N° d'ordre :

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité : Mathématiques

par

Alena Pirutka

Deux contributions à l'arithmétique des variétés : R-équivalence et cohomologie non ramifiée

Soutenue le 12 Octobre 2011 devant la Commission d'examen:

M.	Jean-Benoît Bost	
M.	Jean-Louis Colliot-Thélène	(Directeur de thèse)
M.	Bruno Kahn	
M.	Alexander S. Merkurjev	
M.	Laurent Moret-Bailly	(Rapporteur)
M.	Emmanuel Peyre	

Rapporteur absent le jour de la soutenance :

M. Burt Totaro

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à des propriétés arithmétiques de variétés algébriques. Elle contient deux parties et huit chapitres que l'on peut lire independamment. Dans la première partie on étudie la R-équivalence sur les points rationnels des variétés algébriques. Au chapitre I.1 on établit que pour certaines familles projectives et lisses $X \to Y$ de variétés géométriquement rationnelles sur un corps local k de caractéristique nulle le nombre des classes de R-équivalence de la fibre $X_y(k)$ est localement constant quand y varie dans $Y(k)$. Au chapitre I.2 on s'intéresse à des variétés rationnellement simplement connexes. On établit que la R-équivalence est triviale sur de telles variétés définies sur $\mathbb{C}(t)$. Au chapitre I.3 on introduit une autre relation d'équivalence sur les points rationnels des variétés définies sur un corps muni d'une valuation discrète et on étudie quelques propriétés de cette relation d'équivalence. Au chapitre I.4 on étudie la R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes définies sur les corps réels clos ou p-adiquement clos. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de quelques questions liées à la cohomologie non ramifiée. Au chapitre II.1 on utilise le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ pour donner un exemple d'une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que l'application $CH^2(X) \to CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ n'est pas surjective. Au chapitre II.2 on s'intéresse aux fibrations au-dessus d'une surface sur un corps fini dont la fibre générique est une variété de Severi-Brauer et on montre que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour de telles variétés. Au chapitre II.3, on établit l'invariance birationnelle de certains termes de la suite spectrale de Bloch et Ogus pour des variétés sur un corps de dimension cohomologique bornée. Sur un corps fini, on relie un de ces invariants avec le conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$. Au chapitre II.4, on s'intéresse à «borner» la ramification des éléments des groupes de cohomologie $H^r(K, \mathbb{Z}/n)$, $r > 0$, si K est le corps des fonctions d'une variété intègre définie sur un corps de caractéristique nulle k.

Mots-clefs : R-équivalence, variétés rationnellement connexes, groupes de Chow, cohomologie non ramifiée.

Two contributions to the arithmetic of varieties : R-equivalence and unramified cohomology

Abstract

In this Ph.D. thesis, we investigate some arithmetic properties of algebraic varieties. The thesis consists of two parts, divided into eight chapters. The first part is devoted to the study of R-equivalence on rational points of algebraic varieties. In chapter I.1, we prove that for some families $X \to Y$ of smooth projective geometrically rational varieties defined over a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, the number of R-equivalence classes on $X_y(k)$ is a locally constant function on $Y(k)$. In chapter I.2, we establish the triviality of R-equivalence for rationally simply connected varieties defined over $\mathbb{C}(t)$. In chapter I.3, we introduce and analyze a different equivalence relation on rational points of varieties defined over a field equipped with a discrete valuation, and then compare it with R-equivalence. In chapter I.4, we study R-equivalence for varieties over real closed and p-adically closed fields. The second part of the thesis deals with some questions involving unramified cohomology. In chapter II.1, we use the group $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ to give an example of a smooth, projective, geometrically rational variety X defined over a finite field $\mathbb{F}_p$, such that the map $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ is not surjective. In chapter II.2, we prove the vanishing of the third unramified cohomology group for certain fibrations over a surface defined over a finite field whose generic fibre is a Severi-Brauer variety. In chapter II.3, we show that certain terms of the Bloch-Ogus spectral sequence are birational invariants for varieties over fields of bounded cohomological dimension. Then in the case of a finite field, we relate one of these invariants to the cokernel of the cycle class map $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$. Finally, in chapter II.4, we establish a «bound» for ramification of elements of the group $H^r(K, \mathbb{Z}/n)$, $r > 0$, where K is the function field of an integral variety defined over a field of characteristic zero.

