Théorèmes de la masse positive en géométrie Conforme

Guillaume Vassal

16 novembre 2010

Introduction

Le théorème de la masse positive apparaît pour la première fois dans un problème issu de la physique. La relativité générale modélise l'univers par une variété M de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne g de signature $(-,+,+,+)$. La métrique g représente le champ gravitationnel en présence. Les trajectoires des particules libres sont les géodésiques de g et la distribution de la matière est décrite par l'équation des champs d'Einstein :

$$\mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2} Scal^g = T, \tag{1}$$

où Ric^g est le tenseur de Ricci de g, $Scal^g$ est la courbure scalaire de g et T est le tenseur appelé tenseur d'*énergie-impulsion*. En théorie classique de la gravitation, la métrique g joue le rôle du potentiel gravitationnel et T celui de la densité de masse. Dans le cas d'un système isolé, il est naturel d'imposer à l'intensité des interactions en présence de décroître lorsque que l'on s'éloigne de la source. Les objets naturels apparaissant dans cette situation sont donc des variétés lorentziennes contenant une hypersurface de type espace qui est "isomorphe" à l'espace euclidien à l'infini. Un des exemples les plus connus est celui de la métrique de Schwarzschild sur $\mathbb{R}^4$ modélisant le champ gravitationnel généré par une particule ponctuelle statique de masse m, tel qu'un trou noir, donnée par :

$$g = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 g_{eucl}, \tag{2}$$

où g_{eucl} est la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Les tranches spatiales de la métrique de Schwarzschild sont difféomorphes au complémentaire de la boule de rayon $m/2$ de $\mathbb{R}^3$ et sont des sous-variétés asymptotiquement plates d'ordre 1. Nous allons nous intéresser en particulier à cette théorie dans le cadre de la géométrie riemannienne. Une variété riemannienne (M, g) est *asymptotiquement plate* (à un seul bout) s'il existe un compact K de M tel que $M \setminus K$ est difféomorphe à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^n$ et tel que la métrique g est asymptotique, dans un certain sens, à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $M \setminus K$. Sous certaines conditions, nous pouvons associer à ce type de variété un invariant géométrique, appelé *masse*, calculé à l'infini et dont l'expression est la suivante :

$$m(g) = \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner dz,$$

où S_r est la sphère standard de rayon r de $\mathbb{R}^n$ et dz est la forme volume dans $\mathbb{R}^n$. Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, le calcul de la masse par la formule précédente nous donne le paramètre m qui correspond dans cette situation à la masse du système au sens physique. Lorsque le taux de décroissance de la variété asymptotiquement plate est suffisant et que sa courbure scalaire est intégrable, la masse est bien définie. Dans ce cas, R. Bartnik [4] et P. Chruŝciel [10] ont démontré que la définition de la masse est indépendante du système de coordonnées asymptotiques choisi. Bien qu'elle soit calculée par passage à la limite à l'infini, la masse fournit une information globale sur la géométrie de la variété.

Une méthode pour étudier l'équation d'Einstein est de considérer l'action intégrale d'Einstein-Hilbert et de calculer sa variation première. L'action intégrale d'Einstein-Hilbert est définie sur l'espace des métriques riemanniennes d'une variété M par :

$$A(g) = -\int_M Scal^g v_g, \tag{3}$$

où $Scal^g$ est la courbure scalaire de g et v_g la forme volume associée à g. Dans le cadre des variétés asymptotiquement plates, la masse apparaît dans le terme de bord de la variation première de l'action intégrale d'Einstein-Hilbert.

La masse a été introduite en 1960 par R. Arnowitt, S. Deser et C. Misner ([1], [2] et [3]) qui ont étudié en détail les systèmes gravitationnels isolés. Ces derniers, pour les raisons physiques précédemment introduites, ont conjecturé que la masse d'une hypersurface de type espace est positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si l'espace-temps est plat. La version riemannienne de la conjecture de la masse positive est la suivante :

Conjecture. Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > (n-2)/2$ et de dimension $n \geqslant 3$. Si la courbure scalaire de g est positive ou nulle, alors la masse est positive ou nulle. De plus, la masse est nulle si et seulement si (M, g) est isométrique à l'espace euclidien.

R. Shoen et S. T. Yau ont démontré cette conjecture en 1979 pour les variétés asymptotiquement plates de dimension comprise entre 3 et 7. En 1981, E. Witten [27] donne une preuve simple en toute dimension $n \geqslant 3$ mais dans le cas où la variété est spinorielle. Cette condition supplémentaire est de nature topologique. Puis en 1987, T. Parker et C. H. Taubes [23] ont développé la partie analytique de l'argument de Witten. Récemment, J. Lohkamp a annoncé une preuve de la conjecture dans le cas général dans [18] . Pour des informations plus précises sur ce sujet, le lecteur pourra consulter [17] ou [19].

La notion de masse a été aussi introduite pour d'autres types de variétés non compactes. Un théorème de la masse positive est démontré pour des variétés asymptotiquement hyperboliques par P. Chruŝciel et M. Herzlich [7] et pour des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes par V. Minerbe et D. Maerten [21]. Dans [11], Xianzhe Dai généralise le théorème de masse positive au cas où la variété est asymptotique au produit $\mathbb{R}^n \times X$, où X est une variété compacte simplement connexe de Calabi-Yau ou une variété hyper-Kählerienne. Dans l'article de J. M. Lee et T. H. Parker [19], un théorème de la masse positive est démontré en toute dimension en remplaçant l'hypothèse $Scal^g \geqslant 0$ par l'hypothèse plus forte $\mathrm{Ric}^g \geqslant 0$. Avec cette même hypothèse, V. Minerbe [20] démontre également un théorème de la masse positive pour les variétés ALF (Asymptotically Locally Flat), un cas dont nous reparlerons en détail un peu plus loin.

Avant de résumer les chapitres de ce mémoire, présentons sans grandes précisions les notions de géométrie conforme dont il sera questions.

Une *structure conforme* c sur une variété M est décrite comme une section "positive et normalisée" du fibré $S^2(T^*M) \otimes L^2$, où le fibré L est le fibré des poids sur M. En géométrie conforme, le rôle de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne est joué par l'espace affine des *connexions de Weyl* qui sont des connexions sans torsion préservant la classe conforme de la variété. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c) et pour toute métrique riemannienne g dans c, il existe une 1-forme réelle θ_g telle que $Dg = -2\theta_g \otimes g$. La 1-forme θ_g est la *forme de Lee* de D relativement à la métrique g. Les connexions de Weyl ont été introduites par H. Weyl [26] dans les années 20 dans le but d'élaborer une théorie de *jauge* pour l'électromagnétisme.

Le but principal de mes travaux de recherche durant ma thèse a été d'étendre deux théorèmes de la masse positive au cadre de la géométrie conforme. J'ai généralisé la version de E. Witten de la conjecture de la masse positive pour une variété conforme spinorielle en définissant la notion de connexions de Weyl asymptotiquement plates, et j'ai démontré un théorème de la masse positive pour des structures de Weyl ALF en m'appuyant sur les travaux de V. Minerbe.

Dans le premier chapitre, je commence par décrire un certain nombre de notions de géométrie conforme sur une variété M organisées autour de la notion de connexion de Weyl (section 1.1). Je démontre ensuite deux formules de type conforme généralisant des formules riemanniennes bien connues. J'établis une formule de Bochner conforme pour les 1-formes différentielles à poids, qui sont des 1-formes sur la variété M à valeurs dans une puissance du fibré des poids L sur M, dans la section 1.2.

Sur une variété conforme, on peut construire le fibré des spineurs de poids conforme k quelconque, noté $\Sigma^{(k)}$, et l'opérateur de Dirac conforme attaché à une connexion de Weyl agissant sur les sections de $\Sigma^{(k)}$. Ces constructions sont rappelées dans la section 1.3. Je reprends, dans la section 1.4, la démonstration de la formule de Lichnerowicz conforme qui relie le carré de l'opérateur de Dirac conforme au laplacien généralisé et à la courbure scalaire. Je remarque que cette formule existe seulement pour l'espace des spineurs de poids $(n-2)/2$. Je donne également des versions intégrales, au sens des densités sur M, de ces deux formules. Les versions intégrales des formules de Bochner et de Lichnerowicz conformes sont un point clé pour la généralisation des théorèmes de la masse positive.

Dans le deuxième chapitre, je rappelle les notions de variétés asymptotiquement plates (section 2.1) et de variétés ALF (section 2.2). J'énonce les théorèmes de la masse positive associés à ces deux situations et je rappelle les éléments essentiels de leur démonstration. Précisons quelque peu le cas des variétés ALF traité par V. Minerbe [20]. Une variété riemannienne (M, g) est ALF s'il existe un compact K de M tel que $M \setminus K$ est difféomorphe à l'espace total χ d'une fibration en cercles au-dessus de $\mathbb{R}^m \setminus B_R$ muni de la métrique euclidienne, où B_R est la boule standard de rayon R, et tel que la métrique g est asymptotique à une métrique modèle sur χ. L'espace total χ muni d'une métrique h, standard dans un certain sens, est le modèle à l'infini. L'exemple le plus simple est le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$

muni de la métrique produit. Contrairement au cas des variétés asymptotiquement plates, la masse d'une variété ALF est une forme quadratique définie sur un espace de champs de vecteurs horizontaux $\mathcal{Z}$. Le théorème de masse positive associé affirme alors que la masse est une forme quadratique positive lorsque la courbure de Ricci de g est positive, et que cette masse est nulle si et seulement si la variété est le produit standard $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^1$. La masse d'une variété ALF (M, g), asymptotique au modèle (χ, h), est notée $\mathcal{Q}_g$ et définie par :

$$\mathcal{Q}_g(Z) = \frac{1}{\omega_n L} \limsup_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} *_h q_{g,h}(Z), \tag{4}$$

pour tout champ de vecteurs Z dans $\mathcal{Z}$. Le volume de la sphère standard $\mathbb{S}^{m-1}$ est noté ω_n, l'opérateur de Hodge relatif à h est noté $*_h$ et la quantité $q_{g,h}(Z)$ est donnée par :

$$q_{g,h}(Z) = -(\mathrm{div}_h g)(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2}(d(tr_h g)(Z)\widetilde{\alpha}_Z + d(g(Z, Z))), \tag{5}$$

où $\widetilde{\alpha}_Z$ est la 1-forme duale de Z relativement à la métrique h.

Dans le troisième chapitre, je définis les notions de structures de Weyl asymptotiquement plates (section 3.1) et de structures de Weyl ALF (section 3.2) puis, j'énonce et démontre les théorèmes de la masse positive conformes associés. Une structure de Weyl (M, c, D) est *asymptotiquement plate* s'il existe une métrique g dans la classe conforme c telle que (M, g) soit asymptotiquement plate au sens précédent et telle que la 1-forme de Lee θ_g de D relativement à g satisfait certaines hypothèses de décroissance à l'infini. La métrique g est alors appelée *métrique adaptée* pour (M, c, D). Je définis la *masse conforme*, notée $m(D)$, d'une structure de Weyl asymptotiquement plate (M, c, D) évaluée en une métrique adaptée g par la formule suivante :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1) \int_M \delta^g(\theta_g) v_g, \tag{6}$$

où δ^g est la divergence relative à g, v_g est la forme volume sur M définie par g et $m(g)$ la masse riemannienne de g définie précédemment (les conditions de décroissance à l'infini sur θ_g impliquent la convergence de l'intégrale). Dans la section 3.1.1, je démontre que la masse conforme ne dépend pas de la métrique adaptée choisie. Le théorème de la masse positive conforme .76 lui est associé : *soit (M, c, D) une structure de Weyl asymptotiquement plate. Supposons que la variété M est spinorielle. Si la courbure scalaire de D est positive, la masse conforme $m(D)$ est positive. Le masse est nulle si et seulement si (M, c) est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure conforme canonique.* La notion de structures de Weyl asymptotiquement plates et la démonstration du théorème de la masse positive conforme associé constituent mon premier article publié [25].

Une structure de Weyl (M, c, D) est ALF s'il existe une métrique g dans c telle que (M, g) est ALF et telle que la 1-forme de Lee de D relativement à g possède une bonne décroissance à l'infini. La métrique g est alors appelée métrique adaptée. Pour les structures de Weyl ALF, je définis la masse conforme, notée m_h^D, qui est une forme quadratique définie sur $\mathcal{Z}$ par la formule suivante :

$$m_h^D(g)(Z) = \mathcal{Q}_g(Z) + \limsup_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} *_h\Big((1-m)\langle\theta_g, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h \widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 \theta_g\Big),$$

pour tout champ de vecteurs Z dans $\mathcal{Z}$, où $\widetilde{\alpha}_Z$ est la 1-forme duale de Z relativement à la métrique h. De la même façon que la masse conforme donnée par (6), cette masse est indépendante de la métrique adaptée choisie. Je démontre ensuite le théorème de la masse positive conforme (théorème .83) suivant : *soit* (M, c, D) *une structure de Weyl ALF. Si la courbure de Ricci de la connexion de Weyl D est positive, la masse de* (M, c, D) *est une forme quadratique positive.*

Le quatrième chapitre de ce mémoire est indépendant de la notion de masse conforme. J'étudie les submersions conformes, et en particulier les submersions conformes à fibres de dimension 1. Je suis l'approche élaborée par D. Calderbank (voir [8], [9] et [16]) qui constitue une version non linéaire de la *correspondance de Jones-Tod.* Nous considérons dans un premier temps un submersion $\pi : M \to (B, c^B)$ de codimension 1 sur une variété conforme (B, c^B). Nous démontrons que l'ensemble des structures conformes c sur M faisant de π une submersion conforme est codé par les sections α du fibré $T^*M \otimes L$, c'est-à-dire par les 1-*formes de poids zéro.* D. Calderbank [8] a montré qu'il existe une unique *connexion de Weyl minimale* associé à une 1-forme de poids zéro α, notée D^0, satisfaisant les conditions $\mathrm{tr}_c(D^0\alpha) = 0$ et $D^0_{\alpha^\sharp}\alpha = 0$. J'étudie dans la section 4.2 le cas intéressant où la connexion de Weyl minimale D^0 associée à une submersion conforme est projetable sur la base de la submersion. En particulier, dans le cas où la variété M est compacte, nous arrivons à la conclusion que la connexion de Weyl minimale est projetable si et seulement si la submersion conforme π définit localement une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. Dans la section 4.3, j'étudie la façon dont la connexion minimale varie lorsqu'on change la 1-forme de poids zéro α. En particulier, je trouve des conditions pour que la connexion de Weyl minimale $\widetilde{D}^0$ associée à la 1-forme de poids zéro $\widetilde{\alpha} = f\alpha$, où f est une fonction strictement positive sur M, reste projetable lorsque la connexion de Weyl minimale D^0 associée à α est projetable. Les résultats obtenus sont partiellement reliés au cas des submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques.

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie Conforme

1.1 Structures de Weyl

Dans cette partie, nous rassemblons quelques faits de géométrie conforme organisés autour de la notion de structure de Weyl, introduite par H. Weyl dans [26].

1.1.1 Structures conformes sur une variété

Soit M une variété différentielle de dimension n. Nous notons $\mathrm{GL}(n)$ ($\mathrm{GL}^+(n)$) le groupe linéaire (orienté) de $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent, l'espace cotangent et l'espace des repères (orientés) de M sont respectivement notés TM, T^*M et $GL(M)$ ($GL^+(M)$).

Fibré des poids et poids conforme

Pour toute variété différentielle, nous pouvons définir une famille de fibrés en droites réelles, notés L^k, où k est un nombre réel, par :

$$L^k = GL(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}.$$

Le fibré L^k est appelé *fibré des poids* ou *fibré des densités de poids* k. En particulier, le fibré des densités de poids 1 est noté L. Si k est un entier positif, L^k est le k-ième produit tensoriel de L. Nous remarquons que L^{-1} est le fibré dual de L. Ces fibrés sont naturellement orientables donc triviaux. Les sections de L^k s'appelle des *densités de poids* k. On a :

$$L^{k_1} \otimes L^{k_2} = L^{k_1+k_2} \qquad \text{et} \qquad (L^k)^p = L^{kp}.$$

Nous pouvons aussi définir les fibrés des densités positives et négatives par :

$$L^k_+ = GL(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}^{>0} \qquad \text{et} \qquad L^k_- = GL(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}^{<0},$$

où $\mathbb{R}^{>0}$ et $\mathbb{R}^{<0}$ sont respectivement les ensembles des nombres réels strictement positifs et strictement négatifs. Nous notons $L^k_{\mathbb{C}}$ le fibré complexifié de L^k.

Si ν est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(n)$ sur une espace vectoriel V, alors il existe k dans $\mathbb{R}$ tel que ν restreinte au sous-groupe des matrices scalaires soit donnée par :

$$\nu(a\mathrm{I}) = a^k \mathrm{Id}\,, \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>0},$$

où I est l'identité de $\mathrm{GL}(n)$ et où Id est l'endomorphisme identité de V. Le nombre réel k est par définition le *poids conforme* de la représentation ν. Les fibrés vectoriels associés au fibré principal des repères $GL(M)$ via une représentation du groupe $\mathrm{GL}(n)$ possèdent donc un poids conforme naturel qui est celui de la représentation les définissant. Avec cette convention, l'espace tangent, l'espace cotangent et l'espace des p-formes sur M sont respectivement de poids conforme 1, -1 et $-p$. Par exemple, le fibré tangent est associé au fibré des repères via la représentation tautologique de $\mathrm{GL}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ et la représentation définissant T^*M est donnée par :

$$\begin{aligned} \nu \ : \ \mathrm{GL}(n) &\to End(\mathbb{R}^n) \\ A &\mapsto {}^t\!A^{-1}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où ${}^tA$ est la matrice transposée de A. Il est facile de voir que le poids conforme d'un produit tensoriel de fibrés vectoriels est la somme des poids conformes. En effet, la représentation associée au produit tensoriel de deux fibrés vectoriels est le produit tensoriel des représentations définissant chacun des fibrés vectoriels. Par exemple, le poids conforme de $T^*M \otimes T^*M$ est -2.

Par définition, le fibré des poids L^k est de poids conforme k. De plus, si M est orientée, le fibré des formes volumes sur M, noté $\Lambda^n T^*M$, est un fibré en droites réelles associé à $GL^+(M)$ par la représentation $|\det|^{-1}$. Ainsi, nous avons $L^{-n} = \Lambda^n T^*M$. De la même façon, $L^n = \Lambda^n TM$. Dans le cas d'une variété non orientée, nous avons $L^{-2n} = \Lambda^n T^*M \otimes \Lambda^n T^*M$. Dans un certain sens, le fibré des poids généralise la notion de forme volume sur une variété.

L'identification $L^{-n} = \Lambda^n T^*M$ permet de donner un sens à l'intégrale sur M d'une section de L^{-n}. En effet, soit l une section de L^{-n}, nous écrivons $l = [s, f]$ dans une base $s = (e_1, \ldots, e_n)$ de TM, où f est une fonction sur M. Nous posons alors :

$$\int_M l = \int_M f e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

De plus, si $s' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est un second repère de TM, il existe A dans $\mathrm{GL}(n)$ telle que $s' = A \cdot s$. Par définition du fibré L^{-n}, nous avons $l = [s', |\det A|^{-1} f]$. La formule suivante montre que l'intégrale ci-dessus ne dépend pas du repère s choisi :

$$\int_M l = \int_M f |\det A|^{-1} e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n.$$

Les sections de L^{-n} sont appelées *densités d'intégration.*

Structures conformes

Dans de nombreux cas, une classe conforme sur la variété M est définie comme une classe d'équivalence de métriques riemanniennes, notée $[g]$, dans laquelle deux métriques riemanniennes g et $\widetilde{g}$ sont équivalentes s'il existe une fonction strictement positive f sur M telle que $\widetilde{g} = fg$. En géométrie conforme, il est intéressant de considérer la structure conforme de la variété non pas comme une classe d'équivalence, mais comme une objet algébrique sur la variété. Pour cela, nous nous intéressons aux sections du fibré $S^2(T^*M)\otimes L^2$ qui sont, par ailleurs, des objets de poids conforme nul. Une section c de $S^2(T^*M)\otimes L^2$ est normalisée lorsque l'endomorphisme $\Lambda^n c \otimes \Lambda^n c$, où $\Lambda^n c$ est la puissance extérieur n-ième[1] de c, définit l'isomorphisme naturel entre $\Lambda^n T^*M \otimes \Lambda^n T^*M$ et L^{-2n}.

Définition .1. Une structure conforme c sur M est une section normalisée du fibré $S^2(T^*M) \otimes L^2$ telle que, pour tout vecteur non nul X sur M, $c(X,X)$ est un élément de L^2_+.

Dans toute la suite du chapitre, M est munie d'une structure conforme c. Une famille $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ de vecteurs sur M est une base *c-orthonormée* de TM s'il existe une section l de L telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij} l^2$, pour tout i et pour tout j de 1 à n. Nous pouvons définir des *isomorphismes musicaux*, $\flat : TM \to T^*M \otimes L^2$ par :

$$X^\flat = c(X, \cdot)\,, \qquad \forall X \in TM,$$

et $\sharp : T^*M \to TM \otimes L^{-2}$ par :

$$\alpha = c(\alpha^\sharp, \cdot)\,, \qquad \forall \alpha \in T^*M.$$

Contrairement au cas où une métrique riemannienne est donnée sur M, nous ne pouvons plus identifier les vecteurs et les 1-formes sur M dans le cadre conforme. Désormais, un vecteur sur M s'identifie à une 1-forme sur M tordue par une section de poids 2. En effet, les isomorphismes musicaux $\sharp$ et $\flat$ nous donnent $TM \simeq T^*M \otimes L^2$ et $T^*M \simeq TM \otimes L^{-2}$ respectivement. Nous remarquons par ailleurs que seuls deux objets de même poids conforme peuvent être identifiés. En particulier, la base duale algébrique de la base c-orthonormée $\{e_i\}$, notée $\{e_i^*\}$, satisfait la relation $e_i^* = e_i^\flat l^{-2}$ pour tout i, où l est la section de L associée à la base c-orthonormée $\{e_i\}$.

Les isomorphismes musicaux nous donnent également l'identification suivante :

$$T^*M \otimes T^*M \cong T^*M \otimes TM \otimes L^{-2}.$$

En contractant 1-formes et vecteurs, l'isomorphisme ci-dessus définit l'application linéaire :

$$\mathrm{tr}_c : T^*M \otimes T^*M \to L^{-2}.$$

[1]Soient E et V deux espaces vectoriels réels ou complexes. Nous rappelons que la puissance extérieure k-ième d'un morphisme $u : E \to V$, notée $\Lambda^k u$, est définie par $\Lambda^k u(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) = u(e_1) \wedge \ldots \wedge u(e_k)$, pour tout k-uplet $(e_1, \ldots, e_k)$ de E^k.

L'application linéaire tr_c est la *trace conforme* des applications bilinéaires sur M.

Nous considérons le groupe conforme $\mathrm{CO}(n) = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$. La structure conforme c définit une réduction du $\mathrm{GL}(n)$-fibré principal $GL(M)$ en un $\mathrm{CO}(n)$-fibré principal, noté $CO(M)$ et appelé *fibré des repères conformes*. Celui-ci est constitué des repères c-orthonormés de TM. Dans ce cas, le fibré des densités peut se définir de la façon suivante :

$$L^k = CO(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R}.$$

Nous pouvons définir le groupe conforme orienté $\mathrm{CO}^+(n) = \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$ et si M est orientée, le fibré des repères conformes orientés $CO^+(M)$.

Décrivons la correspondance biunivoque entre les métriques riemanniennes dans c et les sections de L_+. En effet, si une section l de L_+ est fixée, $g = c \otimes l^{-2}$ définit une métrique riemannienne sur M. Réciproquement, lorsqu'une métrique riemannienne g est choisie dans la classe conforme c, nous pouvons construire une section l de L_+ de sorte que les bases g-orthonormées soit c-orthonormée relativement à la section l. Nous remarquons que pour toute section l_k de L_+^k, avec k réel, il existe une section l de L_+ telle que $l_k = l^k$. Par conséquent, le choix d'une section de L_+^k correspond également au choix d'une métrique dans c. Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition .2. Pour tout nombre réel k, il existe une bijection naturelle entre les sections du fibré L_+^k et les métriques riemanniennes dans c.

D'autre part, si une métrique riemannienne g est fixée dans c, les fibrés des poids sont trivialisés et leurs sections s'identifient à des fonctions sur M. En effet, si l est la section de L correspondant à g, pour tout autre section l' de L, il existe une fonction réelle f sur M telle que $l' = fl$ car L est un fibré en droites réelles. Ainsi, la section l' de L s'identifie à la fonction f. Par conséquent, lorsqu'une métrique g dans c est donnée, tous les objets conformes décris précédemment s'identifient à leur correspondant riemannien relatif à g. Par exemple, la trace conforme tr_c s'identifie à la trace, notée tr_g, relative à la métrique g choisie dans c.

1.1.2 Connexions de Weyl

En géométrie conforme, le rôle de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne est joué par l'espace affine des connexions de Weyl qui sont des connexions sans torsion préservant la classe conforme c.

Définition et premières propriétés

Définition .3. Une *connexion de Weyl* sur une variété conforme (M, c) est une connexion linéaire sans torsion sur TM induite par une connexion sur $\mathrm{CO}(M)$, ou de façon équivalente, une connexion sans torsion sur $GL(M)$ induisant une dérivée covariante sur le fibré $S^2(T^*M) \otimes L^2$ qui préserve c, c'est-à-dire telle que $Dc = 0$.

Le théorème fondamental de la géométrie conforme de H. Weyl [15] est le suivant (*cf.* aussi [26] et [12]) :

Théorème .4. L'application qui, à toute connexion linéaire D sur TM associe la connexion induite ∇^D sur L détermine, par restriction, un isomorphisme affine de l'espace des connexions de Weyl de (M, c) sur l'espace des connexions linéaires sur L.

Pour toute connexion de Weyl D avec ∇^D la connexion linéaire associée sur L, nous avons la formule de Koszul généralisée suivante :

$$\begin{aligned} 2c(D_X Y, Z) =& \nabla^D_X\Big(c(Y,Z)\Big) + \nabla^D_Y\Big(c(Z,X)\Big) - \nabla^D_Z\Big(c(Y,X)\Big) \\ &+ c(Z,[X,Y]) - c(Y,[X,Z]) - c(X,[Y,Z]). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cette formule démontre l'existence et l'unicité de D étant donnée ∇^D. Désormais, nous noterons de la même façon la connexion de Weyl D et sa connexion linéaire sur L associée. Ainsi, suivant le contexte ou nos précisions, une connexion de Weyl D agira comme connexion sur TM ou bien comme connexion linéaire sur L.

Soient D et D' deux connexions de Weyl sur (M, c). En tant que connexions linéaires sur L, la différence $D' - D$ des deux connexions de Weyl est une 1-forme sur TM à valeurs dans le fibré des endomorphismes de L, noté $End(L)$. Cependant, le fibré L étant de rang 1 nous avons $End(L) = L \otimes L^* = \mathbb{R}$. Ainsi, il existe une 1-forme réelle sur M telle que :

$$D'l = Dl + \theta \otimes l, \qquad \forall l \in L. \tag{1.3}$$

L'espace des connexions de Weyl sur (M, c) est donc un sous-espace affine de l'espace des connexions linéaires sur L de direction T^*M. La relation (1.3) et la formule de Koszul (1.2) nous donnent la relation entre D' et D en tant que connexions sur TM :

$$D'_X Y = D_X Y + \theta(X)Y + (\theta \wedge X)(Y), \qquad \forall X \in TM,\ \forall Y \in C^\infty(TM). \tag{1.4}$$

L'endomorphisme antisymétrique $\theta \wedge X$ de TM est défini par :

$$(\theta \wedge X)(Y) = \theta(Y)X - c(X, Y)\theta^\sharp.$$

En particulier, d'après la définition .3, la connexion de Levi-Civita d'une métrique g dans c, notée D^g, est une connexion de Weyl. Pour toute connexion de Weyl D et toute métrique g de c, d'après la formule (1.3), nous avons :

$$Dl = D^g l + \theta_g \otimes l, \qquad \forall l \in L. \tag{1.5}$$

La 1-forme θ_g est appelée 1-*forme de Lee* de D relativement à g. Soit g une métrique riemannienne dans c. Nous considérons la section l_g de L correspondant à la métrique g. Comme connexion de Weyl, D^g préserve la structure conforme c, et comme connexion riemannienne, D^g préserve la métrique $g = c \otimes l_g^{-2}$. Par conséquent, la section l_g correspondant à la métrique g est D^g-parallèle, c'est-à-dire $D^g l_g = 0$. Ainsi, d'après la relation

(1.3), pour toute connexion de Weyl D sur (M,c) et pour toute métrique g dans c nous avons :

$$D_X l_g = \theta_g(X) l_g, \qquad \forall X \in TM. \tag{1.6}$$

Cette formule, s'étend aux sections du fibré des densités de poids k, avec k réel, de la façon suivante :

Proposition .5. Pour toute connexion de Weyl D, nous avons la relation suivante :

$$Dl = k\theta_g \otimes l, \qquad \forall l \in C^\infty(L^k), \tag{1.7}$$

où g est la métrique dans c correspondant à la section l.

