i, β_j sont les classes de cohomologie de sous-variétés orientées H_{α_i}, H_{β_j} de V.

D'après le théorème 5.1 et le théorème de Sard, on peut supposer que pour

$$\sum_i \deg\alpha_i + \sum_j \deg\beta_j = 2\big(\ell+\langle c_1(V),A\rangle+n\big),$$

$H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell}$

- ne rencontre pas le bord de $\text{év}_{k+\ell}\big(W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^{\ell}\big)$ et
- rencontre $\text{év}_{k+\ell}\big(W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^{\ell}\big)$ transversalement en un nombre fini de points que l'on peut compter algébriquement, puisque $W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^{\ell}$ est lisse orientée de dimension $2(c_1(V) \cdot A + n) + 2\ell$.

Le fait que le bord de $\text{év}_{k+\ell}(W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^{\ell})$ soit de dimension inférieure ou égale à $2(c_1(V) \cdot A + n) + 2\ell - 2$ entraîne que le nombre de ces points d'intersection, comptés avec le signe correct, ne dépend pas du choix des variétés H_{α_i} et H_{β_j}.

On définit alors $\Phi_A(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \mid \beta_1, \ldots, \beta_\ell)$ de la manière suivante :

- lorsque $\sum_i \deg \alpha_i + \sum_j \deg \beta_j = 2\big(\ell + \langle c_1(V), A\rangle + n\big)$, on pose

$$\begin{aligned} (5.2.13) \qquad \Phi_A(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \mid \beta_1, \ldots, \beta_\ell) &= \# \, \text{év}_{k+\ell}\big(W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times {\mathbb{P}^1}^{\ell}\big) \\ &\qquad \cap H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell}, \end{aligned}$$

(où le nombre d'intersection # est compté avec les signes définis par les orientations) ;

- lorsque $\sum_i \deg \alpha_i + \sum_j \deg \beta_j \neq 2\big(\ell + \langle c_1(V), A\rangle + n\big)$, on pose :

$$\Phi_A(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \mid \beta_1, \ldots, \beta_\ell) = 0.$$

En utilisant une homotopie générique entre deux couples (J, ν) génériques, on peut montrer que ce nombre est indépendant du choix de (J, ν). De façon similaire, ce nombre ne dépend pas du choix générique de $(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{P}^1)^k$.

La preuve de la propriété (5.2.10) consiste alors à faire dégénérer $(\mathbb{P}^1, x_1, \ldots, x_k)$ sur la réunion de deux courbes $\mathbb{P}^1_1$ et $\mathbb{P}^1_2$ isomorphes à $\mathbb{P}^1$, se rencontrant transversalement en un seul point, avec s points marqués x_i sur la première composante, formant avec le point d'intersection $x_{s+1} \in \mathbb{P}^1_1$ des deux composantes un $(k+1)$-uplet générique et $(k-s)$ points marqués x'_i sur la deuxième composante, formant avec le point d'intersection $x'_{k-s+1} \in \mathbb{P}^1_2$ des deux composantes un $(k-s+1)$-uplet générique.

Ruan et Tian montrent que $W_{J,\nu,A}$ tend alors vers la réunion sur $A_1 + A_2 = A$ des sous-espaces de $W_{J,\nu,A_1} \times W_{J,\nu,A_2}$ formés des couples (f_1, f_2) tels que

$$f_1(x_{s+1}) = f_2(x'_{k-s+1}).$$

Le produit $W_{J,\nu,A} \times (x_1, \ldots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^{\ell}$ tend alors vers la réunion sur $A_1 + A_2 = A$ et sur toutes les partitions $i_1 < \cdots < i_r$ et $j_1 < \ldots < j_{\ell-r}$ de $\{1, \ldots, \ell\}$ des ensembles

$$\begin{aligned} W'_{A_1,A_2,i_1,\ldots i_r} = \big\{(f_1, f_2, y_1, \ldots, y_\ell) \, ; \; & y_{i_m} \in \mathbb{P}^1_1, y_{j_m} \in \mathbb{P}^1_2, \\ & f_{i*}([\mathbb{P}^1_i]) = A_i, f_1(x_{s+1}) = f_2(x'_{k-s+1})\big\}. \end{aligned}$$

Pour A_1, A_2 et $i_1 < \cdots < i_r$ fixés, considérons l'application d'évaluation à valeurs dans $V^{k+\ell+2}$:

$$\begin{aligned}(5.2.14)\quad \text{év}_{i_1,\dots,i_r} : W_{J,\nu,A_1} \times W_{J,\nu,A_2} \times (\mathbb{P}^1_1)^r \times (\mathbb{P}^1_2)^{\ell-r} \\ \longrightarrow V^{s+1} \times V^{k-s+1} \times V^r \times V^{\ell-r}, \\ (f_1, f_2, y, z) \longmapsto \bigl(f_1(x), f_2(x'), f_1(y), f_2(z)\bigr)\end{aligned}$$

où $x = (x_1, \dots, x_{s+1})$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_{k-s+1})$.

Soit $\Delta \subset V^{k+\ell+2}$ la sous-variété définie par la condition $v_{s+1} = v_{k+2}$. D'après ce qui précède, l'intersection

$$\text{év}_{k+\ell}\bigl(W_{J,\nu,A} \times (x_1, \dots, x_k) \times (\mathbb{P}^1)^\ell\bigr) \cap (H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell})$$

converge vers

$$(5.2.15)\quad \bigcup_{\substack{A_1+A_2=A \\ i_1<\cdots<i_r}} \text{év}_{i_1,\dots,i_r}\bigl(W_{J,\nu,A_1} \times W_{J,\nu,A_2} \times (\mathbb{P}^1_1)^r \times (\mathbb{P}^1_2)^{\ell-r} \cap \pi^{-1}(H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell}\bigr) \cap \Delta)$$

où $\pi : V^{k+\ell+2} \to V^{k+\ell}$ est la projection oubliant les $(s+1)$ et $(k+2)$-ièmes points. La diagonale de $V \times V$ étant homologue à une combinaison $\sum_{\sigma,\tau} g^{\sigma\tau} H_\sigma \times H_\tau$ où les classes d'homologie des H_σ forment une base de $H_*(V, \mathbb{Q})$ et où $g^{\sigma\tau}$ est la matrice inverse de la matrice d'intersection $\langle H_\sigma, H_\tau\rangle$, on trouve

$$\begin{aligned}(5.2.16)\quad \#\,\text{év}_{i_1,\dots,i_r}\bigl(W_{J,\nu,A_1} \times W_{J,\nu,A_2} \times (\mathbb{P}^1_1)^r \times (\mathbb{P}^1_2)^{k-r}\bigr) \\ \cap\, \pi^{-1} H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell} \cap \Delta \\ = \sum_{\sigma,\tau} g^{\sigma\tau} \#\,\text{év}_{i_1,\dots,i_r}(W_{J,\nu,A_1} \times W_{J,\nu,A_2} \times \bigl(\mathbb{P}^1_1\bigr)^r \times (\mathbb{P}^1_2)^{k-r}\bigr) \\ \cap\, H_{\alpha_1} \times \cdots \times H_{\alpha_s} \times H_\sigma \times \cdots \times H_{\alpha_{s+1}} \\ \times \cdots \times H_{\alpha_k} \times H_\tau \times H_{\beta_1} \times \cdots \times H_{\beta_\ell}\end{aligned}$$

qui est par définition égal à

$$\begin{aligned}(5.2.17)\quad \sum_{\sigma,\tau} g^{\sigma\tau} \Phi_{A_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s, e_\sigma \mid \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) \\ \Phi_{A_2}(\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_k, e_\tau \mid \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_{\ell-r}})\end{aligned}$$

où e_σ est l'image par la dualité de Poincaré de la classe de H_σ. Ce qui prouve, moyennant une analyse rigoureuse de la convergence qui forme le contenu majeur de [83], la formule (5.2.10). $\square$

Une autre propriété importante de ces invariants mixtes est leur (anti)symétrie par rapport aux classes α_i et β_j.

***Proposition 5.2 (voir [83]).* —** *On a :*

$$\begin{aligned}&\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k\mid\beta_1,\dots,\beta_\ell)\\&\qquad\qquad=(-1)^{\deg\alpha_i\deg\alpha_{i+1}}\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_{i+1},\alpha_i\dots,\alpha_k\mid\beta_1,\dots,\beta_\ell),\\&\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k\mid\beta_1,\dots,\beta_\ell)\\&\qquad\qquad=(-1)^{\deg\beta_i\deg\beta_{i+1}}\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k\mid\beta_1,\dots,\beta_{i+1},\beta_i,\dots,\beta_\ell).\end{aligned}$$

C'est immédiat à démontrer. La seconde assertion résulte par exemple du fait que si σ est l'involution échangeant les facteurs d'ordre $k+i$ et $k+i+1$ sur $V^{k+\ell}$, on a

$$\begin{aligned}\text{(5.2.18)}\quad&\sigma^*(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_\ell)\\&\qquad=(-1)^{\deg\beta_i\deg\beta_{i+1}}(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_{i+1}\otimes\beta_i\otimes\cdots\otimes\beta_\ell)\end{aligned}$$

tandis que σ ne change ni l'orientation de $V^{k+\ell}$ ni celle de

$$\text{év}_{k+\ell}\big(W_{A,J,\nu}\times(x_1,\dots,x_k)\times(\mathbb{P}^1)^\ell\big).\quad\square$$

5.2.3. Lien avec les invariants de Kontsevich-Manin

On devrait avoir le lien suivant entre les invariants mixtes $\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k\mid\beta_1,\dots,\beta_\ell)$ et les invariants $H_{A,g,k}$ de 5.1.1 :

$$\text{(5.2.19)}\qquad \Phi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\beta_1,\dots,\beta_{k-3})=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}}H_{A,0,k}(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\alpha_3\mid\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_{k-3}).$$

En effet, si on pouvait supposer $\nu=0$, l'espace « $\mathrm{Mor}_A(0,V,k)$ » serait le quotient de $W_{J,\nu,A}\times(\mathbb{P}^1)^k$ par $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1$ et on aurait le diagramme suivant

$$\text{(5.2.20)}\qquad\begin{tikzcd} W_{J,\nu,A}\times x_1\times x_2\times x_3\times(\mathbb{P}^1)^{k-3} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\phi"'] & W_{J,\nu,A}\times(\mathbb{P}^1)^k \arrow[d] \arrow[dr, "\text{év}_k"] & \\ & \mathrm{Mor}_A(0,V,k) \arrow[r, "\text{év}"] & V^k. \end{tikzcd}$$

L'assertion résulte alors de ce que ϕ est birationnelle, de sorte que l'intégrale sur $W_{J,\nu,A}\times x_1\times x_2\times x_3\times(\mathbb{P}^1)^{k-3}$ de

$$\text{év}_k^*(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\alpha_3\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_{k-3})$$

(c'est-à-dire $\Phi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\beta_1,\dots,\beta_{k-3})$) est égale à l'intégrale sur $\mathrm{Mor}_A(0,V,k)$ de

$$\text{év}^*(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\alpha_3\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_{k-3})$$

(c'est-à-dire $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}}H_{A,0,k}(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\alpha_3\mid\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_{k-3})$).

Plus généralement, $\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \beta_1,\dots,\beta_\ell)$ devrait être obtenu comme l'intégrale de $H_{A,0,k+\ell}(\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_k\otimes\beta_1\otimes\dots\otimes\beta_\ell)$ sur la sous-variété de $\overline{\mathcal{M}}_{0,k+\ell}$ adhérence de l'image de $(x_1,\dots,x_k)\times(\mathbb{P}^1)^\ell$.

Il serait intéressant de savoir si les invariants mixtes permettent de construire les invariants $H_{A,0,k}$.

D'autre part, le lien entre la formule (5.2.10) et l'axiome A6 de 5.1.2 est le suivant. Fixons quatre points distincts t_i de $\mathbb{P}^1$; ces points déterminent un diviseur D_t de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4+\ell}$ formé des $(4+\ell)$-uplets

$$z=(z_1,\dots,z_{4+\ell}) \text{ tels que } z\equiv(t_1,\dots,t_4,z'_1,\dots,z'_\ell) \text{ modulo } \operatorname{Aut}\mathbb{P}^1.$$

Or on a :

Lemme 5.3. — *Le diviseur D_t est numériquement équivalent à*

$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_r\\ r\leq\ell}} \phi_I(\overline{\mathcal{M}}_{0,3+r}\times\overline{\mathcal{M}}_{0,3+\ell-r})$$

où $\phi_I((x_1,\dots,x_{3+r}),(y_1,\dots,y_{3+\ell-r}))$ est égal à $(\mathbb{P}^1\bigcup_{x_3=y_3}\mathbb{P}^1,z_1,\dots z_{4+\ell})$, avec $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_{i_k}=x_{2+k}$, $z_3=y_1$, $z_4=y_2$ et $z_{j_k}=y_k$.

Ceci se voit en effet en faisant dégénérer $(\mathbb{P}^1,t_1,\dots,t_4)$ sur $(\mathbb{P}^1_1\bigcup_{x=y}\mathbb{P}^1_2,t_1,\dots,t_4)$, avec $t_1,t_2\in\mathbb{P}^1_1$ et $t_3,t_4\in\mathbb{P}^1_2$. $\square$

Comme on doit interpréter l'invariant $\Phi_A(\alpha_1,\dots,\alpha_4\mid\beta_1,\dots,\beta_\ell)$ comme l'intégrale $\int_{D_t}H_{A,0,4+\ell}(\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_4\otimes\beta_1\otimes\dots\otimes\beta_\ell)$, dans la formulation de Kontsevich-Manin, on voit que, pour $k=4$, la formule (5.2.10) est la version intégrée de l'axiome A6.

5.3. Potentiel de Gromov-Witten

On fixe une forme symplectique ω sur V ; le potentiel de Gromov-Witten (*cf.* [78]) est alors une fonction sur $H^{2*}(V,\mathbb{C})$ définie, en faisant les hypothèses nécessaires de convergence, par

$$\Phi_\omega(\alpha) = \sum_{\substack{k\geq3\\ A\in H_2(V,\mathbb{Z})}} \frac{1}{k!}\exp\Big(-\int_A\omega\Big)\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}}H_{A,0,k}(\alpha\otimes\dots\otimes\alpha). \tag{5.3.21}$$

(On suit ici la terminologie de Kontsevich-Manin, mais on rappelle que les invariants $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}}H_{A,0,k}(\alpha\otimes\dots\otimes\alpha)$ sont bien définis grâce au travail de Ruan et Tian (*cf.* 5.2).)

On ne dispose pas de résultats généraux sur la convergence de cette expression dans un ouvert non vide de $H^{2*}(V,\mathbb{C})$. Cependant, si V est une variété de Fano (ou dans le cadre symplectique si $c_1(-K)$ est un multiple positif de la classe de ω), pour k fixé, il n'existe qu'un nombre fini de $A\in H_2(V,\mathbb{Z})$ telles que $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}}H_{A,0,k}(\alpha\otimes\dots\otimes\alpha)\neq0$, par compacité [76] et pour des raisons de dimension. D'autre part, toujours par compacité, pour toute constante $C>0$, il n'existe qu'un nombre fini de $A\in H_2(V,\mathbb{Z})$ telles que $\int_A\omega\leq C$ intervenant dans l'expression de Φ_ω.

5.3.1. Cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3

Le fibré canonique de V étant trivial, on voit immédiatement que les composantes de l'espace des applications holomorphes de $\mathbb{P}^1$ dans V sont de dimension complexe virtuelle 3, et donc sont virtuellement constituées des constantes dans le cas $A = 0$, et des reparamétrages d'une courbe rationnelle rigide dans V (dans la réalité, il faut toujours tenir compte des revêtements ramifiés d'une courbe donnée qui donnent des familles de dimension strictement supérieure à 3 ; on a expliqué au § 5.2 comment cette difficulté est contournée par Ruan et Tian, et on explique au § 5.6 le calcul des contributions de ces composantes « excessives » aux invariants de Gromov-Witten).

À l'aide des axiomes A1 à A6, ou de leur justification partielle par Ruan et Tian, on en déduit facilement le résultat suivant.

Proposition 5.4. — *Si V est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, le potentiel de Gromov-Witten Φ_ω de V a la forme suivante, modulo une fonction quadratique en α,*

$$\Phi_\omega(\alpha) = \frac{1}{6}\int_V \alpha^3 + \sum_{A\neq 0} N(A)\exp\Big(\int_A -\omega + \alpha\Big) \tag{5.3.22}$$

où $N(A)$ est le nombre virtuel de courbes rationnelles de classe A dans V.

En effet, parmi les termes correspondants à $A = 0$, le seul terme qui n'est pas nul provient du cas où $\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,k} = 0$ (d'après l'axiome A5), et est égal (d'après le même axiome) à $\frac{1}{6}\int_V \alpha^3$.

D'autre part, si $A \neq 0$ et $k \geq 3$, du fait que les courbes rationnelles non constantes sont virtuellement rigides, on trouve immédiatement

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}} H_{A,0,k}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) = 0$$

si $\deg \alpha_i > 2$ pour au moins un indice i.

Si d'autre part $k \geq 4$ et $\deg \alpha_k = 2$, ce terme est égal à

$$\int_A \alpha_k \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k-1}} H_{A,0,k-1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1})$$

par l'axiome A4 tandis que si $\deg \alpha_k = 0$, il est nul par l'axiome A3.

Finalement pour $k = 3$ et $A \neq 0$, l'égalité

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} H_{A,0,3}(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3) = N(A)\int_A \alpha_1 \int_A \alpha_2 \int_A \alpha_3$$

est claire par la définition virtuelle de $H_{A,0,k}$.