Keywords : R-equivalence, rationally connected varieties, Chow groups, unramified cohomology.

Remerciements

Tout d'abord, c'est une grande chance et un honneur de pouvoir effectuer son travail de thèse sous la direction de Jean-Louis Colliot-Thélène. Ses méthodes de travail sont pour moi une référence et un modèle. Je lui suis très sincèrement reconnaissante pour les problèmes qu'il m'a proposés et je lui sais gré d'avoir partagé ses idées avec moi. Je le remercie chaleureusement pour sa patience et pour sa très grande disponibilité, pour son enthousiasme et pour ses conseils. Je tiens à insister sur le rôle inestimable, tant sur le plan professionel que personnel, de toutes les connaissances et les valeurs mathématiques qu'il m'a transmises.

Je suis très heureuse que Laurent Moret-Bailly et Burt Totaro aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse et je leur suis reconnaissante pour ce travail. Je remercie Jean-Benoît Bost, Bruno Kahn, Alexander S. Merkurjev et Emmanuel Peyre de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Cette thèse ne se serait pas accomplie sans plusieurs contributions dont j'ai eu la chance de bénéficier. Un remerciement tout particulier va à David Harari. Ses conseils m'ont été très précieux et j'ai beaucoup d'appréciation pour ses cours toujours très clairs et très enrichissants. Je tiens à exprimer ma gratitude à Laurent Moret-Bailly pour ses commentaires qui ont permis d'améliorer considérablement la présentation, en particulier dans les chapitres I.1 et I.3. Je remercie Jason Starr pour son intérêt envers le chapitre I.2 ; je suis également reconnaissante à Emmanuel Peyre de m'avoir donné l'occasion de le présenter en détail pendant l'école d'été à Grenoble en 2010. J'adresse aussi mes remerciements à Bruno Kahn, ainsi qu'à Philippe Gille, pour des discussions très enrichissantes. Je remercie chaleureusement Olivier Wittenberg d'avoir partagé son savoir mathématique, ainsi que de sa sympathie.

Tout au long de ma thèse j'ai bénéficié de conditions exceptionnelles scientifiques, humaines et matérielles, ainsi que de l'atmosphère extrêmement agréable du département de mathématiques de l'ENS. Je suis très heureuse de pouvoir exprimer ici ma gratitude. Je remercie en particulier Olivier Debarre. Je souhaite également remercier Frédéric Paulin pour son encadrement pendant ma scolarité à l'ENS avant la thèse.

Je tiens à insister sur le rôle fondamental qu'ont pu jouer V.I. Kaskevich, I.I. Voronovich et S.A. Mazanik. Je leur suis tout sincèrement reconnaissante pour tout ce qu'ils m'ont appris, dans le cadre des olympiades mathématiques, pendant mes années de lycée.

Je remercie chaleureusement tous mes amis, ainsi que l'équipe des «toits» du DMA, avec qui j'ai partagé ces années de thèse au quotidien. Je suis particulièrement reconnaissante à François pour sa disponibilité pour répondre à toutes mes questions mathématiques et aussi pour son aide linguistique très importante. Mes remerciements vont à Olivier, Nicolas, David, Grégory, Viviane, Cyril, Ramla et Igor. Je remercie Yong pour divers échanges mathématiques.

Je voudrais aussi remercier Zaina au DMA et Valérie à l'Université Paris-Sud pour leur aide administrative considérable.

J'adresse mes remerciements très chaleureux à Maksim pour des discussions mathématiques et personnelles et pour son soutien, à Vika et à David pour leur amitié, et à Sasha pour son enthousiasme, sans lequel mon parcours n'aurait pas été celui-là.

Enfin, la patience et la compréhension, l'optimisme et le soutien constant de ma famille m'ont été extrément importants et font l'objet de mon admiration ; je suis heureuse de pouvoir exprimer ici ma profonde gratitude à son égard.