Démonstration. Pour toute section l de L^k, il existe une section l_1 de L telle que $l = l_1^k$. Soit g dans c correspondant à l_1. Nous remarquons que g est aussi la métrique correspondant à l. D'après la formule (1.6), nous avons :

$$Dl_1^k = kl_1^{k-1} \otimes Dl_1 = k\theta_g \otimes l_1^{k-1} \otimes l_1 = k\theta_g \otimes l_1^k.$$

Nous avons donc la formule souhaitée :

$$Dl = k\theta_g \otimes l.$$

□

Nous déduisons de cette proposition une formule analogue à (1.5) :

Corollaire .6. Pour toute connexion de Weyl D et pour toute métrique g dans c, nous avons :

$$Dl = D^g l + k\theta_g \otimes l, \qquad \forall l \in L^k. \tag{1.8}$$

Démonstration. Soient g une métrique dans c et l une section de L^k. Considérons la section l_g de L^k correspondant à g. Il existe une fonction f sur M telle que $l = fl_g$. Le résultat est donné par le calcul suivant, dans lequel nous utilisons la proposition .5 :

$$\begin{aligned} Dl =& D(fl_g) \\ =& Df \otimes l_g + fDl_g \\ =& D^g f \otimes l_g + k\theta_g \otimes fl_g \\ =& D^g l + k\theta_g \otimes l. \end{aligned}$$

□

Remarque .7. Considérons un fibré vectoriel E réel de rang n sur M associé au fibré des repères de TM via une représentation $\nu : \mathrm{GL}(n) \to End(\mathbb{R}^n)$, en d'autres termes, nous avons $E = GL(M) \times_\nu \mathbb{R}^n$. Supposons que E soit de poids conforme k. Rappelons que k est le poids de la représentation ν associée à E. Soient $\widetilde{D}$ et D deux connexions de Weyl sur M telles que $\widetilde{D} = D + \theta$ sur L. Rappelons que les connexions de Weyl agissant sur le fibré TM sont reliées par $\widetilde{D}_X = D_X + \theta(X)\mathrm{Id} + \theta \wedge X$, où $\theta \wedge X(Y) = \theta(Y) - c(X,Y)\theta^\sharp$. De façon générale, les connexions de Weyl $\widetilde{D}$ et D s'étendent au fibré E et elles sont reliées par la formule suivante :

$$\widetilde{D}_X s = D_X s + k\theta(X)s + d\nu(\theta \wedge X)(s), \qquad \forall s \in C^\infty(E), \tag{1.9}$$

où $d\nu$ est la différentielle à l'origine de la représentation ν sur $\mathrm{GL}(n)$. Avec cette remarque, les formules 1.3, 1.5 et 1.8 sont tautologiques.

Nous terminons ce paragraphe en établissant la relation entre deux formes de Lee d'une connexion de Weyl D relatives à deux métriques distinctes dans c.

Proposition .8. Soient $\widetilde{g}$ et g deux métriques dans c telle que $\widetilde{g} = fg$, où f est une fonction strictement positive sur M. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons :

$$\theta_{\widetilde{g}} = \theta_g - \frac{1}{2}\frac{df}{f}, \tag{1.10}$$

où $\theta_{\widetilde{g}}$ et θ_g sont respectivement les 1-formes de Lee de D relatives à $\widetilde{g}$ et g.

Démonstration. Soient l et $\widetilde{l}$ les sections de L correspondant respectivement à g et $\widetilde{g}$. D'après la formule (1.6), nous avons :

$$D\widetilde{l} = \theta_{\widetilde{g}} \otimes \widetilde{l} \qquad \text{et} \qquad Dl = \theta_g \otimes l. \tag{1.11}$$

De plus, $g = c \otimes l^{-2}$, $\widetilde{g} = c \otimes \widetilde{l}^{-2}$ et $\widetilde{g} = fg$. Nous en déduisons que $\widetilde{l} = f^{-\frac{1}{2}} l$. Par conséquent, les relations (1.11), nous donnent :

$$D\widetilde{l} = df^{-\frac{1}{2}} \otimes l + f^{-\frac{1}{2}} Dl = (-\frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} df + f^{-\frac{1}{2}}\theta_g) \otimes l \qquad \text{et} \qquad D\widetilde{l} = \theta_{\widetilde{g}} \otimes \widetilde{l} = f^{-\frac{1}{2}}\theta_{\widetilde{g}} \otimes l.$$

Nous en déduisons immédiatement la formule souhaitée :

$$\theta_{\widetilde{g}} = \theta_g - \frac{1}{2}\frac{df}{f}.$$

□

Courbure des connexions de Weyl

La courbure d'une connexion de Weyl D, considérée comme une connexion linéaire sur L, est une 2-forme réelle sur TM. Nous notons F^D cette courbure qui est appelée *courbure de Faraday* de D. Soient D une connexion de Weyl sur (M, c), l une section de L et g la métrique correspondante dans c. En utilisant la formule (1.6), nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F^D(X,Y)l =& D_X(D_Y l) - D_Y(D_X l) - D_{[X,Y]} l \\ =& D_X(\theta_g(Y)l) - D_Y(\theta_g(X)l) - \theta_g([X,Y])l \\ =& X \cdot \theta_g(Y)l + \theta_g(Y)\theta_g(X)l - Y \cdot \theta_g(X)l - \theta_g(X)\theta_g(Y)l - \theta_g([X,Y])l \\ =& \Big(X \cdot \theta_g(Y) - Y \cdot \theta_g(X) - \theta_g([X,Y])\Big)l \\ =& d\theta_g(X,Y)l. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons la proposition suivante :

Proposition .9. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons :

$$F^D = d\theta_g, \qquad \forall g \in c. \tag{1.12}$$

Définition .10. Une structure de Weyl D est *fermée*, respectivement *exacte*, si D est plate en tant que connexion linéaire sur L, c'est-à-dire si $F^D = 0$, respectivement si D admet une section globale D-parallèle.

Proposition .11. Une structure de Weyl D est fermée, respectivement exacte, si et seulement si, pour toute métrique g dans c, θ_g est fermée, respectivement exacte.

Démonstration. D'après la formule (1.12), D est fermée si et seulement si il existe g dans c telle que $d\theta_g = 0$. Dans ce cas, d'après la proposition .8, $\theta_{\tilde{g}}$ est fermée pour tout $\tilde{g}$ dans c.

Supposons D exacte. Soit l une section non nulle D-parallèle et g sa métrique correspondante. La formule (1.6) donne $\theta_g \otimes l = 0$, donc $\theta_g = 0$. Ainsi, d'après la proposition .8, pour toute métrique g dans c, θ_g est exacte. □

Corollaire .12. Une connexion de Weyl D est fermée, respectivement exacte, si et seulement si D est localement , respectivement globalement, la connexion de Levi-Civita d'une métrique dans c.

Démonstration. D'après la preuve de la proposition .11, si D est exacte, il existe g dans c telle que $\theta_g = 0$. Par conséquent, la formule (1.5) donne $D = D^g$, c'est à dire D est la connexion de Levi-Civita de g.

Une forme fermée est localement exacte. Ainsi, en utilisant les mêmes propriétés, nous montrons que D est localement une connexion de Levi-Civita. □

Remarque .13. La formule (1.3), le corollaire .12 et la proposition .8, nous permettent de retrouver la formule de changement conforme des connexions de Levi-Civita de deux métriques dans la même classe conforme. Soient $D^{\widetilde{g}}$ et D^g les connexions de Levi-Civita respectives de $\widetilde{g}$ et g, où $\widetilde{g} = fg$, nous obtenons :

$$2fD^{\widetilde{g}}_X Y = 2fD^g_X Y + df(X)Y + df(Y)X - g(X,Y)df^{\sharp_g}, \qquad \forall X \in TM,\ \forall Y \in C^\infty(TM),$$

où $\sharp^g$ est l'isomorphisme musical relatif à la métrique riemannienne g.

La *courbure de Weyl* de D, notée R^D, est la courbure de D considérée comme connexion sur TM et définie par :

$$\mathrm{R}^D_{X,Y}Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,$$

pour tout champs de vecteurs X, Y et Z. Contrairement à la courbure riemannienne, le tenseur de courbure R^D n'est pas antisymétrique en tant qu'endomorphisme de TM. En effet, la courbure de Faraday est la partie symétrique de R^D. Nous avons la décomposition suivante :

$$\mathrm{R}^D = \mathrm{R}^{D,a} + F^D \otimes \mathrm{Id}, \tag{1.13}$$

où $\mathrm{R}^{D,a}$ est la partie antisymétrique de la courbure de D et où Id est l'identité des endomorphismes de TM. La *courbure de Ricci* de la connexion de Weyl D est donnée par :

$$\mathrm{Ric}^D(X,Y) = \mathrm{trace}(Z \mapsto \mathrm{R}^D_{Z,X}Y).$$

L'opérateur de Ricci de la connexion de Weyl, noté Ric^D, est l'application linéaire de TM dans $TM \otimes L^{-2}$ définie par :

$$c(\mathrm{Ric}^D(X), Y) = \mathrm{Ric}^D(X,Y).$$

Dans la base c-orthonormée $\{e_i\}_{i=1\dots n}$, nous avons l'écriture locale suivante :

$$\mathrm{Ric}^D(X) = \sum_{i=1}^n (\mathrm{R}^{D,a}_{X,e_i} e_i) l^{-2}, \tag{1.14}$$

où l est la section de L associée à la base c-orthonormée $\{e_i\}_{i=1\dots n}$. La courbure Ric^D est une section du fibré $T^*M \otimes T^*M$. La *courbure scalaire* de D, notée $Scal^D$, est définie par :

$$Scal^D = \mathrm{tr}_c(\mathrm{Ric}^D).$$

Ainsi, la courbure scalaire de D est une densité de poids 2. Lorsqu'une métrique g est fixée dans c, $Scal^D$ s'identifie à une fonction sur M par la formule suivante [15] :

$$Scal^D = Scal^g + 2(n-1)\delta^g \theta_g - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g, \tag{1.15}$$

où $Scal^g$ est la courbure scalaire de g et δ^g est l'opérateur de divergence relatif à g. Pour plus d'information sur les connexions de Weyl, le lecteur intéressé pourra consulter [15] et [8]. Nous terminons ce paragraphe par une définition :

Définition .14. La donnée (M, c, D), où D est une connexion de Weyl sur la variété conforme (M, c), est appelée *structure de Weyl*.

1.2 Formules de Bochner conformes

Pour une variété riemannienne (M, g), la formule de Bochner (voir [5] page $56 - 58$) est donnée par :

$$(\mathscr{D}^g)^2\alpha = \Delta^g\alpha + \mathrm{Ric}^g(\alpha), \qquad \forall \alpha \in T^*M, \tag{1.16}$$

où Δ^g, Ric^g et $\mathscr{D}^g$ sont respectivement l'opérateur Laplacien, l'opérateur de Ricci et l'opérateur de Dirac relatifs à la métrique g. L'opérateur de Dirac agissant sur les formes est donné par $\mathscr{D}^g = \delta^g + d$, où δ^g est la divergence définie par g et d la différentielle extérieure sur M. Le Laplacien est défini par $\Delta^g = -\mathrm{tr}(D^g \circ D^g)$, où D^g est la connexion de Levi-Civita de g. Dans la suite de cette section, nous allons établir une version conforme de la formule de Bochner. Pour cela, nous commençons par définir les opérateurs conformes analogues à ceux intervenant dans le cas riemannien.

Soit (M, c, D) une structure de Weyl. Définissons l'opérateur de divergence conforme relatif à D, noté δ^D, et la différentielle extérieure, notée d^D, induite par la connexion sans torsion D. Dans une base c-orthonormée $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$, les opérateurs $\delta^D : L^k \otimes \Lambda^p T^*M \to L^{k-2} \otimes \Lambda^{p-1}T^*M$ et $d^D : L^k \otimes \Lambda^p T^*M \to L^k \otimes \Lambda^{p+1}T^*M$ sont définis par les formules suivantes :

$$\delta^D\omega = -\sum_{i=1}^{n}(e_i \lrcorner D_{e_i}\omega)l^{-2} \qquad \text{et} \qquad d^D\omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge D_{e_i}\omega, \tag{1.17}$$

où $\{e_i^*\}_{i=1\ldots n}$ est la base duale algébrique de $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ et l la section de L associée à la base c-orthonormée $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$. Une section ω du fibré $L^k \otimes \Lambda^p M$ est aussi appelée *p-forme de poids k*. Nous étudions maintenant le lien entre deux opérateurs différentiels ou deux opérateurs de divergence conforme associés à deux connexions de Weyl distinctes. Par la suite, nous aurons besoin de comparer les opérateurs d^D et δ^D à leur correspondant riemanniens lorsque qu'une métrique sera fixée dans c.

Lemme .15. Soient $\widetilde{D}$ et D deux connexions de Weyl sur (M, c) telles que $\widetilde{D} = D + \theta$. Pour toute p-forme ω de poids k, c'est-à-dire $\omega \in C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes L^k)$, nous avons :

$$\widetilde{D}_X\omega = D_X\omega + (k-p)\theta(X)\omega - \theta \wedge (X \lrcorner \omega) + X^\flat \wedge (\theta^\sharp \lrcorner \omega), \qquad \forall X \in TM. \tag{1.18}$$

En particulier, si $\alpha \in C^\infty(T^*M \otimes L^k)$, nous avons :

$$\widetilde{D}\alpha = D\alpha + (k-1)\theta \otimes \alpha - \alpha \otimes \theta + c(\alpha, \theta)c. \tag{1.19}$$

Démonstration. Soit ω dans $C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes L^k)$. D'après la remarque .7, les connexions de Weyl agissant sur les p-formes de poids k sont reliées par la forme suivante :

$$\widetilde{D}_X\omega = D_X\omega + (k-p)\theta(X)\omega + d\nu(\theta \wedge X)(\omega), \tag{1.20}$$

où ν est la représentation, décrite par (1.1), définissant le fibré cotangent T^*M comme fibré associé au fibré principal des repères de TM. Soit $\{X_1, \dots, X_p\}$ une famille de p vecteurs de TM, nous avons :

$$\begin{aligned}
d\nu(\theta \wedge X)(\omega)(X_1, \dots, X_p) &= -\sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \dots, (\theta \wedge X)X_i, \dots, X_n) \\
&= -\sum_{i=1}^{p} \theta(X_i)\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, \dots, X_p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} c(Y, X_i)\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \theta^\sharp, \dots, X_p) \\
&= -\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\theta(X_i)\omega(Y, X_1, \dots, X_p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}c(Y, X_i)\omega(\theta^\sharp, X_1, \dots, X_p) \\
&= -\,\theta \wedge (Y \lrcorner \omega)(X_1, \dots, X_p) + Y^\flat \wedge (\theta^\sharp \lrcorner \omega)(X_1, \dots, X_p).
\end{aligned}$$

Ce calcul nous donne bien la formule souhaitée :

$$\widetilde{D}_X\omega = D_X\omega + (k-p)\theta(X)\omega - \theta \wedge (X \lrcorner \omega) + X^\flat \wedge (\theta^\sharp \lrcorner \omega).$$

□

Corollaire .16. Soient $\widetilde{D}$ et D deux connexions de Weyl sur (M, c) telles que $\widetilde{D} = D + \theta$. Nous avons :

$$d^{\widetilde{D}}\omega = d^D\omega + k\theta \wedge \omega, \qquad \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes L^k). \tag{1.21}$$

Démonstration. Soient $\omega \in C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes L^k)$ et $\{e_i\}_{i=1\dots n}$ une base c-orthonormée. En contractant par e_i^* la formule (1.18), évaluée en e_i, du lemme .15, nous obtenons :

$$e_i^* \wedge \widetilde{D}_{e_i}\omega = e_i^* \wedge D\omega + (k-p)\theta(e_i)e_i^* \wedge \omega + \theta \wedge e_i^* \wedge (e_i \lrcorner \omega).$$

En sommant pour i de 1 à n la formule précédente, nous avons le résultat souhaité :

$$d^{\widetilde{D}}\omega = d^D\omega + (k-p)\theta \wedge \omega + p\theta \wedge \omega = d^D\omega + k\theta \wedge \omega.$$

□

De la même façon, nous pouvons montrer la proposition suivante :

Proposition .17. Soient $\widetilde{D}$ et D deux connexions de Weyl sur (M, c) telles que $\widetilde{D} = D+\theta$. Nous avons :

$$\delta^{\widetilde{D}}(\omega) = \delta^D(\omega) + (2-n-k+p)\theta^\sharp \lrcorner \omega, \qquad \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^p T^*M \otimes L^k). \tag{1.22}$$

Si g est une métrique dans c, les opérateurs δ^g et d peuvent être considérés comme les opérateurs de divergence conforme et comme la différentielle relative à la connexion de Levi-civita D^g de g qui, en particulier, est une connexion de Weyl. Les formules (1.21) et (1.22) précédentes nous permettent notamment de relier les opérateurs δ^D et d^D aux opérateur δ^g et d respectivement. Commençons maintenant la démonstration de la formule de Bochner conforme en établissant quelques formules préliminaires.

Proposition .18. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons la formule suivante :

$$(d^D)^2\omega = kF^D \wedge \omega, \qquad \forall\omega \in C^\infty(\Lambda^*T^*M \otimes L^k). \tag{1.23}$$

Démonstration. Soit ∇ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel E sur M. Soit d^∇ l'opérateur différentielle associé à ∇ agissant sur les formes sur M à valeurs dans E. Pour toute forme ψ à valeurs dans E, nous avons la formule suivante :

$$(d^\nabla)^2\psi = \mathcal{R}^\nabla \wedge \psi, \tag{1.24}$$

où $\mathcal{R}^\nabla$ est la courbure de la connexion ∇. Dans notre situation, la courbure de la connexion de Weyl D agissant sur les formes de poids k est kF^D. Pour toute section ω de $\Lambda^*T^*M\otimes L^k$, nous avons :

$$(d^D)^2\omega = kF^D \wedge \omega.$$

□

Nous allons maintenant établir la formule de Bochner conforme. Nous pouvons considérer l'opérateur $d^D + \delta^D$ comme un opérateur de Dirac sur l'espace des formes à poids, que nous notons $\mathscr{D}^D = d^D + \delta^D$. Soit α une section de $T^*M \otimes L^k$. En suivant la méthode pour établir la formule de Bochner (1.16) (voir [5] page 56) et les règles de calcul des connexions sans torsion, nous obtenons :

$$(\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha = \Delta^D\alpha + \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{R}^D_{e_i,\cdot}\alpha)(e_i)l^{-2}, \tag{1.25}$$

où Δ^D est le Laplacien relatif à D défini par $\Delta^D\omega = -\mathrm{tr}_c(D \circ D)$. De plus, la courbure de la connexion de Weyl agit sur les 1-formes de poids k de la façon suivante :

$$(\mathrm{R}^D_{X,Y}\alpha)(Z) = kF^D(X, Y)\alpha(Z) - \alpha(\mathrm{R}^D_{X,Y}Z), \qquad \forall\alpha \in T^*M \otimes L^k. \tag{1.26}$$

Pour tout X dant TM, les formules (1.25) et (1.26) nous donnent le calcul suivant :

$$\begin{aligned}((\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha)(X) =&(\Delta^D\alpha)(X) + k\sum_{i=1}^{n} F^D(e_i, X)\alpha(e_i)l^{-2} - \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{R}^D_{e_i,X}e_i)l^{-2}\Big),\\ =&(\Delta^D\alpha)(X) + kF^D(\alpha^\sharp, X) - \alpha(-\mathrm{Ric}^D(X))\\ =&(\Delta^D\alpha)(X) + kF^D(\alpha^\sharp, X) + c(\mathrm{Ric}^D(X), \alpha^\sharp)\\ =&(\Delta^D\alpha)(X) + kF^D(\alpha^\sharp, X) + \mathrm{Ric}^D(X, \alpha^\sharp).\end{aligned} \tag{1.27}$$

Ainsi, en contractant par α la formule obtenue par le calcul (1.27) précédent, nous obtenons :

$$\langle(\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha, \alpha\rangle = \langle\Delta^D\alpha, \alpha\rangle + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp). \tag{1.28}$$

De plus, en utilisant la formule (1.23), nous avons $(\mathscr{D}^D)^2\alpha = \delta^D(\delta^D\alpha) + (\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha + kF^D \wedge \alpha$. Il suffit alors de remarquer que $\delta^D(\delta^D\alpha) = 0$ et que les formes α et $F^D \wedge \alpha$ n'ont pas le même degré pour en déduire la formule suivante :

$$\langle(\mathscr{D}^D)^2\alpha, \alpha\rangle = \langle(\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha, \alpha\rangle. \tag{1.29}$$

D'après les formules (1.28) et (1.29), nous obtenons la formule de Bochner conforme suivante :

Théorème .19. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons :

$$\langle(\mathscr{D}^D)^2\alpha, \alpha\rangle = \langle\Delta^D(\alpha), \alpha\rangle - \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp), \qquad \forall\alpha \in C^\infty(T^*M \otimes L^k). \tag{1.30}$$

Nous terminons cette section en établissant une version intégrale de la formule de Bochner conforme. Rappelons que les objets naturellement intégrables sur une variété conforme sont les densités de poids $-n$, c'est-à-dire les sections du fibré L^{-n}. Nous allons donc établir une formule de Bochner conforme mettant en jeux des sections de L^{-n}. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire conforme sur les p-formes de poids quelconque induit par c.

Proposition .20. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons la formule suivante :

$$\langle D\alpha, D\alpha\rangle + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) - \langle\mathscr{D}^D\alpha, \mathscr{D}^D\alpha\rangle = -\delta^D(\zeta_\alpha), \tag{1.31}$$

où $\zeta_\alpha(X) = \langle\alpha, D\alpha + \delta^D(\alpha)X^\flat - X\lrcorner d^D\alpha\rangle$, pour tout X dans TM.

Démonstration. Soient α et β des 1-formes de poids k. Remarquons tout d'abord que, compte tenu du degré des formes en présence, nous avons :

$$\langle(\mathscr{D}^D)^2\alpha, \beta\rangle = \langle(\delta^D d^D + d^D\delta^D)\alpha, \beta\rangle.$$

La démonstration de la formule (1.63) du paragraphe 1.5, nous donne :

$$\langle D\alpha, D\beta\rangle = \langle\Delta^D(\beta), \alpha\rangle - \delta^D(\langle\alpha, D\beta\rangle), \tag{1.32}$$

De façon similaire, nous obtenons également les deux formules suivantes :

$$\langle d^D\alpha, d^D\beta\rangle = \langle\alpha, \delta^D d^D\beta\rangle + \delta^D(\zeta^1_{\alpha,\beta}) \qquad \text{et} \qquad \langle\delta^D\alpha, \delta^D\beta\rangle = \langle\alpha, d^D\delta^D\beta\rangle + \delta^D(\zeta^2_{\alpha,\beta}), \tag{1.33}$$

où $\zeta^1_{\alpha,\beta}$ et $\zeta^2_{\alpha,\beta}$ sont les 1-formes de poids $2k-2$ définies par :

$$\zeta^1_{\alpha,\beta}(X) = \langle\alpha, \delta^D(\beta)X^\flat\rangle \qquad \text{et} \qquad \zeta^2_{\alpha,\beta}(X) = -\langle\alpha, X\lrcorner d^D\beta\rangle.$$

Les formes α et β ayant le même degré, nous avons :

$$\langle \mathscr{D}^D\alpha, \mathscr{D}^D\beta\rangle = \langle \delta^D\alpha, \delta^D\beta\rangle + \langle d^D\alpha, d^D\beta\rangle. \tag{1.34}$$

Ainsi, en sommant les équations données par (1.33), nous obtenons :

$$\langle \mathscr{D}^D\alpha, \mathscr{D}^D\beta\rangle = \langle \alpha, (\mathscr{D}^D)^2\beta\rangle + \delta^D(\zeta_{\alpha,\beta}), \tag{1.35}$$

où $\zeta_{\alpha,\beta}(X) = \langle \alpha, \delta^D(\beta)X^\flat - X\lrcorner d^D\beta\rangle$. Posons $\alpha = \beta$. Le théorème .19 et les équations (1.45) et (1.32) nous donnent immédiatement le résultat souhaité :

$$\langle D\alpha, D\alpha\rangle + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) - \langle \mathscr{D}^D\alpha, \mathscr{D}^D\alpha\rangle = -\delta^D(\zeta_\alpha),$$

où $\zeta_\alpha(X) = \langle \alpha, D\alpha + \delta^D(\alpha)X^\flat - X\lrcorner d^D\alpha\rangle$. □

Nous remarquons par exemple que $D\alpha$ est une section du fibré $L^k\otimes T^*M\otimes T^*M$ et que ζ_α est une 1-forme de poids $2k-2$, par conséquent, $\langle D\alpha, D\alpha\rangle$ et $\delta^D(\zeta_\alpha)$ sont des sections de L^{2k-4}. Les termes de l'équation (1.49) sont donc des sections du fibré L^{2k-4}. Ces termes sont des densités d'intégration si et seulement si $k = (4-n)/2$. La proposition .20 ci-dessus nous donne alors la seconde formule de Bochner conforme :

Théorème .21. Soient (M, c) une variété conforme orientée et Ω un compact de M. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c) et pour toute 1-forme α de poids $(4-n)/2$, nous avons la formule de Bochner conforme globale suivante :

$$\int_\Omega \Big(|D\alpha|^2 + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) - |\mathscr{D}^D\alpha|^2\Big) = -\int_\Omega \delta^D(\zeta_\alpha), \tag{1.36}$$

où $\zeta_\alpha(X) = \langle \alpha, D_X\alpha + \delta^D(\alpha)X^\flat - X\lrcorner d^D\alpha\rangle$ pour tous champs de vecteurs X et, où $|D\alpha|^2 = \langle D\alpha, D\alpha\rangle$ est la norme conforme induite par c.

1.3 Spineurs conformes et connexions de Weyl

1.3.1 Le fibré des spineurs à poids

L'algèbre de Clifford réelle Cl_n associée à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ est l'unique algèbre réelle, à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire A, une application linéaire v de $\mathbb{R}^n$ dans A telle que $v(x)^2 = -\|x\|^2 1_A$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, s'étend de façon unique en un morphisme d'algèbres de Cl_n dans A. Pour $n \geqslant 3$, le revêtement universel du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$ est le groupe spinoriel, noté $\mathrm{Spin}(n)$, que nous pouvons voir comme sous-groupe de Cl_n. Nous notons $\lambda : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ le revêtement à deux feuillets. Soit $\mu : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(\Delta_n)$ la représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(n)$ sur l'espace des spineurs Δ_n. Cette représentation est la restriction de la représentation de l'algèbre de Clifford Cl_n sur l'espace Δ_n. Cette représentation induit une action de Cl_n sur Δ_n. Cette action est la *multiplication de Clifford*. En particulier, $\mathbb{R}^n$ est canoniquement inclus dans Cl_n, donc $\mathbb{R}^n$ agit sur Δ_n par multiplication de Clifford. Nous notons $x \cdot \xi$ la multiplication de Clifford, où x est dans Cl_n et ξ dans Δ_n. Nous rappelons qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre Cl_n et l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$\begin{aligned} \Lambda^*\mathbb{R}^n &\to Cl_n \\ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} &\mapsto e_{i_1} \cdots e_{i_k}, \end{aligned}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, où $i_1 < \cdots < i_k$. Notons que $v\wedge$ et $v\lrcorner$ sont respectivement le produit extérieur et intérieur par v sur M. Nous avons pour la multiplication de Clifford l'identification suivante :

$$x \cdot (\omega \cdot \xi) = (x \wedge \omega) \cdot \xi - x \lrcorner \omega \cdot \xi, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \omega \in \Lambda^*\mathbb{R}^n,\ \forall \xi \in \Delta_n. \tag{1.37}$$

La représentation de $\mathrm{Spin}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ et Δ_n préserve le produit de Clifford. Plus précisément,

$$\mu(\gamma)(x \cdot \xi) = (\lambda(\gamma)x) \cdot (\mu(\gamma)\xi), \qquad \forall \gamma \in \mathrm{Spin}(n),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \xi \in \Delta_n.$$

Soit g une métrique riemannienne sur M. Une structure *spin* sur (M, g) est un $\mathrm{Spin}(n)$-fibré principal, noté $Spin_g(M)$, muni d'un revêtement à deux feuillets équivariant sur le fibré de repères g-orthonormés directs $SO_g(M)$. L'existence d'une telle structure sur M est une condition topologique : M est une variété spinorielle si sa seconde classe de Stiefel-Whitney est nulle. Lorsqu'il existe, le fibré des spineurs de (M, g) est défini par :

$$\Sigma^g = Spin_g(M) \times_\mu \Delta_n.$$

Pour plus de détails concernant la géométrie spinorielle dans le cadre riemannien, le lecteur pourra consulter [13].