On trouve donc que la contribution de la somme pour $A \neq 0$ fixée dans Φ_ω est, modulo un terme quadratique en α, égale à :

$$\sum_{k\geq 3} \frac{1}{k\,!} N(A)\exp\Big(-\int_A \omega\Big)\Big(\int_A \alpha\Big)^k \equiv N(A)\exp\Big(\int_A -\omega + \alpha\Big). \quad \square \tag{5.3.23}$$

5.3.2. Équation WDVV

On suit ici [75]. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des coordonnées sur une variété M et (g_{ij}) une matrice symétrique non dégénérée, à coefficients constants et définissant un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur T_M (on admet le cas de coordonnées holomorphes, le produit scalaire étant alors $\mathbb{C}$-bilinéaire sur le fibré tangent holomorphe). Soit $f(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ (holomorphe dans le cas holomorphe) satisfaisant la condition

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t_1 \partial t_i \partial t_j} = g_{ij}\,. \tag{5.3.24}$$

On construit alors en chaque point $t \in M$ un produit commutatif et unitaire « $\bullet_t$ » sur $T_{M,t}$, défini par la condition

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial t_i} \bullet_t \frac{\partial}{\partial t_j}, \frac{\partial}{\partial t_k} \Big\rangle = \frac{\partial^3 f}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}(t)\cdot \tag{5.3.25}$$

Bien sûr, $\partial/\partial t_1$ est l'élément unité d'après (5.3.24) et (5.3.25).

L'équation WDVV (pour Witten-Dijgraaf-Verlinde-Verlinde) exprime la condition que le produit « $\bullet_t$ » soit associatif en tout point. Par commutativité, la condition d'associativité est équivalente à la symétrie en les indices j, k de l'expression

$$\Big\langle \Big(\frac{\partial}{\partial t_i} \bullet_t \frac{\partial}{\partial t_j} \Big) \bullet_t \frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial t_\ell} \Big\rangle$$

pour tous i, ℓ, j, k. Posant

$$C_{ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k},$$

on a par définition

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \bullet_t \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{a,b} g^{ab} C_{ija} \frac{\partial}{\partial t_b},$$

de sorte que l'équation WDVV s'écrit

$$\sum_{a,b} C_{ija} g^{ab} C_{k\ell b} = \sum_{a,b} C_{ika} g^{ab} C_{j\ell b} \quad \forall\, i, \ell, j, k. \tag{5.3.26}$$

5.3.3. Connexion

Soit ∇ la connexion sur T_M pour laquelle les $\partial/\partial t_i$ sont parallèles (c'est-à-dire la connexion de Levi-Civita de g) ; à l'aide du produit « $\bullet_t$ », on peut construire pour tout $z \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ dans le cas holomorphe) une connexion sans torsion sur T_M grâce à la formule

$$\widetilde{\nabla}^z_u(v) = \nabla_u(v) + z u \bullet_t v \tag{5.3.27}$$

pour u, v des champs de vecteurs sur M. On a alors la proposition suivante (*cf.* [75]).

Proposition 5.5. — *Si f satisfait l'équation WDVV, la connexion $\widetilde{\nabla}^z$ est plate pour tout z.*

En effet, on vérifie immédiatement que l'annulation du terme en z^2 dans la courbure $(\widetilde{\nabla}^z)^2$ est équivalente à l'associativité du produit « $\bullet_t$ », tandis que la symétrie des dérivées $\dfrac{\partial}{\partial t_\ell} C_{ijk} = \dfrac{\partial}{\partial t_k} C_{ij\ell}$ assure l'annulation du terme en z. ∎

Inversement, si on se donne un produit « $\bullet_t$ », décrit comme plus haut par les coefficients $C_{ijk}(t)$, supposés symétriques en i, j, k, tel que la connexion $\widetilde{\nabla}^z$ soit plate pour tout t, alors le produit est associatif, par annulation du terme en z^2 dans la courbure $(\widetilde{\nabla}^z)^2$ et l'annulation du terme en z entraîne l'existence d'une fonction f telle que $C_{ijk} = \partial^3 f/\partial t_i \partial t_j \partial t_k$. On a maintenant le résultat suivant (voir [78], [83]).

Proposition 5.6. — *Le potentiel de Gromov-Witten Φ_ω (supposé convergent) satisfait l'équation WDVV, pour la structure plate naturelle de $H^{2*}(V, \mathbb{C})$, la métrique étant donnée par la forme d'intersection, et le champ unité étant égal à 1_V.*

Première démonstration. — On commence par la démonstration de Kontsevich et Manin, bien que celle-ci elle utilise les axiomes A1–A6 qui ne sont pas démontrés dans cette généralité par Ruan et Tian. On montrera ensuite que la propriété (5.2.10) des invariants de Ruan et Tian suffit à entraîner la proposition 5.6.

Il faut vérifier d'abord qu'on a bien, pour les coordonnées linéaires associées à une base e_i de $H^{2*}(V, \mathbb{C})$ telle que $e_1 = 1_V$, la relation

$$\frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_1 \partial t_i \partial t_j} = g_{ij} = \int_V e_i \wedge e_j\,. \tag{5.3.28}$$

Or cela résulte immédiatement des axiomes A2 et A3 : on trouve

$$\frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_1 \partial t_i \partial t_j} = \sum_{\substack{k \geq 3 \\ A \in H_2(V,\mathbb{Z})}} \frac{\mathrm{e}^{-\int_A \omega}}{(k-3)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,k}} H_{A,0,k}\big(1_V \otimes e_i \otimes e_j \otimes \alpha^{\otimes^{k-3}}\big).$$

D'après l'axiome A3, le seul terme non nul correspond au cas $k = 3$ et $A = 0$ (puisque pour $k > 3$ les classes $H_{A,0,k}(1_V \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1})$ sont images inverses de classes sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,k-1}$ et donc sont d'intégrale nulle), et vaut $\int_V e_i \wedge e_j$ (d'après la seconde partie de l'axiome A3).

Il reste à vérifier l'équation (5.3.26), *i.e.* que pour tous i, ℓ, j, k, l'expression

$$\sum_{a,b} \frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a} g^{ab} \frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_k \partial t_\ell \partial t_b}$$

est symétrique en j, k. Or on a :

$$\frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a}(\alpha) = \sum_{\substack{r \geq 3 \\ A \in H_2(V,\mathbb{Z})}} \frac{\mathrm{e}^{-\int_A \omega}}{(r-3)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} H_{A,0,k}\big(e_i \otimes e_j \otimes e_a \otimes \alpha^{\otimes^{r-3}}\big). \tag{5.3.29}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}(5.3.30)\qquad \sum_{a,b} \frac{\partial^3\Phi_\omega}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a} g^{ab} \frac{\partial^3\Phi_\omega}{\partial t_k \partial t_\ell \partial t_b} &= \sum_{a,b} \sum_{\substack{r,s\geq 3\\ A_1,A_2}} g^{ab}\, \mathrm{e}^{-\int_{A_1+A_2}\omega} \frac{1}{(r-3)!\,(s-3)!} \\ &\qquad \times \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} H_{A_1,0,r}\big(e_i\otimes e_j\otimes e_a\otimes \alpha^{\otimes^{r-3}}\big) \\ &\qquad\qquad \times \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,s}} H_{A_2,0,s}\big(e_k\otimes e_\ell\otimes e_b\otimes \alpha^{\otimes^{s-3}}\big).\end{aligned}$$

D'après l'axiome A6 avec $g_1 = g_2 = 0$, le terme apparaissant à droite quand on fait la somme pour $A = A_1 + A_2$ et r, s fixés est égal à

$$\frac{1}{(r-3)!\,(s-3)!} \exp\Big(-\int_A \omega\Big) \int_{D_r} H_{A,0,n}\big(\alpha^{\otimes^{r-3}} \otimes e_i\otimes e_j\otimes \alpha^{\otimes^{s-3}}\otimes e_k\otimes e_\ell\big),$$

où $n = r + s - 2$ et D_r est le diviseur $\phi(\overline{\mathcal{M}}_{0,r} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ (*cf.* 5.1.2).

Il faut en effet noter que l'axiome A6 reste vrai lorsqu'on se restreint à la cohomologie paire, la somme se faisant sur σ, τ où e_σ est une base de $H^{2*}(V)$, du fait que $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ n'a pas de cohomologie de degré impair. La symétrie de cette expression en j et k résulte alors des relations dues à Keel [77] entre les diviseurs de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$.

En fait, pour toute partition $S = S_1 \sqcup S_2$ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $|S_1| \geq 2$ et $|S_2| \geq 2$, on a un diviseur D_S de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ formé des courbes réductibles avec n points marqués telles que les points indicés par S_1 sont sur l'une des composantes et les points indicés par S_2 sont sur l'autre. On a alors :

Proposition 5.7 (voir [77]). — *Soient $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$; alors on a la relation*

$$(5.3.31)\qquad \sum_{\substack{i,j\in S_1\\ k,\ell\in S_2}} D_S = \sum_{\substack{i,k\in S_1\\ j,\ell\in S_2}} D_S.$$

Démonstration. — On peut bien sûr supposer que $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$, quitte à faire agir le groupe symétrique sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. On utilise alors — comme dans la preuve du lemme 5.3 dont on reprend les notations — les diviseurs D_t, avec $t \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ qui sont tous homologues dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$.

La preuve de la proposition 5.7 se fait en faisant dégénérer $t = (\mathbb{P}^1, t_1, \ldots, t_4)$ sur $(\mathbb{P}^1_1 \bigcup_{x=y} \mathbb{P}^1_2, t_1, \ldots, t_4)$, avec $t_1, t_3 \in \mathbb{P}^1_1$, $t_2, t_4 \in \mathbb{P}^1_2$ (dans la preuve du lemme 5.3, on faisait dégénérer t sur $(\mathbb{P}^1_1 \bigcup_{x=y} \mathbb{P}^1_2, t_1, \ldots, t_4)$ avec $t_1, t_2 \in \mathbb{P}^1_1$ et $t_3, t_4 \in \mathbb{P}^1_2$).

On trouve alors que D_t est homologue à

$$\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_r\\ r\leq \ell}} \phi_{I'}\big(\overline{\mathcal{M}}_{0,3+r} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,3+\ell-r}\big),$$

où $\phi_{I'}\big((x_1,\dots,x_{3+r}),(y_1,\dots,y_{3+\ell-r})\big)$ est égal à $(\mathbb{P}^1 \bigcup_{x_3=y_3} \mathbb{P}^1, z_1,\dots z_{4+\ell})$, avec $z_1 = x_1$, $z_2 = y_1$, $z_{i_k} = x_{2+k}$, $z_3 = x_2$, $z_4 = y_4$ et $z_{j_k} = y_k$, ce qui, combiné avec le lemme 5.3, prouve la proposition 5.7. ∎

Ceci entraîne le résultat, puisqu'on trouve alors que pour n fixé

$$\begin{aligned}(n-4)!\sum_{r+s=n+2}\frac{\mathrm{e}^{-\int_A\omega}}{(r-3)!\,(s-3)!}\int_{D_r} H_{A,0,n}\big(\alpha^{\otimes^{r-3}}\otimes e_i\otimes e_j\otimes\alpha^{\otimes^{s-3}}\otimes e_k\otimes e_\ell\big)\\ = \sum_{\substack{r-2,r-1\in S_1\\ n-1,n\in S_2}}\int_{D_S} H_{A,0,n}\big(\alpha^{\otimes^{r-3}}\otimes e_i\otimes e_j\otimes\alpha^{\otimes^{s-3}}\otimes e_k\otimes e_\ell\big)\end{aligned}$$

est symétrique en j,k. ∎

Seconde démonstration. — On montre maintenant la proposition 5.6 en utilisant les résultats de Ruan et Tian, et particulièrement la formule (5.2.10) ; dans la terminologie de [83], cette proposition affirme que la fonction

$$\Phi_\omega(\alpha) = \sum_{k\geq 3,\,A}\frac{\mathrm{e}^{-\int_A\omega}}{k\,!}\,\Phi_A\big(\alpha,\alpha,\alpha\mid\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{k-3}\big) \tag{5.3.32}$$

satisfait l'équation WDVV (5.3.26), ce qui signifie que l'expression

$$\sum_{a,b} g^{ab}\partial^3_{ija}\Phi_\omega\partial^3_{k\ell b}\Phi_\omega \tag{5.3.33}$$

est symétrique en les indices j et k, les dérivées partielles étant prises par rapport aux coordonnées linéaires sur $H^{2*}(V)$ associées à une base e_a. On a en effet :

$$\partial^3_{ijk}\Phi_\omega(\alpha) = \sum_{\substack{k\geq 3\\ A}}\frac{\mathrm{e}^{-\int_A\omega}}{(k-3)!}\,\Phi_A\big(e_i,e_j,e_k\mid\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{k-3}\big). \tag{5.3.34}$$

Cela résulte de la multilinéarité de $\Phi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\alpha_4,\dots,\alpha_k)$ en les $\alpha_i\in H^{2*}(V,\mathbb{C})$ pour $i=1\dots,k$ et du fait suivant :

Les invariants mixtes $\Phi_A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\alpha_4,\dots,\alpha_k)$ *sont symétriques en les* α_i *dans* $H^{2*}(V,\mathbb{C})$ *pour* $i=1\dots,k$.

L'expression (5.3.33) devient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 3\\ A_1,A_2}}\sum_{a,b} g^{ab}\frac{1}{(k_1-3)!\,(k_2-3)!}\exp\Big(-\int_{A_1+A_2}\omega\Big)\\ \Phi_{A_1}\big(e_i,e_j,e_a\mid\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{k_1-3}\big)\,\Phi_{A_2}\big(e_k,e_\ell,e_b\mid\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{k_2-3}\big).\end{aligned} \tag{5.3.35}$$

Or d'après (5.2.10), on a pour $k \geq 0$ et A fixés

$$\sum_{\substack{A_1+A_2=A \\ a,b}} g^{ab} \exp\Big(-\int_A \omega\Big) \sum_{k_1+k_2-6=k} \frac{1}{(k_1-3)!\,(k_2-3)!} \Phi_{A_1}\big(e_i, e_j, e_a \mid \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{k_1-3}\big)\,\Phi_{A_2}\big(e_k, e_\ell, e_b \mid \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{k_2-3}\big) = \frac{1}{k\,!}\Phi_A\big(e_i, e_j, e_k, e_\ell \mid \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{k}\big) \tag{5.3.36}$$

et le dernier terme est symétrique en j et k en vertu de la proposition 5.2. ∎

5.4. Application à la symétrie miroir

Dans le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3, l'équation WDVV est immédiate à vérifier à cause de la forme particulière (5.3.22) du potentiel de Gromov-Witten (mis à part le terme cubique, $\Phi_\omega(\alpha)$ ne dépend que de la composante de α dans $H^2(V, \mathbb{C})$ qui est totalement isotrope pour la métrique g_{ij}). Le potentiel de Gromov-Witten (en admettant la convergence) va permettre dans ce cas de construire une variation de structure de Hodge complexe paramétrée par $H^2(V, \mathbb{C})$ (qui devrait être celle du miroir) de la façon suivante. On a d'abord :

Lemme 5.8. — *Si V est une variété de Calabi-Yau de dimension 3, pour tout α dans $H^{2*}(V, \mathbb{C})$ tel que Φ_ω converge au voisinage de α, le produit « $\bullet_\alpha$ » sur $H^{2*}(V, \mathbb{C})$ construit à l'aide des dérivées cubiques de Φ_ω et de la métrique g_{ij} comme en* (5.3.25) *préserve la graduation de $H^{2*}(V, \mathbb{C})$.*

Démonstration. — On rappelle que l'on a

$$\Phi_\omega(\alpha) = \frac{1}{6}\int_V \alpha^3 + \sum_{A \neq 0} N(A) \exp\Big(\int_A -\omega + \alpha\Big)$$

modulo un terme quadratique en α. On en déduit que si e_i est une base de $H^{2*}(V, \mathbb{C})$ formée d'éléments homogènes et t_i sont les coordonnées correspondantes, on a

$$\frac{\partial^3 \Phi_\omega}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}(\alpha) = \int_V e_i \wedge e_j \wedge e_k$$

si l'un des e_ℓ n'est pas de degré 2. On en déduit par la définition du produit « $\bullet_\alpha$ » que

$$\langle e_i \bullet_\alpha e_j, e_k \rangle = \int_V e_i \wedge e_j \wedge e_k$$

si l'un des e_ℓ n'est pas de degré 2. Par conséquent :

- si e_i ou e_j n'est pas de degré 2, on a $e_i \bullet_\alpha e_j = e_i \wedge e_j$;
- dans le cas contraire, $e_i \bullet_\alpha e_j$ diffère de $e_i \wedge e_j$ par un élément orthogonal à $\bigoplus_{k \neq 1} H^{2k}(V)$, c'est-à-dire par un élément de $H^4(V)$.

Le produit « $\bullet_\alpha$ » préserve donc bien la graduation. ∎

5.4.1. Variation de structure de Hodge

On suit ici [12]. D'après les propositions 5.4 et 5.5, Φ_ω permet de construire une connexion plate (holomorphe) $\widetilde{\nabla}^1$ sur le fibré tangent (holomorphe) de $H^{2*}(V,\mathbb{C})$ grâce à la formule

$$\widetilde{\nabla}^1_u(v) = \nabla_u(v) + u \bullet_\alpha v. \tag{5.4.37}$$

Le lemme 5.8 montre que pour u tangent à $H^2(V,\mathbb{C})$ et une section v de $\bigoplus_{k\leq r} H^{2k}(V,\mathbb{C})$, on a :

$$\widetilde{\nabla}^1_u(v) \in \bigoplus_{k\leq r+1} H^{2k}(V,\mathbb{C}).$$

On en déduit que la filtration sur $H^{2*}(V,\mathbb{C})$ définie par :

$$F^3 = H^0, \quad F^2 = H^0 \oplus H^2, \quad F^1 = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4, \quad F^0 = H^{2*} \tag{5.4.38}$$

satisfait la condition de transversalité de Griffiths (théorème 1.16) pour la connexion $\widetilde{\nabla}^1$ restreinte à $H^2(V,\mathbb{C})$.