Introduction générale

Le thème général de cette thèse est l'étude des propriétés arithmétiques des variétés algébriques. Elle est formée de deux parties indépendantes, précédées chacune d'une introduction, et de huit chapitres. Décrivons ici les questions que l'on considère.

Dans la première partie, on s'intéresse à l'étude de la R-équivalence. Soit k un corps et soit X une variété propre sur k. On dit que deux points rationnels $x_1, x_2 \in X(k)$ sont *directement* R*-liés* s'il existe un morphisme $p : \mathbb{P}^1_k \to X$ tel que $p(0:1) = x_1$ et $p(1:0) = x_2$. On appelle R-équivalence la relation d'équivalence engendrée et on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence. D'après un résultat de Kollár [Kol04], l'ensemble $X(k)/R$ est fini pour X une variété projective et lisse (séparablement) *rationnellement connexe*, définie sur un corps local. Dans le premier chapitre de cette partie, en utilisant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc ([CTSan79],[CTSan87]), on montre que pour certaines familles projectives et lisses $f : X \to Y$ de variétés rationnelles sur un corps local k de caractéristique nulle le nombre des classes de R-équivalence de la fibre $X_y(k)$ est localement constant quand y varie dans $Y(k)$. Dans le deuxième chapitre, suivant les travaux de de Jong et Starr [dJS], on s'intéresse aux variétés *rationnellement simplement connexes* et on étudie la R-équivalence sur de telles variétés. On établit que pour $k = \mathbb{C}(t)$ et pour X une variété projective sur k rationnellement simplement connexe, l'ensemble des classes de R-équivalence est réduit à un élément. Dans le troisième chapitre, l'étude de la R-équivalence sur les variétés définies sur les corps p-adiques nous amène à introduire une autre notion d'équivalence, qu'on appelle la R_1-équivalence et dont on étudie quelques propriétés. Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'étude de la R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes définies sur les corps réels clos ou p-adiquement clos.

Dans la deuxième partie, on étudie quelques problèmes liés à la cohomologie non ramifiée. Soit k un corps. À toute k-variété intègre on associe ([BO74], [CTO89], [CT95a]) les groupes de cohomologie non ramifiée $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i})$ qui sont des invariants birationnels des k-variétés intègres. Pour X propre et lisse, ces groupes apparaissent comme certains termes de la suite spectrale de Bloch et Ogus ([BO74]). Dans le premier chapitre de cette partie, en utilisant la construction de Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO89], on donne un exemple d'une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que d'une part le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ est non nul et, d'autre part, l'application

$$CH^2(X) \to CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$$

n'est pas surjective, ce qui répond à une question de Thomas Geisser. Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux fibrations au-dessus d'une surface sur un corps fini dont la fibre générique est une variété de Severi-Brauer d'indice premier. On montre que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour de telles variétés, ce qui étend le résultat de Parimala et Suresh [PS] dans le cas des coniques. Dans le troisième chapitre, pour un corps de dimension cohomologique bornée, on s'intéresse à d'autres invariants birationnels dans la suite spectrale de Bloch et Ogus. Sur un corps fini, on relie un de ces invariants avec le conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$. Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la ramification des éléments des groupes de cohomologie $H^r(K, \mathbb{Z}/n)$, $r > 0$, pour K le corps des fractions d'une variété intègre X définie sur un corps de caractéristique nulle k. On montre que pour tout élément donné $\alpha \in H^r(K, \mathbb{Z}/n)$ on peut trouver une extension L de K de degré $l^{(\dim X)^2}$ telle que α devient non ramifié sur L (par rapport à k).

Table des matières

Première partie

R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes

Sommaire

Introduction

Soit k un corps et soit X une variété algébrique propre sur k. La question de décrire les propriétés de l'ensemble des points rationnels de X constitue l'objet de l'étude de ses propriétés arithmétiques. On s'intéresse en particulier à l'existence de paramétrages de l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X. Ce type de problèmes conduisit Manin [Man72] à introduire dans les années 1970 diverses relations d'équivalence sur $X(k)$, dont en particulier la R-équivalence.