Nous définissons le groupe spinoriel conforme $\mathrm{CSpin}(n)$ comme le produit $\mathrm{Spin}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$. Pour tout $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{CSpin}(n)$, nous écrirons :

$$\widetilde{\gamma} = a\gamma,$$

où $a \in \mathbb{R}^{>0}$ et $\gamma \in \mathrm{Spin}(n)$ sont uniquement déterminés. Rappelons que $\mathrm{CO}^+(n) = \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{>0}$. Nous avons le morphisme de groupes $\widetilde{\lambda} : \mathrm{CSpin}(n) \to \mathrm{CO}^+(n)$ défini comme le produit de λ et de l'identité de $\mathbb{R}^{>0}$. Soit $k \in \mathbb{R}$. La représentation spinorielle conforme de poids k, notée $\mu^{(k)}$, est la représentation linéaire de $\mathrm{CSpin}(n)$ sur l'espace des spineurs Δ_n définie par :

$$\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma}) = a^k \mu(\gamma),$$

pour tout $\widetilde{\gamma}$ dans $\mathrm{CSpin}(n)$. De la même façon que la représentation spinorielle, nous avons une relation de compatibilité entre la multiplication de Clifford et la représentation spinorielle conforme de poids k. Pour $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{CSpin}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \Delta_n$, nous avons :

$$\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma})(x \cdot \xi) = \left(\widetilde{\lambda}(\widetilde{\gamma})x\right) \cdot \left(\mu^{(k)}(\widetilde{\gamma})\xi\right).$$

Le fibré vectoriel des spineurs de poids conforme k est défini par :

$$\Sigma^{(k)} = CSpin(M) \times_{\mu^{(k)}} \Delta_n.$$

Nous avons l'identification suivante :

$$\Sigma^{(k)} \cong \Sigma^{(0)} \otimes L^k.$$

L'action de Clifford de TM sur l'espace des spineurs à poids est l'application

$$\begin{aligned} TM \otimes \Sigma^{(k)} &\to \Sigma^{(k+1)} \\ X \otimes \psi &\mapsto X \cdot \psi \end{aligned}$$

définie par :

$$X \cdot \psi = [\widetilde{s}, x \cdot \xi],$$

où ψ et X sont respectivement représentés par $[\widetilde{s}, \xi]$ et $[s, x]$. Nous rappelons que $\widetilde{s}$ est un repère de CSpin(M) tel que $s = \widetilde{\lambda}(\widetilde{s})$, et que $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition .22. Pour tout $g \in c$, et tout $k \in \mathbb{R}$, il existe un isomorphisme canonique de Σ^g dans $\Sigma^{(k)}$.

Démonstration. Une métrique g dans la classe conforme définit une réduction du fibré $CSpin(M)$ à $Spin_g(M)$. Dans ce cas, nous avons :

$$CSpin(M) \times_{\mu^{(k)}} \Delta_n = Spin_g(M) \times_{\mu} \Delta_n,$$

puisque μ est la restriction de la représentation $\mu^{(k)}$ au groupe Spin(n). □

Soient g dans c et $\widetilde{g} = f^{-2} g$, avec f une fonction réelle non nulle sur M. La proposition précédente nous donne une famille d'isomorphismes

$$\begin{array}{rcll} \Phi^{(k)} & : & \Sigma^g M & \to \Sigma^{\widetilde{g}} M \\ & & [\widetilde{s}, v] & \mapsto [\widetilde{s} f, f^{-k} v] \end{array}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$. Soit $\langle \, , \rangle$ le produit scalaire hermitien sur Δ_n compatible avec l'action de Clifford. Notons $(\, ,)_g$ le produit scalaire hermitien Spin(n)-invariant sur Σ^g induit par $\langle \, , \rangle$. Les isomorphismes $\Phi^{(k)}$ ne sont pas des isométries :

$$|\Phi^{(k)} \psi|_{\widetilde{g}} = f^{-2k} |\psi|_g.$$

Nous définissons une application bilinéaire h par :

$$\begin{aligned} h \ : \Sigma^{(k_1)} \otimes \Sigma^{(k_2)} &\to L_{\mathbb{C}}^{k_1+k_2} \\ \psi \otimes \varphi &\mapsto [s, \langle u, v \rangle], \end{aligned} \tag{1.38}$$

où ψ et φ sont représentés respectivement par $[\widetilde{s}, \xi]$ et $[\widetilde{s}, \zeta]$ et où s est le projeté de $\widetilde{s}$ sur $CO(M)$.

Proposition .23. L'application bilinéaire h est bien définie et nous avons :

$$h(X\cdot\psi,\varphi) = -h(\psi, X\cdot\varphi) \in L_{\mathbb{C}}^{k_1+k_2-1}, \qquad \forall\psi\in\Sigma^{(k_1)},\ \forall\varphi\in\Sigma^{(k_2)},\ X\in TM.$$

Démonstration. En changeant le repère $\widetilde{s}$ par $\widetilde{s}\cdot\widetilde{\gamma}^{-1}$, où $\widetilde{\gamma}\in\mathrm{CSpin}(n)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle\mu^{(k_1)}(\widetilde{\gamma})\xi, \mu^{(k_2)}(\widetilde{\gamma})\zeta\rangle =&\langle a^{k_1}\mu(\gamma)\xi, a^{k_2}\mu(\gamma)\zeta\rangle\\ =&a^{k_1+k_2}\langle\mu(\gamma)\xi,\mu(\gamma)\zeta\rangle\\ =&a^{k_1+k_2}\langle\xi,\zeta\rangle\\ =&(\det\widetilde{\gamma})^{(k_1+k_2)/n}\langle\xi,\zeta\rangle.\end{aligned}$$

Ce calcul montre que $[s,\langle\xi_1,\xi_2\rangle]$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{k_1+k_2}$ et donc que h est bien définie. Pour ξ et ζ dans Δ_n, et pour x dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire hermitien sur Δ_n vérifie :

$$\langle x\cdot\xi,\zeta\rangle = -\langle\xi, x\cdot\zeta\rangle.$$

Par définition de la multiplication de Clifford des spineurs à poids, il est clair que h vérifie la même relation. □

Les sections du fibré $L_{\mathbb{C}}^{-n}$ sont des densités d'intégration sur M. Pour $k_1+k_2=-n$, nous définissons une application sesquilinéaire $H : C_0^\infty(\Sigma^{(k_1)})\times C_0^\infty(\Sigma^{(k_2)})\to\mathbb{C}$ par :

$$H(\psi,\varphi) = \int_M h(\psi,\varphi),$$

où C_0^∞ désigne l'espace des sections lisses à support compact. Soient k_1 et k_2 des réels tels que $k_1+k_2=-n$ et g une métrique dans la classe conforme c. Nous avons vu que les fibrés $\Sigma^{(k_1)}$ et $\Sigma^{(k_2)}$ s'identifient canoniquement au fibré Σ^g par la proposition .22. La multiplication de Clifford définie sur les spineurs à poids s'identifie alors à la multiplication de Clifford (usuelle) sur Σ^g. D'autre part, l'image de l'application h par cette identification est le produit scalaire hermitien $(\ ,\ )_g$ défini sur Σ^g. Ainsi, nous pouvons remarquer que, pour une métrique g quelconque dans c, nous avons :

$$H(\psi,\varphi) = \int_M (\psi,\varphi)_g v_g,$$

où v_g est la forme volume associée à la métrique g.

1.3.2 Connexions de Weyl à poids

Soient (M,c,D) une structure de Weyl et k un réel. La connexion de Weyl D induit une connexion, noté $D^{(k)}$, sur $\Sigma^{(k)}$.

Proposition .24. Soient D et $\widetilde{D}$ deux structures de Weyl sur (M,c) tels que $D=\widetilde{D}+\theta$. Les connexions D et $\widetilde{D}$ induisent respectivement deux connexions linéaires $D^{(k)}$ et $\widetilde{D}^{(k)}$ sur $\Sigma^{(k)}$ reliées par :

$$D_X^{(k)}\psi = \widetilde{D}_X^{(k)}\psi - \frac{1}{2}X\cdot\theta\cdot\psi + (k-\frac{1}{2})\theta(X)\psi, \qquad \forall\psi\in C^\infty(\Sigma^{(k)}),\ \forall X\in TM. \quad (1.39)$$

En particulier, pour toute métrique g dans c, nous avons :

$$D_X^{(k)}\psi = D_X^g\psi - \frac{1}{2}X \cdot \theta_g \cdot \psi + (k - \frac{1}{2})\theta_g(X)\psi, \qquad \forall\psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}),\ \forall X \in TM, \quad (1.40)$$

où θ_g est la 1-forme de Lee de D relativement à g.

Démonstration. Nous avons vu que les structures de Weyl D et $\widetilde{D}$ sont reliées par $D = \widetilde{D} + \Theta$ sur TM, où $\Theta(X) = \theta \wedge X + \theta(X)\mathrm{Id}$. Les connexions induites par D et $\widetilde{D}$ sur le fibré $\Sigma^{(k)}$ vérifient donc la relation suivante :

$$D^{(k)} = \widetilde{D}^{(k)} + d\mu^{(k)}(\Theta),$$

où $d\mu^{(k)}$ est la différentielle à l'origine de la représentation linéaire de poids k de $\mathrm{CSpin}(n)$. Nous obtenons :

$$D^{(k)} = \widetilde{D}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} d\mu(\theta \wedge e_i) \otimes e_i^* + k\mathrm{Id} \otimes \theta.$$

Nous obtenons alors la formule suivante :

$$D_X^{(k)}\psi = \widetilde{D}_X^{(k)}\psi + \frac{1}{2}(\theta \wedge X) \cdot \psi + k\theta(X)\psi, \qquad \forall\psi \in \Sigma^{(k)},\ \forall X \in TM.$$

De plus, d'après la définition du produit de Clifford des 2-formes (voir formule 1.37), nous avons :

$$X \cdot \theta = -\theta \wedge X - \theta(X).$$

Nous en déduisons la formule souhaitée :

$$D_X^{(k)}\psi = \widetilde{D}_X^{(k)}\psi - \frac{1}{2}X \cdot \theta \cdot \psi + (k - \frac{1}{2})\theta(X)\psi, \qquad \forall\psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}).$$

□

Soit $\mathscr{D}^g : \Sigma^g \to \Sigma^g$ l'opérateur de Dirac agissant sur le fibré des spineurs relatif à la métrique g. L'opérateur $\mathscr{D}^g$ est défini comme la composition de la multiplication de Clifford et de la connexion induite par D^g sur Σ^g. Cet opérateur de Dirac est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 et elliptique. Pour plus de détails, nous renvoyons de nouveau le lecteur à [13]. L'opérateur de Dirac conforme agissant sur les spineurs de poids k est construit de façon analogue. La multiplication de Clifford sur les spineurs à poids définit une contraction, notée $m^{(k)}$, sur les spineurs de poids k :

$$\begin{array}{rccl} m^{(k)} & : & T^*M \otimes \Sigma^{(k)} & \to \Sigma^{(k-1)} \\ & & \omega \otimes \psi & \mapsto \omega \cdot \psi \end{array}$$

Nous considérons la connexion $D^{(k)}$ comme un opérateur de $\Sigma^{(k)}$ dans $T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$. Nous définissons alors l'opérateur de Dirac de poids k par :

$$\mathscr{D}^{(k)} \ : \ C^\infty(\Sigma^{(k)}) \xrightarrow{m^{(k)} \circ D^{(k)}} C^\infty(\Sigma^{(k-1)}).$$

Proposition .25. Soient $\widetilde{D}$ et D deux connexions de Weyl sur (M, c) telle que $\widetilde{D} = D + \theta$. Les opérateurs de Dirac $\widetilde{\mathscr{D}}^{(k)}$ et $\mathscr{D}^{(k)}$ associés respectivement à $\widetilde{D}$ et D sont reliés par la formule suivante :

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(k)}\psi = \mathscr{D}^{(k)}\psi + (k + \frac{1}{2}(n-1))\theta \cdot \psi, \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}). \tag{1.41}$$

En particulier, pour toute métrique g dans c, nous avons :

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(k)}\psi = \mathscr{D}^{g}\psi + (k + \frac{1}{2}(n-1))\theta_g \cdot \psi, \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}), \tag{1.42}$$

où θ_g est la 1-forme de Lee de $\widetilde{D}$ relativement à g.

Démonstration. Soit $\psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)})$. La proposition .24 nous donne :

$$\widetilde{D}_X^{(k)}\psi = D_X^{(k)}\psi + (k - \frac{1}{2})\theta(X)\psi - \frac{1}{2}X \cdot \theta \cdot \psi.$$

Par conséquent, dans une base $\{e_i\}$ c-orthonormée, nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathscr{D}}^{(k)}\psi &= \mathscr{D}^{(k)}\psi + (k - \frac{1}{2})\sum_{i=1}^{n}\theta(e_i)e_i \cdot \psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot e_i \cdot \theta \cdot \psi \\ &= \mathscr{D}^{(k)}\psi + (k - \frac{1}{2})\theta \cdot \psi + \frac{n}{2}\theta \cdot \psi \end{aligned}$$

□

1.4 Formules de Lichnerowicz conformes

Dans toute cette section, nous considérons une variété conforme (M, c) de dimension n et supposons que M est spinorielle. Pour toute métrique g sur M, nous avons la formule de Lichnerowicz donnée par le théorème suivant :

Proposition .26. ([13]) Soit (M, g) une variété riemannienne spinorielle de dimension n. Pour toute section ψ de Σ^g, nous avons la formule suivante :

$$(\mathscr{D}^g)^2\psi = \Delta^g(\psi) + \frac{1}{4}Scal^g\psi \tag{1.43}$$

où $\Delta^g = -\mathrm{tr}_g(D^g \circ D^g)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami relatif à g et $Scal^g$ est la courbure scalaire de g.

Nous allons maintenant présenter deux formules de Lichnerowicz dans le cadre de la géométrie conforme.

1.4.1 La formule de Lichnerowicz conforme I

Dans le cas conforme, P. Gauduchon [14], A. Moroianu [22] et V. Buchholz [6] ont obtenu une formule conforme analogue à la formule de Lichnerowicz ci-dessus. Nous présentons la démonstration de ce théorème. Soient (M, c, D) une structure de Weyl et k une nombre réel. Nous rappelons que l'*opérateur de Dirac conforme de poids* k est défini par :

$$\mathscr{D}^{(k)} \ : \ C^\infty(\Sigma^{(k)}) \xrightarrow{D^{(k)}} C^\infty(T^*M \otimes \Sigma^{(k)}) \xrightarrow{m^{(k)}} C^\infty(\Sigma^{(k-1)}),$$

où $m^{(k)}$ est la contraction de Clifford des formes sur les spineurs de poids k.

Rappelons que $L^{-2} \otimes \Sigma^{(k)} \cong \Sigma^{(k-2)}$. L'opérateur de *Laplace conforme* agissant sur les spineurs de poids k est défini par :

$$\Delta^{D^{(k)}} \ : \ \Sigma^{(k)} \xrightarrow{D^{(k)} \circ D^{(k)}} T^*M \otimes T^*M \otimes \Sigma^{(k)} \xrightarrow{-c \otimes \mathrm{Id}} \Sigma^{(k-2)}.$$

Proposition .27. Soient $\{e_i\}_{i=1\dots n}$ un repère local c-orthonormé de TM. Une écriture locale de $\Delta^{(k)}$ est donnée par :

$$\Delta^{(k)}(\psi) = -\sum_{i=1}^{n} \left(D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) - D^{(k)}_{D_{e_i}e_i}\psi \right) l^{-2}, \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}), \tag{1.44}$$

où l est la section de L associée à $\{e_i\}_{i=1\dots n}$.

Démonstration. Par définition, il est clair que dans une base c-orthonormée $\{e_i\}_{i=1\dots n}$ nous avons l'expression (1.44). Montrons que l'expression ne dépend pas du choix du repère c-orthonormé. Soit $\{\tilde{e}_i\}$ une base c-orthonormée. Il existe un champ de matrices conformes $A = (a_{ij})$ tel que :

$$\tilde{e}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k.$$

Nous avons $A \in \mathrm{CO}(n)$, dons il existe une fonction f sur M telle que ${}^tAA = f^2$. En d'autres termes, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} f^2.$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} c(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) =& \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} c(e_k, c_l) \\ =& \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} l^2 \\ =& \delta_{ij} (fl)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $c(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j)=\widetilde{l}^2$, où $\widetilde{l}=fl$. Enfin, le calcul suivant nous donne le résultat souhaité :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}\psi)-D^{(k)}_{D_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i}\psi\right)\widetilde{l}^{-2} &= \sum_{i,p,q=1}^n \left(a_{ip}a_{iq}D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi)+D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(a_{iq})D^{(k)}_{e_q}\psi\right)\widetilde{l}^{-2}\\
&\quad -\sum_{i,p,q=1}^n \left(a_{ip}a_{iq}D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi+D^{(k)}_{\widetilde{e}_i}(a_{iq})D^{(k)}_{e_q}\psi\right)\widetilde{l}^{-2}\\
&=\sum_{p,q=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ip}a_{iq}\right)\left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi)-D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi\right)\widetilde{l}^{-2}\\
&=\sum_{p,q=1}^n \delta_{pq}\left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_q}\psi)-D^{(k)}_{D_{e_p}e_q}\psi\right)f^2\widetilde{l}^{-2}\\
&=\sum_{p=1}^n\left(D^{(k)}_{e_p}(D^{(k)}_{e_p}\psi)-D^{(k)}_{D_{e_p}e_p}\psi\right)l^{-2}.
\end{aligned}$$

□

Lemme .28. Pour toute métrique g dans c, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Delta^{(k)}(\psi) =&\Delta^g(\psi)-(k-\frac{1}{2})\delta^g(\theta_g)\psi+(2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi-\frac{1}{2}\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi\\
&+\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi+\left(k^2-k(2-n)-\frac{1}{4}(n-1)\right)|\theta_g|_g^2\psi, \qquad \forall\psi\in C^\infty(\Sigma^{(k)}), \quad (1.45)
\end{aligned}$$

où δ^g est la divergence riemannienne relative à g, et θ_g la forme de Lee de D associée à g.

Démonstration. Soient $k\in\mathbb{R}$, ψ dans $\Sigma^{(k)}$, $x\in M$ et $\{e_i\}$ une base de T_xM. Fixons une métrique g dans c. Supposons que la base $\{e_i\}$ est parallèle en un point pour la connexion de Levi-Civita D^g. Nous avons en ce point :

$$\begin{aligned}
D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) =&D^g_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi)+(k-\frac{1}{2})\theta_g(e_i)D^{(k)}_{e_i}\psi-\frac{1}{2}e_i\cdot\theta_g\cdot D^{(k)}_{e_i}\psi\\
=&D^g_{e_i}(D^g_{e_i}\psi)+(k-\frac{1}{2})D^g_{e_i}(\theta_g(e_i))\psi+(2k-1)\theta_g(e_i)D^g_{e_i}\psi-\frac{1}{2}e_i\cdot D^g_{e_i}(\theta_g)\cdot\psi\\
&-e_i\cdot\theta_g\cdot D^g_{e_i}\psi+(k-\frac{1}{2})^2\theta_g(e_i)^2\psi-(k-\frac{1}{2})\theta_g(e_i)e_i\cdot\theta_g\cdot\psi\\
&+\frac{1}{4}e_i\cdot\theta_g\cdot e_i\cdot\theta_g\cdot\psi.
\end{aligned}$$

Les propriétés de la multiplication de Clifford nous donnent alors :

$$\begin{aligned}
D^{(k)}_{e_i}(D^{(k)}_{e_i}\psi) =&D^g_{e_i}(D^g_{e_i}\psi)+(k-\frac{1}{2})D^g_{e_i}(\theta_g(e_i))\psi+(2k+1)\theta_g(e_i)D^g_{e_i}\psi\\
&-\frac{1}{2}e_i\cdot D^g_{e_i}(\theta_g)\cdot\psi+\theta_g\cdot e_i\cdot D^g_{e_i}\psi+(k-\frac{1}{2})^2\theta_g(e_i)^2\psi\\
&-k\theta_g(e_i)e_i\cdot\theta_g\cdot\psi-\frac{1}{4}|\theta_g|_g^2\psi.
\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} D_{e_i}^{(k)}(D_{e_i}^{(k)}\psi) = \Delta_g(\psi) - (k-\frac{1}{2})\delta^g(\theta_g)\psi + (2k+1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \frac{1}{2}\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi + \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi + (k^2 - \frac{n-1}{4})|\theta_g|^2\psi. \tag{1.46}$$

De plus,

$$D_{e_i}e_i = 2\theta_g(e_i)e_i - \theta_g^\sharp.$$

En sommant sur i de 1 à n, nous en déduisons :

$$\sum_{i=1}^{n} D_{e_i}e_i = (2-n)\theta_g^\sharp.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} D^{(k)}_{D_{e_i}e_i}\psi = (2-n)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi + k(2-n)|\theta_g|_g^2\psi. \tag{1.47}$$

La différence des équations (1.46) et (1.47) nous donne la formule souhaitée :

$$\Delta^{(k)}(\psi) = \Delta^g(\psi) - (k-\frac{1}{2})\delta^g\theta_g)\psi + (2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \frac{1}{2}\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi + \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi + \left(k^2 - k(2-n) - \frac{1}{4}(n-1)\right)|\theta_g|_g^2\psi.$$

□

La formule de Lichnerowicz conforme consiste à exprimer le carré de l'opérateur de Dirac conforme en fonction d'autres opérateurs conformes sur la variété (M, c). En revanche, le carré de l'opérateur de Dirac conforme de poids k n'est pas bien défini. En effet, l'opérateur $\mathscr{D}^k$ agit sur les sections $\Sigma^{(k)}$ et est à valeurs dans l'espace des sections de $\Sigma^{(k-1)}$, il n'est donc pas possible de composer $\mathscr{D}^k$ par lui-même. Par conséquent, nous devons calculer l'opérateur $\mathscr{D}^{(k-1)} \circ \mathscr{D}^{(k)} : C^\infty(\Sigma^{(k)}) \to C^\infty(\Sigma^{(k-2)})$.

Lemme .29. Soit ψ un spineur de poids k. Le carré de l'opérateur de Dirac à poids associé à une structure de Weyl dont la forme de Lee est θ_g est donné par :

$$\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi = (\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi - \left(k^2 - k(2-n) + \frac{n^2-4n+3}{4}\right)|\theta_g|_g^2\psi. \tag{1.48}$$

Démonstration. En utilisant la formule (1.42) de la proposition .25, la calcul suivant nous donne le résultat :

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi = \mathscr{D}^{(k-1)}(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi)\\
=&\mathscr{D}^g(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi) + (k-1+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot(\mathscr{D}^g\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\psi)\\
=&(\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - (k+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (2k+(n-1))D^g_{\theta_g^\sharp}\psi\\
&+(k-1+\frac{1}{2}(n-1))\theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (k-1+\frac{1}{2}(n-1))(k+\frac{1}{2}(n-1))|\theta_g|^2_g\psi\\
=&(\mathscr{D}^g)^2\psi + (k+\frac{1}{2}(n-1))\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi - \theta_g\cdot\mathscr{D}^g\psi - (2k+n-1)D^g_{\theta_g^\sharp}\psi\\
&-(k+\frac{1}{2}(n-1))(k-1+\frac{1}{2}(n-1))|\theta_g|^2_g\psi.
\end{aligned}
$$

□

Théorème .30. Pour toute structure de Weyl (M, c, D), nous avons la formule de Lichnerowicz conforme I suivante :

$$\mathscr{D}^{(k-1)}\circ\mathscr{D}^{(k)}\psi = \Delta^{D^{(k)}}(\psi) + \frac{1}{4}Scal^D\psi + \big(\frac{n-2+2k}{2}\big)F^D\cdot\psi\,, \qquad \forall\psi\in C^\infty(\Sigma^{(k)}).$$

Démonstration. Soit $\psi\in C^\infty(\Sigma^{(k)})$. En sommant les formules (1.48) et (1.45), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi - \Delta^{(k)}(\psi) =&\frac{1}{4}\Big[\mathscr{D}^g(\psi) - \Delta^g(\psi) - 2(2k-1)\delta^g(\theta_g)) - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g\Big]\psi\\
&+\Big(k+\frac{n-2}{2}\Big)\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi.
\end{aligned}
$$

D'après la formule de Lichnerowicz de la proposition .26, la formule précédente donne immédiatement :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi - \Delta^{(k)}(\psi) =&\frac{1}{4}\Big[Scal^g\psi - 2(2k-1)\delta^g(\theta_g)) - (n-1)(n-2)|\theta_g|^2_g\Big]\psi\\
&+\Big(k+\frac{n-2}{2}\Big)\mathscr{D}^g(\theta_g)\cdot\psi. \qquad (1.49)
\end{aligned}
$$

De plus, d'après la relation 1.37, nous avons :

$$e_i\cdot\mathscr{D}^g_{e_i}(\theta_g) = -\mathscr{D}^g_{e_i}(\theta_g)\wedge e_i - \mathscr{D}^g_{e_i}(\theta_g)(e_i), \qquad \forall i\in\{1,\dots,n\}. \qquad (1.50)$$

Mais encore, par définition, nous avons :

$$\mathscr{D}^g(\theta_g) = \delta^g(\theta_g) + d\theta_g. \qquad (1.51)$$

D'après les relations (1.51) et (1.50), la formule (1.49) devient :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{(k-1)}\mathscr{D}^{(k)}\psi - \Delta^{(k)}(\psi) =& \frac{1}{4}\Big[Scal^g\psi + 2(n-1)\delta^g(\theta_g)) - (n-1)(n-2)|\theta_g|_g^2\Big]\psi \\ &+ \Big(k + \frac{n-2}{2}\Big)d\theta_g \cdot \psi. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Rappelons que la courbure scalaire $Scal^D$ de D, via la métrique g, s'identifie à une fonction sur M de la façon suivante :

$$Scal^D = Scal^g - 2(n-1)\mathrm{tr}_g(D^g\theta_g) - (n-1)(n-2)|\theta_g|_g^2.$$

Et, d'après la proposition .9, nous avons :

$$F^D = d\theta_g.$$

La formule (1.52) et les deux rappels précédents démontrent le résultat :

$$\mathscr{D}^{(k-1)} \circ \mathscr{D}^{(k)}\psi = \Delta^{D^{(k)}}(\psi) + \frac{1}{4}Scal^D\psi + \Big(\frac{n-2+2k}{2}\Big)F^D \cdot \psi.$$

□

Par la suite, nous noterons D et $\mathscr{D}$ respectivement la dérivée covariante et l'opérateur de Dirac induits par la connexion de Weyl D agissant sur les spineurs de poids $(2-n)/2$ et par $\mathscr{D}^2$ l'opérateur $\mathscr{D}^{(\frac{-n}{2})} \circ \mathscr{D}^{(\frac{2-n}{2})}$. D'après la formule de Lichnerowicz conforme du théorème .30 ci-dessus, nous obtenons immédiatement :

Corollaire .31. Pour toute structure de Weyl (M, c, D), nous avons :

$$\mathscr{D}^2\psi = \Delta^D(\psi) + \frac{1}{4}Scal^D\psi\,, \qquad \forall\psi \in C^\infty(\Sigma^{(\frac{2-n}{2})}).$$

Remarque .32. Dans le théorème .30, nous omettons le symbole du produit tensoriel qui devrait apparaître entre $Scal^D$ et ψ. En rappelant que $\Sigma^{(k)} \otimes L^{-2} \cong \Sigma^{(k-2)}$, nous pouvons remarquer que $Scal^D\psi$ s'identifie à une section de $\Sigma^{(k-2)}$. Par conséquent, la formule de Lichnerowicz conforme I met en relation des objets de poids conforme $-(2+n)/2$.