On a $\operatorname{rang} F^3 = \operatorname{rang} F^0/F^1 = 1$ et $\operatorname{rang} F^2/F^3 = \operatorname{rang} F^1/F^2 = \operatorname{rang} H^2(V,\mathbb{C})$; d'autre part, l'application de variation infinitésimale de structure de Hodge

$$\mathrm{d}\mathcal{P} : T_{H^2(V)} \longrightarrow \operatorname{Hom}\bigl(F^3H^{2*}(V), F^2H^{2*}(V)/F^3H^{2*}(V)\bigr)$$

définie par $\mathrm{d}\mathcal{P}(u)(\omega) = \widetilde{\nabla}^1_u(\omega)$ modulo ω, est un isomorphisme. En effet, $F^3H^{2*}(V)$ est engendré par 1_V, et par définition de $\widetilde{\nabla}^1$ on a :

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(u)(1_V)_\omega = 1_V \bullet_\omega u = u \in H^2(V) \subset H^{2*}(V) \text{ modulo } H^0(V).$$

On a donc construit une variation de structure de Hodge complexe ayant les mêmes caractéristiques numériques que celle d'une famille complète de variétés de Calabi-Yau de dimension 3. Bien entendu, on suppose que c'est la variation de structure de Hodge de la famille miroir.

Notons que cette construction donne un caractère d'évidence supplémentaire à la symétrie miroir et complète celle de 3.1, où l'on avait montré l'existence de coordonnées spéciales (supposées correspondre à la structure plate sur l'espace des paramètres de Kähler complexifiés du miroir) définies sur le revêtement universel de l'espace des modules d'une variété de Calabi-Yau de dimension 3, et d'un potentiel dont les dérivées troisièmes calculent les accouplements de Yukawa normalisés Y_2.

On a ici fait un pas dans le sens réciproque en construisant une variation de structure de Hodge complexe avec nombre de Hodge $h^{2,1} = h^{1,1}(V)$ paramétrée par $H^2(V,\mathbb{C})$ pour une variété de Calabi-Yau V de dimension 3, en admettant la convergence du potentiel de Gromov-Witten.

5.5. Produit quantique

Ayant défini les invariants $\Phi_A(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ comme en (5.2.13) avec $\ell = 0$, on construit le produit quantique « $\bullet_\omega$ » sur $H^*(V)$, où ω est la forme symplectique initiale sur V, ou une déformation de celle-ci ou un « paramètre de Kähler complexifié » (*cf.* 1.8) grâce à la formule

$$\langle \alpha \bullet_\omega \beta, \gamma \rangle = \sum_{A \in H_2(V,\mathbb{Z})} \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma) \exp\Big(-\int_A \omega\Big), \tag{5.5.39}$$

pour $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(V)$, la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ étant la forme d'intersection sur $H^*(V)$.

On suppose ici que le terme de droite est une série convergente.

On expliquera dans le chapitre suivant comment on peut donner un sens formel à ce produit en utilisant l'anneau de Novikov de (V, ω). L'une des applications de la formule (5.2.10) est alors le résultat suivant, qui est une généralisation immédiate de la proposition 5.6

Proposition 5.9. — *Le produit* « $\bullet_\omega$ » *est associatif.*

Démonstration. — Notons que d'après la proposition 5.2, le produit « $\bullet_\omega$ » est commutatif au sens gradué, *i.e.* satisfait :

$$\alpha \bullet_\omega \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg\beta} \beta \bullet_\omega \alpha. \tag{5.5.40}$$

L'associativité de « $\bullet_\omega$ » sur $H^*(V)$ est alors équivalente à la propriété :

$$\big\langle (\alpha_1 \bullet_\omega \alpha_2) \bullet_\omega \alpha_3, \alpha_4 \big\rangle = (-1)^{\deg\alpha_2 \deg\alpha_3} \big\langle (\alpha_1 \bullet_\omega \alpha_3) \bullet_\omega \alpha_2, \alpha_4 \big\rangle \tag{5.5.41}$$

pour des éléments homogènes $\alpha_i \in H^*(V)$ et $i = 1, \ldots, 4$. Or on a par définition :

$$\alpha_1 \bullet_\omega \alpha_2 = \sum_{A,\sigma,\tau} g^{\sigma\tau} \Phi_A(\alpha_1, \alpha_2, e_\sigma) \exp\Big(-\int_A \omega\Big) e_\tau \tag{5.5.42}$$

où e_σ est une base de $H^*(V)$ et $g^{\sigma\tau}$ est la matrice inverse de la matrice d'intersection. Il vient donc :

$$\begin{aligned} &\big\langle (\alpha_1 \bullet_\omega \alpha_2) \cdot \alpha_3, \alpha_4 \big\rangle \\ &\quad = \sum_{A_1, A_2, \sigma, \tau} g^{\sigma\tau} \Phi_{A_2}(e_\tau, \alpha_3, \alpha_4)\, \Phi_{A_1}(\alpha_1, \alpha_2, e_\sigma) \exp\Big(-\int_{A_1 + A_2} \omega\Big). \end{aligned} \tag{5.5.43}$$

D'après la formule (5.2.10), le second membre est égal à

$$\sum_A \Phi_A(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \exp\Big(-\int_A \omega\Big) \tag{5.5.44}$$

et l'(anti)symétrie en α_2, α_3 résulte alors de la proposition 5.2. $\square$

Remarque 5.10. — On peut restreindre le produit quantique à $H^{2*}(V)$; dans ce cas, il résulte de la définition que « $\bullet_\omega$ » est le produit défini sur $H^{2*}(V)$ à l'aide des dérivées cubiques de Φ_ω en 0, comme dans (5.3.25). La proposition 5.9 pour la cohomologie paire résulte alors du fait que Φ_ω satisfait l'équation WDVV.

5.6. Le calcul d'Aspinwall et Morrison

On considère une variété de Calabi-Yau V de dimension 3. Nous avons expliqué dans le paragraphe précédent comment calculer le potentiel de Gromov-Witten à l'aide des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann avec un terme inhomogène. Cependant ce potentiel et ses dérivées troisièmes (qui doivent donner les accouplements de Yukawa Y_1 de (2.5.48) et (2.6.54)) sont en principe calculés à l'aide des vraies courbes rationnelles $\mathbb{P}^1 \to V$. Nous avons expliqué au § 2.6 d'après Witten, pourquoi on doit avoir une formule du type

$$(5.6.45)\quad Y_1(\omega)(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_V \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \sum_{\{f\}} \exp\Big(-\int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega\Big)\alpha\big(\{f\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3\big)$$

où la somme se fait sur toutes les composantes $\{f\}$ de l'ensemble des applications holomorphes non constantes de $\mathbb{P}^1$ dans V, la contribution $\alpha(\{f\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ étant obtenue comme une intégrale sur la composante $\{f\}$.

Il faut donc essentiellement comprendre la contribution de chaque composante. On peut raisonnablement espérer, au moins pour certaines variétés de Calabi-Yau de dimension 3 que, pour une structure complexe générale sur V, toutes les courbes rationnelles génériquement plongées sont rigides, c'est-à-dire n'ont pas de déformations infinitésimales (pour les quintiques de dimension 3, c'est le contenu d'une conjecture de Clemens). De telles courbes $f : \mathbb{P}^1 \to V$ fournissent des composantes $\{f\}$ de dimension 3 de l'ensemble des applications holomorphes non constantes de $\mathbb{P}^1$ dans V,

$$\{f\} = \big\{f \circ \phi\,;\ \phi \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1\big\}.$$

Une telle composante se compactifie naturellement en $\mathbb{P}^3$. La courbe $f(\mathbb{P}^1)$ étant infinitésimalement rigide, on a $h^1((f \circ \phi)^* T_V) = \{0\}$ de sorte que $\{f\}$ se présente comme une composante réduite de la bonne dimension du lieu des zéros de la section $s = \bar{\partial}\phi$ du fibré $\mathcal{W}$ sur l'espace M des applications ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{P}^1$ dans V telles que $\phi_*([\mathbb{P}^1]) = A$, dont la fibre en ϕ est égale à $W_\phi = \mathcal{C}^\infty(\Omega^{0,1}_{\mathbb{P}^1} \otimes \phi^* T_V)$. Au vu de la forme de l'intégrale fonctionnelle (2.6.53), la partie bosonique de l'action étant égale à $2\|\bar{\partial}\phi\|^2$, Aspinwall et Morrison [70] interprètent essentiellement l'intégrale

$$(5.6.46)\qquad \int_{\phi_\alpha, \psi, \chi} \mathcal{O}_1(p_1)\mathcal{O}_2(p_2)\mathcal{O}_3(p_3)\,\mathrm{e}^{-S'(\phi,\psi,\chi)}\,\mathrm{d}\phi_\alpha\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\chi,$$

(*cf.* (2.6.53)) comme une intégrale

$$(5.6.47)\qquad \int_M s^*U \wedge \eta_1(p_1) \wedge \eta_2(p_2) \wedge \eta_3(p_3)$$

où U serait une forme de Mathai-Quillen [80] pour le fibré W, les formes $\eta_i(p_i)$ étant définies par $\eta_i(p_i) = \mathrm{év}^*_{p_i}\,\omega_i$ où $\mathrm{év}_{p_i} : M \to V$ envoie ϕ sur $\phi(p_i)$.

Dans ce cas, pour une composante réduite de la bonne dimension $\{f\}$ du lieu des zéros de s, la contribution $\alpha(\{f\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ à l'intégrale (5.6.47) est simplement égale à $\int_{\{f\}} \eta_1(p_1) \wedge \eta_2(p_2) \wedge \eta_3(p_3)$.

D'autre part, en compactifiant $\{f\}$ en $\mathbb{P}^3$, on peut construire un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_{p_i} & \xrightarrow{q_i} & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_i'} & & & & \\ \mathbb{P}^3 & & & & \end{array} \tag{5.6.48}$$

où l'application q_i' est birationnelle et q_i est une résolution des singularités de l'application méromorphe de $\mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^1$ qui à $\phi \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$ associe $\phi(p_i)$.

Il est alors naturel de définir la classe $\eta_i(p_i)$ sur $\mathbb{P}^3$ par

$$\eta_i(p_i) = q'_{i*} \circ q_i^* \circ f^*\big([\omega_i]\big),$$

le terme de droite étant indépendant du choix de la résolution.

Lorsque ω_i est de degré égal à 2, il est alors immédiat de vérifier l'égalité :

$$\eta_i(p_i) = \int_{\mathbb{P}^1} f^*(\omega_i) c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\big).$$

On trouve donc que la contribution d'une telle composante satisfait l'égalité

$$\alpha\big(\{f\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3\big) = \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_1 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_2 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_3\,. \tag{5.6.49}$$

Malheureusement, et même si la conjecture de Clemens est vraie, il faut prendre en compte la contribution des composantes $\{f_k\}$ constituée des applications $g : \mathbb{P}^1 \to V$ de la forme $g = f \circ \phi$ où f est de degré 1 sur son image (qui est une courbe infinitésimalement rigide) et ϕ est une application de degré k de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$.

Aspinwall et Morrison proposent alors, par analogie avec ce qui précède, de calculer la contribution $\alpha(\{f_k\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ grâce à la formule

$$\alpha\big(\{f_k\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3\big) = \int_{\{f_k\}} c_{2(k-1)}(E)\, \eta_1(p_1) \wedge \eta_2(p_2) \wedge \eta_3(p_3) \tag{5.6.50}$$

où E est le fibré (de rang $2(k-1)$) de fibre $E_\phi = H^1(\phi^*(T_V))$, ce qui serait correct si $\{f_k\}$ était compacte, puisque $H^1(\phi^*(T_V))$ s'identifie au conoyau de l'application $\mathrm{d}s : T_{M\,\phi} \to W_\phi$.

Pour donner un sens à cette expression, il faut donc construire une compactification de $\{f_k\}$ à laquelle le fibré E s'étend et étendre les classes des formes $\eta_i(p_i)$.

Aspinwall et Morrison choisissent la compactification la plus simple l'espace projectif de $\{f_k\}$ de dimension $2k+1$ des sections du fibré $\mathcal{O}_Q(k,1)$ sur la surface $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En effet, un élément générique de $\mathbb{P}^{2k+1}$ paramètre exactement une courbe C dans Q isomorphe à $\mathbb{P}^1$ par la première projection π_1 et de degré k au-dessus de $\mathbb{P}^1$ par la seconde projection π_2, c'est-à-dire un morphisme $\pi_2 \circ {\pi_1}_{|C}^{-1} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ de degré k. On peut définir comme ci-dessus les classes $\eta_i(p_i)$ par la formule

$$\eta_i(p_i) = q'_{i*} \circ q_i^* \circ f^*\big([\omega_i]\big) \tag{5.6.51}$$

où l'application q_i est obtenue par résolution des singularités de l'application méromorphe de $\mathbb{P}^{2k+1}$ dans $\mathbb{P}^1$ qui à C associe $\pi_2 \circ \pi_{1|C}{}^{-1}(p_i)$:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_{p_i} & \xrightarrow{q_i} & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_i'} & & & & \\ \mathbb{P}^{2k+1}. & & & & \end{array} \tag{5.6.52}$$

On constate alors immédiatement que :

$$\eta_i(p_i) = \Big(\int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_i\Big) c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2k+1}}(1)\big).$$

Sur l'ouvert $\mathbb{P}^{2k+1}$ constitué des morphismes de degré k de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$, on a un fibré vectoriel E de rang $2(k-1)$ dont la fibre en ϕ est $E_\phi = H^1(f \circ \phi^*(T_V))$. Il se prolonge à $\mathbb{P}^{2k+1}$ de la façon suivante.

Soient $D \subset \mathbb{P}^{2k+1} \times Q$ le diviseur universel et pr_1, pr_2 les projections de $\mathbb{P}^{2k+1} \times Q$ sur ses facteurs. On pose :

$$E = R^1 \mathrm{pr}_{1*}\big(\mathrm{pr}_2^*\big((f \circ \pi_2)^*(T_V)\big)_{|D}\big).$$

En notant $F = (f \circ \pi_2)^* T_V$, on a alors la suite exacte suivante sur $\mathbb{P}^{2k+1} \times Q$

$$0 \to \mathrm{pr}_2^*(F)(-1,-k,-1) \longrightarrow \mathrm{pr}_2^*(F) \longrightarrow \mathrm{pr}_2^*(F)_{|D} \to 0 \tag{5.6.53}$$

où $\mathcal{O}(-1,-k,-1) \cong \mathcal{I}_D$ est le fibré

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2k+1}}(-1)) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathcal{O}_Q(-k,-1)).$$

Comme $H^1((f \circ \pi_1)^*(T_V)) = \{0\}$, on obtient immédiatement un isomorphisme :

$$E = R^1\mathrm{pr}_{1*}\big(\mathrm{pr}_2^*(F)_{|D}\big) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2k+1}}(-1) \otimes H^2\big(Q, F(-k,-1)\big). \tag{5.6.54}$$

On en déduit l'égalité

$$c_{2(k-1)}(E) = c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2k+1}}(1)\big)^{2(k-1)}$$

et la formule

$$\alpha\big(\{f_k\}, \omega_1, \omega_2, \omega_3\big) = \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_1 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_2 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_3. \tag{5.6.55}$$

Les formules (5.6.45) et (5.6.55) fournissent maintenant l'expression suivante pour $Y_1(\omega)(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, en supposant que toutes les courbes génériquement plongées sont infinitésimalement rigides

$$\begin{aligned} & Y_1(\omega)(\omega_1,\omega_2,\omega_3) \\ & \quad = \int_V \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \sum_{\substack{\mathbb{P}^1 \subset V \\ k \geq 1}} \mathrm{e}^{-k \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega} \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_1 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_2 \int_{\mathbb{P}^1} f^*\omega_3, \end{aligned} \tag{5.6.56}$$

ce qui, en effectuant la somme sur k et en notant $N(A)$ le nombres de courbes rationnelles génériquement plongées de classe A, devient

$$Y_1(\omega)(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \int_V \omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3 + \sum_A N(A)\,\frac{\mathrm{e}^{-\int_A\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\int_A\omega}}\int_A\omega_1\int_A\omega_2\int_A\omega_3, \tag{5.6.57}$$

c'est-à-dire la formule utilisée dans le § 3.3.

Le raisonnement décrit ici est très incomplet car il repose sur le choix non justifié de la compactification naturelle de l'espace des applications de degré k de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ donnée par l'espace $\mathbb{P}^{2k+1}$ pour appliquer la formule d'excès (5.6.50).

En fait, la formule d'Aspinwall et Morrison (5.6.57) a été prouvée rigoureusement par Manin [79], reprenant certaines idées de Kontsevich [51], en admettant la validité de la formule de Bott pour les «champs» lisses, et plus récemment par Voisin [85], suivant une ligne plus proche de celle proposée par Aspinwall et Morrison. Dans ces derniers articles, on montre (5.6.57) en supposant l'égalité (qu'on peut prendre comme une définition du terme de gauche)

$$Y_1(\omega)(\omega_i,\omega_j,\omega_k) = \frac{\partial^3\Phi_\omega}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}(0) \tag{5.6.58}$$

dans laquelle $\{\omega_\ell\}$ est une base de $H^2(X,\mathbb{C})$ et les t_ℓ sont les coordonnées linéaires correspondantes sur $H^2(X,\mathbb{C})$. (Le membre de droite est aussi égal à $\dfrac{\partial^3\Phi_{\omega+\alpha}}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}(\alpha)$ pour tout $\alpha\in H^2(X,\mathbb{C})$.)

Pour cela, on montre d'abord la proposition 5.11 qui concerne le calcul des invariants de Gromov-Witten. Soit $j:\mathbb{P}^1\to X$ une immersion rigide (nécessairement de degré 1 sur son image), c'est-à-dire telle que le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1}X$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$; soient $A=j_*([\mathbb{P}^1])\in H_2(X,\mathbb{Z})$ et k un entier strictement positif.

On considère une petite déformation générique J de la structure pseudocomplexe de X et une section ν proche de 0 du fibré $\mathrm{pr}_1^*\,\Omega^{0,1}_{\mathbb{P}^1}\otimes\mathrm{pr}_2^*\,T^{1,0}_{X,J}\to\mathbb{P}^1\times X$. On suppose (J,ν) générique.

L'ensemble $W_{kA,J,\nu}$ possède alors une composante $W^0_{kA,J,\nu}$ faite d'applications $\phi:\mathbb{P}^1\to X$ d'image contenue dans un voisinage assez petit de $j(\mathbb{P}^1)$. Cette composante «déforme» la famille des applications holomorphes $\phi:\mathbb{P}^1\to X$ de la forme $j\circ f$ pour $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ de degré k.

La contribution de cette famille aux invariants de Gromov-Witten sera (par définition) donnée par l'image des applications d'évaluation restreintes à $W^0_{kA,J,\nu}\times(\mathbb{P}^1)^\ell$.

Proposition 5.11. — *Soient x_1,x_2,x_3 trois points distincts de $\mathbb{P}^1$ et soit* év : $W^0_{kA,J,\nu}\to X^3$ *l'application définie par*

$$\mathrm{év}(\phi)=\big(\phi(x_1),\phi(x_2),\phi(x_3)\big).$$

Alors l'adhérence de l'image de év *a pour classe d'homologie $A\otimes A\otimes A\in H_6(X^3,\mathbb{Z})$ (où l'on utilise l'orientation naturelle de $W^0_{kA,J,\nu}$, voir* [81]*).*

En supposant maintenant que toutes les courbes rationnelles génériquement plongées dans X sont immergées et rigides, on déduit aisément de cette proposition la formule suivante pour le potentiel de Gromov-Witten de X

$$\Phi_\omega(\alpha) = \frac{1}{6}\int_X \alpha^3 + \sum_{0\neq A\in H_2(X,\mathbb{Z})} N(A) \sum_{\substack{m\geq 3\\ k\geq 1}} \frac{k^{m-3}}{m\,!}\Big(\int_A \alpha\Big)^m \exp\Big(-\int_{kA}\omega\Big) \tag{5.6.59}$$

où $N(A)$ est le nombre de courbes rationnelles génériquement plongées de classe A. En dérivant trois fois cette expression, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\Phi_\omega}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}(\alpha) &= \int_X \omega_i\omega_j\omega_k \\ &\qquad + \sum_{A\neq 0} N(A)\Big(\sum_{\substack{m\geq 3\\ k\geq 1}} \frac{k^{m-3}}{(m-3)!}\Big(\int_A \alpha\Big)^{m-3}\exp\Big(-\int_{kA}\omega\Big)\Big) \\ &\qquad\qquad \times \int_A\omega_i\int_A\omega_j\int_A\omega_k \\ &= \int_X \omega_i\omega_j\omega_k + \sum_{A\neq 0} N(A)\Big(\sum_{k\geq 1}\exp\Big(\int_{kA} -\omega+\alpha\Big)\Big)\int_A\omega_i\int_A\omega_j\int_A\omega_k \\ &= \int_X \omega_i\omega_j\omega_k + \sum_{A\neq 0} N(A)\,\frac{\mathrm{e}^{\int_A -\omega+\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\int_A -\omega+\alpha}},\end{aligned} \tag{5.6.60}$$

ce qui prouve (5.6.57). ∎

6. LA CONSTRUCTION DE GIVENTAL

Le but de ce chapitre est d'une part de fournir des compléments au chapitre précédent, et d'autre part d'expliquer les idées (en partie rigoureuses, en partie intuitives) utilisées par Givental [91] pour arriver à la même conclusion que Candelas, de la Ossa, Green, Parkes (voir le chapitre 3), à savoir que le comptage des courbes rationnelles dans une quintique de $\mathbb{P}^4$ doit permettre de construire une fonction liée par des transformations simples aux solutions de l'équation de Picard-Fuchs de la famille miroir.

La cohomologie de Floer, à laquelle est consacrée la première partie de ce chapitre, n'est pas réellement utilisée dans la suite, consacrée à la construction de Givental, si ce n'est pour garantir le sens de certaines expressions formelles qu'il utilise.

On présente d'abord la théorie de Floer, qui consiste à utiliser l'existence de l'indice de Conley-Zehnder, pour construire le complexe de Floer. On considère une certaine fonctionelle définie sur le revêtement de l'espace des lacets d'une variété symplectique. L'indice de Conley-Zehnder est un substitut de l'indice de Morse ; il donne la dimension de l'espace des trajectoires du flot du gradient symplectique de cette fonctionnelle reliant deux points critiques.

Le terme d'ordre 1 de ce flot est donné par l'équation de Cauchy-Riemann pour une structure pseudocomplexe générique. La cohomologie du complexe de Floer se compare essentiellement à la cohomologie de la variété en question à coefficients dans un certain anneau de séries formelles, et peut être munie d'un produit naturel, qui a été récemment identifié au produit quantique.

On explique ensuite les éléments de cohomologie équivariante, et particulièrement de cohomologie S^1-équivariante d'une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne, nécessaires pour comprendre le calcul de Givental ; suivant [91], on explique la construction d'une structure de $\mathcal{D}$-module sur $H^*_{S^1}(M)$ sous certaines hypothèses, ainsi que le calcul de certaines classes d'Euler équivariantes sur les espaces de polynômes de Laurent $P(z)$ à coefficients dans $\mathbb{C}^5$ munis de l'action de S^1 donnée par la rotation des lacets $P(z) \mapsto P(\lambda z)$ avec $\lambda \in S^1$ qui, par passage à la limite, fournissent des solutions formelles de l'équation de Picard-Fuchs mentionnée ci-dessus.

6.1. Cohomologie de Floer

Cette théorie a été inventée par Floer [89], [90] dans le but d'obtenir des inégalités de Morse pour le nombre de points fixes d'un difféomorphisme exact (c'est-à-dire obtenu par intégration d'un champ $X(t)$ dépendant du temps et globalement hamiltonien pour tout temps t) d'une variété symplectique, ou pour le nombre d'orbites périodiques d'un flot hamiltonien périodique (conjecture d'Arnold). Soient (V,ω) une variété symplectique compacte et H une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times V$ telle que $H(t,v)=H(t{+}1,v)$; cette fonction détermine, grâce à la formule

$$\mathrm{int}_{X_{H(t)}}(\omega)=\mathrm{d}H_t\,,$$

un champ hamiltonien X_H dépendant du temps sur V et donc un flot

$$\psi_t : V \longrightarrow V.$$

On a $\psi_1(v)=v$ si et seulement si $\psi_t(v)$ est une orbite périodique de X_H.

Soient LV l'espace des lacets homotopes à une constante et $\widetilde{LV}$ le revêtement de LV correspondant au noyau de l'application composée

$$\pi_1(LV)\longrightarrow\pi_2(V)\longrightarrow H_2(V)\xrightarrow{(c_1,\omega)}\mathbb{R}^2 \tag{6.1.1}$$

où $c_1,\omega : H_2(V,\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$ sont définies par intégration de $c_1(V),\omega\in H^2(V)$.

L'espace $\widetilde{LV}$ peut être identifié à l'espace des applications $\phi : D^2\to V$ modulo la relation

$$\phi\equiv\psi\quad\text{si}\quad \phi_{|\partial D^2}=\psi_{|\partial D^2},\quad \int_{D^2}\phi^*c_1=\int_{D^2}\psi^*c_1,\quad \int_{D^2}\phi^*\omega=\int_{D^2}\psi^*\omega,$$

où D^2 est le disque unité de $\mathbb{R}^2$. La forme ω et la fonction H permettent de définir l'action suivante sur $\widetilde{LV}$

$$\mathcal{A}_H(\phi)=\int_{D^2}\phi^*(\omega)+\int_{S^1}H\big(t,\phi(t)\big)\,\mathrm{d}t \tag{6.1.2}$$

où $S^1=\partial D^2$ est identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont définis par la condition

$$\forall\xi\in\mathcal{C}^\infty\big(\phi^*_{|S^1}(TV)\big),\qquad \int_{S^1}\mathrm{int}_\xi\omega+\int_{S^1}\mathrm{d}_V H\big(t,\phi(t)\big)(\xi)\,\mathrm{d}t=0, \tag{6.1.3}$$

ce qui équivaut clairement à

$$\omega\big(\phi'(t),\bullet\big)=\mathrm{d}_V H\big(t,\phi(t)\big)(\bullet)$$

ou encore au fait que $\phi_{|S^1}$ est une orbite périodique de X_H.

Soit maintenant J une structure pseudocomplexe sur V, compatible avec ω ; on associe à (J,ω) la métrique $g(u,v)=\omega(u,Jv)$ sur TV et donc la métrique L^2 sur T_{LV} (ou $T_{\widetilde{LV}}$) définie de la façon suivante. Pour $\phi\in LV$, l'espace tangent à LV en ϕ est l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré ϕ^*T_V ; soient $\rho,\xi\in\mathcal{C}^\infty(\phi^*(TV))$. On pose :

$$\langle\rho,\xi\rangle_\phi=\int_{S^1}g_{\phi(t)}\big(\rho(t),\xi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Comme on a

$$\mathrm{d}\mathcal{A}_H(\xi)=\int_{S^1}\omega\big(\xi(t),\phi'(t)\big)+\omega\big(X_{H_t}(\phi(t)),\xi(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

on voit que le gradient de $\mathcal{A}_H$ pour cette métrique est le champ

$$\phi\longmapsto -J\phi'(t)+JX_H(t)\in\mathcal{C}^\infty\big(\phi^*(TV)\big).$$

Même si l'on suppose que les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont sont pas dégénérés, on ne peut pas faire de la théorie de Morse avec cette fonctionnelle, car sa hessienne en un point critique a un nombre infini de valeurs propres positives ou négatives.

En remplaçant l'indice de Morse par l'indice de Conley-Zehnder, Floer a néanmoins construit un analogue du complexe de Thom-Smale (en supposant que (V,ω) est monotone).

6.1.1. Indice de Conley-Zehnder

Soit $\mathcal{H}\subset LV$ l'ensemble des orbites périodiques de X_H ; soit $\phi\in\mathcal{H}$ et soit $\tilde\phi:D^2\to V$ une application $\mathcal{C}^\infty$ étendant ϕ. On peut trivialiser le fibré symplectique $\tilde\phi^*T_V$ sur D^2. D'autre part, pour $t\in S^1$, la différentielle

$$\psi_{t*}:(\phi^*T_V)_0\longrightarrow(\phi^*T_V)_t$$

du flot ψ_t fournit un isomorphisme symplectique, puisque X_H est hamiltonien. Grâce à la trivialisation induite de ϕ^*T_V, la différentielle ψ_{t*} fournit une application

$$k_t:S^1\longrightarrow\mathrm{Sp}_n\qquad(\dim V=2n)$$

dont la classe d'homotopie est mesurée par un entier $\mu(\tilde\phi,H)$ qu'on appelle *indice de Conley-Zehnder* de $(\tilde\phi,H)$.

On a une action naturelle

$$(u,\tilde\phi)\longmapsto u\,\#\,\tilde\phi$$

du groupe $\mathrm{Im}(\pi_2(V)\to H_2(V))$ sur $\widetilde{LV}$ qui se décrit de la façon suivante. La classe u d'une application $\tilde u:S^2\to V$ étant donnée et $\tilde\phi\in\widetilde{LV}$ étant représentée par une application $\tilde\phi:D^2\to V$ que l'on note de la même manière, on peut supposer que pour un point base x_0 de S^2, on a $\tilde u(x_0)=\tilde\phi(0)$. En identifiant $S^2-\{x_0\}$ et l'intérieur de $D^2_{1/2}$ et en envoyant $D^2-D^2_{1/2}$ sur D^2 par une application β de la forme

$$z\longmapsto\rho(|z|)z,\text{ avec }\rho\text{ monotone, }\rho(1)=1\text{ et }\rho(\tfrac12)=0,$$

on définit $u\,\#\,\tilde\phi$ comme la classe de l'application de D^2 dans V qui vaut $\tilde u$ sur $D^2_{1/2}$ et $\tilde\phi\circ\beta$ sur $D^2-D^2_{1/2}$.

L'indice de Conley-Zehnder se comporte de la façon suivante par rapport à cette action (qui laisse bien sûr stables les points critiques de $\mathcal{A}_H$) :

$$\mu(u \# \tilde{\phi}, H) = \mu(\tilde{\phi}, H) + 2\int_{S^2} u^* c_1(V). \tag{6.1.4}$$

Le résultat suivant est dû à Salamon et Zehnder

Théorème 6.1. — *Soient $\tilde{\phi}$, $\widetilde{\psi}$ des points critiques non-dégénérés de $\mathcal{A}_H$; alors pour une structure pseudocomplexe générique J, l'espace $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ des solutions de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = -J\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + JX_{H_t}(u(s,t)) \tag{6.1.5}$$

pour $(s,t) \in \mathbb{R} \times S^1$ (c'est-à-dire les trajectoires du gradient de $\mathcal{A}_H$) satisfaisant

$$\lim_{s \to -\infty} u(s,t) = \phi, \quad \lim_{s \to +\infty} u(s,t) = \psi, \quad \widetilde{\psi} = u \# \tilde{\phi} \in \widetilde{LV} \tag{6.1.6}$$

est de dimension $\mu(\widetilde{\psi}, H) - \mu(\tilde{\phi}, H)$.

On a utilisé ici la même notation # pour l'opération suivante. Si

- $\tilde{\phi}$ est la classe d'équivalence d'une application $\tilde{\phi} : D^2 \to V$ satisfaisant $\tilde{\phi}_{|\partial D^2} = \phi$,
- u est une application de $\overline{\mathbb{R}} \times S^1$ dans V, satisfaisant $u_{|-\infty} = \phi$,
- $u_{|+\infty} = \psi$,

alors $u \# \tilde{\phi}$ désigne la classe dans $\widetilde{LV}$ de l'application de D^2 dans V qui vaut $\tilde{\phi}(2z)$ sur $D^2_{1/2}$ et u sur $D^2 - {D^2_{1/2}}^0 \cong \overline{\mathbb{R}} \times S^1$.

En particulier, pour $\mu(\widetilde{\psi}, H) - \mu(\tilde{\phi}, H) = 1$, on trouve des trajectoires isolées (modulo les translations du temps s). Comme dans la théorie de Morse, ces trajectoires vont servir à construire la différentielle du complexe de Floer ; on est cependant confronté au problème suivant : dans $\widetilde{LV}$, $\mathcal{A}_H$ peut avoir une infinité de points critiques d'indice k (c'est le cas par exemple si $c_1 = 0$).

L'introduction de l'anneau de Novikov permet de contourner cette difficulté.

6.1.2. Anneau de Novikov

Soient Γ un groupe commutatif et $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ un homomorphisme. Étant donné un anneau R de coefficients $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots)$, on définit $\Lambda(\Gamma, \phi, R)$ comme l'ensemble des fonctions $\rho : \Gamma \to R$ telles que pour tout réel $c > 0$, l'ensemble

$$\{A \in \Gamma\,;\ \rho(A) \neq 0,\ \phi(A) < c\} \quad \text{est fini.}$$

L'ensemble $\Lambda(\Gamma, \phi, R)$ est un anneau pour l'addition des fonctions et la multiplication définie par la formule suivante où la somme à droite est finie :

$$\rho \cdot \rho'(A) = \sum_B \rho(B)\rho'(A - B)$$

Si Γ est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, de base $(e_1, \dots, e_m)$, on peut identifier $\Lambda(\Gamma, \phi, R)$ à l'ensemble des séries

$$\sum_{I \in \mathbb{Z}^m} \lambda_I \, t^I, \quad \lambda_I \in R,$$

en les variables formelles $t_1, \dots, t_m$, satisfaisant la condition : pour tout réel $c > 0$,

$$\text{l'ensemble} \quad \Big\{ I = (i_1, \dots, i_m) \, ; \; \lambda_I \neq 0, \; \sum_k i_k \phi(e_k) < c \Big\} \quad \text{est fini.}$$

L'anneau de Novikov Λ_ω que l'on utilisera est construit comme ci-dessus sur le groupe

$$\Gamma = \operatorname{Ker} c_1 / \operatorname{Ker} c_1 \cap \operatorname{Ker} \omega,$$

muni de l'homomorphisme ω (on note abusivement c_1 et ω les applications à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur $\pi_2(V)$ comme les composés de la flèche naturelle $\pi_2(V) \to H_2(V)$ et des formes linéaires sur $H_2(V)$ correspondant aux classes ω, c_1 de $H^2(V)$).

Notons que si $c_1 = 0, \pi_2(V) = H_2(V)$ et ω est injectif, on a $\Gamma = H_2(V, \mathbb{Z})$.

6.1.3. Complexe de Floer

Comme on a besoin d'un résultat de compacité pour l'image par l'application d'évaluation des variétés $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ pour $\mu(\widetilde{\psi}, H) - \mu(\tilde{\phi}, H) \leq 2$, on suppose désormais que V est monotone (voir [89]) ou faiblement monotone (voir [94]), ce qui empêche le phénomène de bulle pour des indices petits et permet de montrer :

Théorème 6.2. — *Pour $c > 0$ et $k \leq 2$, soit*

$$\mathcal{M}_c^k \subset \bigcup_{\substack{\tilde{\phi}, \widetilde{\psi} \\ \mu(\widetilde{\psi}, H) \leq \mu(\tilde{\phi}, H) + k}} \mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$$

défini par la condition :

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} \Big| \frac{\partial u}{\partial s} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}\big(u(s,t)\big) \Big|^2 \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \leq c.$$

Alors l'image dans V de l'application

$$\text{év} : \overline{\mathbb{R}} \times S^1 \times \mathcal{M}_c^k \longrightarrow V,$$
$$\text{év}(s, t, u) = u(s, t)$$

est compacte.

(On a posé $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et prolongé u en passant à la limite).

Le complexe de Floer est alors construit de la façon suivante.

Soit $\widetilde{\mathcal{H}}$ l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}_H$ et soit $\widetilde{\mathcal{H}}_k$ l'ensemble des points critiques d'indice k. On définit C^k comme l'ensemble des fonctions $\xi : \widetilde{\mathcal{H}}_k \to R$, telles que pour tout réel $c > 0$, l'ensemble

$$\big\{ \tilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_k \, ; \; \xi(\tilde{\phi}) \neq 0, \; \mathcal{A}_H(\tilde{\phi}) \leq c \big\}$$

soit fini. (On utilisera plus loin la notation $\xi = \sum_{\tilde{\phi}} \xi(\tilde{\phi}) \langle \tilde{\phi} \rangle$). On a maintenant :

Lemme 6.3. — *La formule*

$$\rho\xi(\tilde{\phi}) = \sum_{A\in\Gamma} \rho(A)\xi\big((-A)\,\#\,\tilde{\phi}\big), \tag{6.1.7}$$

où $\xi \in C^k$ et $\tilde{\phi} \in \mathcal{H}_k$, définit une action naturelle de Λ_ω sur C^k.