1.4.2 La formule de Lichnerowicz conforme II

Nous décrivons tout d'abord l'opérateur de divergence conforme agissant sur $\Sigma^{(k)}$. Puis, nous calculons les opérateurs adjoints, au sens conforme, d'opérateurs précédemment définis.

Notons que toute connexion de Weyl sur (M, c) préserve la forme sesquilinéaire h introduite dans la section 1.3.1 (1.38). En effet, h ne dépend que de la classe conforme c et toute connexion de Weyl préserve c. Ainsi, toute connexion de Weyl D préserve h et nous avons la formule suivante :

$$D\left(h(\psi,\varphi)\right) = h(D^{(k)}\psi,\varphi) + h(\psi, D^{(l)}\varphi), \qquad \forall\psi \in C^\infty(\Sigma^{(k)}),\ \forall\varphi \in C^\infty(\Sigma^{(l)}). \tag{1.53}$$

Dans toute la suite, nous considérons la structure de Weyl (M, c, D).

L'opérateur de divergence conforme spinoriel

Soient g et $\widetilde{g}$ deux métriques riemanniennes telles que $\widetilde{g} = f^2 g$. Notons $*^{\widetilde{g}}$ et $*^g$ les opérateurs de Hodge associés à $\widetilde{g}$ et g respectivement. Nous rappelons la relation suivante :

$$*^{\widetilde{g}}\omega = f^{n-2q} *^g \omega\,, \qquad \forall \omega \in \Lambda^q T^* M.$$

Par conséquent, il existe un *opérateur de Hodge conforme*

$$* \ : \ \Lambda^q T^*M \otimes L^k \to \Lambda^{n-q} T^*M \otimes L^{n-2q+k}$$

tel que :

$$X \lrcorner\, \omega = (-1)^{n(q-1)} * (X^\flat \wedge *\omega)\,, \qquad \forall X \in TM,\ \forall \omega \in \Lambda^q T^*M. \tag{1.54}$$

Lorsque $k = 2q - n$, nous pouvons définir l'*opérateur de divergence conforme*

$$\delta : C^\infty(\Lambda^q T^*M \otimes L^{2q-n}) \to C^\infty(\Lambda^{q-1} T^*M \otimes L^{2q-n-2})$$

par :

$$\delta = (-1)^{n(q-1)+1} * \circ\, d \circ *,$$

où d est la différentielle extérieur sur M. De plus, nous pouvons définir un *opérateur de divergence conforme* relatif à D, noté δ^D, par :

$$\begin{aligned} \delta^D \ : \ C^\infty(\Lambda^q T^*M \otimes L^k) &\to C^\infty(\Lambda^{q-1} T^*M \otimes L^{k-2}) \\ \omega &\mapsto \delta^D(\omega), \end{aligned} \tag{1.55}$$

avec :

$$\delta^D(\omega) = -\sum_{i=1}^n (e_i \lrcorner\, D_{e_i}\omega)\, l^{-2}, \tag{1.56}$$

où $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$ est une base c-orthonormée et l la section de L qui lui est associée. Si une métrique riemannienne g est fixée dans c, l'opérateur de Hodge conforme et l'opérateur de divergence conforme s'identifient respectivement avec l'opérateur de Hodge et l'opérateur de divergence de la métrique g. En revanche, une connexion de Weyl n'est pas toujours une connexion de Levi-Civita, c'est pourquoi les opérateurs δ et δ^D sont en général distincts. Néanmoins, nous obtenons la relation suivante :

$$\delta^D\omega = (-1)^{n(q-1)+1}(* \circ D^a \circ *)(\omega)\,, \qquad \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^q T^*M \otimes L^k),$$

où D^a est l'anti-symétrisation de la connexion sans torsion D agissant sur le fibré extérieur à poids. De plus, nous avons $d = D^a$ lorsque D est une connexion sans torsion agissant sur les formes. Enfin, si ω est une section de $\Lambda^q T^*M \otimes L^{2q-n}$, $*\omega$ est une $(n-q)$-forme sur M. Par conséquent, nous avons la proposition suivante :

Proposition .33. Soit (M, c, D) une structure de Weyl. Les opérateurs δ et δ^D coïncident sur l'espace des sections de $\Lambda^q T^*M \otimes L^{2q-n}$.

L'opérateur adjoint d'une connexion de Weyl à poids

Nous allons étudier l'existence d'un opérateur adjoint pour la connexion $D^{(k)}$ relativement au produit scalaire hermitien H sur les spineurs de poids k. Nous avons $D^{(k)}$: $\Sigma^{(k)} \to T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$, par conséquent, l'adjoint de $D^{(k)}$, noté $D^{(k)*}$, doit agir sur les sections de $T^*M \otimes \Sigma^{(k)}$. Soient ψ et φ deux sections de $\Sigma^{(k)}$, et α une 1-forme sur M. Nous devons trouver l'opérateur $D^{(k)*}$ de sorte que l'expression suivante soit bien définie et égale à un terme de divergence :

$$h(D^{(k)}\psi, \alpha \otimes \varphi) - h(\psi, D^{(k)*}(\alpha \otimes \varphi)). \tag{1.57}$$

Les poids conformes de $D^{(k)}\psi$ et $\alpha \otimes \varphi$ sont égaux à $k-1$, ainsi, $h(D^{(k)}\psi, \alpha \otimes \varphi)$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{k-2}$.Le poids conforme de $D^*(\alpha \otimes \varphi)$ doit être $k-2$ et l'expression (1.57) est une densité d'intégration si et seulement si $k = (2-n)/2$. Nous rappelons que nous notons D la connexion de Weyl de poids $(2-n)/2$.

Proposition .34. La connexion de Weyl D de poids $(2-n)/2$ admet un adjoint formel, noté $D^* : C^\infty(T^*M \otimes \Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}) \to C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{-2-n}{2}\right)})$, défini par :

$$D^*(\alpha \otimes \varphi) = -D_{\alpha^\sharp}\varphi + \delta^D(\alpha)\varphi,$$

pour tout $\alpha \in C^\infty(T^*M)$ et pour tout $\varphi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)})$. Si ψ et φ sont des sections de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$, nous avons la formule suivante :

$$h\Big(D\psi, \alpha \otimes \varphi\Big) - h\Big(\psi, D^*(\alpha \otimes \varphi)\Big) = -\delta^D\Big(h(\psi, \alpha \otimes \varphi)\Big), \tag{1.58}$$

où les termes de cette expression sont des sections de $L_{\mathbb{C}}^{-n}$.

Démonstration. Soient ψ et φ deux sections à support compact de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$, et α une 1-forme sur M. Nous calculons :

$$H(D\psi, \alpha \otimes \varphi) = \int_M h(D\psi, \alpha \otimes \varphi).$$

Soit $\{e_i\}$ une base locale c-orthonormée telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij} l^2$. Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} h(D_{e_i}\psi, \alpha(e_i)\varphi)l^{-2} &= \nabla^D_{e_i}\Big(h(\psi, \alpha(e_i)\varphi)l^{-2}\Big) - h\Big(\psi, D_{e_i}(\alpha(e_i)\varphi l^{-2})\Big) \\ &= \nabla^D_{e_i}\Big(h(\psi, \alpha(e_i)\varphi)\Big)l^{-2} - h(\psi, \alpha(D_{e_i}e_i)\varphi)l^{-2} \\ &\quad - h\Big(\psi, D_{e_i}(\alpha)(e_i)l^{-2}\varphi\Big) - h\Big(\psi, \alpha(e_i)l^{-2}D_{e_i}\varphi\Big). \end{aligned}$$

En sommant i de 1 à n, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h(D_{e_i}\psi, \alpha(e_i)\varphi)l^{-2} = \sum_{i=1}^n &\Big(\nabla^D_{e_i}\Big(h(\psi, \alpha(e_i)\varphi)\Big) - h\Big(\psi, \alpha(D_{e_i}e_i)\varphi\Big)\Big)l^{-2} \\ &+ h\Big(\psi, -\sum_{i=1}^n \Big(e_i \lrcorner D_{e_i}(\alpha)l^{-2}\Big)\varphi\Big) - h\Big(\psi, \sum_{i=1}^n \alpha(e_i)D_{e_i}\varphi\Big). \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$h\Big(D\psi, \alpha\otimes\varphi\Big) = -\delta^D\Big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\Big) + h\Big(\psi, \delta^D(\alpha)\varphi\Big) - h\Big(\psi, D_{\alpha^\sharp}\varphi\Big). \tag{1.59}$$

De plus, $h(\psi,\alpha\otimes\varphi)$ est une section de $T^*M\otimes L^{2-n}$ et les opérateurs δ et δ^D coïncident sur $\Lambda^q T^*M\otimes L^{2q-n}$. Donc :

$$\delta^D\Big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\Big) = \delta\Big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\Big).$$

Ceci et l'équation (1.59) montrent la formule (1.58) et d'après la formule de Stokes, nous en déduisons :

$$\int_M \delta^D\Big(h(\psi,\alpha\otimes\varphi)\Big) = 0,$$

Donc, d'après (1.59) :

$$H(D\psi,\alpha\otimes\varphi) = H\Big(\psi, -D_{\alpha^\sharp}\varphi + \delta^D(\alpha)\varphi\Big).$$

En particulier, l'adjoint formel de D est donné par :

$$D^*(\alpha\otimes\psi) = -D_{\alpha^\sharp}\psi + \delta^D(\alpha)\psi.$$

□

Pour démontrer la formule Lichnerowicz conforme II, nous aurons besoin des deux propositions qui suivent.

Proposition .35. Pour tout connexion de Weyl D, nous avons :

$$D^*D\psi = \Delta^D(\psi)\,, \qquad \forall\psi\in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}).$$

Démonstration. On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme .36. Soient $\{e_i\}$ une base c-orthonormée telle que $c(e_i,e_j)=\delta_{ij}l^2$. Nous avons la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^n \delta^D(e_i^*)D_{e_i}\psi = \sum_{i=1}^n l^{-2}D_{D_{e_i}e_i}\psi, \qquad \forall\psi\in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}).$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous calculons :

$$\begin{aligned}\delta^D(e_i^*) &= -\sum_{j=1}^n e_j\lrcorner D_{e_j}(e_i^*)l^{-2}\\ &= -\sum_{j=1}^n D_{e_j}(e_i^*(e_j))l^{-2} + \sum_{j=1}^n e_i^*\Big(D_{e_j}e_j\Big)l^{-2}\\ &= -\sum_{j=1}^n D_{e_j}(\delta_{ij})l^{-2} + \sum_{j=1}^n e_i^*\Big(D_{e_j}e_j\Big)l^{-2}\\ &= \sum_{j=1}^n e_i^*\Big(D_{e_j}e_j\Big)l^{-2}.\end{aligned} \tag{1.60}$$

D'autre part, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{i=1}^{n} D_{\delta^D(e_i^*)e_i}\psi. \tag{1.61}$$

D'après (1.60) et (1.61), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{j=1}^{n} l^{-2} D_{\sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(D_{e_j}e_j\right)e_i}\psi. \tag{1.62}$$

Enfin, nous avons $\sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(D_{e_j}e_j\right)e_i = D_{e_j}e_j$, et (1.62) devient :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta^D(e_i^*) D_{e_i}\psi = \sum_{i=1}^{n} l^{-2} D_{D_{e_i}e_i}\psi.$$

□

Par définition de l'adjoint formel de la connexion D, nous avons :

$$D^*D\psi = D^*\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes D_{e_i}\psi\Big) = -\sum_{i=1}^{n}\Big(D_{(e_i^*)^\sharp}(D_{e_i}\psi) - \delta^D(e_i^*)D_{e_i}\psi\Big).$$

Cependant, nous avons $(e_i^*)^\sharp = e_i l^{-2}$, et donc, d'après le lemme .36, nous obtenons :

$$D^*D\psi = -\sum_{i=1}^{n}\Big(D_{e_i}(D_{e_i}\psi) - D_{D_{e_i}e_i}\psi\Big)l^{-2}.$$

□

Formule de Lichnerowicz conforme

En remplaçant $\alpha \otimes \varphi$ par $D\varphi$ dans l'équation (1.58), nous obtenons :

$$h(D\psi, D\varphi) - h(\psi, D^*D\varphi) = -\delta^D\Big(h(\psi, D\varphi)\Big), \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}),\ \forall \varphi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}).$$

En appliquant la proposition .35 à la formule précédente, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition .37. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons :

$$h\Big(D\psi, D\varphi\Big) - h\Big(\psi, \Delta^D(\varphi)\Big) = -\delta^D\Big(h(\psi, D\varphi)\Big), \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}),\ \forall \varphi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}). \tag{1.63}$$

Corollaire .38. Pour toute connexion de Weyl D sur (M,c), nous avons la formule suivante :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) = -\delta^D\Big(h(\psi, D\varphi)\Big) \in L_{\mathbb{C}}^{-n},$$

pour toutes sections ψ et φ de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$.

Démonstration. L'équation (1.63) donne :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) = h(\psi, \Delta^D(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi) - \delta^D\Big(h(\psi, D\varphi)\Big).$$

D'après la formule de Lichnerowicz conforme I (Corollaire .31), nous obtenons :

$$\Delta^D(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi = 0.$$

□

Proposition .39. Pour toute structure de Weyl (M,c,D), nous avons la formule suivante :

$$h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) + \delta^D(\beta_{\psi,\varphi}) \in L_{\mathbb{C}}^{-n}, \qquad \forall\psi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}),\ \forall\varphi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}).$$

où $\beta_{\psi,\varphi}$ est la section de $T^*M \otimes L^{2-n}$ définie par :

$$\beta_{\psi,\varphi}(X) = h(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi), \qquad \forall X \in TM.$$

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base c-orthonormée telle que $c(e_i, e_j) = \delta_{ij}l^2$. En utilisant les propriétés de la forme sesquilinéaire h et de la connexion de Weyl D, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) &= \sum_{i=1}^n h\Big(e_i^* \cdot D_{e_i}\psi, \mathscr{D}\varphi\Big) = -\sum_{i=1}^n h\Big(D_{e_i}\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^n \bigg(\nabla^D\Big(h(\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\Big) - h\Big(\psi, D_{e_i}(e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\Big)\bigg) \\
&= -\sum_{i=1}^n \bigg(\nabla^D\Big(h(\psi, e_i^* \cdot \mathscr{D}\varphi)\Big) - h\Big(\psi, D_{e_i}(e_i^*) \cdot \mathscr{D}\varphi\Big)\bigg) + \sum_{i=1}^n h\Big(\psi, e_i^* \cdot D_{e_i}(\mathscr{D}\psi)\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^n \bigg(\nabla^D\Big(h(\psi, e_i^\flat l^{-2} \cdot \mathscr{D}\varphi)\Big) - h\Big(\psi, D_{e_i}(e_i^\flat l^{-2}) \cdot \mathscr{D}\varphi\Big)\bigg) + h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) \\
&= -\sum_{i=1}^n \bigg(\nabla^D\Big(h(\psi, e_i^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)\Big) - h\Big(\psi, D_{e_i}(e_i^\flat) \cdot \mathscr{D}\varphi\Big)\bigg) l^{-2} + h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi).
\end{aligned}$$

En posant $\beta_{\psi,\varphi}(X) = h(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi)$, nous avons la formule souhaitée :

$$h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h(\psi, \mathscr{D}^2\varphi) + \delta^D(\beta_{\psi,\varphi}).$$

□

Théorème .40. Soit (M,c) une variété conforme spinorielle. Pour toute connexion de Weyl D sur M et pour toutes sections ψ et φ de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$, nous avons la formule de Lichnerowicz conforme II :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = -\delta(\omega_{\psi,\varphi}),$$

où la section $\omega_{\psi,\varphi}$ de $T^*M \otimes L^{(2-n)}$ est définie par :

$$\omega_{\psi,\varphi}(X) = h\Big(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\varphi + D_X\varphi\Big)\,, \qquad \forall X \in TM.$$

Démonstration. Soient ψ et φ deux sections de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. Le corollaire .38 et la proposition .39 nous donnent :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = h\Big(\psi, \Delta^D(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi\Big) - \delta^D(\omega_{\psi,\varphi}), \tag{1.64}$$

où $\omega_{\psi,\varphi} = h(\psi, D\varphi) + \beta_{\psi,\varphi}$. D'après la formule de Lichnerowicz conforme I (Corollaire .31), nous obtenons :

$$\Delta^D(\varphi) + \frac{1}{4}Scal^D\varphi - \mathscr{D}^2\varphi = 0.$$

L'équation 1.64 devient :

$$h(D\psi, D\varphi) + \frac{1}{4}h(\psi, Scal^D\varphi) - h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi) = -\delta^D(\omega_{\psi,\varphi}).$$

Cependant, $\omega_{\psi,\varphi}$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{2-n}$, et δ^D et δ coïncident sur $L_{\mathbb{C}}^{2-n}$. Ainsi, nous obtenons la formule souhaitée. □

Remarque .41. Les poids conformes de $D\psi$, $D\varphi$, $\mathscr{D}\psi$ et $\mathscr{D}\varphi$ sont $-n/2$. Donc, les poids de $h(D\psi, D\varphi)$ et $h(\mathscr{D}\psi, \mathscr{D}\varphi)$ sont égaux à $-n$. De plus, le poids du produit tensoriel $Scal^D\varphi$ est $-1-n/2$, ainsi, $h(\psi, Scal^D\varphi)$ est aussi de poids $-n$. Par définition de l'opérateur δ, $\delta(\omega_{\psi,\varphi})$ est une section de $L_{\mathbb{C}}^{-n}$. En conclusion, le théorème .40 relie des sections de $L_{\mathbb{C}}^{-n}$, qui sont des densités d'intégration M.

Nous notons $|\psi|_h^2 = h\Big(\psi,\psi\Big)$, pour toute section ψ de $\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}$. D'après le théorème .40, pour toute connexion de Weyl D sur (M,c), nous avons :

Corollaire .42. Pour toute connexion de Weyl sur (M,c,D), nous avons :

$$|D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}Scal^D|\psi|_h^2 - |\mathscr{D}\psi|_h^2 = -\delta(\omega_\psi)\,, \qquad \forall \psi \in C^\infty(\Sigma^{\left(\frac{2-n}{2}\right)}), \tag{1.65}$$

où, la 1-forme à poids $\omega_{\psi,\psi}$ est notée ω_ψ.

Chapitre 2

Théorèmes de la masse positive

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée, complète et non compacte de dimension n. Nous notons g_{can} la métrique plate sur $\mathbb{R}^n$.

2.1 La masse d'une variété asymptotiquement plate

2.1.1 Espaces de fonctions

Notons $E_r = \mathbb{R}^n \setminus B_r$ l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon r de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un compact K de M, un réel strictement positif R et un difféomorphisme

$$\Phi \,:\, E_R \to M \setminus K.$$

Notons $V = M \setminus K$. Le couple (V, Φ) est une *carte à l'infini* et V le *bout* de M. Dans cette carte, nous avons $\Phi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ et la norme d'un élément s'écrit :

$$|x| = r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit r un réel tel que $r \geqslant R$. Nous notons $M_r = M \setminus E_r$, où E_r est confondu avec son image par Φ. L'ensemble M_r est un compact de M dont le bord s'identifie à la sphère de rayon r, notée S_r, de $\mathbb{R}^n$.

Définition .43. Une variété riemannienne (M, g) est asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ s'il existe un compact K de M, une décomposition $M \setminus K = \sqcup_{l=1}^{k} M_\infty^l$, une famille de réels $\{R_l\}_{l=1\ldots k}$ strictement positifs et des difféomorphismes Φ_l de M_∞^l dans E_{R_l} tels que :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r_l^{-\tau}), \qquad \partial_k g_{ij} = O(r_l^{-\tau-1}) \qquad \text{et} \qquad \partial_l \partial_k g_{ij} = O(r_l^{-\tau-2}),$$

quand $r_l = |x^l| \to \infty$, dans les coordonnées $\{x_i^l\}$ engendrées par le difféomorphisme Φ_l sur M_∞^l, pour l de 1 à k. Les ouverts M_∞^l sont les *bouts* de M et les coordonnées $\{x_l^i\}$ sont appelées *coordonnées asymptotiques* sur M_∞^l.

Supposons que (M, g) est une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ qui ne possède qu'un seul bout, noté M_∞. Nous notons ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Sauf mention explicite du contraire, tout les objets riemanniens considérés sont relatifs à la métrique g. Soient $p > 1$ et $\delta \in \mathbb{R}$. L'espace des fonctions L^p_δ est défini comme le complété de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur M pour la norme :

$$||u||_{p,\delta} = \left(\int_M |u|^p r^{-\delta p - n} v_g\right)^{1/p},$$

où v_g est la forme volume associée à g et r est la distance radiale sur le bout M_∞ prolongée par 1 sur la partie compacte K de M. Nous définissons également le k-ième espace de Sobolev de poids δ sur M, noté $W^{k,p}_\delta$, comme le complété de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur M pour la norme de Sobolev suivante :

$$||u||_{k,p,\delta} = \sum_{j=0}^{k} ||\nabla^j u||_{p,\delta-j}. \tag{2.1}$$

L'espace des fonctions C^k_δ est défini comme l'ensemble des fonctions u, C^k sur M, dont la norme suivante est finie :

$$||u||_{C^k_\delta} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{M_\infty} r^{-\delta+j} |\nabla^j u|. \tag{2.2}$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$; l'espace de Hölder de poids δ, noté $C^{k,\alpha}_\delta$, est défini comme l'ensemble des fonctions u dans C^k_δ telles que la norme suivante est finie :

$$||u||_{C^{k,\alpha}_\delta} = ||u||_{C^k_\delta} + \sup_{x,y \in M_\infty} \left(\min(r(x), r(y))^{-\delta+k+\alpha}, \frac{|\nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right) \tag{2.3}$$

où y est dans un voisinage de x et $\nabla^k u(y)$ est le tenseur en x obtenu par transport parallèle le long de la géodésique radiale joignant x à y. Ces espaces de fonctions dépendent des coordonnées choisies sur M_∞. En revanche, les différents systèmes de coordonnées étant asymptotiques aux coordonnées euclidiennes, les normes relatives à deux systèmes de coordonnées différents sont équivalentes.

Remarque .44. Lorsque E est un fibré vectoriel sur M, nous pouvons définir l'espace de Sobolev des sections de E, noté $W^{k,q}_\delta(E)$, comme l'espace des sections de E dont la norme de Sobolev, définie de façon analogue à (2.1), est finie. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons également $W^{k,q}_\delta$ ces espaces. Cette remarque sera le plus souvent utilisée lorsque $E = \Sigma^g$.

La définition des normes de Hölder (2.2) et (2.3) nous donne immédiatement la proposition suivante :

Proposition .45. Soit u appartenant à $C^{2,\alpha}_{-\tau}(M)$. Alors $u = O(r^{-\tau})$ et, pour i et j dans $\{1, \ldots, n\}$, $\partial_i u = O(r^{-\tau-1})$ et $\partial^2_{ij} u = O(r^{-\tau-2})$.

Les théorèmes de Sobolev à poids sont démontrés dans [19] :

Proposition .46. Soient $q > 1$ et $\alpha \in]0, 1[$. Supposons que $l - k - \alpha > \frac{n}{q}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons les inclusions continues suivantes :

$$C^{l,\alpha}_{\delta-\varepsilon} \subset W^{l,q}_{\delta} \subset C^{k,\alpha}_{\delta}.$$

En particulier, si $u \in W^{l,q}_{\delta}$ avec $l > \frac{n}{q}$, $u = O(r^{\delta})$.

Remarque .47. Si u est une fonction de $W^{2,q}_{\delta}$, avec $q > n$, d'après la proposition précédente, nous avons les estimations suivantes :

$$u = O(r^{\delta}) \qquad \text{et} \qquad du = O(r^{\delta-1}). \tag{2.4}$$

Remarque .48. L'espace dual de L^q_{δ}, noté $(L^q_{\delta})^*$, est un sous-espace de l'espace des distributions sur M, noté $\mathcal{D}'(M)$. Montrons que $(L^q_{\delta})^*$ contient $L^{q'}_{-\delta-n}$, où q' est l'entier tel que :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Soit u dans $L^{q'}_{-\delta-n}$ et v dans L^q_{δ}. Par définition, les fonctions $vr^{\delta+n-\frac{n}{q'}}$ et $ur^{-\delta-\frac{n}{q}}$ sont respectivement dans L^q et $L^{q'}$. L'inégalité de Hölder, appliquée aux fonctions $vr^{\delta+n-\frac{n}{q'}}$ et $ur^{-\delta-\frac{n}{q}}$, nous donne alors :

$$\int_M |vr^{\delta+n-\frac{n}{q'}}| \cdot |ur^{-\delta-\frac{n}{q}}| v_g \leqslant ||v||_{q',-\delta-n} ||u||_{q,\delta}. \tag{2.5}$$

De plus, d'après la relation entre q et q', nous avons :

$$|vr^{\delta+n-\frac{n}{q'}}| \cdot |ur^{-\delta-\frac{n}{q}}| = |uv|.$$

L'inégalité (2.5) démontre donc que pour u dans $L^{q'}_{-\delta-n}$, nous avons :

$$\int_M |uv| v_g \leqslant ||u||_{q,\delta} \cdot ||v||_{q',-\delta-n}, \qquad \forall v \in L^q_{\delta}.$$

En d'autre termes, pour tout u dans $L^{q'}_{-\delta-n}$, l'application linéaire

$$\begin{aligned} T_u \ : \ L^q_{\delta} &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_M |uv| v_g \end{aligned}$$

est continue. Par conséquent, pour tout u dans $L^{q'}_{-\delta-n}$, T_u appartient à l'espace $(L^q_{\delta})^*$. Ainsi, nous avons l'inclusion suivante :

$$L^{q'}_{-\delta-n} \subset (L^q_{\delta})^*.$$

2.1.2 Variétés asymptotiquement plates

Définition .49. Nous dirons que la variété (M,g) asymptotiquement plate d'ordre τ vérifie *les conditions de décroissance de la masse* lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- L'ordre de décroissance τ de M est tel que $\dfrac{n-2}{2} < \tau$.
- Les composantes du tenseur $\Phi^l_* g - g_{can}$ sont dans l'espace $W^{2,q}_{-\tau}(\Phi^l)$, pour tout l de 1 à k, avec $q > n$.
- La courbure scalaire de g, notée $Scal^g$, est intégrable sur M.

Nous notons $\mathcal{M}_\tau$ l'espace des métriques riemanniennes asymptotiquement plates sur M vérifiant les conditions de décroissance de la masse.

Dans tout ce qui suit, (M,g) est une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ qui ne possède qu'un seul bout, noté M_∞, et vérifiant les conditions de décroissance de la masse. La *masse* de (M,g) est définie par :

$$m(g) = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \partial_j \lrcorner dz,$$

où g_{ij} et dz sont respectivement les composantes de g et la forme volume exprimés dans les coordonnées asymptotiques sur M_∞. Dans ces conditions, la masse de (M,g) est bien définie et ne dépend pas du choix des coordonnées asymptotiques choisies sur M_∞ :

Lemme .50. *([4] p. 678 et p. 681).* Soit (M,g) une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$, à un seul bout, noté M_∞. Supposons que Φ et Ψ sont deux difféomorphismes de M_∞ dans $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ définissant des coordonnées asymptotiques pour (M,g). Notons $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ respectivement les coordonnées asymptotiques sur $\mathcal{M}_\infty$ induites par Φ et Ψ. Alors, il existe $(E_{ij}, v) \in \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ tel que :

$$|x_i - \sum_{j=1}^{n} E_{ij} y_j + v_i| \in W^{2,q}_{1-\tau}(\Phi)\,, \qquad \forall i = 1 \dots n,$$

où $W^{2,q}_{1-\tau}(\Phi)$ est l'espace de Sobolev défini dans les coordonnées asymptotiques induites par Φ. En particulier, les masses calculées dans ces deux systèmes de coordonnées sont égales.

2.1.3 Le théorème de la masse positive

Nous allons rappeler sans démonstration les résultats analytiques nécessaires à la démonstration du théorème de la masse positive dans le cas d'une variété spinorielle ([4] et [27]). Ces résultats s'appuient sur les propriétés des espaces de Sobolev, de Hölder et sur des résultats de théorie elliptique pour lesquels le lecteur pourra se référer à [4].