En effet, comme $A \in \operatorname{Ker} c_1$, on a bien $(-A)\,\#\,\tilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_k$ d'après (6.1.4); d'autre part, la somme est finie puisque $\mathcal{A}_H((-A)\,\#\,\tilde{\phi}) = -\omega(A) + \mathcal{A}_H(\tilde{\phi})$. Pour que $\rho(A)\xi((-A)\,\#\,\tilde{\phi})$ ne soit pas nul, il faut que $\rho(A) \neq 0$ et $\xi((-A)\,\#\,\tilde{\phi}) \neq 0$; si on avait une infinité de termes non nuls on aurait une suite A_i avec

$$\lim_{i\to\infty} \omega(A_i) = \infty \quad \text{et} \quad \xi\big((-A_i)\,\#\,\tilde{\phi}\big) \neq 0,$$

ce qui est absurde puisque $\lim_{i\to\infty} \mathcal{A}_H((-A_i)\,\#\,\tilde{\phi}) = -\infty$. Cela montre que $\rho\cdot\xi$ est bien une fonction de $\widetilde{\mathcal{H}}_k$ dans R. On montre de même qu'on a bien $\rho\cdot\xi \in C^k$. ∎

Notons maintenant que C^k est en fait un module de rang fini sur Λ_ω (*cf.* [94]). Soit N le nombre de Chern minimal de (V,ω), défini par

$$N\mathbb{Z} = \operatorname{Im}\big(c_1 : \pi_2(V) \to \mathbb{Z}\big).$$

Soit $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des orbites périodiques ϕ telles que $\mu(\tilde{\phi}) \equiv k \bmod 2N$, pour un relèvement $\tilde{\phi}$ de ϕ dans $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Pour $\phi \in \mathcal{H}_k$, on choisit un relèvement $\tilde{\phi}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}}_k$. On voit immédiatement que les éléments $\langle\tilde{\phi}\rangle \in C^k$ correspondants forment une base de C^k sur Λ_ω. ∎

Pour $\tilde{\phi}, \widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{H}}$, soit $u \in \mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$; on a alors :

$$E(u) = \mathcal{A}_H(\widetilde{\psi}) - \mathcal{A}_H(\tilde{\phi}). \tag{6.1.8}$$

D'après les théorèmes 6.1 et 6.2 et (6.1.8), il existe un nombre fini de trajectoires dans $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ modulo les translations du temps pour $\tilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_k$ et $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}$. On peut en outre les compter avec des signes (*cf.* [89], [94]), ce qui fournit un nombre $n(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi}) \in \mathbb{Z}$. On a alors :

Lemme 6.4. — *La formule*

$$\partial\xi(\widetilde{\psi}) = \sum_{\tilde{\phi}\in\widetilde{\mathcal{H}}_k} n(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})\xi(\tilde{\phi}) \tag{6.1.9}$$

où $\xi \in C^k$ et $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}$, définit une application

$$\partial : C^k \longrightarrow C^{k+1}. \tag{6.1.10}$$

C'est cette application qui sera la différentielle du complexe de Floer.

Remarquons tout d'abord que la somme dans (6.1.9) est finie : en effet, lorsque u appartient à $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$, on a

$$E(u) = \mathcal{A}_H(\widetilde{\psi}) - \mathcal{A}_H(\tilde{\phi}) \geq 0$$

et donc $\mathcal{A}_H(\tilde{\phi}) \leq \mathcal{A}_H(\widetilde{\psi})$ lorsque $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ est non vide et il existe un nombre fini de $\tilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{H}}_k$ satisfaisant $\mathcal{A}_H(\tilde{\phi}) \leq \mathcal{A}_H(\widetilde{\psi})$ et $\xi(\tilde{\phi}) \neq 0$.

On vérifie de même que $\partial\xi$ est bien dans C^{k+1} : si $A_H(\widetilde{\psi}) \leq c$, la condition $\partial\xi(\widetilde{\psi}) \neq 0$ implique $\xi(\tilde{\phi}) \neq 0$ pour un élément $\tilde{\phi}$ de $\widetilde{\mathcal{H}}_k$ tel que $\mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ est non vide. On a alors $\mathcal{A}_H(\tilde{\phi}) \leq c$ et il existe un nombre fini de tels $\tilde{\phi}$. D'autre part, d'après le théorème 6.2 et la formule (6.1.8) pour un tel $\tilde{\phi}$, l'ensemble

$$\bigcup_{\mathcal{A}_H(\widetilde{\psi}) \leq c} \mathcal{M}(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi})$$

est fini modulo les translations du temps, de sorte que l'ensemble

$$\left\{\widetilde{\psi}\,;\ \mathcal{A}_H(\widetilde{\psi}) \leq c,\ \partial\xi(\widetilde{\psi}) \neq 0\right\}$$

est bien fini. $\square$

On a maintenant le résultat suivant :

Théorème 6.5. — *La différentielle ∂ satisfait $\partial^2 = 0$ et permet donc de définir les groupes de cohomologie de Floer*

$$FH^k(V,\omega) = \operatorname{Ker}(\partial : C^k \to C^{k+1}) / \operatorname{Im}(\partial : C^{k-1} \to C^k). \tag{6.1.11}$$

Notons finalement que ∂ commute de façon évidente avec l'action de Λ_ω, de sorte que $FH^k(V,\omega)$ est un Λ_ω-module.

Remarque 6.6. — L'action du groupe de revêtement sur $\widetilde{LV}$ fournit un isomorphisme

$$A\,\# : \widetilde{\mathcal{H}}_k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_{k+2c_1(A)}$$

pour $A \in \pi_2(V)$. D'autre part $A\,\#$ préserve clairement les trajectoires, de sorte que pour tout k on a un isomorphisme (en fait canonique) :

$$FH^k(V,\omega) \cong FH^{k+2N}(V,\omega),$$

où N est toujours le nombre de Chern minimal de (V,ω).

On peut montrer (voir [89], [94]) que $FH^k(V,\omega)$ ne dépend pas du choix générique de (H,J) (ce qui justifie la notation *a posteriori*) au sens où pour $(H_1,J_1), (H_2,J_2)$ satisfaisant les conditions nécessaires à la construction du complexe de Floer, on a un isomorphisme canonique :

$$FH^k(V,\omega)_{(H_1,J_1)} \cong FH^k(V,\omega)_{(H_2,J_2)}.$$

6.2. Théorème de comparaison

Floer (dans le cas monotone) et Hofer-Salamon (dans le cas faiblement monotone) ont montré le résultat suivant.

Théorème 6.7. — *On a un isomorphisme canonique* :

$$FH^k(V,\omega) \;\cong\; \bigoplus_{\ell\equiv k \bmod 2N} H^{n+\ell}(V,\Lambda_\omega). \tag{6.2.12}$$

La démonstration repose sur le fait que $FH^k(V,\omega)$ est indépendant de (H,J) et sur l'étude du cas où H ne dépend pas du temps. On peut alors montrer que, si H est une fonction suffisamment petite sur V, les seules orbites périodiques de X_H sont les lacets constants d'image un point critique de H.

Le second point important est le fait que les solutions $u(s,t)$ de l'équation (6.1.5), $s\in\mathbb{R}$, $t\in S^1$, isolées modulo la translation du temps, avec

$$\lim_{s\to-\infty} u(s,t)=c_x,\qquad \lim_{s\to+\infty} u(s,t)=c_y$$

où c_x,c_y sont les lacets constants d'image les points critiques x,y de H, sont indépendantes de t, et donc s'identifient à des trajectoires du gradient JX_H de H entre les points critiques x et y.

Pour conclure, il faut comparer l'indice de Conley-Zehnder de $\tilde\phi_x$, où x est un point critique de H et $\tilde\phi_x : D^2\to V$ est l'application constante $\tilde\phi_x(z)=x$, et l'indice de Morse de H au point x.

On a la relation suivante, montrée par Salamon et Zehnder :

$$\mu(\tilde\phi_x,H)=\operatorname{ind}_H(x)-n \qquad (\dim V=2n). \tag{6.2.13}$$

Il résulte de ce qui précède que si (C^*,∂) et (M^*,∂) sont les complexes de Floer de $\mathcal{A}_H$ et de Thom-Smale de H respectivement, on a un isomorphisme naturel de complexes

$$C^k \;\cong\; \bigoplus_{j\equiv k \bmod 2N} M^{j+n}\otimes\Lambda_\omega\,. \tag{6.2.14}$$

Ce qui fournit l'isomorphisme (6.2.12).

Remarque 6.8. — Givental et Kim [93] proposent d'obtenir cet isomorphisme en considérant le cas où $H=0$. Dans ce cas, l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}_H$ est constitué d'une infinité de copies de de la variété V, les lacets constants étant des orbites périodiques de $X_H=0$. Ils proposent alors d'étendre la théorie de Floer par analogie avec l'extension de Bott de la théorie de Morse, en prenant comme cycles de l'homologie de Floer les cycles C_A, où $A\subset V$ représente un élément de $H_*(V,\mathbb{Z})$, définis par

$$C_A=\Big\{u(t),\ t\in S^1\,;\ u(t)=u(s_0,t)\\ \text{où } u(s,t) \text{ satisfait (6.1.5) avec } H=0 \text{ et}\\ \lim_{s\to-\infty} u(s,t) \text{ est un lacet constant d'image dans } A\Big\}.$$

Ils affirment alors que la différentielle nulle sur l'espace engendré par ces cycles fournit alors la définition correcte de l'homologie de Floer. Cette approche a été justifiée rigoureusement par Piunikhin, Salamon et Schwarz [96]. Un point intéressant dans cette approche est le fait que les trajectoires $u(s,t)$ utilisées ci-dessus sont simplement des disques pseudoholomorphes dans V rencontrant les cycles A de V en 0.

6.3. Cohomologie quantique et cohomologie de Floer

Cette section a pour but d'une part de compléter le chapitre 5 en montrant que le produit quantique peut être défini formellement à condition d'introduire l'anneau de coefficients adéquat, et d'autre part de montrer que ce produit peut s'interpréter comme un produit naturel sur la cohomologie de Floer.

Elle ne sera pas utilisée dans la suite du chapitre.

6.3.1. Anneau de Novikov et produit quantique

On suit ici [81]. Au paragraphe 5.5, on a défini un produit «$\bullet_\omega$» sur la cohomologie d'une variété faiblement monotone, sous l'hypothèse de convergence des séries considérées, par la formule :

$$\langle \alpha \bullet_\omega \beta, \gamma \rangle = \sum_{A \in H_2(V,\mathbb{Z})} \mathrm{e}^{-\omega(A)} \Phi_A(\alpha,\beta,\gamma). \tag{6.3.15}$$

Notons que par définition, $\Phi_A(\alpha,\beta,\gamma)$ ne peut être différent de zéro que si

$$A \in \mathrm{Im}(\pi_2 \to H_2) \quad \text{et} \quad \deg\alpha + \deg\beta + \deg\gamma = 2\big(n + c_1(A)\big).$$

D'autre part, par compacité (voir [76]), on a : pour tout $c > 0$ réel, il existe un nombre fini de classes $A \in H_2(V,\mathbb{Z})$ telles que $\omega(A) < c$ et $\Phi_A(\alpha,\beta,\gamma) \neq 0$ pour au moins un triplet (α,β,γ) d'éléments de V.

Soit Λ'_ω l'anneau de Novikov construit comme au § 6.1.2 sur le groupe

$$\Gamma' = \pi_2(V)/\operatorname{Ker} c_1 \cap \operatorname{Ker}\omega \quad \text{avec } R = \mathbb{Q}.$$

L'anneau Λ'_ω s'identifie à l'anneau des séries formelles $\sum_{A\in\Gamma'} \lambda_A \mathrm{e}^A$ avec $\lambda_A \in \mathbb{Q}$, satisfaisant la condition : pour tout $c > 0$ réel, il existe un nombre fini de classes $A \in \Gamma'$ telles que $\omega(A) < c$ et $\lambda_A \neq 0$, muni de la multiplication

$$(\lambda \cdot \lambda')_A = \sum_{B+C=A} \lambda_B \lambda'_C \qquad \text{(la somme est finie)}.$$

L'anneau Λ'_ω est gradué par $\deg(\mathrm{e}^A) = 2c_1(A)$. Considérons $H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega$ muni de la graduation $\deg(\alpha \otimes \mathrm{e}^A) = \deg\alpha + 2c_1(A)$; notons qu'on a

$$\big(H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega\big)^k \cong \bigoplus_{\ell \equiv k \bmod 2N} H^\ell(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda_\omega \cong FH^{k-n}(V,\omega). \tag{6.3.16}$$

où le dernier isomorphisme est celui de (6.2.12). On a maintenant la version formelle suivante du produit quantique qui n'avait été défini dans le chapitre précédent que moyennant des hypothèses de convergence :

Proposition 6.9. — *La formule*

$$\langle \alpha \bullet \beta, \gamma \rangle = \sum_{A \in \operatorname{Im}(\pi_2(V) \to H_2(V))} \mathrm{e}^{\overline{A}}\, \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma) \tag{6.3.17}$$

où $\overline{A}$ est la projection de A dans Γ', définit un produit gradué associatif sur $H^*(V, \mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega$, si on définit pour $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(V, \mathbb{Q})$:

$$\Phi_A\big(\alpha \otimes \mathrm{e}^{A_1}, \beta \otimes \mathrm{e}^{B_1}, \gamma \otimes \mathrm{e}^{C_1}\big) = \mathrm{e}^{A_1 + B_1 + C_1} \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\langle \alpha \otimes \mathrm{e}^{A}, \beta \otimes \mathrm{e}^{B} \rangle = \mathrm{e}^{A+B} \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Démonstration. — La formule (6.3.17) équivaut à

$$\alpha \otimes \mathrm{e}^{A_1} \bullet \beta \otimes \mathrm{e}^{B_1} = \sum_{A, \sigma, \tau} g^{\sigma\tau} \Phi_A(\alpha, \beta, e_\sigma) e_\tau \otimes \mathrm{e}^{\overline{A} + A_1 + B_1} \tag{6.3.18}$$

où e_σ est une base de $H^*(V, \mathbb{Q})$ et $g^{\sigma\tau}$ est l'inverse de la matrice d'intersection. Par compacité, le terme de droite contient un nombre fini de coefficients

$$\sum_{A, \sigma} g^{\sigma\tau} \Phi_A(\alpha, \beta, e_\sigma)$$

non nuls pour τ fixé et $\omega(\overline{A} + A_1 + A_2) < c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, de sorte que ce produit est bien dans $H^*(V, \mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega$. Finalement, en supposant que α, β, e_σ sont homogènes on a

$$\Phi_A(\alpha, \beta, e_\sigma) = 0 \quad \text{si} \quad \deg \alpha + \deg \beta + \deg e_\sigma \neq 2\big(n + c_1(A)\big)$$

et on a donc

$$\deg\big(\alpha \otimes \mathrm{e}^{A_1} \bullet \beta \otimes \mathrm{e}^{B_1}\big) = \deg \alpha + \deg \beta + 2\big(c_1(A_1) + c_1(B_1)\big)$$

puisque pour $\Phi_A(\alpha, \beta, e_\sigma) \neq 0$ et $g^{\sigma\tau} \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} \deg e_\tau = 2n - \deg \sigma, \\ \deg e_\tau \otimes \mathrm{e}^{A + A_1 + B_1} = 2\big(c_1(A) + c_1(A_1) + c_1(B_1)\big) + \deg e_\tau, \\ \deg e_\sigma = 2\big(n + c_1(A)\big) - \deg \alpha - \deg \beta. \end{cases}$$

La preuve de l'associativité se fait comme au § 5.5.

6.3.2. Produit sur la cohomologie de Floer

On considère trois fonctions H_i où $i = 1, 2, 3$ sur $S^1 \times V$ et une structure pseudo-complexe J sur V, permettant de construire les complexes de Floer (C_i^k, ∂) comme au § 6.1.3. Pour chaque i, on choisit une fonction $H'_i(s, t, v)$ sur $\mathbb{R} \times S^1 \times V$, telle que

$$H'_i(s, t, v) = \begin{cases} H_i(t, v) & \text{pour } |s| \geq 1, \\ H'_i(s, t, v) = 0 & \text{pour } |s| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit Σ la sphère S^2 privée de trois disques disjoints D_i. On choisit des paramétrages conformes de voisinages U_i de ∂D_i dans Σ :

$$\begin{cases} \eta_i :]-\infty, 0[\times S^1 \cong U_i \quad \text{pour } i = 1,2, \\ \eta_3 :]0, +\infty[\times S^1 \cong U_3 \,, \end{cases} \tag{6.3.19}$$

avec $\lim_{s\to-\infty} \eta_i(s,t) \in \partial D_i$ pour $i = 1,2$ et $\lim_{s\to+\infty} \eta_3(s,t) \in \partial D_3$.

Soient $\tilde{\phi}_i$ pour $i = 1,2,3$ des points critiques de $\mathcal{A}_{H_i}$ dans $\widetilde{LV}$ et ϕ_i les orbites périodiques correspondantes de X_{H_i} ; on considère l'espace $\mathcal{M}(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3)$ des solutions $u : \Sigma \to V$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial s}(s,t) = -J\,\dfrac{\partial u_i}{\partial t}(s,t) + JX_{H'_i(s,t)}\big(u(s,t)\big), \\ u_{|\Sigma - \cup U_i} \text{ pseudoholomorphe,} \end{cases} \tag{6.3.20}$$

où $u_i = u \circ \eta_i$ et donc $s \leq 0$, $t \in S^1$ pour $i = 1,2$ et $s \geq 0$, $t \in S^1$ pour $i = 3$, satisfaisant :

$$\begin{cases} \lim_{s\to-\infty} u_i(s,t) = \phi_i \text{ pour } i = 1,2, \quad \lim_{s\to+\infty} u_3(s,t) = \phi_3\,, \\ \tilde{\phi}_3 = u \,\#\, \big(\tilde{\phi}_1 \sqcup \tilde{\phi}_2\big) \in \widetilde{LV}. \end{cases} \tag{6.3.21}$$

Comme $H'_i(s,t,v)$ est nulle pour $|s| \leq \frac{1}{2}$, la fonction u_i est pseudoholomorphe pour $|s| \leq \frac{1}{2}$; d'autre part, comme $H'_i(s,t,v) = H_i(t,v)$ pour $|s| \geq 1$, on a bien

$$\begin{cases} \lim_{s\to-\infty} u_i(s,t) \text{ est une orbite périodique de } X_{H_i} \text{ pour } i = 1,2, \\ \lim_{s\to+\infty} u_3(s,t) \text{ est une orbite périodique de } X_{H_3}, \end{cases}$$

de sorte que ces équations sont compatibles.

On peut montrer que pour un choix générique de H'_i et J, l'espace $\mathcal{M}(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3)$ est de dimension $\mu(\tilde{\phi}_3, H_3) - \mu(\tilde{\phi}_1, H_1) - \mu(\tilde{\phi}_2, H_2) - n$. Lorsque

$$\mu(\tilde{\phi}_3, H_3) - \mu(\tilde{\phi}_1, H_1) - \mu(\tilde{\phi}_2, H_2) - n = 0,$$

on peut compter ces solutions avec un signe adéquat, ce qui permet de construire une série d'applications

$$\begin{cases} \nu_{k,\ell} : C^k_{H_1} \times C^\ell_{H_2} \longrightarrow C^{k+\ell+n}_{H_3}\,, \\ \nu_{k,\ell}\big(\langle\tilde{\phi}\rangle, \langle\widetilde{\psi}\rangle\big) = \sum_{\widetilde{\chi}} n(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\chi}) \langle\widetilde{\chi}\rangle \end{cases} \tag{6.3.22}$$

où l'on montre que le terme de droite est bien un élément de $C^{k+\ell+n}_{H_3}$ par un argument de compacité.

On peut montrer que les applications $\nu_{k,\ell}$ commutent avec les différentielles, et permettent donc de construire un produit $\eta = \bigoplus \eta_{k,\ell}$

$$\eta_{k,\ell} : FH^k(V,\omega) \otimes FH^\ell(V,\omega) \longrightarrow FH^{k+\ell+n}(V,\omega). \tag{6.3.23}$$

D'après l'isomorphisme (6.3.16), η fournit un produit gradué sur $H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega$

$$\eta : (H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega)^{k+n} \otimes (H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega)^{\ell+n} \longrightarrow (H^*(V,\mathbb{Q}) \otimes \Lambda'_\omega)^{k+\ell+2n}. \tag{6.3.24}$$

Le théorème de comparaison suivant a été établi par Piunikhin, Salamon et Schwarz dans [96].

Théorème 6.10. — *Le produit η coïncide avec le produit quantique* (6.3.17).

Remarque 6.11. — Si on admet l'approche de Givental et Kim, qui consiste à poser $H_i = 0$, l'identité des deux produits est heuristiquement claire puisque les cycles qu'ils utilisent pour construire l'homologie de Floer sont de la forme :

$$\begin{aligned} C_{A_\alpha} = \big\{ u(t)_\alpha,\ t \in S^1\ ;\ \exists\, \tilde{u} : D^2 \to V \text{ pseudoholomorphe} \\ \text{avec } u(t) = \tilde{u}_{|\partial D^2},\ u(0) \in A \text{ et } u(t)_\alpha = \alpha \mathbin{\#} \tilde{u} \text{ dans } \widetilde{LV} \big\}. \end{aligned}$$

Ici $A \subset V$ est un cycle et $\alpha \in \Gamma'$ permet d'indexer les copies de V contenues dans $\widetilde{LV}$. Mais le produit sur la cohomologie de Floer est obtenu (par définition si l'on admet la possibilité de poser $H'_i = 0$) en comptant les triplets $(u(t)_\alpha, v(t)_\beta, w(t)_\gamma)$ appartenant à $C_{A_\alpha} \times C_{B_\beta} \times C_{C_\gamma}$ tels qu'il existe une courbe pseudoholomorphe $\phi : \Sigma \to V$ telle que

$$\phi_{|\partial D_1} = u, \quad \phi_{|\partial D_2} = v, \quad \phi_{|\partial D_3} = w, \quad \phi \mathbin{\#} \tilde{u} \sqcup \tilde{v} = \widetilde{w} \quad \text{dans } \widetilde{LV}.$$

Or une telle courbe, complétée par les disques $\tilde{u}, \tilde{v}, \widetilde{w}$, fournit exactement une courbe pseudoholomorphe $\mathbb{P}^1 \to V$ de classe a satisfaisant la condition

$$\omega(a) = \omega(\alpha) + \omega(\beta) - \omega(\gamma)$$

et rencontrant les cycles A, B, C en des points fixés de $\mathbb{P}^1$, de sorte qu'on doit trouver comme coefficient l'invariant de (5.5.39) :

$$\sum_{\bar{a} = \alpha + \beta - \gamma} \Phi_a\big([A], [B], [C]\big).$$

6.4. Cohomologie équivariante

La cohomologie équivariante de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ muni d'une action hamiltonienne de S^1 est l'outil principal utilisé par Givental dans [91]. On suit ici [87] et [88].

Si G est un groupe de Lie, on peut construire un espace classifiant BG pour les G-fibrés principaux. Le type d'homotopie de BG est caractérisé par la propriété : il existe un fibré principal $EG \to BG$ de groupe G, dont l'espace total EG est contractile. On a le résultat suivant.

Proposition 6.12. — *Si $E \to V$ est un fibré principal de groupe G, il existe une application continue $\phi : V \to BG$ définie à homotopie près, telle que $E \cong \phi^* EG$.*

Exemple. — Soient $G = S^1$ et

$$S^\infty = \varinjlim_n S^{2n+1}$$

où $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est la sphère d'équation $\sum_i |z_i|^2 = 1$. Il est facile de montrer que S^∞ est contractile ; d'autre part les actions compatibles de $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ sur S^{2n+1}, par multiplication des coordonnées, fournissent une action libre de S^1 sur S^∞ dont le quotient est

$$\mathbb{P}^\infty = \varinjlim_n \mathbb{P}^n.$$

Donc $\mathbb{P}^\infty$ est un modèle pour BS^1. En particulier, on a $H^*(BS^1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[h]$.

Soit V une variété munie d'une action de G ; alors V est un rétracte de $V \times EG$ sur lequel G agit diagonalement, de façon libre. On pose :

$$V_G = (V \times EG)/G \quad \text{et} \quad H^*_G(V) = H^*(V_G).$$

On a une application naturelle $\pi : V_G \to BG$, obtenue par passage au quotient de la projection $\mathrm{pr}_2 : V \times EG \to EG$, qui munit la cohomologie équivariante $H^*_G(V)$ d'une structure de $H^*(BG)$-module.

Exemple.

Si l'action de G est triviale, on a $V_G = V \times BG$, d'où $H^*_G(V) = H^*(V) \otimes H^*(BG)$. À l'opposé, si l'action de G sur V est libre, V_G est un fibré de fibre EG au-dessus de V/G et donc $H^*_G(V) = H^*(V/G)$, l'action de $H^*(BG)$ étant triviale, c'est-à-dire nulle sur $H^k(BG)$ pour $k > 0$.

6.4.1. Cohomologie de de Rham équivariante

On se contentera de décrire le cas où $G = S^1$, le cas général étant traité dans [87]. Comme BS^1 a une approximation par des variétés de dimension finie, on peut parler de forme différentielle sur BS^1. Le générateur h de $H^*(BS^1)$ correspondant à la classe d'Euler du fibré $ES^1 \to BS^1$ peut être représenté par une forme différentielle en choisissant une connexion θ sur le fibré principal $ES^1 \to BS^1$ de groupe S^1 (que l'on peut identifier à une 1-forme non-nulle sur ES^1 invariante sous l'action de S^1). La forme de courbure $\mathrm{d}\theta$ est une 2-forme qui provient d'une 2-forme fermée u sur BS^1 qui est un représentant de la classe h.

Soit maintenant V une variété munie d'une action de S^1 ; soit X le champ de vecteurs correspondant sur V et soit $\Omega^*_X(V)$ l'ensemble des formes différentielles sur V annulées par la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$.

On considère $\Omega^*_X(V)[h]$ muni de la graduation

$$\deg_X \alpha = \deg \alpha, \quad \alpha \in \Omega^*_X(V), \quad \deg_X h = 2$$

et de la différentielle d_X

$$\mathrm{d}_X(\alpha) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{int}_X(\alpha) h, \quad \mathrm{d}_X h = 0. \tag{6.4.25}$$

On a alors (*cf.* [87]) :

Théorème 6.13. — *On a un isomorphisme naturel* :

$$\text{(6.4.26)}\quad \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}_X : \Omega^k_X(V)[h] \to \Omega^{k+1}_X(V)[h]\big)/\operatorname{Im}\big(\mathrm{d}_X : \Omega^{k-1}_X(V)[h] \to \Omega^k_X(V)[h]\big) \cong H^k_{S^1}(V,\mathbb{R}).$$

Concrètement, soit $\omega = \alpha + h\beta \in \Omega^*_X(V)[h]$; la condition $\mathrm{d}_X(\omega) = 0$ équivaut à

$$\text{(6.4.27)}\qquad \mathrm{d}\alpha = 0, \quad \operatorname{int}_X(\beta) = 0, \quad \mathrm{d}\beta = -\operatorname{int}_X(\alpha).$$

Considérons alors sur $V \times ES^1$ la forme différentielle

$$\widetilde{\omega} = \mathrm{pr}_1^*\,\alpha - \mathrm{d}(\mathrm{pr}_2^*\,\theta \wedge \mathrm{pr}_1^*\,\beta).$$

Celle-ci elle est évidemment fermée et satisfait de plus

$$\operatorname{int}_{\widetilde{X}}(\widetilde{\omega}) = -\,\mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{d}\beta - \operatorname{int}_{\widetilde{X}}(\mathrm{pr}_2^*(\tilde{u}) \wedge \mathrm{pr}_1^*(\beta) - \mathrm{pr}_2^*\,\theta \wedge \mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{d}\beta),$$

où $\tilde{u} = \mathrm{d}\theta$ est le *pull-back* sur ES^1 de la forme u sur BS^1 et $\widetilde{X}$ est le champ associé à l'action diagonale de S^1 sur $V \times ES^1$. Or le terme de droite est nul car $\mathcal{L}_X\beta = 0, \operatorname{int}_X\beta = 0$ et $\operatorname{int}_{\widetilde{X}}(\tilde{u}) = 0$, ce qui entraîne :

$$\operatorname{int}_{\widetilde{X}}(\mathrm{pr}_2^*(\tilde{u}) \wedge \mathrm{pr}_1^*(\beta) - \mathrm{pr}_2^*\,\theta \wedge \mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{d}\beta) = -\,\mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{d}\beta.$$

Cette forme descend donc en une forme fermée sur V_G. On peut faire un calcul semblable pour les polynômes de n'importe quel degré en h, ce qui montre comment construire l'isomorphisme (6.4.26).

Dans la suite de ce paragraphe, on expose quelques faits relatifs à la cohomologie S^1-équivariante de l'espace projectif complexe, où S^1 agit $\mathbb{C}$-linéairement. Ces faits seront appliqués dans les sections suivantes à l'espace des polynômes de Laurent $P(z)$ à coefficients dans $\mathbb{C}^{n+1}$, muni de l'action $\lambda \cdot P(z) = P(\lambda z)$ pour $\lambda \in S^1$.

6.4.2. Cas d'une action hamiltonienne

Soit (V,ω) une variété symplectique, munie d'une action hamiltonienne de S^1 : $\operatorname{int}_X(\omega) = \mathrm{d}H$. On a alors :

Lemme 6.14. — *Il existe une classe $p \in H^2_{S^1}(V)$ dont l'image dans $H^2(V)$ par la restriction naturelle est égale à la classe de cohomologie de ω.*

Démonstration. — On utilise la description donnée dans 6.4.1 de $H^2_{S^1}(V)$; on a

$$\mathrm{d}\omega = 0, \quad \mathcal{L}_X\omega = 0, \qquad \mathcal{L}_X H = 0, \quad \mathrm{d}H = \operatorname{int}_X(\omega),$$

de sorte que $(\omega - Hh)$ est dans $\Omega^2_X(V)[h]$ et est d_X-fermée. Elle fournit donc un élément p de $H^2_{S^1}(V)$ représenté par la forme $\mathrm{pr}_1^*(\omega) + \mathrm{d}(\mathrm{pr}_1^*\,H\,\mathrm{pr}_2^*\,\theta)$ qu'on peut voir comme une forme sur V_G. Cette forme a clairement pour restriction ω sur chaque fibre de l'application $\pi : V_{S^1} \to B_{S^1}$. $\square$

6.4.3. Cas de l'espace projectif

Pour $i_0, \dots, i_N \in \mathbb{Z}$, on considère l'action de S^1 sur $\mathbb{P}^N$ définie par

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_N) = (\lambda^{i_0} x_0, \dots, \lambda^{i_N} x_N). \tag{6.4.28}$$

Cette action préserve la forme symplectique

$$\omega = \frac{1}{2} i \sum_j \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}\bar{x}_j, \quad \sum_j |x_j|^2 = 1$$

et la fonction hamiltonienne correspondante est :

$$H = \sum_k i_k |x_k|^2, \quad \sum_j |x_j|^2 = 1.$$

D'après la preuve du lemme 6.14, on a donc sur $\mathbb{P}^N_{S^1}$ une forme

$$\widetilde{\omega} = \mathrm{pr}_1^* \,\omega + \mathrm{d}(\mathrm{pr}_1^* \,H \,\mathrm{pr}_2^* \,\theta)$$

dont la restriction à chaque fibre (isomorphe à $\mathbb{P}^N$) de $\pi : \mathbb{P}^N_{S^1} \to B_{S^1}$ engendre la cohomologie de $\mathbb{P}^N$; comme plus haut, on notera p sa classe dans $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})$.

Lemme 6.15. — *Soit $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})_0$ le localisé en 0 du $\mathbb{C}[h]$-module $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})$; on a alors un isomorphisme naturel*

$$H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})_0 \cong \mathbb{C}[p, h, h^{-1}]/(p - i_0 h) \cdots (p - i_N h). \tag{6.4.29}$$

Démonstration. — Il résulte du théorème de Leray-Hirsch, et du fait que la restriction de p engendre la cohomologie des fibres de l'application π, que l'on a une surjection $f : \mathbb{C}[p, h] \to H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})$. Il suffit donc de déterminer le noyau de la localisée de f.

Notons maintenant que si $\mathbb{P}_k$ est l'ensemble de points fixes de l'action (6.4.28) constitué des points $(x_0, \dots, x_N)$ tels que $x_j = 0$ pour $i_j \neq k$ et si n_k est la dimension de $\mathbb{P}_k$, H vaut k sur $\mathbb{P}_k$ et on a donc la relation $\widetilde{\omega} - kh_{|\mathbb{P}_k} = \omega_{|\mathbb{P}_k}$ dans $H^*_{S^1}(\mathbb{P}_k) \cong H^*(\mathbb{P}_k)[h]$ puisque $\mathrm{d}\theta$ descend en une forme de classe h dans $H^*(BS^1)$. On en déduit que

$$\prod_{\{k \mid \mathbb{P}_k \neq \emptyset\}} (p - kh)^{n_k + 1}$$

a une restriction nulle dans la cohomologie du lieu des points fixes de l'action (6.4.28). D'après le théorème de localisation [88], on sait que que l'application de restriction

$$j^* : H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})_0 \longrightarrow \bigoplus H^*_{S^1}(\mathbb{P}_k, \mathbb{C})_0$$

est injective (en fait un isomorphisme) ; on en déduit que le noyau de l'application

$$f : \mathbb{C}[p, h, h^{-1}] \longrightarrow H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})_0$$

est engendré par

$$\prod_{\{k \mid \mathbb{P}_k \neq \emptyset\}} (p - kh)^{n_k + 1}$$

ou encore que

$$H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})_0 \cong \mathbb{C}[p, h, h^{-1}]/(p - i_0 h) \cdots (p - i_N h). \qquad \square$$

6.4.4. Intégration sur la fibre

Soit V une variété compacte munie d'une action de S^1 ; l'application $\pi : V_{S^1} \to BS^1$ a pour fibre V et on a donc une application d'intégration sur la fibre

$$\pi_* : H^*_{S^1}(V) \longrightarrow H^{*-\dim V}(BS^1)$$

qui est un morphisme de $H^*(BS^1)$-modules, et qui peut donc être localisée. Soient V_f le lieu des points fixes de l'action de S^1 et $j : V_f \hookrightarrow V$ l'inclusion. L'isomorphisme de localisation

$$H^*_{S^1}(V, \mathbb{C})_0 \overset{j^*}{\cong} H^*_{S^1}(V_f, \mathbb{C})_0 \cong H^*(V_f) \otimes \mathbb{C}[h, h^{-1}] \tag{6.4.30}$$

permet d'exprimer commodément l'application π_*.