Supposons que la variété M est spinorielle et soit q un entier strictement supérieur à n.

Proposition .51. *([4] page 676).* Soient p dans $]1,+\infty[$ et δ non exceptionnel [1]. L'opérateur Laplacien $\Delta : W^{2,p}_{\delta} \to L^p_{\delta-1}$ est un opérateur de Fredholm. De plus, si $2-n<\delta<0$, c'est un isomorphisme de $W^{2,p}_{\delta}$ sur $L^p_{\delta-1}$.

Décrivons la notion de spineur constant. Le bout M_∞ s'identifie à $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ via les coordonnées asymptotiques $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Soit $e=(e_1,\ldots,e_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ induite par x. Nous avons $g(\cdot,\cdot)=g_{can}(A\cdot,\cdot)$, où A est un champ de matrices symétriques définies positives. Nous définissons le repère g-orthonormé s de M_∞ par : $s=(A^{\frac{1}{2}})^{-1}e$, où $A^{\frac{1}{2}}$ est l'unique racine carré définie positive de A. Soit $\tilde{s}$ l'un des deux repères spinoriels relevant s. Un spineur ψ_0 de Σ^g est un *spineur constant* s'il est constant dans le repère $\tilde{s}$, c'est-à-dire, $\psi_0=[\tilde{s},\xi_0]$ où la fonction $\xi : M_\infty \to \Delta_n$ est constante. En particulier, si ψ_0 est constant, sa norme $|\psi_0|$ est constante sur M_∞.

Définition .52. Une section ψ de Σ^g est *asymptotiquement constante* s'il existe un spineur constant ψ_0 tel que $\psi-\psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}$.

Proposition .53. *([4] page 690)* Soit δ un réel tel que $1-n<\delta<0$. L'opérateur de Dirac $\mathscr{D}^g$ est un isomorphisme de $W^{2,q}_{\delta}$ dans $W^{1,q}_{\delta-1}$.

Cette proposition démontre l'existence d'un spineur $\mathscr{D}$-harmonique asymptotiquement constant. L'existence d'un tel spineur joue un rôle majeur dans la preuve de théorème de la masse positive.

Corollaire .54. *([4] page 690)* Soit ψ_0 un spineur constant sur M. Il existe un spineur ψ dans Σ^g tel que :

$$\mathscr{D}^g\psi=0 \qquad \text{et} \qquad \psi-\psi_0\in W^{2,q}_{-\tau}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Les hypothèses de décroissance asymptotique donnent $\mathscr{D}^g\psi_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1}$. D'après la proposition .53, il existe un unique spineur $\psi_1\in W^{2,q}_{-\tau}$ tel que $\mathscr{D}^g\psi_1=-\mathscr{D}^g\psi_0$. Ainsi, le spineur $\psi=\psi_1+\psi_0$ possède les propriétés souhaitées. □

Dans la méthode de Witten, en intégrant la formule de Lichnerowicz (voir la proposition .26), le terme de divergence converge vers la masse à l'infini. Ce fait est donné par la proposition suivante :

Proposition .55. *([4] page 691)* Soit ψ dans Σ^g asymptotiquement constant. Nous avons alors la formule suivante :

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\psi|^2 v_g + \frac{1}{4}\int_M Scal^g|\psi|^2 v_g - \int_M |\mathscr{D}^g\psi|^2 v_g &= \lim_{r\to\infty}\int_{S_r}(\nabla_\nu\psi+\nu\cdot\mathscr{D}^g\psi,\psi)_g \nu\lrcorner v_g \\ &= \frac{1}{4}m(g)|\psi_0|^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où ψ_0 est le spineur constant vérifiant $\psi-\psi_0\in W^{2,q}_{-\tau}$.

[1]Le paramètre $\delta\in\mathbb{R}$ est dit non exceptionnel s'il appartient à l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{k\in\mathbb{Z} : k\neq -1,-2,\cdots,3-n\}$.

Le théorème de la masse positive est le suivant :

Théorème .56. *([4] page 691).* Soit (M, g) une variété riemannienne, spinorielle et asymptotiquement plate d'ordre $(n-2)/2 < \tau < n-2$ telle que $g \in \mathcal{M}_\tau$. Supposons que la courbure scalaire de la connexion de Levi-Civita de g est positive. Alors la masse de (M, g) est positive. De plus, la masse est nulle si et seulement si M est isométrique à l'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien.

Démonstration. Soit ψ_0 un spineur constant. La proposition .55, appliquée au spineur donné par le corollaire .54, donne la formule suivante :

$$\int_M |\nabla\psi|^2 v_g + \frac{1}{4}\int_M Scal^g |\psi|^2 v_g = \frac{1}{4} m(g) |\psi_0|_g^2.$$

Par hypothèse, la courbure scalaire $Scal^g$ de g est positive, donc la masse $m(g)$ de M est positive. Pour l'équivalence, nous renvoyons à [4] page 692. □

2.1.4 Masse et changement conforme

Dans le but de généraliser le théorème de la masse positive au cadre conforme, nous étudions le comportement de l'expression de la masse lors d'un changement conforme (respectant la notion de variété asymptotiquement plate) de la métrique. Considérons l'ensemble de fonctions suivant :

$$\mathscr{F} = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{>0}) \,:\, f - 1 \in C^{2,\alpha}_{-\tau} \ et\ \Delta(f) \in L^1\}.$$

Chaque fonction dans $\mathscr{F}$ nous donne une métrique asymptotiquement plate dans la classe conforme de g. Nous avons le théorème suivant [24] :

Théorème .57. *([24])* Soit (M, g) une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$ telle que $g \in \mathcal{M}_\tau$. Nous considérons $\tilde{g} = fg$, où f est une fonction strictement positives sur M. Alors, $\tilde{g}$ appartient à $\mathcal{M}_\tau$ si et seulement si f appartient à $\mathscr{F}$. Dans ce cas, les masses sont reliées par :

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (n-1)\int_M \Delta^g(f) v_g. \tag{2.8}$$

Démonstration. Dans la carte sur M_∞ relative à g, nous avons :

$$\partial_i(f g_{ij}) - \partial_j(f g_{ii}) = f(\partial_i(g_{ij}) - \partial_j(g_{ii})) + (g_{ij}\partial_i f - g_{ii}\partial_j f).$$

Notons $\mu_j = \sum_{i=1}^n (\partial_i(g_{ij}) - \partial_j(g_{ii}))\nu_j$. En écrivant $g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}$, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i(f g_{ij}) - \partial_j(f g_{ii}))\,\nu_j = \mu_j + (f-1)\mu_j + (1-n)\partial_j f \nu_j + \sum_{i=1}^n (a_{ij}\partial_i f - a_{ii}\partial_j f)\nu_j. \tag{2.9}$$

De plus, $\partial_i f = O(r^{-\tau-1})$, $a_{ij} = O(r^{-\tau})$, $\mu_j = O(r^{-\tau-1})$ et $f-1 = O(r^{-\tau})$. Nous avons alors :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\partial_i f - a_{ii}\partial_j f)\nu_j = O(r^{-2\tau-1}) \qquad \text{et} \qquad (f-1)\mu_j = O(r^{-2\tau-1}),$$

avec $2\tau+1 > n-1$. Nous en déduisons :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\partial_i f - a_{ii}\partial_j f)\nu_j v_g = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to\infty}\int_{S_r}(f-1)\mu_j v_g = 0.$$

En intégrant la formule (2.9) sur S_r, en sommant sur j, et lorsque r tend vers l'infini nous obtenons :

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (1-n)\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu\lrcorner v_g.$$

La formule de Stokes donne enfin :

$$m(\tilde{g}) = m(g) + (n-1)\lim_{r\to\infty}\int_{M_r}\Delta^g(f)v_g.$$

□

Nous terminons ce paragraphe par un lemme dont nous aurons besoin ultérieurement.

Lemme .58. Soit (M,g) une variété asymptotiquement plate telle que $g \in \mathcal{M}_\tau$. Pour toute fonction f dans $\mathscr{F}$, nous avons :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\frac{df}{f}(\nu)\nu\lrcorner v_g = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu\lrcorner v_g.$$

Démonstration. Nous écrivons :

$$\int_{S_r}\frac{df}{f}(\nu)\nu\lrcorner v_g = \int_{S_r}(f^{-1}-1)df(\nu)\nu\lrcorner v_g + \int_{S_r} df(\nu)\nu\lrcorner v_g. \tag{2.10}$$

Le fonction f est positive sur M et tend vers 1 à l'infini, donc il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $\varepsilon \leqslant f \leqslant C$. Par conséquent, f^{-1} est bornée sur M. De plus, $f-1 = O(r^{-\tau})$, nous obtenons : $f^{-1}-1 = -f^{-1}(f-1) = O(r^{-\tau})$, et donc :

$$(f^{-1}-1)|df| = O(r^{-2\tau-1}), \qquad \text{avec } 2\tau+1 > n-1.$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}(f^{-1}-1)df(\nu)\nu\lrcorner v_g = 0.$$

L'équation (2.10), lorsque r tend vers l'infini, nous donne :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} f^{-1}df(\nu)\nu\lrcorner v_g = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} df(\nu)\nu\lrcorner v_g.$$

□

2.2 Variétés ALF

Nous allons rappeler le théorème de la masse positive dans le cas des variétés ALF démontré par V. Minerbe [20]. Commençons par décrire de manière précise l'espace modèle à l'infini. Soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m \setminus B_R$ une fibration en cercles de longueur constante L, où B_R est la boule de $\mathbb{R}^m$ de rayon R. Soient $\check{x}_i$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^m$. On note $x_i = \pi^* \check{x}_i$ les coordonnées induites sur $\mathcal{X}$; celles-ci définissent une distance $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_m^2}$ sur $\mathcal{X}$. Soit S le champs de vecteurs sur $\mathcal{X}$ engendré par l'action de $\mathbb{S}^1$. On pose $T = \dfrac{L}{2\pi} S$. Soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante sur $\mathcal{X}$ telle que $\eta(T) = 1$. La 2-forme $d\eta$ est le pull-back d'une 2-forme ω sur $\mathbb{R}^m$. Supposons que sur $\mathbb{R}^m \setminus B_R$ la 2-forme $d\eta = \pi^*\omega$ possède les propriétés de décroissance suivantes :

$$\omega = O(r^{1-m}) \qquad \text{et} \qquad d\omega = O(r^{-m}).$$

Nous définissons la métrique h sur $\mathcal{X}$ par :

$$h = \pi^* g_{\mathbb{R}^m} + \eta^2 = dx^2 + \eta^2,$$

où $g_{\mathbb{R}^m}$ est la métrique canonique sur $\mathbb{R}^m$. L'espace $(\mathcal{X}, h)$ est l'espace modèle à l'infini pour les variétés ALF. Il y a deux exemples simples de tels espaces : la fibration triviale, où $\mathcal{X}$ est le produit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit $h = dt^2 + dx^2$, et la fibration de Hopf de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ munie de la métrique $h = dx^2 + \eta^2$, où η est la forme de contact standard de $\mathbb{S}^3$ et dx^2 le pull-back de la métrique standard de $\mathbb{R}^3$.

Définition .59. Soit (M, g) une variété riemannienne complète orientée de dimension $m+1$, avec $m \geqslant 2$. La variété riemannienne (M, g) est ALF s'il existe un compact K de M tel que $M \setminus K$ est difféomorphe à $\mathcal{X}$, où $(\mathcal{X}, h)$ est l'espace modèle décrit ci-dessus, et tel que la métrique g vérifie sur $\mathcal{X}$ les estimations suivantes :

$$g = h + O(r^{2-m}), \qquad \nabla^h g = O(r^{1-m}) \qquad \text{et} \qquad \nabla^{h,2} g = O(r^{-m}),$$

où ∇^h est la connexion de Levi-Civita de la métrique h.

Soit (M, g) une variété ALF de dimension $m+1$ asymptotique à $(\mathcal{X}, h)$ à l'infini. Notons que $(dx_1, \cdots, dx_m, \eta)$ est une base h-orthonormée du fibré cotangent de $\mathcal{X}$ et soit $(X_1, \cdots, X_m, T)$ sa base duale. Notons $\mathscr{X}$ l'espace des champs de vecteurs engendré par $\{X_1, \cdots, X_m\}$. Dans le cas des variétés asymptotiquement plates, la masse est un nombre réel, en revanche, pour une variété ALF la masse est une forme quadratique définie sur l'espace $\mathscr{X}$.

Définition .60. (V. Minerbe, [20] Definition 2, page 944). La masse de (M, g) est la forme quadratique $\mathcal{Q}_g$ définie sur $\mathscr{X}$ par :

$$\mathcal{Q}_g(Z) = \frac{1}{\omega_n L} \limsup_{r \to \infty} \int_{\partial B_r} *_h q_{g,h}(Z), \tag{2.11}$$

pour tout champs de vecteurs Z dans $\mathscr{X}$. Le volume de la sphère standard $\mathbb{S}^{m-1}$ est noté ω_n, $*_h$ est l'opérateur de Hodge relatif à h et la quantité $q_{g,h}(Z)$ est donnée par :

$$q_{g,h}(Z) = -(\mathrm{div}_h g)(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2}\Big(d(\mathrm{tr}_h g)(Z)\widetilde{\alpha}_Z + d(g(Z,Z))\Big), \tag{2.12}$$

où $\widetilde{\alpha}_Z$ est la 1-forme duale de Z relativement à la métrique h.

Le théorème de la masse positive correspondant est le suivant :

Théorème .61. *(V. Minerbe, [20] Theorem 3, page 944).* Soit (M,g) une variété riemannienne complète, orientée, et de dimension $m+1$, avec $m \geqslant 3$. Supposons que (M,g) est ALF et de courbure de Ricci positive ou nulle. Alors la masse $\mathcal{Q}_{g,h}$ est une forme quadratique positive, et celle-ci est nulle si et seulement si (M,g) est le produit standard $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$.

Terminons cette section par un lemme central dans la théorie de la masse positive ALF et dont nous aurons besoin par la suite.

Lemme .62. *(V. Minerbe, [20] Lemma 6, page 942)* Soit (M,g) une variété ALF. Soient Z dans $\mathscr{X}$ et $\widetilde{\alpha}_Z$ la forme duale de Z relativement à la métrique h. Alors il existe une 1-forme α_Z sur M telle que $(d+\delta)\alpha_Z = 0$ et satisfaisant les conditions suivantes :

$$\alpha_Z - \widetilde{\alpha}_Z = O(r^{2-m+\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad r^{-2+m-2\varepsilon}\nabla^g(\alpha_Z - \widetilde{\alpha}_Z) \in L^1, \tag{2.13}$$

où ∇^g est la connexion de Levi-Civita de g.

Chapitre 3

Théorèmes de la masse positive conforme

3.1 Structures de Weyl asymptotiquement plates

Dans cette section, nous introduisons la notion de structure de Weyl asymptotiquement plate et nous généralisons les résultats de la section 2.1 au cadre de la géométrie conforme.

Définition .63. Une structure de Weyl (M, c, D) s'appelle *asymptotiquement plate* d'ordre τ lorsqu'il existe une métrique g_0 dans c telle que :

1. La variété riemannienne (M, g_0) est asymptotiquement plate d'ordre τ telle que $g_0 \in \mathcal{M}_\tau$, avec $(n-2)/2 < \tau < n-2$.
2. Pour tout entier l de 1 à k, la forme de Lee θ_0 de D relative à g_0 appartient à $W^{1,q}_{-\tau-1}(M^l_\infty)$, où M^l_∞ est le l-ième bout de (M, g_0), et, où $q > n$.
3. $\delta^0\theta_0$ est intégrable sur M, où δ^0 est la codifférentielle relative à g_0.

Nous dirons que la métrique g_0 est une *métrique adaptée* pour la structure de Weyl asymptotiquement plate D.

Dans tout ce qui suit, (M, c, D) est une structure de Weyl asymptotiquement plate à un seul bout, noté M_∞, et g_0 est une métrique adaptée pour (M, c, D). Sauf mention contraire, les objets riemanniens (∇^0, δ^0, etc ...) et les espaces de fonctions sont définis relativement à la métrique g_0. Nous notons ∇^0 la connexion de Levi-Civita de g_0, v_0 sa forme volume et θ_0 la forme de Lee de D associée à g_0.

Définition .64. Soient (M, c, D) une structure de Weyl asymptotiquement plate et g_0 une métrique adaptée. Nous définissons la *masse conforme* de la structure de Weyl asymptotiquement plate par :

$$m(D)(g_0) = m(g_0) + 2(n-1)\int_M \delta^0(\theta_0)v_0,$$

où $m(g_0)$ est la masse riemannienne totale de la variété (M, g_0).

Remarque .65. Dans le cas où la variété possède plusieurs bouts, la masse d'un bout M^l_∞ de M, notée $m^l(D)(g_0)$, est donnée par :

$$m^l(D)(g_0) = m^l(g_0) + 2(n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S^l_r} \theta_0(\nu_l)\nu_l \lrcorner v_g,$$

où $m^l(g_0)$ est la masse riemannienne du bout M^l_∞, S^l_r la sphère de rayon r dans les coordonnées sur M_∞ et ν_l le champ de vecteurs sortant de la sphère S^l_r. La masse de la variété M est donc la somme des masses de chaque bout.

Nous étudions maintenant le comportement de la masse conforme lorsque l'on change de métrique adaptée. Soit g une métrique dans la classe conforme c telle que $g \in M_\tau$; nous définissons la quantité $m(D)(g)$ par :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1) \int_M \delta^g(\theta_g) v_g,$$

où δ^g et v_g sont respectivement l'opérateur de divergence et la forme volume associés à g. Nous posons $\mathcal{M}^0_\tau = \{g = fg_0 \,:\, f \in \mathscr{F}\}$. Nous rappelons que $\mathscr{F} = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{>0}) \,:\, f - 1 \in C^{2;\alpha}_{-\tau}$ *et* $\Delta(f) \in L^1\}$.

Proposition .66. Toute métrique g dans $\mathcal{M}^0_\tau$ est une métrique adaptée, et nous avons :

$$m(D)(g) = m(D)(g_0).$$

Démonstration. Nous considérons $g = fg_0$ où f est une fonction de $\mathscr{F}$. Montrons que g est une métrique adaptée pour (M, c, D). D'après le théorème .57, la métrique g est dans $\mathcal{M}_\tau$. De plus, la proposition .8 nous donne :

$$\theta_g = \theta_0 - \frac{1}{2}\frac{df}{f}. \tag{3.1}$$

Les hypothèses sur θ_0 et f, et la formule (3.1) ci-dessus démontrent que la 1-forme θ_g appartient à $W^{1,q}_{-\tau-1}$. De plus, la formule (3.1) nous donne :

$$\delta^0\theta_g = \delta^0\theta_0 + \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f}. \tag{3.2}$$

Par hypothèse, $\delta^0\theta_0$ et Δf sont intégrable sur M, et f^{-1} est bornée sur M. Ainsi, la formule (3.2) démontre que $\delta^0\theta_g$ est intégrable sur M. De plus, g et g_0 sont asymptotiques à la métrique euclidienne à l'infini, par conséquent, $\delta^0\theta_g$ est intégrable sur M si et seulement si $\delta^g\theta_g$ est intégrable sur M. La métrique g satisfait donc les conditions de la définition .63, c'est-à-dire g est une métrique adaptée pour (M, c, D). Nous supposons que la variété ne possède qu'un seul bout à l'infini. Par définition, nous avons :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \theta_g(\nu)\nu \lrcorner v_g.$$

Cependant, les deux métriques g et g_0 sont asymptotiquement plates dans le même système de coordonnées, donc nous pouvons remplacer v_g par v_0 dans la limite de l'intégrale. La formule (3.1)devient :

$$m(D)(g) = m(g) + 2(n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \theta_0(\nu)\nu \lrcorner v_0 - (n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_0. \tag{3.3}$$

D'autre part, le théorème .57 nous donne :

$$m(g) = m(g_0) + (n-1) \int_M \Delta(f) v_0. \tag{3.4}$$

Enfin, d'après le lemme .58, nous avons :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \frac{df}{f}(\nu)\nu \lrcorner v_0 = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} df(\nu)\nu \lrcorner v_0 = \int_M \Delta(f) v_0. \tag{3.5}$$

Nous déduisons immédiatement à partir des équations (3.3), (3.4) et (3.5) :

$$m(D)(g) = m(g_0) + 2(n-1) \int_M \delta(\theta_0) v_0.$$

$\square$

3.1.1 Sous-classes de métriques asymptotiquement plates

Dans cette section, nous étudions les propriétés d'invariance de la masse conforme d'une structure de Weyl asymptotiquement plate. En particulier, nous verrons comment celle-ci évolue lors d'un changement de coordonnées. Soit $\{z_i\}$ une système de coordonnées asymptotiques pour (M, c, D) relatif à la métrique adaptée g_0. Considérons le système de coordonnée $\{\tilde{z}_j\}$ sur M_∞ tel que $\tilde{z}_i = a z_i$, où $a \in \mathbb{R}^{>0}$.

Remarque .67. La métrique riemannienne $a^2 g_0$ est asymptotiquement plate dans le système de coordonnées $\{\tilde{z}_i\}$, mais pas dans $\{z_i\}$.

Nous notons $\widetilde{g}_{ij}$ et g_{ij} respectivement les composantes de g_0 relatives aux systèmes de coordonnées $\{\tilde{z}_i\}$ et $\{z_j\}$. Nous notons $\widetilde{\partial}_i$ et ∂_i les dérivées partielles relatives à $\tilde{z}_i$ et z_i. Nous avons $d\tilde{z}_i = a dz_i$ et $\widetilde{\partial}_i = a^{-1}\partial_i$, d'où :

$$\tilde{v}_0 = a^n v_0 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{g}_{ij} = a^{-2} g_{ij}. \tag{3.6}$$

Un calcul simple donne :

$$\widetilde{\partial}_i(a^2 \widetilde{g}_{ij}) = \widetilde{\partial}_i(g_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k g_{ij} \widetilde{\partial}_i z_k = a^{-1} \partial_k g_{ij}. \tag{3.7}$$

D'après (3.6) et (3.7), nous obtenons la formule suivante :

$$\left(\widetilde{\partial}_i(a^2\widetilde{g}_{ij}) - \widetilde{\partial}_j(a^2\widetilde{g}_{ii})\right) \widetilde{\partial}_j \lrcorner \widetilde{v_0} = a^{n-2} \left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) \partial_i \lrcorner v_0.$$

En intégrant sur S_r et lorsque r tend vers l'infini, nous avons :

$$m(a^2 g_0) = a^{n-2} m(g_0). \tag{3.8}$$

Nous étudions maintenant le second terme de la masse conforme de D. Nous rappelons :

$$\int_M \delta^0(\theta_0) v_0 = \int_M d(\theta_0^\sharp \lrcorner\, v_0).$$

Si $g = a^2 g_0$, où a est une constante, nous avons $\theta_g = \theta_0$ et $\theta_0^{\sharp_g} = a^{-2}\theta_0^{\sharp_0}$, où $\sharp_g$ et $\sharp_0$ sont les isomorphismes musicaux associés respectivement à g et g_0. De plus, $\delta^g = a^{-2}\delta^0$ et $v_g = a^n v_0$, donc :

$$\int_M \delta^g(\theta_g) v_g = a^{n-2} \int_M \delta^0(\theta_0) v_0. \tag{3.9}$$

En sommant les équations (3.8) et (3.9), nous avons démontré le résultat suivant :

Proposition .68. Si g_0 est une métrique adaptée de la structure de Weyl asymptotiquement plate (M, c, D), alors :

$$m(D)(a^2 g_0) = a^{n-2} m(D)(g_0)\,, \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Ce résultat, la proposition .66 et le lemme .50, montrent comment la masse conforme évolue si l'on remplace les coordonnées $\{z_i\}$ par les nouvelles coordonnées $\tilde{z} = aE(z) + v + O(r^{-\tau})$, où E est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$, v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et a une constante positive. Nous dirons qu'un tel changement de coordonnées est un *changement asymptotiquement conforme* des coordonnées.

Supposons que (M, c, D) possède k bouts, avec k supérieur à 1. Dans ce cas, la masse conforme est définie comme la somme des masses de chaque bout. Nous rappelons que la masse conforme de (M, c, D) sur M^l_∞, notée $m^l(D)(g_0)$, est définie par :

$$m^l(D)(g_0) = m^l(g_0) + 2(n-1) \lim_{r\to\infty} \int_{S^l_r} \theta_0(\nu_l)\nu_l \lrcorner v_0.$$

Soit $\{a_l\}_{l=1\ldots k}$ une famille de nombres réels strictement positifs. Nous définissons :

$$\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)} = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{>0}) \;:\; \Delta f \in L^1 \text{ and } f - a_l \in C^{2;\alpha}_{-\tau}(M^l_\infty)\,,\ \forall l = 1\ldots k\}. \tag{3.10}$$

En particulier, nous notons $\mathscr{F}$ l'ensemble $\mathscr{F}_{(1,\ldots,1)}$.

Proposition .69. Soit $g = f g_0$, où f appartient à $\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)}$. Nous avons :

$$m(D)(g) = \sum_{l=1}^{k} a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_0).$$

En particulier, si $g_1 = f_1 g_0$ et $g_2 = f_2 g_0$, avec f_1 et f_2 dans $\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)}$, nous avons :

$$m(D)(g_1) = m(D)(g_2).$$

Démonstration. Fixons l entre 1 et k. Sur M^l_∞, nous avons $f = a_l f_l$, où f_l est dans $\mathscr{F}$ sur M^l_∞. D'après le théorème .57, la métrique $g_l = f_l g_0$ est asymptotiquement plate sur M^l_∞ et d'après la proposition .66, g_l est adaptée sur M^l_∞. Nous avons alors :

$$m^l(D)(g_l) = m^l(D)(g_0).$$

La proposition .68 nous donne :

$$m^l(D)(g) = a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_l).$$

Nous en déduisons :

$$m(D)(g) = \sum_{l=1}^{k} a_l^{\frac{n-2}{2}} m^l(D)(g_0).$$

□

Remarque .70. En conclusion, la masse conforme de D évaluée en $g = fg_0$, pour $f \in \mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)}$, ne dépend que des nombres réels a_l et de g_0. Une métrique adaptée étant fixée, nous remarquons que chaque ensemble $\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)}$ défini une sous-classe de métriques de c qui ont toutes la même masse conforme relativement à D. Nous notons $m_D(\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)})$ la masse conforme de la sous-classe définie par $\mathscr{F}_{(a_1,\ldots,a_k)}$.

Nous avons vu que la masse conforme possède la propriété d'équivariance donnée par la proposition .68. En suivant une suggestion de M. Herzlich, nous pouvons transformer cette propriété d'équivariance en une propriété d'invariance en supposant que la masse conforme de D évaluée en g_0 est positive. Pour simplifier, nous revenons au cas où (M, g_0) n'a qu'un seul bout. Nous notons S_1 l'ensemble des difféomorphismes $\Phi : M \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B_R$, où K un compact de M et où R est un réel positif, faisant de (M, g_0) une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$. Pour tout a dans $\mathbb{R}^{>0}$, nous définissons :

$$S_a = \{a^{\frac{1}{2}}\Phi\,,\ \Phi \in S_1\} \qquad \text{et} \qquad S = \bigcup_{a\in\mathbb{R}^{>0}} S_a.$$

Nous indexons S par I, donc $S = \{\Phi_\alpha\,,\ \alpha \in I\}$. Soient Φ_α et Φ_β deux difféomorphismes dans S. D'après le lemme .50, il existe $A_{\beta\alpha}$ dans $\mathrm{CO}(n)$ tel que :

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(x) = A_{\beta\alpha}(x) + O(1)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

De plus, si Φ_α et Φ_β appartiennent au même S_a, alors $A_{\beta\alpha} \in \mathrm{O}(n)$. Nous définissons une relation d'équivalence sur l'union disjointe $\sqcup_{\alpha\in I}\mathbb{R}^n \times \{\alpha\}$ en posant $(v, \alpha) \sim (w, \beta)$ lorsque $w = A_{\beta\alpha}v$. Nous notons $[u, \alpha]$ la classe d'équivalence de (u, α).