Pour chaque composante V_f^α de V_f de codimension m_α, soit $j_\alpha = j_{|V_f^\alpha}$. On a alors le morphisme de Gysin

$$j_{\alpha *} : H^*_{S^1}(V_f^\alpha) \longrightarrow H^{*+m_\alpha}_{S^1}(V)$$

obtenu comme le composé

$$H^*(V_f^\alpha \times BS^1) \xrightarrow[\sim]{\text{Thom}} H^{*+m_\alpha}(V_{S^1}, V_{S^1} - V_f^\alpha \times BS^1) \longrightarrow H^{*+m_\alpha}(V_{S^1}) \tag{6.4.31}$$

Il vérifie la propriété suivante. Soit

$$\pi_\alpha = \pi_{|V_f^\alpha \times BS^1}$$

(c'est la seconde projection) ; alors

$$\pi_{\alpha *} = \pi_* \circ j_{\alpha *}$$

et de plus :

$${j_\alpha}^* \circ j_{\alpha *} = \begin{cases} \text{cup-produit avec la classe d'Euler équivariante } e_\alpha \in H^*(V_f^\alpha \times BS^1) \\ \text{du fibré normal } N_\alpha \text{ de } V_f^\alpha \text{ dans } V\text{, muni de l'action de } S^1 \text{ donnée} \\ \text{par la différentielle } \lambda_* \text{ de } \lambda \in S^1 \subset \mathrm{Diff}(V). \end{cases}$$

Cette classe est simplement la classe d'Euler usuelle du fibré $\widetilde{N}_\alpha$ sur $V_f^\alpha \times BS^1$, quotient du fibré $\mathrm{pr}_1^*(N_\alpha)$ sur $V_f^\alpha \times ES^1$ par l'action de S^1

$$\lambda \cdot (n, v, x) = \big(\lambda_*(v)(n), v, \lambda \cdot x\big).$$

Or la localisation $e_\alpha \in H^*_{S^1}(V_f^\alpha)_0 = H^*(V_f^\alpha) \otimes \mathbb{C}[h, h^{-1}]$ est inversible, du fait que son terme de degré 0 en $H^*(V_f^\alpha)$ est la classe d'Euler $e \in H^*(BS^1)$ du fibré $\widetilde{N}_{\alpha\,|\,v \times BS^1}$, pour tout $v \in V_f^\alpha$. Comme l'action de S^1 sur $N_{\alpha,v}$ est sans point fixe en dehors de 0, $N_{\alpha,v}$ se scinde (par exemple en utilisant une métrique S^1-invariante sur V) en une somme directe d'espaces L^i_α de dimension 2 munis d'une structure complexe, sur lesquels $\lambda_*(v)$ s'identifie à la multiplication par λ^{k_i} avec $k_i \neq 0$. La classe d'Euler du fibré $\widetilde{L}^i_\alpha$ correspondant sur BS^1 est alors égale à $k_i h$ et on a donc

$$e = \prod_i k_i h^{m_\alpha/2}$$

qui est inversible dans $\mathbb{C}[h, h^{-1}]$. Cela entraîne immédiatement l'inversibilité de e_α.

Remarque 6.16. — Ceci montre que l'application localisée j^* a un inverse à droite $\bigoplus_\alpha j_{\alpha *} \circ (1/e_\alpha \wedge)$ et donc que la flèche de localisation (6.4.30) est surjective.

Ce qui précède montre la formule de Bott :

$$\pi_* \eta = \sum_\alpha \int_{V_f^\alpha} j_\alpha^* \eta / e_\alpha \in \mathbb{C}[h, h^{-1}] \quad \text{pour } \eta \in H^*_{S^1}(V), \tag{6.4.32}$$

où l'on a identifié $\pi_{\alpha *} : H^*(V_f^\alpha) \otimes \mathbb{C}[h, h^{-1}] \to \mathbb{C}[h, h^{-1}]$ à l'intégration usuelle sur V_f^α.

En particulier, dans le cas considéré au § 6.4.3, on a la description suivante de π_* .

Proposition 6.17. — *Avec les notations du* § 6.4.3, *la flèche d'intégration sur la fibre, composée avec l'isomorphisme* (6.4.29) *est donnée par* :

$$\pi_*\big(f(p,h)\big) = \textit{somme des résidus de } f(p,h) \Big/ \prod_\ell (p - i_\ell h)\, \mathrm{d}p. \tag{6.4.33}$$

Démonstration. — Cela résulte en effet de la formule de Bott, les composantes V_f^α étant dans ce cas les espaces $\mathbb{P}_k$ de codimension réelle $2(N - n_k)$, et le fibré normal de $\mathbb{P}_k$ dans $\mathbb{P}^N$ étant isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1) \otimes T^{N-n_k}$, où l'action de S^1 sur le fibré trivial T^{N-n_k} de base $\partial/\partial x_j$ pour $i_j \neq k$ est donnée par :

$$\lambda \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{i_j \neq k} = \Big(\lambda^{k-i_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{i_j \neq k}. \tag{6.4.34}$$

Le fibré $\widetilde{N}_k$ sur $\mathbb{P}^k \times BS^1$ admet donc pour classe d'Euler

$$\prod_{\{j \mid i_j \neq k\}} \big(\omega_{\mid \mathbb{P}_k} + (k - i_j)h\big)$$

et l'on a donc, pour $\eta = f(p,h) \in H^*_{S^1}(\mathbb{P}^N)_0$

$$\pi_*(\eta) = \sum_{\{k \mid \mathbb{P}_k \neq \emptyset\}} \int_{\mathbb{P}_k} j_k^*\big(f(p,h)\big) \Big/ \prod_{\{j \mid i_j \neq k\}} \big(\omega_{\mid \mathbb{P}_k} + (k - i_j)h\big) \tag{6.4.35}$$

où $j_k^*(p - kh) = \omega_{\mid \mathbb{P}_k}$. Mais il est immédiat de vérifier que

$$\int_{\mathbb{P}_k} \frac{j_k^*(f(p,h))}{\prod_{\{j \mid i_j \neq k\}} (\omega_{\mid \mathbb{P}_k} + (k - i_j)h)}$$

est égal au résidu en $p = kh$ de la forme différentielle

$$\frac{f(p,h)}{\prod_\ell (p - i_\ell h)}\, \mathrm{d}p.$$

En effet, ces deux grandeurs sont égales au coefficient de ω^{n_k} dans le développement de $f(p,h)/\prod_\ell (p - i_\ell h)$ en puissances de $\omega = p - kh$. Donc $\pi_*(\eta)$ est la somme des résidus de $f(p,h)/\prod_\ell (p - i_\ell h) dp$. $\square$

6.5. La construction de Givental

6.5.1. Structure de $\mathcal{D}$-module sur la cohomologie équivariante

La construction qu'on va décrire ici est un ingrédient essentiel de [91] : elle explique en quel sens une classe de cohomologie équivariante peut être solution d'une équation différentielle.

Soit (V, ω) une variété symplectique munie d'une action de S^1 localement hamiltonienne. Supposons que la 1-forme fermée $\mathrm{int}_X(\omega)$ soit de classe entière non-divisible : alors S^1 agit sur le revêtement $\widetilde{V} \to V$ de groupe $\mathbb{Z}$ défini par le noyau de l'application $\pi_1(V) \to \mathbb{Z}$, $\ell \mapsto \int_\ell \mathrm{int}_X(\omega)$, puisque $\mathrm{int}_X(\omega)$ est d'intégrale nulle sur les orbites de S^1, et l'action de S^1 sur $\widetilde{V}$ est hamiltonienne. La fonction H sur $\widetilde{V}$ telle que $\mathrm{d}H = \mathrm{int}_X(\omega)$ satisfait $q^*H = H - 1$ où q est l'action du générateur ℓ du groupe du revêtement tel que $\int_\ell \mathrm{int}_X(\omega) = -1$. (On note encore ω la forme symplectique induite sur $\widetilde{V}$.)

Sur $\widetilde{V} \times ES^1$, soit

$$\widetilde{\omega} = \mathrm{pr}_1^* \omega + \mathrm{d}(\mathrm{pr}_1^* H \, \mathrm{pr}_2^* \theta)$$

la forme associée, descendant sur V_{S^1} et fournissant une classe de cohomologie équivariante $p \in H^*_{S^1}(V)$ (*cf.* 6.4.2) ; on a $q^*(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega} - \mathrm{d}(\mathrm{pr}_2^* \theta)$ sur $\widetilde{V} \times ES^1$, d'où l'identité

$$q^*(p) = p - h \in H^*_{S^1}(\widetilde{V}) \tag{6.5.36}$$

puisque $\mathrm{d}\theta$ a pour classe $\pi^* h$ dans $H^*_{S^1}(\widetilde{V})$. D'autre part, on a évidemment $q^* h = h$; si on voit q^* et p comme des opérateurs agissant sur $H^*_{S^1}(\widetilde{V})$ (le second par cup-produit avec la classe p), on a donc :

$$\forall \alpha \in H^*_{S^1}(\widetilde{V}), \quad (p \circ q^* - q^* \circ p)(\alpha) = hq^* \alpha, \tag{6.5.37}$$

c'est-à-dire la relation de commutation

$$p \circ q^* - q^* \circ p = hq^*$$

dans l'anneau des endomorphismes de $H^*_{S^1}(\widetilde{V})$. Notons que cette relation est exactement la relation entre les opérateurs $p' = h\partial/\partial t$, $q' = \mathrm{e}^t \times$ agissant sur les fonctions de t. (Ici, h est un scalaire ou une variable formelle.) Soit $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur le cercle, engendré par p' et q' ; on a construit une structure de $\mathcal{D}$-module sur $H^*_{S^1}(\widetilde{V})$.

6.5.2. Application à l'espace des lacets

Soient (V, ω) une variété symplectique et LV l'espace des lacets contractiles dans X. Supposons pour simplifier que ω est de classe entière et que l'application $\omega : \pi_2(V) \to \mathbb{Z}$ est surjective. On a alors un revêtement $\widetilde{LV} \to LV$ de groupe $\mathbb{Z}$ défini comme au § 6.1 et on peut définir sur $\widetilde{LV}$ l'action libre (*cf.* (6.1.2)) :

$$\mathcal{A}(\tilde{\phi}) = \int_{D^2} \tilde{\phi}^* \omega \tag{6.5.38}$$

L'espace LV (resp. $\widetilde{LV}$) est muni d'une structure symplectique

$$\omega_{LV}(\xi(t),\chi(t)) = \int_{S^1} \omega(\xi(t),\chi(t))dt$$

pour $\phi \in LV$ et des vecteurs tangents $\xi(t),\chi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\phi^* T_V)$ à LV en ϕ. Le cercle S^1 opère sur LV (resp. $\widetilde{LV}$) par la rotation des lacets $\lambda \cdot \phi(z) = \phi(\lambda z)$. On a

$$\mathrm{d}\mathcal{A}(\xi) = -\int_{S^1} \omega\big(\phi'(t),\xi(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

de sorte que $\mathcal{A}$ est au signe près la fonction hamiltonienne correspondant à l'action de S^1 sur $\widetilde{LV}$. Soit

$$q(\tilde{\phi}) = \alpha \# \tilde{\phi}$$

l'action du générateur α du groupe du revêtement $\pi_2/\operatorname{Ker}(\omega) \cong \mathbb{Z}$ tel que $\int_\alpha \omega = 1$. On a

$$q^*\mathcal{A} = \mathcal{A} + 1,$$

de sorte qu'on dispose des données décrites en 6.5.1.

Givental désire appliquer la construction d'une structure de $\mathcal{D}$-module (*cf.* 6.5.1) non pas à la cohomologie S^1-équivariante de $\widetilde{LV}$ mais à la « cohomologie de Floer S^1-équivariante » de $\widetilde{LV}$, qui malheureusement n'est pas définie. Il pose, en combinant l'isomorphisme (6.3.16) et l'isomorphisme de localisation (6.4.30)

$$FH^*_{S^1}(\widetilde{LV},\mathbb{C}) = H^*(V) \otimes \mathbb{C}[h,h^{-1}] \otimes \Lambda_q \tag{6.5.39}$$

où Λ_q est l'anneau des séries de Laurent formelles $\sum_{k\geq N} a_k q^k$, où $a_k \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{Z}$, (les points fixes de l'action de S^1 sur $\widetilde{LV}$ sont les différentes copies de V contenues dans $\widetilde{LV}$), et suppose que $FH^*_{S^1}(\widetilde{LV},\mathbb{C})$ peut être calculé à l'aide des cycles C_{A_α} considérés dans la remarque 6.8. Il n'utilise ceci que comme argument heuristique aidant à interpréter les calculs qu'il mène.

6.5.3. Approximation de $\widetilde{LP^n}$

On étudie maintenant le cas où V est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ muni de sa forme ω (*cf.* 6.4.3). Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, considérons l'espace projectif des polynômes de Laurent

$$M_k = \Big\{ \sum_{-k\leq \ell \leq k} \phi_\ell z^\ell\,;\ \phi_\ell \in \mathbb{C}^{n+1},\ \phi_\ell \text{ non tous nuls}\Big\}\Big/\mathbb{C}^*.$$

Soit :

$$M = \varinjlim_k M_k\,.$$

Alors M admet une action de $\mathbb{Z}$ sans point fixe :

$$q\cdot\Big(\sum_{-k\leq\ell\leq k}\phi_\ell z^\ell\Big)=\sum_{-k\leq\ell\leq k}\phi_\ell z^{\ell+1}.$$

Le quotient de M par $\mathbb{Z}$ paramètre des lacets dans $\mathbb{P}^n$, qui sont denses dans $L\mathbb{P}^n$ de sorte que M est une approximation de $\widetilde{L\mathbb{P}^n}$. D'autre part, M est muni de l'action de S^1 donnée par la rotation des lacets comme au § 6.5.2.

Givental travaille alors essentiellement dans la cohomologie équivariante de M_k : l'action de S^1 sur M_k est décrite dans les coordonnées $x_i^\ell=\phi_{\ell,i}$ pour $0\leq i\leq n$ et $-k\leq\ell\leq k$, où les x_i sont des coordonnées pour $\mathbb{P}^n$, par

$$\lambda\cdot(x_i^\ell)=(\lambda^\ell x_i^\ell).$$

D'après 6.4.3, on a donc :

$$H^*_{S^1}(M_k,\mathbb{C})_0=\mathbb{C}[p,h,h^{-1}]\Big/\prod_{-k\leq\ell\leq k}(p+\ell h)^{n+1}. \tag{6.5.40}$$

Notons que la classe p sur M_k se restreint à la classe p sur M_{k-1} et est la classe d'Euler équivariante du fibré de rang 1 équivariant $\mathcal{L}$ dual du fibré tautologique de fibre au point (x_i^ℓ) la droite engendrée par (x_i^ℓ), muni de l'action de S^1 donnée par

$$\lambda\cdot\big((x_i^\ell),(\alpha x_i^\ell)\big)=\big((\lambda^\ell x_i^\ell),(\alpha\lambda^\ell x_i^\ell)\big).$$

L'application $q: M_k\to M_{k+1}$ satisfait

$$q^*\mathcal{L}\cong\mathcal{L}\otimes\mathcal{T}_1,$$

où $\mathcal{T}_i$ est le fibré trivial de rang 1 sur M_k muni de l'action suivante de S^1 :

$$\lambda\cdot(x,\alpha)=(\lambda\cdot x,\lambda^{-i}\alpha).$$

La classe d'Euler équivariante de $\mathcal{T}_1$ est égale à $-h$; on a donc :

$$q^*p=p-h.$$

Soit $M_k^+\subset M_k$ l'espace projectif des *polynômes* :

$$M_k^+=\Big\{\sum_{0\leq\ell\leq k}\phi_\ell z^\ell\Big\}\Big/\mathbb{C}^*.$$

Cet espace est invariant sous l'action de S^1 et admet une classe de cohomologie équivariante $\Delta_k\in H^*_{S^1}(M_k)$ qui est la classe de cohomologie de $(M_k^+)_{S^1}\subset(M_k)_{S^1}$.

Lemme 6.18. — *L'image de la classe* Δ_k *par l'isomorphisme* 6.5.40 *est égale à* $\prod_{0<\ell\leq k}(p+\ell h)^{n+1}$ *modulo* $\prod_{-k\leq\ell\leq k}(p+\ell h)^{n+1}$.

En fait, M_k^+ est l'intersection complète des hyperplans d'équation

$$x_i^\ell = 0 \quad \text{pour } 0 \le i \le n \text{ et } \ell < 0\,;$$

or x_i^ℓ est une section invariante sous S^1 du fibré $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T}_\ell$. Comme le fibré $\mathcal{T}_\ell$ a pour classe d'Euler $-\ell h$, on en déduit comme annoncé

$$\Delta_k = \prod_{-k \le \ell < 0} (p - \ell h)^{n+1} = \prod_{0 < \ell \le k} (p + \ell h)^{n+1}. \qquad \square \tag{6.5.41}$$

Notons que

$$\varinjlim_k M_k^+ =: M^+ \subset M$$

est essentiellement le «cycle d'homologie de Floer fondamental» $C_{\mathbb{P}^n}$ formé des applications polynomiales $\phi : D^2 \to \mathbb{P}^n$. Givental pose donc

$$\Delta = \lim_{k \to \infty} \Delta_k = \prod_{\ell > 0} (p + \ell h)^{n+1}, \tag{6.5.42}$$

ce qui malheureusement n'a pas de sens même dans $H^*_{S^1}(\mathbb{P}^n) \otimes \Lambda_q$, qui est un complété raisonnable de $\varinjlim_k H^*_{S^1}(M_k)$ (ici, $\mathbb{P}^n$ est muni de l'action triviale de S^1 et est vu comme le lieu des points fixes de l'action de S^1 sur $L\mathbb{P}^n$). Comme on a $q^* p = p - h$, ce produit infini satisfait formellement l'équation

$$q^* \Delta = p^{n+1} \Delta. \tag{6.5.43}$$

6.5.4. Hypersurfaces lisses de P^n

On conclut maintenant le calcul de [91] ; on va considérer la classe de cohomologie S^1-équivariante dans M_k pour $k \to \infty$ de l'ensemble des polynômes $P(z)$ de degré k à valeurs dans une hypersurface $X \subset \mathbb{P}^n$ et calculer l'équation différentielle qu'elle satisfait, relativement à la structure de $\mathcal{D}$-module définie en 6.5.1 et 6.5.2.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface lisse, définie par un polynôme homogène F de degré d. Considérons le sous-ensemble

$$M_k^+(X) = \big\{\Phi \in M_k^+ \;;\; F(\Phi(z)) = 0\big\} \subset M_k^+.$$

C'est le lieu des zéros de la section S^1-invariante $\Phi \mapsto F(\Phi)$ du fibré équivariant

$$\mathcal{L}^d \otimes E \longrightarrow M_k^+,$$

où E est le fibré trivial de fibre égale à l'ensemble des polynômes en z de degré inférieur ou égal à kd, muni de l'action de S^1 définie par $\lambda \cdot z^\ell = \lambda^{-\ell} z^\ell$. Bien que $M_k^+(X)$ ne soit pratiquement jamais de la codimension correcte

$$kd + 1 = \operatorname{rang} E,$$

il est naturel d'estimer que la classe intéressante est la classe d'Euler équivariante Δ_k^d de $\mathcal{L}^d \otimes E$ plutôt que celle de $M_k^+(X)$. Le fibré équivariant E sur M_k étant la somme directe des fibrés $\mathcal{T}_\ell$ pour $0 \leq \ell \leq kd$, on obtient donc :

$$\Delta_k^d = \prod_{0\leq \ell \leq kd} (dp - \ell h) \in H^*_{S^1}(M_k^+). \tag{6.5.44}$$

Finalement, comme $j_k : M_k^+ \hookrightarrow M_k$ a pour classe de cohomologie équivariante

$$\Delta_k = \prod_{0<\ell\leq k} (p + \ell h)^{n+1},$$

on trouve :

$$j_{k*}(\Delta_k^d) = \prod_{0<\ell\leq k} (p+\ell h)^{n+1} \prod_{0\leq \ell\leq kd} (dp - \ell h) \in H^*_{S^1}(M_k), \tag{6.5.45}$$

expression que l'on notera $\Delta_k \cdot \Delta_k^d$.