Définition .71. L'*espace tangent à l'infini* de M est l'espace vectoriel défini comme le quotient de $\sqcup_{\alpha\in I}\mathbb{R}^n \times \{\alpha\}$ par la relation $\sim$:

$$T_\infty M = (\sqcup_{\alpha\in I}\mathbb{R}^n \times \{\alpha\})_{/\sim}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{>0}$, nous définissons le produit scalaire g_a^∞ sur $T_\infty M$ par :

$$g_a^\infty((v_1,\alpha),(v_2,\alpha)) = \langle v_1, v_2\rangle,$$

pour tout (v_1,α) et (v_2,α) dans $\mathbb{R}^n \times \{\alpha\}$ avec $\Phi_\alpha \in S_a$, et où $\langle\, ,\, \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire est bien défini et nous avons immédiatement :

$$g_b^\infty = \frac{b}{a} g_a^\infty\,, \qquad \forall a\,,\ \forall b \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{3.12}$$

Nous posons $\mathscr{F}_\mathbb{R} = \cup_{a\in\mathbb{R}^{>0}} \mathscr{F}_{(a)}$, où $\mathscr{F}_{(a)}$ est défini par (3.10). En utilisant les notations de la remarque .70, la propriété d'équivariance de $m_D(\mathscr{F}_{(a)})$ décrite dans la proposition .68, ainsi que la formule (3.12), démontrent que le produit scalaire $(m_D(\mathscr{F}_{(a)}))^{\frac{2}{2-n}} g_a^\infty$ sur $T_\infty M$ ne dépend pas de a. Nous pouvons alors définir la masse conforme de D relativement à $\mathscr{F}_\mathbb{R}$ par :

$$m_D(\mathscr{F}_\mathbb{R}) = (m_a(D))^{\frac{2}{2-n}} g_a^\infty. \tag{3.13}$$

Remarque .72. Nous nous attendons à ce que si g_0 est une métrique adaptée pour la structure conforme asymptotiquement plate (M,c,D), alors toutes les métriques asymptotiquement plates dans c appartiennent à $\mathscr{F}_\mathbb{R} g_0$. Si ceci est vrai, la masse conforme $m_D(\mathscr{F}_\mathbb{R})$ définie ci-dessus serai un invariant de la structure de Weyl asymptotiquement plate (M,c,D).

3.1.2 Le théorème de la masse positive conforme

Soient (M,c,D) une structure de Weyl asymptotiquement plate d'ordre τ ne possédant qu'un seul bout, noté M_∞, et g_0 une métrique adaptée pour (M,c,D). Rappelons que $(n-2)/2 < \tau < n-2$. Nous notons ∇^0 la connexion de Levi-Civita de g_0. Supposons que M est une variété spinorielle. Nous notons Σ l'espace des spineurs conformes de poids $(2-n)/2$. Nous notons désormais Σ^0 le fibré des spineurs riemanniens relatif à la métrique g_0 et $\mathscr{D}^0$ l'opérateur de Dirac induit par ∇^0 sur Σ^0. Rappelons que les espaces de fonctions considérés sont relatifs à la métrique adaptée g_0. Commençons par étudier le comportement des spineurs D-harmoniques à l'infini.

Lemme .73. Soit ψ une section du fibré des spineurs Σ^0. Supposons que ψ est D-parallèle, *i.e* $D\psi = 0$. Si ψ tend vers 0 dans M_∞, *i.e.* $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\psi(x)| = 0$, alors ψ est identiquement nulle.

Démonstration. Soient x dans M et $\{e_i\}$ une base de $T_x M$. La différentielle de $|\psi|^2$ s'écrit :

$$d|\psi|^2 = \sum_{i=1}^n \nabla^0_{e_i}(|\psi|^2) e_i^*.$$

La compatibilité de la connexion de Levi-Civita avec le produit scalaire donne $\nabla^0_{e_i}(|\psi|^2) = (\nabla^0_{e_i}\psi, \psi) + (\psi, \nabla^0_{e_i}\psi)$. Comme ψ est D-parallèle, la formule (1.40) donne :

$$\nabla^0_{e_i}\psi = \frac{n-1}{2}\theta_0(e_i)\psi + \frac{1}{2} e_i \cdot \theta_0 \cdot \psi.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\nabla^0_{e_i}(|\psi|^2) =&(n-1)\theta_0(e_i)|\psi|^2 + \frac{1}{2}((e_i\cdot\theta_0+\theta_0\cdot e_i)\cdot\psi,\psi)\\ =&(n-2)\theta_0(e_i)|\psi|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$d|\psi|^2 = (n-2)|\psi|^2\theta_0. \tag{3.14}$$

Soient x_0 dans M_∞ et γ une géodésique paramétrée sur $[0,+\infty[$ telle que $\gamma(0)=x_0$ et $\lim\limits_{t\to\infty}|\gamma(t)|=+\infty$. Nous posons $\phi(t)=|\psi|^2_{\gamma(t)}$ et $f(t)=\theta_0(\dot\gamma(t))$. D'après l'équation (3.14), la fonction ϕ est donc solution de l'équation différentielle ordinaire $\phi'(t)=(n-2)f(t)\phi(t)$ sur $[0,\infty[$. Par conséquent, pour tout t, $\phi(t)=c\exp(F(t))$, où c est une constante et F une primitive de f. Par hypothèse $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$. De plus, $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=0$ d'après la décroissance de θ_0. Donc, $\phi(t)=0$ pour tout t, c'est-à-dire ϕ est nulle le long de γ. Ceci étant vrai pour toute courbe γ allant vers l'infini sur M_∞, nous en déduisons que ψ est identiquement nul. □

Soit ω une 1-forme sur M. La formule de Stokes nous donne :

$$-\int_{M_r}\delta(\omega)v_0 = \int_{S_r}\omega(\nu)\nu\lrcorner\, v_0,$$

où ν est le champ de vecteurs normal unitaire sortant de S_r, et rappelons que M_r est le compact de M défini par $M_r = M\setminus E_r$ dont le bord s'identifie à la sphère S_r de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, si la limite existe, nous avons :

$$-\int_M \delta(\omega)v_0 = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\omega(\nu)\nu\lrcorner\, v_g.$$

Proposition .74. Soit δ un réel tel que $1-n<\delta<0$. Supposons que la courbure scalaire $Scal^D$ de la connexion de Weyl D est positive. Dans ces conditions, le carré de l'opérateur de Dirac de poids conforme $(2-n)/2$, noté $\mathscr{D}^2$, est un isomorphisme de : $W^{2,q}_{-\tau}(\Sigma)$ dans $L^q_{-\tau-2}(\Sigma)$.

Démonstration. Montrons que l'opérateur $\mathscr{D}^2$ est bien défini sur ces espaces de Sobolev. Soit ψ dans $W^{2,q}_{-\tau}$. La proposition 1.40 et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$|\mathscr{D}\psi| \leqslant |\mathscr{D}^0\psi| + \frac{1}{2}|\theta_0||\psi|. \tag{3.15}$$

Par hypothèse, la norme $|\psi|$ est bornée sur M car $|\psi|=O(r^{-\tau})$ et la proposition .53 nous donne $\mathscr{D}^0\psi\in W^{1,q}_{-\tau-1}$. De plus, la condition (2) de la définition .63 assure que θ_0 appartient également à $W^{1,q}_{-\tau-1}$. Par conséquent, l'inégalité (3.15) ci-dessus permet de conclure que $\mathscr{D}\psi$ est une section de $W^{1,q}_{-\tau-1}$. Par le même raisonnement en remplaçant ψ par $\mathscr{D}\psi$ qui appartient à $W^{1,q}_{-\tau-1}$, nous démontrons que $\mathscr{D}^2\psi$ appartient à $W^{0,q}_{-\tau-2}=L^q_{-\tau-2}$.

Soit ψ dans $W^{2,q}_{-\tau}$ tel que $\mathscr{D}^2\psi = 0$, montrons que ψ est identiquement nul. D'après le corollaire .42, pour le spineur D-harmonique, nous avons :

$$|D\psi|_h^2 + \frac{1}{4} Scal^D |\psi|_h^2 = -\delta\Big(h(\psi, D\psi)\Big).$$

En intégrant cette formule sur le compact M_r de M, pour $r > R$, nous obtenons :

$$\int_{M_r} |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_{M_r} Scal^D |\psi|_h^2 = -\int_{M_r} \delta\Big(h(\psi, D\psi)\Big).$$

La divergence conforme s'identifie avec la divergence riemannienne relative à g_0. En utilisant la formule de Stokes on trouve :

$$\int_{M_r} |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_{M_r} Scal^D |\psi|_h^2 = \int_{S_r} (\psi, D_\nu\psi)\nu \lrcorner v_0. \tag{3.16}$$

La formule (1.40) nous donne :

$$(\psi, D_\nu\psi) = (\psi, \nabla^0_\nu\psi) + \frac{1-n}{2}\theta_0(\nu)|\psi|^2 + \frac{1}{2}(\nu\cdot\psi, \theta_0\cdot\psi).$$

Par l'inégalité triangulaire et de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|(\psi, D_\nu\psi)| \leqslant |\nabla^0\psi||\psi| + \frac{n-1}{2}|\theta_0||\psi|^2 + \frac{1}{2}|\theta_0||\psi|^2. \tag{3.17}$$

D'après cette inégalité (3.17), les hypothèses sur ψ et sur la forme de Lee θ_0, nous obtenons $(\psi, D_\nu\psi) = O(r^{-2\tau-1})$, avec $2\tau + 1 > n - 1$. Par conséquent :

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\psi, D_\nu\psi)\nu \lrcorner v_0 = 0.$$

Ainsi, lorsque r tend vers l'infini dans (3.16), nous avons :

$$\int_M |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_M Scal^D |\psi|_h^2 = 0.$$

La courbure scalaire $Scal^D$ de la connexion de Weyl est positive, donc les deux termes de cette dernière équation sont nuls. En particulier, $D\psi = 0$. De plus, ψ tend vers 0 à l'infini, donc, d'après le lemme .73, ψ est identiquement nul. Nous avons donc démontré que l'opérateur $\mathscr{D}^2 : W^{2,q}_{-\tau} \to L^q_{-\tau-2}$ est injectif. D'un autre côté, la proposition .39 démontre que $\mathscr{D}^2$ est formellement autoadjoint :

$$\mathscr{D}^2 = (\mathscr{D}^2)^* \ : \ W^{2,q'}_{\tau+2-n} \to L^{q'}_{\tau-n}.$$

Un raisonnement similaire, utilisant la proposition .53, démontre que cet opérateur est injectif (par hypothèse nous avons $1 - n < \tau + 2 - n < 0$). En conclusion, l'opérateur $\mathscr{D}^2$ est de Fredholm dont le noyau et le conoyau sont triviaux, donc $\mathscr{D}^2$ est un isomorphisme de $W^{2,q}_{-\tau}$ dans $L^q_{-\tau-2}$ (voir [4]). $\square$

Proposition .75. Soit ψ un spineur asymptotiquement constant. Pour toute métrique adaptée g_0, nous avons la formule suivante :

$$-\int_M \delta(\omega_\psi) = \frac{1}{4} m(D)(g_0)|\psi_0|^2,$$

où ψ_0 est le spineur constant tel que $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}$, et où la section ω_ψ de $T^*M \otimes L^{(2-n)}$ est définie par :

$$\omega_\psi(X) = h\Big(\psi, X^\flat \cdot \mathscr{D}\psi + D_X\psi\Big), \qquad \forall X \in TM.$$

Démonstration. Soit g_0 une métrique adaptée. La proposition .25 et la formule (1.40) permettent d'identifier ω_ψ à une 1-forme sur M par la formule suivante :

$$\omega_\psi(X) = \omega^0_\psi(X) + \frac{1-n}{2}\theta_0(X)|\psi|^2, \tag{3.18}$$

avec $\omega^0_\psi(x) = (\psi, X \cdot \mathscr{D}^0\psi + \nabla^0_X\psi)$. Soit ψ_0 le spineur constant tel que $\psi - \psi_0 \in W^{2,q}_{-\tau}$; la proposition .55 donne :

$$-\int_M \delta(\omega^0_\psi)v_0 = \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \omega^0_\psi(\nu)\nu\lrcorner v_0 = \frac{1}{4}m(g_0)|\psi_0|^2. \tag{3.19}$$

Nous posons $\psi_1 = \psi - \psi_0$, et calculons :

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_0|^2 + 2\Re\Big((\psi_1, \psi_0)\Big).$$

Cependant, $\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}$ et $\theta_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1}$. Donc :

$$\theta_0(\nu)\Big(|\psi_1|^2 + 2\Re\Big((\psi_1, \psi_0)\Big)\Big) = O(r^{-2\tau-1}),$$

avec $2\tau + 1 > n - 1$. Par conséquent, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} |\psi|^2\theta_0(\nu)\nu\lrcorner v_0 = |\psi_0|^2 \lim_{r\to\infty}\int_{S_r} \theta_0(\nu)\nu\lrcorner v_0. \tag{3.20}$$

Remarquons que cette limite existe car $\delta^0\theta_0$ est intégrable sur M et donc (3.20) devient :

$$\int_M \delta(|\psi|^2\theta_0)v_0 = \Big(\int_M \delta(\theta_0)v_0\Big)|\psi_0|^2. \tag{3.21}$$

Les équations (3.19) et (3.21) nous donnent l'égalité souhaitée :

$$-\int_M \delta(\omega_\psi)v_0 = \frac{1}{4}\Big(m(g_0) + 2(n-1)\int_M \delta(\theta_0)v_0\Big)|\psi_0|^2.$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème .76. Soit (M, c, D) une structure de Weyl asymptotiquement plate d'ordre τ tel que $(n-2)/2 < \tau < n-2$. Supposons que la variété M est spinorielle. Si la courbure scalaire $Scal^D$ est positive, alors la masse $m(D)$ associée à D est positive et cette masse est nulle si et seulement si (M, c) est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ munit de la classe conforme canonique.

Démonstration. Soient g_0 une métrique adaptée pour D et ψ_0 un spineur constant. Les hypothèses de décroissance asymptotique sur D nous donnent $\mathscr{D}\psi_0 \in W^{1,q}_{-\tau-1} \cap L^q_{-\tau-2}$. D'après la proposition .74, il existe $\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}$ tel que $\mathscr{D}^2\psi_1 = -\mathscr{D}\psi_0$. Cependant, par régularité elliptique, $\psi_1 \in W^{3,q}_{-\tau+1}$ et donc $\psi_2 := \mathscr{D}\psi_1 \in W^{2,q}_{-\tau}$. Posons $\psi = \psi_2 + \psi_0$. Par construction, la section ψ est $\mathscr{D}$-harmonique et asymptotique au spineur constant ψ_0. En intégrant sur le compact M_r la formule de Lichnerowicz conforme du corollaire .42, nous obtenons :

$$\int_{M_r} |D\psi|^2 v_0 + \frac{1}{4}\int_{M_r} Scal^D |\psi|^2 v_0 = -\int_{M_r} \delta(\omega_\psi) v_0. \tag{3.22}$$

D'après la proposition .75, lorsque r tend vers l'infini, la formule (3.22) ci-dessus devient :

$$\int_M |D\psi|^2 v_0 + \frac{1}{4}\int_M Scal^D |\psi|^2 v_0 = m(D)(g_0)|\psi_0|^2.$$

Ainsi, puisque la courbure scalaire $Scal^D$ de la structure de Weyl D est positive, la masse $m(D)(g_0)$ associée à D est positive.

Supposons que la masse $m(D)$ soit nulle. Nous avons alors un spineur ψ de poids $(2-n)/2$ tel que :

$$\int_M |D\psi|_h^2 + \frac{1}{4}\int_M Scal^D |\psi|_h^2 = 0.$$

Les deux termes de cette équation sont positifs, donc nuls. La section ψ est alors D-parallèle. Par conséquent, $|\psi|_h^{\frac{2}{2-n}}$ est une section D-parallèle du fibré L. En effet, le calcul donne :

$$D|\psi|_h^{\frac{2}{2-n}} = D\Big(|\psi|_h^2\Big)^{\frac{1}{2-n}} = \frac{1}{2-n}|\psi|_h^{\frac{n-1}{2-n}}\Big(h(D\psi,\psi) + h(\psi, D\psi)\Big) = 0, \qquad \forall X \in TM.$$

Par définition, la structure de Weyl D est donc exacte. Donc, d'après le corollaire .12, il existe une métrique g dans c dont D est la connexion de Levi-Civita D^g. Écrivons $g = fg_0$, où f est une fonction strictement positive sur M. La structure de Weyl D étant la connexion de Levi-Civita de g, nous avons $\theta_g = 0$ et donc, d'après la proposition .8, nous obtenons :

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{df}{f}.$$

Nous posons $h = \log(f)$. Nous avons $dh = \dfrac{df}{f}$, et $h \in C^{1,\alpha}_{-\tau-1}(M)$ par hypothèse sur θ_0.

Lemme .77. Soit h une fonction C^∞ sur M. Supposons que dh appartient à $C^{1,\alpha}_{-\tau-1}(M)$. Alors, la fonction h possède une limite finie, notée a, telle que $h - a \in C^{2,\alpha}_{-\tau}(M)$.

Démonstration. Soient x et y dans $E_R = \mathbb{R}^n \setminus B_R$ tels que $|y| \geqslant |x| \geqslant R_1$, pour $R_1 > R$. Soit $z = \dfrac{|x|}{|y|}y$ dans $\mathbb{R}^n$. Considérons X_t le grand arc de cercle paramétré sur $[0,1]$ joignant x et z. Nous avons $|X_t| = |x| \geqslant R_1$ et $|\dot{X}_t| \leqslant \pi|x|$. L'égalité des accroissement finis sur $[0,1]$ appliquée à $f(t) = h(X_t)$ nous donne :

$$h(x) - h(z) = \int_0^1 dh_{X_t}(\dot{X}_t)dt.$$

Par hypothèse, $|dh_{X_t}| = O(|X_t|^{-\tau-1})$, $|X_t| = |x|$ et $|\dot{X}_t| \leqslant \pi|x|$, nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$|h(x) - h(z)| \leqslant \pi C|x|^{-\tau},$$

où C est une constante positive indépendante de x et y. Comme $|x| \geqslant R_1$, cette inégalité implique :

$$|h(x) - h(z)| \leqslant \pi C R_1^{-\tau}. \tag{3.23}$$

Posons $T = \dfrac{|x|}{|y|}$; nous avons $z = Ty$ et donc l'égalité des accroissement finis entre z et y nous donne :

$$h(Ty) - h(y) = \int_0^1 dh_{y+t(Ty-y)}(Ty-y)dt.$$

Le même raisonnement permettant d'obtenir l'inégalité (3.23), nous donne :

$$|h(z) - h(y)| \leqslant C|y|^{-\tau} \int_0^1 (1-T)\Big(1 + t(T-1)\Big)^{-\tau-1} dt.$$

Nous pouvons calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-T)\Big(1 + t(T-1)\Big)^{-\tau-1} dt = \tau^{-1}\left(\frac{|x|^{-\tau}}{|y|^{-\tau}} - 1\right).$$

Nous en déduisons :

$$|h(z) - h(y)| \leqslant \tau^{-1}C(|x|^{-\tau} - |y|^{-\tau}) \leqslant \tau^{-1}CR_1^{-\tau}. \tag{3.24}$$

Par conséquent, les inégalités (3.23) et (3.24) établissent l'existence d'une constante C_1 indépendante de x et y telle que :

$$|h(x) - h(y)| \leqslant C_1 R_1^{-\tau}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir R_1 suffisamment grand tel que, pour tout x et y dans E_r vérifiant $|y| \geqslant |x| \geqslant R_1$, $|h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, d'après le critère de Cauchy, $h(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers l'infini. Lorsque $T = \dfrac{|x|}{|y|}$ tend vers l'infini dans l'inégalité (3.24), nous obtenons :

$$|h(x) - a| \leqslant \frac{C}{\tau}|x|^{-\tau}, \qquad \forall x \in E_R. \tag{3.25}$$

Par définition de la norme de Hölder à poids, nous remarquons que l'estimation (3.25) et l'hypothèse $dh \in C^{1,\alpha}_{-\tau-1}$ suffisent pour démontrer que h appartient à $C^{2,\alpha}_{-\tau}$. Ainsi, l'équation (3.25) et l'hypothèse $dh \in C^{1,\alpha}_{-\tau-1}$ démontrent $h - a \in C^{2,\alpha}_{-\tau}(M)$. □

En appliquant le lemme .77 à la fonction $h = \log(f)$, nous démontrons que f possède une limite finie strictement positive $b = \exp(a)$ à l'infini et que $f - b \in C^{2,\alpha}_{-\tau}$. En changeant f par $b^{-1}f$, nous ne modifions pas la connexion de Levi-Civita associée à g. Nous pouvons donc supposer que $g = fg_0$ avec $f \in \mathscr{F}$. D'après le théorème .57, la métrique g est asymptotiquement plate. Nous avons donc $\psi \in \Sigma^g$ tel que $D\psi = 0$, où D est la connexion de Levi-Civita de la métrique asymptotiquement plate g. La preuve du théorème de la masse positive [4] démontre dans ce cas que M est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique plate. En conclusion, la variété conforme (M, c) est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa classe conforme canonique. □

3.2 Structures de Weyl ALF

Dans cette partie, nous appliquons la théorie des connexions de Weyl asymptotiquement plates [25] aux variétés ALF. Nous conservons les notations introduites précédemment.

Définition .78. La structure de Weyl (M, c, D) est ALF de dimension $m+1$ s'il existe une métrique g dans c telle que la variété riemannienne (M, g) est ALF et telle que la forme de Lee θ_g de D relative à g satisfait, sur $\mathcal{X}$, les conditions de décroissance suivantes :

$$\theta_g = O(r^{1-m}) \qquad \text{et} \qquad d\theta_g = O(r^{2-m}). \tag{3.26}$$

Une métrique g satisfaisant les conditions précédentes est une *métrique adaptée* pour la structure de Weyl ALF (M, c, D).

Cette définition étend la notion de variété ALF au cadre conforme. Nous allons définir la masse conforme associée à une structure de Weyl ALF. Comme pour la masse conforme d'une structure de Weyl asymptotiquement plate, voir [25], la masse conforme d'une structure de Weyl ALF sera évaluée en une métrique adaptée g. Nous montrons alors que la masse est indépendante du choix d'une telle métrique. Notons $\langle\ ,\ \rangle_h$ et $|\ |_h$ respectivement le produit scalaire et la norme relatifs à la métrique h sur $\mathcal{X}$ induits sur les formes de M.

Définition .79. Soient (M, c, D) une structure de Weyl ALF de dimension $m+1$ et g une métrique adaptée pour (M, c, D). La masse conforme associée à (M, c, D) évaluée en g, que nous notons $m^D_h(g)$, est la forme quadratique sur $\mathscr{Z}$ définie par :

$$m^D_h(g)(Z) = \mathcal{Q}_g(Z) + \frac{1}{\omega_n L} \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} *_h\Big((1-m)\langle\theta_g, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h \widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|^2_h \theta_g\Big), \qquad \forall Z \in \mathscr{Z}. \tag{3.27}$$

La forme quadratique $\mathcal{Q}_g$ est la masse de la variété ALF (M, g) donnée par la définition .60 et $\widetilde{\alpha}_Z$ est la forme duale de Z relativement à h.

Nous allons montrer que cette masse ne dépend pas du choix de la métrique adaptée choisie. Caractérisons l'espace des métriques adaptées dans c. Nous considérons l'espace de fonctions $\mathscr{F}$ défini par :

$$\mathscr{F} = \{f \in C^\infty(M,]0, +\infty[) : f - 1 = O(r^{2-m}),\ \partial_k f = O(r^{1-m}) \text{ et } \partial_l \partial_k f = O(r^{-m})\}. \tag{3.28}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition .80. Soit g une métrique adaptée pour la structure de Weyl ALF (M, c, D). Considérons le changement conforme $\widetilde{g} = fg$. La métrique $\widetilde{g}$ est adaptée pour (M, c, D) si et seulement si f appartient à $\mathscr{F}$.

Démonstration. D'après la définition des variétés ALF, sur $\mathcal{X}$, nous avons $g_{ij} = h_{ij} + a_{ij}$, où $a_{ij} = O(r^{2-m})$, $\partial_k a_{ij} = O(r^{1-m})$ et $\partial_l \partial_k a_{ij} = O(r^{-m})$. Nous écrivons $\widetilde{g}_{ij} = h_{ij} + (f-1)h_{ij} + f a_{ij}$. Nous posons $b_{ij} = (f-1)h_{ij} + f a_{ij}$. Si f appartient à $\mathscr{F}$, nous avons $b_{ij} = O(r^{2-m})$, $\partial_k b_{ij} = O(r^{1-m})$ et $\partial_l \partial_k b_{ij} = O(r^{-m})$. Ainsi, si f appartient à $\mathscr{F}$, la métrique $\widetilde{g}$ est ALF. Supposons que $\widetilde{g}$ est une métrique ALF. Nous avons alors $\widetilde{g}_{ij} = h_{ij} + b_{ij}$, où $b_{ij} = O(r^{2-m})$, $\partial_k b_{ij} = O(r^{1-m})$ et $\partial_l \partial_k b_{ij} = O(r^{-m})$. De plus, comme $\widetilde{g} = fg$, nous avons $h_{ij} + b_{ij} = f(h_{ij} + a_{ij})$. Ainsi, il est clair que f est bornée. L'égalité $(f-1)h_{ij} = b_{ij} - f a_{ij}$ montre alors que $f - 1 = O(r^{2-m})$. De la même façon, nous montrons que $\partial_k f = O(r^{1-m})$ et $\partial_l \partial_k f = O(r^{-m})$. Donc, la fonction f appartient à $\mathscr{F}$. □

Afin de démontrer l'invariance de la masse conforme de (M, c, D), nous établissons préalablement la formule de changement conforme de la masse $\mathcal{Q}_g$ de la variété ALF (M, g).

Proposition .81. Soit $\widetilde{g} = fg$, où le changement conforme f est une fonction dans $\mathscr{F}$. Nous avons alors la formule suivante :

$$\mathcal{Q}_{\widetilde{g}}(Z) = \mathcal{Q}_g(Z) + \frac{1}{2\omega_n L} \limsup_{r \to \infty} \int_{\partial B_r} *_h\Big((1-m)\langle df, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h \widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 df\Big), \qquad \forall Z \in \mathscr{Z}, \tag{3.29}$$

où $\widetilde{\alpha}_Z$ est la forme duale de Z relativement à h.

Démonstration. Soit Z dans $\mathscr{Z}$. Réécrivons le terme $q_{\widetilde{g},h}(Z)$, défini par (2.12), dans la base $(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1})$, où $X_{m+1} = T$. En utilisant la convention d'Einstein pour les indices redondants, nous avons :

$$q_{\widetilde{g},h}(Z) = (\nabla^h_{X_b} \widetilde{g})(X_b, Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2} d(\widetilde{g}(X_b, X_b))(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2} d(\widetilde{g}(Z, Z)). \tag{3.30}$$

En exprimant le terme de droite de l'équation (3.30) en fonction de f et de g, nous obtenons :

$$q_{\widetilde{g},h}(Z) = f q_{g,h}(Z) + df(X_b) g(X_b, Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2} df(Z) g(X_b, X_b)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2} g(Z, Z) df. \tag{3.31}$$

Par hypothèse, nous avons $g = h + O(r^{2-m})$ et $df = O(r^{1-m})$. Par conséquent, l'équation (3.31) nous donne :

$$\begin{aligned}
q_{\widetilde{g},h}(Z) =& f q_{g,h}(Z) + df(X_b)h(X_b, Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{(m+1)}{2} df(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2}h(Z,Z)df + O(r^{3-2m}) \\
=& f q_{g,h}(Z) + df(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{(m+1)}{2} df(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2}|\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 df + O(r^{3-2m}) \\
=& f q_{g,h}(Z) - \frac{(m-1)}{2} df(Z)\widetilde{\alpha}_Z - \frac{1}{2}|\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 df + O(r^{3-2m}).
\end{aligned}$$

Cependant, par définition de $\widetilde{\alpha}_Z$, $df(Z) = \langle df, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h$. De plus, par hypothèse, $f = 1 + O(r^{2-m})$ et $q_{g,h}(Z) = O(r^{1-m})$, donc $f q_{g,h}(Z) = q_{g,h}(Z) + O(r^{3-2m})$. Ainsi, d'après le calcul précédent, nous avons la formule suivante :

$$q_{\widetilde{g},h}(Z) = q_{g,h}(Z) - \frac{1}{2}|\widetilde{\alpha}|_h^2 df + \frac{(1-m)}{2}\langle df, \widetilde{\alpha}\rangle_h \widetilde{\alpha} + O(r^{3-2m}). \tag{3.32}$$

Enfin, en intégrant la formule (3.32) sur les sphères de rayon R de $\mathbb{R}^{m+1}$ et en passant à la limite supérieure, nous obtenons la formule souhaitée :

$$\mathcal{Q}_{\widetilde{g}}(Z) = \mathcal{Q}_g(Z) + \frac{1}{2\omega_n L} \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} *_h\Big((1-m)\langle df, \widetilde{\alpha}\rangle_h \widetilde{\alpha} - |\widetilde{\alpha}|_h^2 df\Big). \tag{3.33}$$

□

Soit (M, c, D) une structure de Weyl ALF. Nous savons comment évolue la forme de Lee de D relativement à deux métriques distinctes de c. Pour $\widetilde{g}$ et g dans c telles que $\widetilde{g} = fg$, d'après la proposition .8, nous avons :

$$\theta_{\widetilde{g}} = \theta_g - \frac{df}{2f}. \tag{3.34}$$

Nous sommes alors en mesure de démontrer que la masse conforme de (M, c, D) ne dépend pas de la métrique adaptée choisie.

Proposition .82. Soit (M, c, D) une structure de Weyl ALF. Soient g_1 et g_2 deux métriques adaptées à (M, c, D). Nous avons :

$$m_h^D(g_1) = m_h^D(g_2).$$

Démonstration. D'après la proposition .80, il existe f dans $\mathscr{F}$ telle que $g_2 = fg_1$. La formule (3.34) et la proposition .81 nous donnent alors :

$$\begin{aligned}
m_h^D(g_2) = m_h^D(g_1) &+ \frac{1}{2\omega_n L} \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} *_h\Big((1-m)\langle df, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h \widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 df\Big) \\
&- \frac{1}{2\omega_n L} \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} \frac{1}{f} *_h \Big((1-m)\langle df, \widetilde{\alpha}_Z\rangle_h \widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2 df\Big).
\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme .58, pour toute fonction f dans $\mathscr{F}$ et pour toute n-forme ω sur M telles que $\omega = O(r^{1-m})$, nous avons :

$$\limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} \frac{1}{f}\omega = \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} \omega,$$

Par conséquent, les deux derniers termes du calcul précédent s'annulent et nous obtenons :

$$m_h^D(g_1) = m_h^D(g_2).$$

□

Il nous reste a énoncer et démontrer le théorème de la masse positive conforme pour les structures de Weyl ALF.

Théorème .83. Soit (M, c, D) une structure de Weyl ALF de dimension $m+1$. Supposons que la courbure de Ricci de D est positive. Alors la masse m_h^D de (M, c, D) est une forme quadratique positive sur $\mathscr{Z}$.

Démonstration. Soient g une métrique adaptée à (M, c, D) et ∇^g la connexion de Levi-Civita de g. Soient Z dans $\mathscr{Z}$ et $\widetilde{\alpha}_Z$ la forme duale de Z relativement à la métrique h. Considérons la 1-forme α_Z associée à $\widetilde{\alpha}_Z$ donnée par le lemme .62. Posons $\alpha = l^{\frac{4-(m+1)}{2}}\alpha_Z = l^{\frac{3-m}{2}}\alpha_Z$, où l est la section de L correspondante à la métrique g. Soit (M_r) une suite strictement croissante de compacts de M tels que $\partial M_r = \partial B_r$. D'après la formule de Bochner conforme .19, nous avons :

$$\int_{M_r} \Big(|D\alpha|^2 + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) - |\mathscr{D}^D\alpha|^2 \Big) = - \int_{M_r} \delta^D(\zeta_\alpha),$$

où $\zeta_\alpha(X) = \langle \alpha, D_X\alpha + \delta^D(\alpha)X^\flat - X \lrcorner d^D\alpha \rangle$ pour tous champs de vecteurs X sur TM. Démontrons que le membre de droite de cette égalité converge vers la masse conforme de (M, c, D) lorsque r tend vers l'infini. Nous commençons par exprimer la divergence conforme de ζ_α relativement à la métrique g. Notons que :

$$\zeta_\alpha(X) = \langle \alpha, D_X\alpha \rangle + \delta^D(\alpha)\alpha(X) + d^D\alpha(\alpha^\sharp, X). \tag{3.35}$$

D'après la formule (1.19), nous avons :

$$D\alpha = \nabla^g\alpha + (k-1)\theta_g \otimes \alpha - \alpha \otimes \theta_g + c(\alpha, \theta_g)c$$

En contractant la formule ci-dessus par la 1-forme α de poids $(3-m)/2$, nous obtenons :

$$\langle \alpha, D_X\alpha \rangle = \langle \alpha, \nabla^g_X\alpha \rangle + \frac{1-m}{2}|\alpha|^2\theta_g. \tag{3.36}$$

D'après la formule (1.21), nous avons :

$$d^D\alpha = d\alpha + \frac{(3-m)}{2}\theta_g \wedge \alpha. \tag{3.37}$$

Nous en déduisons immédiatement la formule :

$$d^D\alpha(\alpha^\sharp,\cdot) = d\alpha(\alpha^\sharp,\cdot) + \frac{3-m}{2}\langle\theta_g,\alpha\rangle\alpha - \frac{3-m}{2}|\alpha|^2\theta_g. \tag{3.38}$$

De la même façon que pour la formule (1.21), nous démontrons :

$$\delta^D(\alpha) = \delta(\alpha) - \frac{(m+1)}{2}\langle\theta_g,\alpha\rangle. \tag{3.39}$$

Enfin, en utilisant les formules (3.36), (3.38) et (3.39) pour calculer ζ_α, nous obtenons :

$$\zeta_\alpha(X) = \zeta_\alpha^g(X) - |\alpha|^2\theta_g(X) + (1-m)\langle\theta_g,\alpha\rangle\alpha(X), \qquad \forall X \in TM, \tag{3.40}$$

où $\zeta_\alpha^g(X) = \langle\alpha, \nabla_X^g\alpha + \delta(\alpha)X^\flat - X\lrcorner d\alpha\rangle$. Rappelons que lorsqu'une métrique g est fixée, le fibré L est trivialisé par la section l de L correspondante à g. Nous avons alors l'identification suivante :

$$-\int_{M_r}\delta^D(\zeta_\alpha) = -\int_{M_r}\delta(\zeta_\alpha)v_g = \int_{\partial B_r} *_g(\zeta_\alpha), \tag{3.41}$$

où v_g et $*_g$ sont respectivement la forme volume et l'opérateur de Hodge associés à g et ζ_α est identifié à une 1-forme réelle sur M. La formule (3.41) et l'expression (3.40) de ζ_α, nous donnent :

$$-\int_{M_r}\delta^D(\zeta_\alpha) = \int_{\partial B_r} *_g(\zeta_{\alpha_Z}^g) + \int_{\partial B_r} *_g\Big((1-m)\langle\theta_g,\alpha_Z\rangle_g\alpha_Z - |\alpha_Z|_g^2\theta_g\Big), \tag{3.42}$$

où $\langle\ ,\ \rangle_g$ est le produit scalaire sur les formes induit par g. De plus, l'intégrale du terme $*_g(\zeta_{\alpha_Z})$ correspond au terme obtenu en intégrant la formule de Bochner riemannienne, et celui-ci converge vers la masse de la variété riemannienne ALF (M,g). En effet, le lemme 8 page 943 de [20] donne :

$$\limsup_{r\to\infty}\int_{\partial B_r} *_g(\zeta_{\alpha_Z}^g) = \omega_n L\mathcal{Q}_h(Z). \tag{3.43}$$

Les hypothèses de décroissance de θ_g, de α_Z et de la métrique g nous donnent :

$$(1-m)\langle\theta_g,\alpha_Z\rangle_g\alpha_Z - |\alpha_Z|_g^2\theta_g = (1-m)\langle\theta_g,\widetilde{\alpha}_Z\rangle_h\widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2\theta_g + O(r^{3-2m}). \tag{3.44}$$

Par conséquent, par passage à la limite supérieure dans l'équation (3.42), nous obtenons la formule suivante :

$$-\int_M\delta^D(\zeta_\alpha) = \omega_n L\Big(\mathrm{Q}_h(Z) + \frac{1}{\omega_n L}\limsup_{r\to\infty}\int_{\partial B_r} *_h\Big((1-m)\langle\theta_g,\widetilde{\alpha}_Z\rangle_h\widetilde{\alpha}_Z - |\widetilde{\alpha}_Z|_h^2\theta_g\Big)\Big).$$

Nous voyons donc apparaître la masse de la structure de Weyl ALF (M,c,D) et nous avons :

$$\int_M\Big(|D\alpha|^2 + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp,\alpha^\sharp) - |\mathscr{D}^D\alpha|^2\Big) = \omega_n L m_h^D(Z). \tag{3.45}$$

Il nous reste à montrer que $\int_M |\mathscr{D}^D\alpha|^2 = 0$. D'après les formules (3.37) et (3.39), nous avons :

$$\mathscr{D}^D\alpha = \delta^D(\alpha) + d^D\alpha = (d+\delta)\alpha_Z - \frac{m+1}{2}\langle\theta_g, \alpha_Z\rangle_g + \frac{3-m}{2}\theta_g \wedge \alpha_Z. \tag{3.46}$$

Par construction, nous avons $(d+\delta)\alpha_Z = 0$. D'après les hypothèses de décroissance de θ_g, nous avons donc $\langle\theta_g, \alpha_Z\rangle_g = O(r^{2-2m})$ et $\theta_g \wedge \alpha_Z = O(r^{2-2m})$. Ainsi, nous obtenons :

$$\limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} |\langle\theta_g, \alpha_Z\rangle_g|^2 v_g = \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} |\theta_g \wedge \alpha_Z|^2 v_g = 0. \tag{3.47}$$

L'égalité (3.47) et l'équation (3.46) donnent alors :

$$\int_M |\mathscr{D}^D\alpha|^2 = 0. \tag{3.48}$$

Nous déduisons des formules (3.45) et (3.48) la formule suivante :

$$\int_M \left(|D\alpha|^2 + \mathrm{Ric}^D(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp)\right) = \omega_n L m_h^D(Z). \tag{3.49}$$

Par conséquent, lorsque l'opérateur de Ricci est positif, la masse m_h^D est une forme quadratique positive. $\square$

Chapitre 4

Submersions conformes et connexions minimales

Cette dernière partie est consacrée aux submersions conformes de codimension 1. Nous reprenons en grande partie l'approche de D. Calderbank [8], qui a démontré l'existence d'une unique *connexion de Weyl minimale*, dans un certain sens, relative à une submersion conforme. En basse dimension, cette théorie constitue une version non linéaire de la *correspondance de Jones-Tod*. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [8] et [9], mais aussi à l'article [16] de P. Gauduchon pour une lecture plus riemannienne de la correspondance de Jones-Tod généralisée.

4.1 Submersions conformes

Dans un premier temps, nous rappelons la définition d'une submersion conforme. Soient M^{n+1} une variété de dimension $n+1$, (B^n, c^B) une variété conforme de dimension n et $\pi : M \to B$ une submersion. La submersion π est de codimension 1. Le fibré constitué des vecteurs tangents aux fibres de π est un sous-fibré de dimension 1 de TM, noté $\mathcal{V}$ et appelé *fibré vertical* ou *fibré des vecteurs verticaux* sur M.

Supposons que M est munie d'une structure conforme c. La structure conforme c définit le fibré vectoriel $\mathcal{H}$ comme le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{V}$ dans TM. Le fibré $\mathcal{H}$ sur M est appelé *fibré horizontal* ou *fibré des vecteurs horizontaux*. Nous notons respectivement L et L_B les fibrés des poids des variétés M et B. Par construction du fibré $\mathcal{H}$, nous avons $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, ce qui induit immédiatement :

$$\Lambda^{n+1}T^*M = \mathcal{V}^* \otimes \Lambda^n\mathcal{H}^*. \tag{4.1}$$

De plus, $d\pi$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur TB, nous avons alors $\mathcal{H} = \pi^*TB$, où π^*TB est la pull-back du fibré TB par π. La relation (4.1) devient :

$$\Lambda^{n+1}T^*M = \mathcal{V}^* \otimes \pi^*(\Lambda^nT^*B). \tag{4.2}$$

Par définition des fibrés des poids L et L_B, et d'après (4.2), nous obtenons :

$$L^{-(n+1)} = \mathcal{V}^* \otimes \pi^*(L_B^{-n}) = \mathcal{V}^{-1} \otimes (\pi^* L_B)^{-n}. \tag{4.3}$$

La structure conforme c sur M permet d'identifier le fibré vertical $\mathcal{V}$ avec le fibré des poids L, en associant à tout vecteur V de $\mathcal{V}$ la section $|V|_c$ de L, où $|V|_c = (c(V,V))^{\frac{1}{2}}$ est la norme conforme du vecteur V. Par conséquent, la structure conforme c sur M et la relation (4.3) nous donnent l'identification suivante :

$$L = \pi^* L_B. \tag{4.4}$$

Nous pouvons désormais donner la définition d'une submersion conforme.

Définition .84. Soient (M^{n+1}, c) et (B^n, c^B) deux variétés conformes de dimension respective $n+1$ et n. Une submersion $\pi : (M^{n+1}, c) \to (B^n, c^B)$ est *une submersion conforme* lorsque $d\pi$, restreinte au vecteurs de $\mathcal{H}$, est une application linéaire conforme non nulle en chaque point de M. Plus précisément, pour tout x dans M, nous avons :

$$c(X,Y) = \pi^*(c^B(d\pi_x(X), d\pi_x(Y))), \qquad \forall X \in \mathcal{H}_x,\ Y \in \mathcal{H}_x. \tag{4.5}$$

Revenons désormais au cas où la structure conforme sur M n'est pas fixée. Nous avons $\pi : M^{n+1} \to B^n$ une submersion dont la base (B, c^B) est une variété conforme. Nous conservons les notations précédemment introduites. Nous allons voir dans la proposition suivante que l'ensemble des structures conformes sur M faisant de π une submersion conforme est paramétré par les sections du fibré $T^*M \otimes L$ qui "ne s'annulent pas" sur les feuilles définies par la submersion π. Les fibres de π définissent un feuilletage orienté de dimension 1 sur M. Le feuilletage sur M peut être vu comme un champ de vecteurs sur M tordu par une section de $\mathcal{V}$. Soit ξ la section de $\mathcal{V}^* \otimes TM$ décrivant le feuilletage sur M induit par π.

Proposition .85. Soit $\pi : M^{n+1} \to (B^n, c^B)$ une submersion de codimension 1 dont la base est une variété conforme. Il existe une correspondance biunivoque entre les structures conformes sur M faisant de π une submersion conforme et les sections α de $T^*M \otimes L$ telle que $\alpha(\xi)$ est une section de $L \otimes \mathcal{V}^*$ ne s'annulant pas.

Démonstration. Soit $\alpha \in T^*M \otimes L$. Soit $\mathcal{H}$ le noyau de α. Par définition de α, $\alpha(\xi)$ ne s'annule pas et donc, pour tout vecteur vertical V de $\mathcal{V}$, $\alpha(V)$ n'est pas nul. Par conséquent, $\mathcal{H}$ est un fibré sur M supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans TM. Le pull-back de la structure conforme c^B, noté $\pi^* c^B$, est une forme bilinéaire symétrique sur M à valeurs dans $(\pi^* L_B)^2$. Ainsi, $\pi^* c^B$ définit une structure conforme sur $\mathcal{H}$. Nous allons montrer que α nous permet d'identifier les fibrés L et $\pi^* L_B$, et de construire une structure conforme sur M. D'après la formule (4.3), nous avons :

$$L^{-(n+1)} = \mathcal{V}^{-1} \otimes (\pi^* L_B)^{-n}. \tag{4.6}$$

Cependant, $\alpha(\xi)$ est une section de $L \otimes \mathcal{V}^{-1}$ ne s'annulant pas, donc α induit un isomorphisme, encore noté α, entre $\mathcal{V}$ et L. Ainsi, d'après (4.6), nous obtenons $(\pi^* L_B)^{-n} \cong L^{-n}$, dont nous déduisons l'isomorphisme $\rho : \pi^* L_B \to L$. Nous posons :

$$c = \rho(\pi^* c^B) + \alpha \otimes \alpha,$$

D'après la normalisation de la structure conforme c^B, nous avons $\Lambda^n c^B = 1$, et donc $\Lambda^n c = \rho(\pi^* \Lambda^n c^B) = 1$. Ainsi, c est une section normalisée de $S^2 M \otimes L^2$, c'est-à-dire une structure conforme sur M. Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ sont c-orthogonaux dans TM et que π est une submersion conforme de (M, c) sur (B, c^B).

Réciproquement, si $\pi : M \to B$ est une submersion conforme, nous avons vu que la structure conforme c sur M induit l'identification $L = \mathcal{V}$ (4.4). Ainsi, la section ξ s'identifie à une section de $TM \otimes L^{-1}$. Il suffit alors de poser $\alpha = \xi^\sharp$. □

Remarque .86. Une section α de $T^*M \otimes L$ satisfaisant les conditions de la proposition .85 précédente est appelée 1-*forme de poids zéro* sur M. Une telle forme définit une structure conforme c sur M, un supplémentaire orthogonal $\mathcal{H}$ de $\mathcal{V}$ dans TM, et identifie les fibrés $\mathcal{V}$, $\pi^* L_B$ et L.

Remarque .87. Soit c une structure conforme sur M induite par la 1-forme de poids zéro α. Pour tout vecteur vertical V, nous pouvons écrire $\xi = V \otimes |V|_c^{-1}$, où $|V|_c = c(V, V)^{\frac{1}{2}}$. Nous en déduisons que $|\xi|_c = \alpha(\xi) = 1$, et donc $\xi = \alpha^\sharp$, où $\sharp$ est l'isomorphisme musical relatif à c.

4.2 La connexion de Weyl minimale

Dans cette section, nous retrouvons l'existence et l'unicité de la connexion de Weyl minimale relativement à une submersion conforme introduite par D. Calderbank [8]. Nous commençons par expliquer dans quel sens cette connexion de Weyl est minimale. Soient α une 1-forme de poids zéro sur M et $\pi : (M^{n+1}, c) \to (B, c^B)$ la submersion conforme associée. Pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), $D\alpha$ est une section de $T^*M \otimes T^*M \otimes L$. Notons $\mathcal{W}_\alpha$ l'ensemble des 2-formes $D\alpha$ à valeurs dans L, où D décrit l'espace des connexions de Weyl sur (M, c). Pour toutes connexions de Weyl D' et D sur (M, c) telles que $D' = D + \theta$, la formule (1.19) nous donne :

$$D'\alpha = D\alpha - \alpha \otimes \theta + \alpha(\theta^\sharp)c. \tag{4.7}$$

Posons $\Theta_\alpha = \{-\alpha \otimes \omega + \alpha(\omega^\sharp)c \ : \ \omega \in T^*M\}$. Θ_α est un sous-espace de $T^*M \otimes T^*M \otimes L$. D'après la formule (4.7), $\mathcal{W}_\alpha$ est un sous-espace affine de $T^*M \otimes T^*M \otimes L$ de direction Θ_α. De plus, la structure conforme c sur M induit un produit scalaire, noté $\langle\ ,\ \rangle_c$, à valeurs dans L^{-2} sur $T^*M \otimes T^*M \otimes L$. Ainsi, la *connexion de Weyl minimale* relative à la 1-forme de poids zéro α est l'unique connexion de Weyl, notée D^0, telle que la 2-forme $D^0\alpha$ soit dans l'orthogonal de Θ_α relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_c$. La proposition suivante caractérise la connexion de Weyl minimale.

Proposition .88. Soit $\pi : (M, c) \to (B, c^B)$ une submersion conforme de codimension 1, induite par la 1-forme de poids zéro α. Alors, Il existe une unique connexion de Weyl D^0 sur (M, c) caractérisée par les deux relations suivantes :

(i) $\mathrm{tr}_c(D^0\alpha) = 0$

(ii) $D^0_\xi \alpha = 0$.

La connexion D^0 est la *connexion de Weyl minimale* associée à la submersion conforme π.

Démonstration. Pour toute 1-forme ω sur M et pour toute connexion de Weyl D sur (M, c), nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\langle D\alpha, \alpha(\omega^\sharp)c - \alpha \otimes \omega\rangle_c &= \alpha(\omega^\sharp)\langle D\alpha, c\rangle_c - \langle D\alpha, \alpha \otimes \omega\rangle_c \\ &= \langle \alpha, \omega\rangle \mathrm{tr}_c(D\alpha) - \langle D_{\alpha^\sharp}\alpha, \omega\rangle_c \\ &= \langle \mathrm{tr}_c(D\alpha)\alpha - D_\xi\alpha, \omega\rangle_c.\end{aligned}$$

Ainsi, $D\alpha$ est dans l'orthogonal de Θ_α si et seulement si :

$$\mathrm{tr}_c(D\alpha)\alpha - D_\xi\alpha = 0. \tag{4.8}$$

Nous rappelons que $\alpha(\xi) = |\xi|_c = 1$. Par conséquent $D_\xi\xi$ est horizontal, et donc $(D_\xi\alpha)(\xi) = D_\xi(\alpha(\xi)) - \alpha(D_\xi\xi) = 0$. L'équation (4.8) évaluée en ξ, nous donne $\mathrm{tr}_c(D\alpha) = D_\xi\alpha = 0$. La connexion de Weyl minimale vérifie donc les deux relations attendues. □

Remarque .89. Comme $\alpha^\sharp = \xi$, les conditions (i) et (ii) de la proposition précédente sont équivalentes à $\mathrm{tr}_c(D^0\xi) = 0$ et $D^0_\xi\xi = 0$. La connexion minimale décrite précédemment correspond bien à celle de D. Calderbank dans [8]. P. Gauduchon à également démontré l'existence et l'unicité de la connexion de Weyl minimale par une méthode riemannienne en choisissant une métrique quelconque dans la classe conforme [16].

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où la connexion de Weyl minimale est projetable sur la base de la submersion conforme, c'est-à-dire lorsque celle-ci est le pull-back d'une connexion de Weyl sur la base en tant que connexion linéaire sur le fibré L. Ceci vient comme un cas particulier de l'étude des connexions linéaires d'un fibré vectoriel sur une variété conforme munie d'un feuilletage de dimension 1 effectué par D. Calderbank dans [8].

Définition .90. Soit $\pi : (M, c) \to (B, c^B)$ une submersion conforme de codimension 1. Une connexion de Weyl D sur M est *projetable* (ou *basique*) si D, en tant que connexion linéaire sur L, est le pull-back d'une connexion linéaire sur L_B. Plus précisément, D est projetable sur la connexion de Weyl D^B sur B si et seulement si nous avons :

$$D_V(\pi^* l_B) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_{\widetilde{X}}(\pi^* l_B) = \pi^*(D^B_X l_B), \tag{4.9}$$

pour toute section l_B de L_B et pour tout vecteur X sur TB.

Proposition .91. Soit D une connexion de Weyl projetable sur (M, c). Alors, une section l de L est le pull-back d'une section de L_B si et seulement si $D_V l = 0$, pour tout vecteur vertical V.

Démonstration. Soient l une section de L et l_B une section de L_B. Nous identifions π^*l_B avec la section de L correspondante. Nous avons, $l = f\pi^*l_B$, où f est une fonction sur M. Pour tout vecteur vertical V, nous calculons :

$$D_V l = V(f)\pi^*l_B + fD_V(\pi^*l_B) = V(f)\pi^*l_B.$$

Ainsi, $D_V l = 0$ si et seulement si $V(f) = 0$. Dans ce cas, f est une fonction basique. Par conséquent, $D_V l = 0$ si et seulement si l est le pull-back d'une section de L_B. □

Une connexion de Weyl satisfaisant la propriété .91 précédente est une *connexion horizontale* sur TM. Une connexion horizontale n'est pas nécessairement projetable. La proposition suivante caractérise la notion de connexion de Weyl projetable.

Corollaire .92. Une connexion de Weyl D sur (M, c) est projetable si et seulement si D est horizontale et $F^D(\xi, \cdot) = 0$.

Démonstration. Soient V dans $\mathcal{V}$, X dans TB et l_B une section de L_B. Nous notons $\widetilde{X}$ le relevé horizontal de X sur TM. D'après la proposition .91 et la définition .90, la connexion de Weyl D est projetable si et seulement si D est horizontale et satisfait la propriété suivante :

$$D_V(D_{\widetilde{X}}\pi^*l_B) = 0. \tag{4.10}$$

De plus, du fait que D soit horizontale et que $[V, \widetilde{X}]$ soit un vecteur vertical, nous obtenons :

$$D_{\widetilde{X}}(D_V\pi^*l_B) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_{[V,\widetilde{X}]}(\pi^*l_B) = 0.$$

Par conséquent, nous avons :

$$F^D(V, \widetilde{X})\pi^*l_B = D_V(D_{\widetilde{X}}\pi^*l_B) = 0. \tag{4.11}$$

Enfin, rappelons que pour tout vecteur vertical V, nous pouvons écrire $\xi = V \otimes |V|^{-1}$. Ainsi, D est projetable si et seulement si D est horizontale et $F^D(\xi, \cdot) = 0$. □

Remarque .93. Nous rappelons que la courbure de Faraday d'une connexion de Weyl D est une 2-forme fermée. Ainsi, F^D est une 2-forme basique si et seulement si elle est horizontale.

La structure conforme c identifie une sections l de L avec un vecteur vertical V. Soit g la métrique riemannienne dans c associée à la section l. Le vecteur V est unitaire pour la métrique g, puisque $|V|_c = \alpha(V) = l$. Supposons que $l = \pi^*l_B$. La métrique g associée à la section l induit une métrique g_B sur B définie par $g_B = l_B^{-2}c^B$. Dans ce cas, $\pi : (M, g) \to (B, g_B)$ est une submersion riemannienne.

Définition .94. Une métrique riemannienne dans c induisant une métrique riemannienne sur la base B de la submersion conforme est appelée *métrique distinguée* de c. Les vecteurs verticaux unitaires associés aux métriques distinguées sont appelés *vecteur distingués* de TM.

Soient g dans c et l la section de L correspondante. Nous notons ∇^g la connexion de Levi-Civita de g. Dans ce qui suit, nous allons voir à quelle condition, relative à la métrique g, la connexion de Weyl minimale associée à la 1-forme de poids zéro sur M est projetable. La 1-forme de poids zéro α s'identifie, via g, à une 1-forme réelle sur TM, notée α_g, par la formule :

$$\alpha_g = l^{-1}\alpha.$$

Soit V le vecteur vertical unitaire de g. La 1-forme α_g est une 1-forme verticale. En particulier, nous avons $\alpha_g(V) = 1$ et donc $\alpha_g^\sharp = V$. D'après la formule (1.19), nous avons :

$$(D^0_X\alpha_g)(Y) = (\nabla^g_X\alpha_g)(Y) - \theta_g(X)\alpha_g(Y) - \alpha_g(X)\theta_g(Y) + \theta_g(V)g(X,Y). \tag{4.12}$$

D'après la caractérisation .88 de la connexion de Weyl minimale, nous avons $\mathrm{tr}_c(D^0\alpha) = 0$. Cependant, $\mathrm{tr}_c(D^0\alpha) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(D^0\alpha_g)l^{-1}$, nous en déduisons donc $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(D^0\alpha_g) = 0$, où $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}$ est la trace conforme restreinte au fibré horizontal $\mathcal{H}$. Par conséquent, en prenant la trace horizontale $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}$ dans la formule (4.12), nous obtenons :

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(\nabla^g\alpha_g) + n\theta_g(V) = 0. \tag{4.13}$$

Par définition de V, $\nabla^g_V V$ est un vecteur horizontal et donc $(\nabla^g_V\alpha_g)(V) = \nabla^g_V(\alpha_g(V) - \alpha_g(\nabla^g_V V) = 0$. Nous en déduisons immédiatement que $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(\nabla^g\alpha_g) = \mathrm{tr}(\nabla^g\alpha_g)$. La formule (4.13) devient :

$$\theta_g(V) = \frac{1}{n}\delta^g(\alpha_g). \tag{4.14}$$

De même, la condition $D^0_V\alpha = 0$ nous donne :

$$\nabla_V\alpha_g - \theta_g + \theta_g(V)\alpha_g = 0.$$

Pour tout vecteur horizontal X, nous en déduisons :

$$\theta_g(X) = (\nabla_V\alpha_g)(X). \tag{4.15}$$

Les équations (4.14) et (4.15) nous donnent respectivement la partie verticale et horizontale de θ_g. Nous avons donc :

$$\theta_g = \nabla^g_V\alpha_g + \frac{1}{n}\delta^g(\alpha_V)\alpha_g. \tag{4.16}$$

De plus, pour tout vecteur X de TM, le vecteur $\nabla^g_X V$ est horizontal et donc $\mathcal{L}_V\alpha_g = \nabla^g_V\alpha_g$, où $\mathcal{L}_V$ est la dérivée de Lee dans la direction verticale V. Finalement, l'équation (4.16) nous donne :

$$D^0 = \nabla^g + (\mathcal{L}_V\alpha_g + \frac{\delta(\alpha_g)}{n}\alpha_g). \tag{4.17}$$

Supposons maintenant que la métrique g est distinguée et soit g_B la métrique induite par g sur la base B. Soient X et Y dans TB. Nous notons $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ respectivement les relevés horizontaux de X et Y. Nous avons alors :

$$\mathcal{L}_V g(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = -\frac{2}{n}\delta^g(V)g(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = 0.$$

Nous en déduisons $\delta^g(V) = \delta^g(\alpha_g) = 0$. Ainsi, dans le cas où la métrique g est distinguée, la formule (4.17) devient :

$$D^0 = \nabla^g + \mathcal{L}_V \alpha_g. \tag{4.18}$$

Dans ce cas, $\pi : (M, g) \to (B, g_B)$ est une submersion riemannienne. Par conséquent, la connexion ∇^g, en tant que connexion linéaire sur L, se projette sur la connexion de Levi-Civita de g_B, notée ∇^{g_B}. Ainsi, d'après la formule (4.18), la connexion de Weyl minimale D^0 est projetable si et seulement si la 1-forme $\mathcal{L}_V \alpha_g$ est basique. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition .95. Soient $\pi : (M^{n+1}, c) \to (B, c^B)$ une submersion conforme et α la 1-forme de poids zéro sur M associée à c. Alors, la connexion de Weyl minimale relative à π est projetable si et seulement si, pour toute métrique g distinguée dans c, nous avons $\mathcal{L}_V(\mathcal{L}_V \alpha_g) = 0$, où V est le vecteur vertical unitaire de g et où α s'identifie à α_g via la métrique g.