Considérons le produit infini

$$\Delta \cdot \Delta^d = \prod_{\ell>0} (p+\ell h)^{n+1} \prod_{\ell\geq 0} (dp - \ell h)$$

(qui devrait représenter le « cycle de Floer fondamental de X dans M », mais n'a pas réellement de sens). Comme $q^*(p) = p - h$, on trouve que $\Delta\cdot\Delta^d$ satisfait formellement l'équation

$$\begin{aligned} q^*(d(dp+h)(dp+2h)\cdots(dp+(d-1)h)\Delta\cdot\Delta^d \\ &= d\big(dp+(1-d)h\big)\big(dp+(2-d)h\big)\cdots(dp-h) \\ &\qquad \times \prod_{\ell\geq 0}(p+\ell h)^{n+1}\prod_{\ell\geq 0}\big(dp-(d+\ell)h\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}p^{n+1}}{\mathrm{d}p}\Delta\cdot\Delta^d = p^n\Delta\cdot\Delta^d. \end{aligned} \tag{6.5.46}$$

Remplaçant p par $h\partial/\partial t$, puis q^* par e^t et $\Delta\cdot\Delta^d$ par $f(t)$, cette équation devient :

$$h^{n-d+1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^n f = \mathrm{e}^t d\Big(d\frac{\partial}{\partial t}+1\Big)\Big(d\frac{\partial}{\partial t}+2\Big)\cdots\Big(d\frac{\partial}{\partial t}+d-1\Big)f. \tag{6.5.47}$$

Le point remarquable de cette construction est le fait que pour $n = 4$ et $d = 5$, cette équation est exactement l'équation de Picard-Fuchs de la famille miroir de la famille des quintiques (*cf.* [43] et le § 3.4), calculée à l'aide de la forme ω'_ψ définie dans la remarque 3.15, pour le champ de vecteurs logarithmique $\psi'\partial/\partial\psi'$, $\psi' = 1/\lambda^5 = \mathrm{e}^t$ (de sorte que $\psi'\partial/\partial\psi' = \partial/\partial t$).

Comme la classe $\Delta\cdot\Delta_d$ est la classe virtuelle de $M_k^+(X)$, et donc est essentiellement définie à l'aide des courbes rationnelles dans une hypersurface X de degré d dans $\mathbb{P}^n$, on peut considérer ce fait comme une justification de l'identification des deux séries du § 3.3.

Remarque 6.19. — Un autre point intéressant est la disparition de la variable h dans l'équation (6.5.47), exactement lorsque $d = n+1$, c'est-à-dire lorsque $X \subset \mathbb{P}^n$ est à fibré canonique trivial.

Finalement, Givental construit des solutions formelles de cette équation de la façon suivante. Soit $q_* = (q^{-1})^*$ l'opérateur adjoint de q. Pour une classe de cohomologie C dans $H^*_{S^1}(M)$, on a (formellement) :

$$\pi_*\big(q_*C \cdot \Delta \cdot \Delta^d\big) = \pi_*\big(C \cdot q^*\Delta \cdot \Delta^d\big). \tag{6.5.48}$$

Supposons que C satisfasse la condition

$$q_*C = C\,;$$

alors on a, pour $\Gamma_C = \mathrm{e}^{pt/h}C$,

$$q_*(\Gamma_C) = \mathrm{e}^t\Gamma_C$$

(puisque $q_*p = p+h$) et

$$p \cdot \Gamma_C = h\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_C.$$

On en déduit que $f_h(t) = \pi_*(\Gamma_C \cdot \Delta \cdot \Delta^d)$ satisfait :

$$\begin{cases} h\dfrac{\partial f_h}{\partial t} = \pi_*(\Gamma_C \cdot p \cdot \Delta \cdot \Delta^d), \\ \mathrm{e}^t f_h = \pi_*(\mathrm{e}^t\Gamma_C \cdot \Delta \cdot \Delta^d) = \pi_*(q_*\Gamma_C \cdot \Delta \cdot \Delta^d) = \pi_*(\Gamma_C \cdot q^*\Delta \cdot \Delta^d). \end{cases} \tag{6.5.49}$$

Il en résulte immédiatement que $f_h(t)$ est une solution de l'équation différentielle (6.5.47).

Ici π_* est calculé en passant à la limite $k \to \infty$ dans la formule (6.4.33) qui donne $\pi_{k*}f(p,h)$ comme somme des résidus de

$$\frac{f(p,h)}{\prod\limits_{-k\le\ell\le k}(p+\ell h)}\,\mathrm{d}p.$$

Claire Voisin
Université Paris Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay (France)

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 1

[1] R. Bryant, P. Griffiths : Some observations on the infinitesimal period relations for regular threefolds with trivial canonical bundle, dans *Arithmetic and Geometry* (papers dedicated to Shafarevich), vol. 2, Birkhäuser 1983.

[2] A. Beauville : Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 755–782.

[3] F.A. Bogomolov : On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class, *Math. U.S.S.R. Sbornik* 22 (1974), 580–583.

[4] F.A. Bogomolov : Hamiltonian Kähler manifolds, *Soviet Math. Doklady* 19 (1978), 1462–1465.

[5] C. Borcea : K3-surfaces with involution and mirror pairs of Calabi-Yau manifolds, preprint (1992).

[6] J.P. Demailly : Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, dans [25].

[7] R. Donagi, E. Markman : Cubics, integrable systems and Calabi-Yau threefolds, in *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conf. on Algebraic Geometry*, Israel Math. Conf. Proc. 9 (1996).

[8] R. Friedman : On threefolds with trivial canonical bundle, *Complex Geometry and Lie Theory* (Sundance UT, 1989), Proc. Symp. Pure Math. 53 (1991), 103–134.

[9] R. Friedman : Global smoothing of varieties with normal crossings, *Annals of Math.* 118 (1983), 85–114.

[10] P. Griffiths : Periods of integrals on algebraic manifolds I et II, *Amer. J. Math.* 90 (1968), 568–626 et 805–865.

[11] Y. Kawamata, Y. Namikawa : Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties, *Invent. Math.* 118 (1994), 395–409.

[12] M. Kontsevich : Homological algebra of Mirror Symmetry, *Proceedings du Congrès International de Zürich*, vol. 1, 101–139, Birkhäuser (1995).

[13] D. Markuschevich : Resolution of singularities (appendice), *Commun. in Math. Phys.* 111 (1987), 247–274.

[14] V.V. Nikulin : Discrete reflection groups in Lobachevski spaces and algebraic surfaces, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, Berkeley 1986, 654–671.

[15] Z. Ran : Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle, *J. Alg. Geom.* 1 (1992), n° 2, 279–291.

[16] S.S. Roan : On Calabi-Yau orbifolds in weighted projective space, *International J. of Math.* 1 (1990), 211–232

[17] S.S. Roan : Mirror symmetry and Arnold's duality, *preprint MPI/92-86, Max Planck Institut* (1992).

[18] G. Tian : Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric, dans *Mathematical aspects of string theory* (édité par S. T. Yau), World Scientific Press, Singapore (1987), 629–646.

[19] M. Verbitsky : Mirror symmetry for hyperkähler manifolds, *preprint* (1995).

[20] C. Voisin : Miroirs et involutions sur les surfaces K3, dans *Journées de géométrie algébrique d'Orsay, juillet 1992* (édité par A. Beauville, O. Debarre, Y. Laszlo), Astérisque 218 (1993).

[21] A. Weil : *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris 1957.

[22] P.H.M. Wilson : The Kähler cone on Calabi-Yau threefolds, *Invent. Math.* (1992), 107, 561–583.

[23] *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi*, Séminaire Palaiseau, Astérique 58 (1978).

[24] *Géométrie des surfaces* K3 *: modules et périodes*, Séminaire Palaiseau, Astérique 126 (1985).

[25] J. Bertin, J.P. Demailly, L. Illusie, C. Peters : *Introduction à la théorie de Hodge, État de la recherche*, Grenoble 1992, Panoramas et synthèses 3 (1996).

Chapitre 2

[26] L. Alvarez-Gaume, D. Freedman : Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric σ-model, *Commun. Math. Phys.* 80 (1981), 443–451.

[27] P. Aspinwall, C. Lütken, G. Ross : Construction and couplings of mirror manifolds, *Physics letters* B, vol. 244, n^{o} 3 (1990).

[28] J.B. Bost : Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesure sur les espaces de modules de courbes complexes, *Séminaire Bourbaki*, exp. 676 (1987), Astérisque 152–153.

[29] K. Gawedzki : Conformal field theory, *Séminaire Bourbaki*, exp. 704, 41^{e} année, 1988–1989.

[30] D. Gepner : Exactly solvable string compactifications on manifolds of SU(n)-holonomy, *Physics Letters* B, vol. 199, n^{o} 3 (1987), 380–388.

[31] B.R. Greene, M.R. Plesser : Duality in Calabi-Yau moduli spaces, *Nucl. Phys.* B 338 (1988), 15–37.

[32] B.R. Greene, D.R. Morrison, M.R. Plesser : Mirror manifolds in higher dimension, *Commun. in Math. Phys.* 173 (1995), 559–598.

[33] N. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček : Hyperkähler metrics and supersymmetry, *Commun. Math. Phys.* 108 (1987).

[34] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn : *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, New Jersey (1989).

[35] W. Lerche, C. Vafa, N.P. Warner : Chiral rings in $N=2$-superconformal field theories, *Nucl. Phys.* B 324 (1989), 427–474.

[36] G. Segal : *The definition of conformal field theory*, notes de cours.

[37] G. Segal : The definitions of conformal field theory, dans *Links between Geometry and Mathematical Physics*, 13–17.

[38] E. Witten : Mirror manifolds and topological field theory, dans [39], 120–158

[39] *Essays on mirror manifolds*, S.T. Yau ed., International series in Mathematical Physics, International Press (1992).

[40] B. Dewitt : *Supermanifolds*, Cambridge monographs on Mathematical Physics (1984).

Chapitre 3

[41] V. Batyrev, D. van Straten : Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties, *preprint*.

[42] J. Bertin, C. Peters : Variations de structure de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir, dans [25].

[43] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green, L. Parkes : A pair of Calabi-Yau Manifolds as an exactly soluble superconformal field theory, *Nucl. Phys.* B 359 (1991), 21–74.

[44] J. Carlson, P. Griffiths : Infinitesimal variations of Hodge structures and the global Torelli problem, dans *Géométrie algébrique*, Angers, éd. par A. Beauville, Sijthoff-Noordhoff (1980), 51–76.

[45] G. Ellingsrud, S.A. Stromme : The number of twisted cubics on the general quintic threefold, dans [39].

[46] G. Ellingsrud, S.A. Stromme : Bott's formula and enumerative geometry, *J. of the A.M.S.*, vol. 9, (1996) 175–193.

[47] P. Griffiths : On the periods of certain rational integrals, I, II, *Ann. of Math.* 90 (1969), 460–541.

[48] P. Griffiths, L. Tu : Curvature properties of Hodge bundles, dans [59], 29–49.

[49] A. Grothendieck : On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.* 29 (1966), 96–103.

[50] N. Katz : The regularity theorem in algebraic geometry, *Actes du congrès international des mathématiciens*, Nice (1970), vol. 1, 437–443.

[51] M. Kontsevich : Enumeration of rational curves via torus action, in *The moduli space of curves*, R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer eds, Progress in Math. 129, Birkhäuser (1995), 335-368.

[52] A. Libgober, J. Teitelbaum : Lines on Calabi-Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard-Fuchs equations, *International research notices*, n° 1 (1993).

[53] D. Morrison : Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds, *J. of the A.M.S.*, vol. 6, n° 1, 223–241.

[54] D. Morrison : Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces, dans [39], 241-264.

[55] D. Morrison : Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry, dans *Journées de géométrie algébrique d'Orsay, juillet 1992*, (éd. par A. Beauville, O. Debarre, Y. Laszlo), Astérisque 218 (1993).

[56] W. Schmidt : Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping, *Inventiones Math.* 113 (1981), 45–66.

[57] J. Steenbrink : Limits of Hodge structures, *Inv. Math.* 31 (1976), 229–257.

[58] S. Zucker : Degenerations of Hodge bundles (after Steenbrink), dans [59], 121–141.

[59] *Topics in transcendental algebraic geometry*, ed. by P. Griffiths, Annals of Mathematics studies, study 106, Princeton University Press 1984.

Chapitre 4

[60] V.V. Batyrev : Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces, *J. Alg. Geometry* 3 (1994), 493–535.

[61] V.V. Batyrev : Hodge theory of hypersurfaces in toric varieties and recent developpements in quantum physics, Habilitationsschrift, Université d'Essen (1992).

[62] V.V. Batyrev, L.A. Borisov : Mirror duality and string theoretic Hodge numbers, à paraître dans *Inventiones Math.*

[63] V.I. Danilov : The geometry of toric varieties, *Russian Math. Survey* 33, n^{o} 2 (1978), 97–154.

[64] V.I. Danilov, A.G. Khovanskii : Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers, *Math. U.S.S.R. Izv.* 29 (1987), 279–298.

[65] P. Deligne : Théorie de Hodge II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n^{o} 40 (1971), 5–57.

[66] W. Fulton : *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Study 131 (1993).

[67] J. Milnor : *Morse theory*, *Annals of Mathematics studies*, Study 51, Princeton University Press (1963).

[68] M. Reid : Decomposition of toric morphisms, dans *Arithmetic and Geometry*, papers dedicated to I.R. Shafarevich on the occasion of his 60th birthday, vol. II, Geometry, Progress in Math. 36, Birkhäuser (1983), 395–418.

[69] J.H.M. Steenbrink : Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, dans *Real and complex singularities*, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1977), 565–678.

Chapitre 5

[70] P.S. Aspinwall, D. Morrison : Topological field theory and rational curves, *Commun. Math. Phys.* 151 (1993), 245-262

[71] M. Audin : Cohomologie quantique, *Séminaire Bourbaki*, 1995–1996, Astérisque (à paraître).

[72] A. Beauville : Quantum cohomology of complete intersections, *Math. Physics, Analysis and Geometry*, vol. 2 (1995).

[73] A. Bertram : Modular Schubert calculus, à paraître dans *Advances in Mathematics.*

[74] P. Deligne, D. Mumford : The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. I.H.E.S.* 36 (1969), 75–109.

[75] B. Dubrovin : Integrable systems in topological field theory, *Nuclear physics* B 379 (1992), 627–689.

[76] M. Gromov : Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985), 307–347.

[77] S. Keel : Intersection theory of moduli spaces of stable n-pointed rational curves of genus 0, *Trans. A.M.S.* 330 (1992), 545–574.

[78] M. Kontsevich, Yu. Manin : Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry, *Communications in Math. Physics*, vol. 164 (1994), 525–562.

[79] Yu. Manin : Generating functions in Algebraic Geometry and sums over trees, Proceedings de la conférence *The moduli space of curves*, eds Dijkgraaf, Faber, van der Geer, Progress in Math., vol. 129, Birkhäuser (1995).

[80] V. Mathai, D. Quillen : Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, *Topology*, vol. 25, n° 1 (1986), 85–110.

[81] D. McDuff, D. Salamon : *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, *University lecture series*, vol. 6, publ. A.M.S. (1994).

[82] Y. Ruan : Symplectic topology on algebraic threefolds, *J. Diff. Geom.* 39 (1994), 215–227.

[83] Y. Ruan, G. Tian : A mathematical theory of quantum cohomology, *J. Diff. Geom.* 42 (1995), 259–367.

[84] C. Vafa : Topological mirrors and quantum rings, dans [39].

[85] C. Voisin : A mathematical proof of a formula of Aspinwall and Morrison, à paraître dans *Compositio Mathematica*.

[86] *Holomorphic curves in symplectic geometry*, édité par M. Audin et J. Lafontaine, *Progress in Math.* 117, Birkhäuser (1994).

Chapitre 6

[87] M.F. Atiyah, R. Bott : The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, vol. 23, n° 1 (1984), 1–28.

[88] M. Audin : The topology of torus actions on symplectic manifolds, *Progress in Math.* vol. 93, Birkhäuser 1991.

[89] A. Floer : Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Commun. Math. Phys.* 120 (1989), 575–611.

[90] A. Floer : Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, *J. Diff. Geom.* 30 (1989), 207–221.

[91] A.B. Givental : Homological geometry I : projective hypersurfaces, *Selecta Math.*, new series, vol. 1 (1995), 325–345.

[92] A.B. Givental : Homological Geometry and Mirror symmetry, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, Zürich 1994, vol. 1, 473–480, Birkhäuser 1995.

[93] A. Givental, B. Kim : Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices, *Commun. Math. Phys.* 168 (1995), 609–641.

[94] H. Hofer, D. Salamon : Floer homology and Novikov rings, dans *A. Floer Memorial Volume*, Progress in Math. 133, Birkhäuser 1995.

[95] S. Piunikhin : Quantum and Floer cohomology have the same ring structure, à paraître au *J. Diff. Geometry* (1996).

[96] S. Piunikhin, D. Salamon, M. Schwarz : Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology, preprint de l'université de Warwick, 1995.

[97] C. Viterbo : The cup-product on the Thom-Smale-Witten complex, and Floer cohomology, dans *A. Floer Memorial Volume*, Progress in Math. 133, Birkhäuser 1995.