Démonstration. Soit g une métrique distinguée dans c et V le vecteur vertical unitaire associé. D'après la discussion précédant la proposition, D^0 est projetable si et seulement si $\mathcal{L}_V \alpha_g$ est basique. De plus, la 1-forme $\mathcal{L}_V \alpha_g$ est horizontale, donc celle-ci est basique si et seulement si $\mathcal{L}_V(\mathcal{L}_V \alpha_g) = 0$. Il suffit maintenant de démontrer que ceci ne dépend pas de la métrique distinguée choisie. Soit g' une métrique distinguée dans c et V' le vecteur vertical associé. Il existe donc une fonction φ non nulle sur M telle que $g' = \varphi^{-2} g$. La fonction φ est basique et $V' = \varphi V$, nous avons donc :

$$\mathcal{L}_{V'} \alpha_{g'_B} = \mathcal{L}_V \alpha_{g_B} + \varphi^{-1} d\varphi.$$

Cependant, pour toute forme horizontale ω, $\mathcal{L}_{V'} \omega = \varphi \mathcal{L}_V \omega$. Nous déduisons de la formule précédente la relation :

$$\mathcal{L}_{V'} \mathcal{L}_{V'} \alpha_{g'_B} = \varphi \mathcal{L}_V \mathcal{L}_V \alpha_{g_B}.$$

La condition $\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V \alpha_g = 0$ ne dépend donc pas de la métrique distinguée choisie. □

Remarque .96. Nous avons démontré précédemment qu'une métrique g dans c est distinguée si et seulement si $\delta^g(V) = \delta^g(\alpha_g) = 0$, où V est le vecteur vertical unitaire de g et où α est identifiée à α_g via g.

Remarque .97. La condition $\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V \alpha_g = 0$ de la proposition .95 est invariante conforme. En effet, pour une métrique distinguée g, la 1-forme de Lee de la connexion de Weyl minimale s'écrit $\theta_g = \mathcal{L}_V \alpha_g$. De plus, $\mathcal{L}_V \theta_g = V \lrcorner d\theta_g$ et, pour toute métrique dans c, $d\theta_g = F^0$, où F^0 est la courbure de Faraday de la connexion minimale D^0. Ainsi, la connexion de Weyl minimale est projetable si et seulement si $\xi \lrcorner F^0 = F^0(\xi, \cdot) = 0$.

La remarque précédente nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème .98. Soient $\pi : (M^{n+1}, c) \to (B, c^B)$ une submersion conforme et α la 1-forme de poids zéro sur M associée à c. Nous posons $\xi = \alpha^\sharp \in TM \otimes L^{-1}$. Alors, la connexion de Weyl minimale relative à π est projetable si et seulement si $\xi \lrcorner F^0 = 0$.

Remarque .99. Nous remarquons que si la connexion de Weyl minimale est fermée, alors celle-ci est projetable. En effet, D^0 est fermée si et seulement si $F^0 = 0$.

4.3 Connexions minimales projetables

Dans cette section, nous nous intéressons dans un premier temps au cas particulier des submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques. Le fait qu'une submersion conforme induise une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques relativement à une métrique g dans la classe conforme est intimement lié à la fermeture ou l'exactitude de la forme de Lee de la connexion de Weyl minimale relative à cette métrique g. D'autre part, dans le cas où la connexion de Weyl minimale associée à une 1-forme de poids zéro α est projetable, nous répondrons à la question de savoir si la connexion de Weyl minimale associée à la 1-forme de poids zéro $f\alpha$, où f est une fonction strictement positive sur M, est encore projetable. Nous serons contraints d'étudier ce problème localement sur la variété et nous verrons également comment la notion de submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques intervient.

Nous considérons la submersion conforme $\pi : (M, c) \to (B, c^B)$ associée à la 1-forme de poids zéro α et D^0 la connexion de Weyl minimale relative à π. Nous conservons les notations introduites dans la section précédente. Concernant les submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques, nous avons la proposition suivante :

Proposition .100. La connexion de Weyl minimale D^0 est fermée (respectivement exacte) si et seulement si π définit localement (respectivement globalement) une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

Démonstration. Supposons que D^0 est fermée. D'après la proposition .12, il existe une métrique locale g dans c telle que D^0 soit localement la connexion de Levi-Civita de g. Considérons une métrique distinguée $\widetilde{g}$ dans c. Nous avons localement $\widetilde{g} = f^{-2}g$, où f est une fonction non nulle sur M. Montrons que f est une fonction basique sur M et donc que $g = f^2\widetilde{g}$ est une métrique locale distinguée dans c. Localement nous avons $\theta_g = 0$, donc, d'après la proposition .8, $\theta_{\widetilde{g}} = df$. De plus, D^0 est fermée donc en particulier projetable et par conséquent la 1-forme de Lee de D^0 relative à une métrique distinguée est horizontale. Ainsi, $\theta_{\widetilde{g}} = df$ est horizontale et f est une fonction basique sur M. Soit g_B la métrique locale sur B induite par g. La métrique g étant localement distinguée, nous avons localement $\theta_g = \mathcal{L}_V\alpha_g = (\nabla^g_V V)^{\sharp^g} = 0$, où $\sharp^g$ est l'isomorphisme musical relatif à g, V le vecteur unitaire vertical de g et α est identifiée à α_g via g. Ainsi, $\pi : (M, g) \to (B, g_B)$ est une submersion locale à fibres totalement géodésiques. La réciproque est immédiate et la démonstration reste valable lorsque D^0 est globalement une connexion de Levi-Civita d'une métrique dans c. $\square$

Le cas compact fournit un résultat plutôt restrictif. En effet, si la variété est compacte et que la connexion de Weyl minimale est projetable, alors la submersion définit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. Pour démontrer ce fait nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme .101. Soient $\pi : M^{n+1} \to B^n$ une submersion de codimension 1 et f une fonction sur M. Supposons que la variété M est compacte. Si $\mathcal{L}_V\mathcal{L}_V f = 0$, où V est un vecteur vertical, alors $\mathcal{L}_V f = 0$.

Démonstration. Soient x un point de M et V un vecteur vertical de TM. Nous notons $\phi_t(x)$ le flot de V sur M au point x. Nous posons $h(t) = f(\phi_t(x))$. Alors, h est une fonction sur $\mathbb{R}$ (car M est compacte) telle que $h'(t) = \mathcal{L}_V f$ où $\mathcal{L}_V f$ est une constante puisque $\mathcal{L}_V(\mathcal{L}_V f) = 0$. Ainsi, $h(t) = at + b$, avec $a = \mathcal{L}_V f$ et b dans $\mathbb{R}$. De plus, M est compacte et donc f, et en particulier h, sont bornées sur M, par conséquent, $a = \mathcal{L}_V f = 0$, ce qui démontre le lemme. □

Rappelons que pour une métrique distinguée g, la courbure de Faraday de D^0 s'écrit $F^0 = d\mathcal{L}_V\alpha_g$. La dérivée extérieure et la dérivée de Lee commutent, donc nous obtenons la formule suivante :

$$|F^0| = g(d\mathcal{L}_V\alpha_g, d\mathcal{L}_V\alpha_g) = g(\mathcal{L}_V d\alpha_g, d\mathcal{L}_V\alpha_g). \tag{4.19}$$

Nous notons β la partie horizontale de la 2-forme $d\alpha_g$. Nous avons $\mathcal{L}_V\beta = \mathcal{L}_V\alpha_g$. De plus, $\mathcal{L}_V g = 0$ car g est distinguée. Sachant que les formes β et F^0 sont horizontales, nous avons :

$$g(\mathcal{L}_V\beta, d\mathcal{L}_V\alpha_g) = \mathcal{L}_V(g(\beta, F^0)) - (\mathcal{L}_V g)(\beta, F^0) = \mathcal{L}_V(g(\beta, F^0)). \tag{4.20}$$

D'après les équations (4.19) and (4.20), nous avons la formule suivante :

$$|F^0| = \mathcal{L}_V(g(d\alpha_g, F^0)). \tag{4.21}$$

Théorème .102. Soit $\pi : (M, c) \to (B, c^B)$ une submersion conforme de codimension 1. Supposons que la variété M est compacte. Alors, la connexion de Weyl minimale D^0 associée à π est projetable si et seulement si π définit localement une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

Démonstration. Nous posons $f = g(d\alpha_g, F^0)$. D'après l'équation (4.21) et comme F^0 est basique, la fonction f est telle que $\mathcal{L}_V(\mathcal{L}_V f) = 0$. Ainsi, d'après le lemme .101, nous obtenons $\mathcal{L}_V f = |F^0| = 0$, et donc $F^0 = 0$. Par conséquent, lorsque M est compacte, D^0 est projetable si et seulement si $F^0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si D^0 est fermée. D'après la proposition .100, nous obtenons donc le résultat souhaité. □

Revenons au cas général. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous considérons une métrique distinguée g dans c et g_B la métrique induite sur la base B. Le cas particulier où (M, g) est un produit riemannien est traité par le lemme suivant :

Lemme .103. La métrique distinguée g est la métrique produit sur $\mathbb{R} \times B$ si et seulement si $d\alpha_g = 0$.

Démonstration. La 2-forme $d\alpha_{g_B}$ est horizontale si et seulement si $V \lrcorner d\alpha_{g_B} = \mathcal{L}_V\alpha_{g_B} = 0$. Or, nous avons $\theta_g = \mathcal{L}_V\alpha_{g_B}$ pour toute métrique distingué et donc D^0 est exacte. D'après la proposition .100, $\pi : (M, g) \to (B, g_B)$ est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. Par conséquent, V est un champ de Killing et donc $\nabla^g V$ est antisymétrique. De plus, si X et Y sont des vecteurs horizontaux, nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} d\alpha_{g_B}(X,Y) &= -\alpha_{g_B}([X,Y]) \\ &= g(\nabla^g_Y X, V) - g(\nabla^g_X Y, V) \\ &= g(\nabla^g_X V, Y) - g(\nabla^g_Y V, X). \end{aligned}$$

Par conséquent, la 2-forme $d\alpha_{g_B}$ est verticale si et seulement si $\nabla^g V$ est symétrique. En conclusion, $d\alpha_g = 0$ si et seulement si $\nabla^g V = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si V est parallèle. Ceci nous donne le résultat puisque V est parallèle si et seulement si g est la métrique produit sur M. □

Dans la suite de cette section, nous allons voir comment évoluent les propriétés de la connexion minimale (projetable ou fermée) lors de la multiplication par une fonction sur M de la 1-forme de poids zéros. Il est clair que la multiplication de α par une fonction sur M modifie la classe conforme sur M et l'isomorphisme entre les fibrés des poids $\pi^* L_B$ et L qu'elle définit. Soit φ une fonction sur M et posons $\widetilde{\alpha}_g = \varphi\alpha_g$. Les 1-formes α_g et $\widetilde{\alpha}_g$ définissent respectivement deux métriques riemanniennes $g = \alpha_g \otimes \alpha_g + \pi^* g_B$ et $\widetilde{g} = \widetilde{\alpha}_g \otimes \widetilde{\alpha}_g + \pi^* g_B$ sur M faisant de π une submersion riemannienne de M sur (B, g_B). Chacune des métriques g et $\widetilde{g}$ définit une connexion minimale par la formule (4.18). Nous notons D^0 et $\widetilde{D}^0$ les connexions minimales respectivement associées à α_g et $\widetilde{\alpha}_g$. Notons F^0 et $\widetilde{F}^0$ leur courbures de Faraday respectives. Soient V et $\widetilde{V}$ les vecteurs verticaux unitaires associés respectivement à g et $\widetilde{g}$. Rappelons que ces vecteurs sont aussi les uniques vecteurs verticaux tels que $\alpha_{g_B}(V) = 1$ et $\widetilde{\alpha}_{g_B}(\widetilde{V}) = 1$. Nous avons $\widetilde{V} = \varphi^{-1} V$. Nous obtenons immédiatement la relation suivante :

$$\theta_{\widetilde{g}} = V(\psi)\alpha_{g_B} - d\psi + \theta_g\,, \tag{4.22}$$

où nous avons posé $\psi = \ln\varphi$. En appliquant la différentielle extérieure sur M, nous obtenons une formule reliant leur courbure de Faraday :

$$\widetilde{F}^0 = d(V(\psi)) \wedge \alpha_{g_B} + V(\psi) d\alpha_{g_B} + F^0. \tag{4.23}$$

La formule (4.23) montre que la connexion minimale reste projetable ou fermée lorsque φ, ou de manière équivalente ψ, est un fonction basique. Nous allons donc supposer que ψ n'est pas basique et envisager les trois cas suivant :

i. Les connexions minimales D^0 et $\widetilde{D}^0$ sont projetables.

ii. Les connexions minimales D^0 et $\widetilde{D}^0$ sont respectivement fermées et projetables.

iii. Les connexions minimales D^0 et $\widetilde{D}^0$ sont fermées.

Pour étudier ces trois cas, nous aurons besoin de travailler localement sur la variété (M, g). Identifions localement (M, g) avec le produit $\mathbb{R} \times B$ et notons t la coordonnée sur $\mathbb{R}$. Le fibré $\mathcal{V}$ est désormais trivialisé et muni de la connexion plate dt. Par cette identification, la dérivée de Lie dans la direction V correspond à la dérivation par rapport au paramètre t et les fonctions ou formes basiques sur M deviennent des formes sur B ne dépendant pas de t. D'autre part, la 1-forme α_g s'écrit :

$$\alpha_{g_B} = dt + A_t, \tag{4.24}$$

où A_t est une 1-forme sur B dépendant du paramètre t. Supposons que la connexion minimale D^0 est projetable. La condition $\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V \alpha_{g_B} = 0$ devient alors $\ddot{A}_t = 0$, où le point indique la dérivée par rapport à t. Dans ce cas, l'écriture locale de α_g est la suivante :

$$\alpha_{g_B} = dt + A_0 + tA_1, \tag{4.25}$$

où A_0 et A_1 sont deux 1-formes sur B. La forme de Lee θ_g de la connexion minimale est alors égale à A_1 et la courbure de Faraday F^0 est donnée par dA_1. Les différentielles extérieures sur M et sur B seront respectivement notées d et d^B. Remarquons également que les formes sur B peuvent être vus comme des formes sur M indépendantes de t, nous pourrons donc indifféremment leurs appliquer d ou d^B.

Remarque .104. Si la connexion de Weyl minimale est fermée, pour la métrique locale g de c telle que $\theta_g = 0$, dans les coordonnées locales sur (M, g), la 1-forme α_g s'écrit :

$$\alpha_g = dt + A_0. \tag{4.26}$$

Cas (i)

L'équation (4.23) contractée par V montre que D^0 et $\widetilde{D}^0$ sont projetables si et seulement si la fonction ψ satisfait l'équation suivante :

$$V(V(\psi))\alpha_{g_B} - d(V(\psi)) + V(\psi)\theta_g = 0. \tag{4.27}$$

Via l'identification $M \simeq \mathbb{R} \times B$, l'équation (4.27) nous fournit une équation sur B dépendant du paramètre t. De plus, en écrivant $d\dot{\psi} = \ddot{\psi} dt + d^B\dot{\psi}$, nous obtenons :

$$d^B\dot{\psi} = \ddot{\psi}(A_0 + tA_1) + \dot{\psi}A_1. \tag{4.28}$$

La différentiation de (4.28) sur B donne :

$$d^B\ddot{\psi}(A_0 + tA_1) + \ddot{\psi}(dA_0 + tdA_1) + d^B\dot{\psi} \wedge A_1 + \dot{\psi}dA_1 = 0. \tag{4.29}$$

De plus, lorsque nous dérivons l'équation (4.28) par rapport à t, nous obtenons :

$$d^B\ddot{\psi} = \dddot{\psi}(A_0 + tA_1) + \ddot{\psi}A_1 + \ddot{\psi}A_1. \tag{4.30}$$

Enfin, en substituant (4.30) dans (4.29), nous parvenons à la formule suivante :

$$\ddot{\psi}(dA_0 + A_1 \wedge A_0) + (\dot{\psi} + t\ddot{\psi})dA_1 = 0. \tag{4.31}$$

Si les 2-formes dA_1 et $dA_0 + A_1 \wedge A_0$ sont linéairement indépendantes alors $\ddot{\psi} = 0$, puis, d'après l'équation (4.31), $\dot{\psi} = 0$. Dans ce cas, ψ est basique. Par conséquent, si l'équation

(4.22) admet une solution non triviale et non basique : soit $dA_1 = dA_0 + A_1 \wedge A_0 = 0$, D^0 est alors fermée et nous sommes ramené au cas (ii) ; soit il existe une fonction non nulle s sur B telle que :

$$dA_0 + A_1 \wedge A_0 = s dA_1.$$

Dans ce dernier cas, l'équation (4.31) vérifiée par ψ devient :

$$(s+t)\ddot{\psi} + \dot{\psi} = 0. \tag{4.32}$$

La résolution de cette équation différentielle nous donne :

$$\psi = R \ln(t+s), \tag{4.33}$$

où R est une fonction sur B. En remplaçant dans l'équation (4.28) cette expression pour la fonction ψ, nous obtenons après simplification :

$$(t+s)d^B R - R d^B s = R(sA_1 - A_0). \tag{4.34}$$

En dérivant cette formule par rapport à la variable t, nous montrons que R est en fait une constante non nulle. L'équation (4.34) se réduit à la formule suivante :

$$A_0 = ds + sA_1. \tag{4.35}$$

Ainsi, la 1-forme α_g s'écrit localement $\alpha_g = d(s+t) + (s+t)A_1$. Nous pouvons donc supposer, par changement du paramètre, que la 1-forme de poids zéro est telle que localement $\alpha_{g_B} = dt + tA_1$, où A_1 est une 1-forme sur B. En reprenant les calculs pour obtenir la fonction ψ, nous trouvons $\psi = R \ln t + b$, où R est une constante et b une fonction sur B. En conclusion, les 1-formes $\widetilde{\alpha}_g$ telles que $\widetilde{D}^0$ soit projetable sont données par la formule suivante :

$$\widetilde{\alpha}_g = C e^{R \ln t}(dt + tA_1), \tag{4.36}$$

où C est une fonction positive sur B et R est une constante.

Remarque .105. A partir de l'équation (4.27), il est possible de mener le calcul précédent globalement avec les mêmes opérations. De cette façon, nous obtenons la formule suivante :

$$V(V(\psi))(d\alpha_g + \theta_g \wedge \alpha_g) + V(\psi) d\theta_g = 0. \tag{4.37}$$

En réécrivant localement cette équation, nous retrouvons l'équation (4.31) sous la forme :

$$\ddot{\psi}(dA_0 + A_1 \wedge A_0 + t\ddot{\psi}) + \dot{\psi} dA_1 = 0. \tag{4.38}$$

De plus, si l est la section de L correspondante à la métrique g, nous avons :

$$d^0 \alpha = l(d\alpha_g + \theta_g \wedge \alpha_g),$$

où d^0 est la différentielle relative à la connexion de Weyl D^0. D'après l'équation (4.37), nous avons :

$$V(V(\psi)) d^0 \alpha + V(\psi) l F^0 = 0. \tag{4.39}$$

Cas (ii)

Nous choisissons g de sorte que $\theta_g = 0$. D'après la remarque .104, nous avons $\alpha_g = dt + A_0$, où A_0 est une 1-forme sur B, via l'identification locale $M \simeq \mathbb{R} \times B$. La formule (4.31) reste vraie dans ce cas et se réduit à l'expression suivante :

$$\ddot{\psi} dA_0 = 0. \tag{4.40}$$

Ainsi, $\ddot{\psi} = 0$ ou $dA_0 = 0$. Le second cas est équivalent à dire que $d\alpha_g = 0$ et donc que g est une métrique produit d'après le lemme .103. D'autre part, la condition $\ddot{\psi} = 0$ implique que $\varphi = C_1 e^{at}$, où C_1 est une fonction sur B et a une constante. En conclusion, les 1-formes $\widetilde{\alpha}_g$ telles que $\widetilde{D}^0$ est projetable sont de la forme :

$$\widetilde{\alpha}_{g_B} = C_1 e^{at}(dt + A_0). \tag{4.41}$$

Cas (iii)

L'équation (4.23) montre que D^0 et $\widetilde{D}^0$ sont fermées si et seulement si ψ vérifie l'équation suivante :

$$d\dot{\psi} \wedge \alpha_g - \dot{\psi} d\alpha_g = 0. \tag{4.42}$$

Afin d'alléger les notations, nous notons $\dot{\psi} = V(\psi)$, bien que dans le cas présent la formule (4.42) a un sens global. La métrique g, qui s'écrit $g = \alpha_g \otimes \alpha_g + \pi^* g_B$, est choisie de sorte que $\theta_g = \mathcal{L}_V \alpha_{g_B} = 0$. Donc, $d\alpha_{g_B}$ est horizontale d'après la preuve du lemme .103. De plus, l'équation (4.42) évaluée en deux vecteurs horizontaux X et Y donne :

$$\dot{\psi} d\alpha_g(X, Y) = 0.$$

Ainsi, soit ψ est basique, soit $d\alpha_{g_B} = 0$ (car $d\alpha_{g_B}$ est horizontale par hypothèse). En conclusion, soit la fonction φ est basique, soit g est la métrique produit de $\mathbb{R} \times B$. En supposant que M n'est pas un produit (local) riemannien, ce dernier cas conduit à la proposition suivante :

Proposition .106. Soient α une 1-forme de poids zéro dont la connexion minimale associée est fermée (respectivement exacte) et $\widetilde{\alpha} = f\alpha$, avec f une fonction sur M. La connexion minimale associée à $\widetilde{\alpha}$ est fermée (respectivement exacte) si et seulement si f est une fonction basique.

Conclusion des cas (i) et (ii)

Soit α une 1-forme de poids zéro telle que D^0 est projetable et supposons que (M, g) n'est pas un produit (local) riemannien. Nous considérons l'ensemble $[\alpha]$ des 1-formes $\widetilde{\alpha} = f\alpha$, pour toutes fonctions f sur M. La discussion précédente montre la disjonction des cas suivant :

1. Il n'existe pas d'élément dans la famille $[\alpha]$ tel que la connexion minimale associée soit fermée. Les 1-formes de poids zéro dans $[\alpha]$ telles que leur connexion de Weyl minimale soit projetable sont de la forme $\phi\alpha$, où ϕ est une fonction basique.
2. Il existe une 1-forme $\widetilde{\alpha}$ dans $[\alpha]$, différente de α, telle que la connexion de Weyl minimale $\widetilde{D}^0$ soit fermée. Les 1-formes telles que leur connexion minimale est projetable ou fermée sont paramétrés localement par : $\widetilde{\alpha}_g = Be^{at}(dt+tA_1)$, où A_1 est localement la forme de Lee de D^0 relative à la métrique g.

De l'étude précédente, nous pouvons également extraire la proposition suivante :

Proposition .107. Soient $\pi : M \to B$ une submersion à fibres de dimension 1. Soient c_B une structure conforme sur B et α une 1-forme de poids zéro sur M telle que la connexion minimale soit projetable. Supposons qu'il existe $\widetilde{\alpha} = f\alpha$ dans $[\alpha]$, avec f non basique, tel que la connexion de Weyl minimale associée soit projetable. Dans ce cas, il existe (localement) une 1-forme de poids zéro dans $[\alpha]$ dont la connexion minimale est fermée et π définit localement une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

Bibliographie

[1] R. ARNOWITT, S. DESER, ET C. MISNER, *Canonical variables for general relativity*, Phys. Rev. **117** (1960), 1595–1602.

[2] R. ARNOWITT, S. DESER, ET C. MISNER, *Energy and the criteria for radiation in general relativity*, Phys. Rev. **118** (1960), 1100–1104.

[3] R. ARNOWITT, S. DESER, ET C. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. **117** (1960), 1595–1602.

[4] R. BARTNIK, *The Mass of an Asymptotically Flat Manifold*, Commun. Pure App. Math. **39** (1986), 661–692.

[5] A. L. BESSE, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin (1987).

[6] V. BUCHHOLZ, *Die Dirac und Twistorgleichung in der Konformen Geometrie*, Diplomarbeit (1998).

[7] P. CHRUŚCIEL, M. HERZLICH, *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds*, Pacific. J. Math. **212(2)** (2003), 231–264.

[8] D. CALDERBANK, *Selfdual Einstein metrics and conformal submersions*, (2000), arXiv :math/0001041.

[9] D. CALDERBANK, H. PEDERSEN, *Einstein-Weyl Geometry*, Lecture on Einstein Manifolds (2000).

[10] P. CHRUŠCIEL, *Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view*, Toplogical properties and global structure of spacetime, Erice 1985 (P. Bergmann et V. de Sabbata, éds.), Plenum, New-York,1986, 49–59.

[11] X. DAI, *A positive mass theorem for spaces with asymptotic SUSY compactification*, Comm. Math. Phys. **244** (2004), 335–345.

[12] G. B. FOLLAND, *Weyl manifolds*, J. Differential Geometry **4** (1970), 145–153.

[13] H. B. LAWSON, M. MICHELSON, *Spin geometry*, Princeton University Press (1989).

[14] P. GAUDUCHON, *L'opérateur de Penrose Kählérien et les inégalités de Kirchberg*, non publié (1995).

[15] P. GAUDUCHON, *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18 (4)** (1991), 563–629.

[16] P. Gauduchon, *Submersions conformes autoduales et correspondance de Jones-Tod généralisée*, non publié (2007).

[17] M. Herzlich, *Théorèmes de masse positive*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie GRENOBLE Volume **16** (1998), 107–126.

[18] J. Lohkamp, *The Higher Dimensional Positive Mass Theorem I*, (2006), arXiv :math.DG/0608975.

[19] J. Lee, T. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1982), 37–91.

[20] V. Minerbe, *A mass for ALF manifolds*, Comm. Math. Phys. **289**, (2009), no. 3, 925–955.

[21] V, Minerbe, D. Maerten, *A mass for asymptotically complex hyperbolic manifolds*, (2009), arXiv :math.DG/ 0911.0306.

[22] A. Moroianu, *Géométrie spinorielle et groupes d'holonomie*, Collège de France, cours Peccot (1998).

[23] T. Parker, C. H. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.

[24] W. Simon, *Conformal Positive Mass Theorems*, Mathematical Physics **50** (1999), 275–281.

[25] G. Vassal, *Asymtotically Flat Conformal Structures*, Commun. Math. Phys. **295** (2010), 503–529.

[26] H. Weyl, *Space-Time-Matter*, Dover Publications (1922).

[27] E. Witten, *A simple proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1931), 381–402.