Définition 0.0.1. Soit k un corps et soit X une variété propre sur k. On dit que deux points rationnels $x_1, x_2 \in X(k)$ sont *directement R-liés* s'il existe un morphisme $p : \mathbb{P}^1_k \to X$ tel que $p(0:1) = x_1$ et $p(1:0) = x_2$. On appelle R-équivalence la relation d'équivalence engendrée et on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence.

En caractéristique nulle, l'ensemble $X(k)/R$ est un invariant birationnel des k-variétés projectives, lisses, géométriquement intègres [CTSan77].

Pour qu'il soit pertinent d'étudier la R-équivalence, il est nécessaire d'avoir suffisamment de courbes rationnelles sur X qui soient définies au moins sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. La question naturelle qui apparaît ainsi est de trouver une description d'une telle classe de variétés qui possèdent une géométrie assez riche pour établir des résultats. Ce n'est que dans les années 1990 que des approches différentes pour trouver des analogues des courbes rationnelles en dimensions supérieures ou des variétés qui se comportent «comme des variétés rationnelles» ont mené à la notion de variété rationnellement connexe ou, dans le cas de la caractéristique positive, de variété séparablement rationnellement connexe. Cette notion fut introduite par Kollár, Miyaoka et Mori et indépendamment par Campana. On renvoie à [Kol96] pour l'étude détaillée des propriétés générales de ces variétés.

Définition 0.0.2. Soit k un corps et soit X une variété sur k. On dit que X est *rationnellement connexe* ou RC (resp. *séparablement rationnellement connexe* ou SRC) s'il existe une variété Y sur k et un morphisme $u : Y \times \mathbb{P}^1_k \to X$ tels que l'application

$$\begin{aligned} u^{(2)} : Y \times \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k &\to X \times X \\ (y, t_1, t_2) &\mapsto (u(y,t_1), u(y,t_2)) \end{aligned}$$

est dominante (resp. dominante et génériquement lisse).

Si k est un corps de caractéristique nulle, ces deux notions coïncident.

Il existe plusieurs autres descriptions des variétés rationnellement connexes. Si k est algébriquement clos de caractéristique nulle, une variété projective sur k est rationnellement connexe si et seulement si, pour tout corps algébriquement clos $\Omega \supset k$, par deux points quelconques de $X(\Omega)$ il passe une courbe rationnelle : pour tous $x_1, x_2 \in X(\Omega)$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1_\Omega \to X_\Omega$ tel que $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1_\Omega)$. Si X est une variété projective et lisse, définie sur un corps algébriquement clos k, alors X est séparablement rationnellement connexe si et seulement si il existe une courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1_k \to X$ très libre, i.e. telle que f^*T_X est ample. Ce critère est très utile.

Soit k un corps et soit X une variété projective et lisse sur k. Si X est une courbe, dire que X est SRC équivaut à dire que X est une droite projective. En dimension 2, la variété X est SRC si et seulement si elle est géométriquement rationnelle. Toute telle surface est k-birationnelle à une k-surface de del Pezzo ou à une k-surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique lisse.

En dimension supérieure on ne dispose pas de classification aussi précise. La classe des variétés rationnellement connexes contient les variétés unirationnelles. La question de savoir si ces classes sont différentes reste ouverte. Comme exemples de variétés RC, on a aussi les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes. En caractéristique nulle, une variété de Fano (une variété projective et lisse dont le fibré anticanonique est ample) est RC. Cet énoncé fut établi par Campana et Kollár, Miyaoka, Mori ([Cam92], [KMM92b]). En particulier, une intersection complète lisse dans $\mathbb{P}^n$ de degrés respectifs $d_1, \dots, d_r$ avec $\sum_i d_i \leq n$ est rationnellement connexe. En 2003, Graber, Harris et Starr [GHS03] démontrèrent que toute variété projective RC sur un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ admet un point rationnel. Leurs méthodes ont permis d'aborder plusieurs autres problèmes sur les variétés RC et furent reprises en particulier dans les travaux de Kollár ([Kol04]), sur lesquels nous reviendrons dans la suite.

Si k est un corps non nécessairement algébriquement clos et si X est une variété projective sur k (séparablement) rationnellement connexe, on s'intéresse à décrire l'ensemble $X(k)/R$. Pour certaines variétés rationnelles, on comprend cet ensemble à l'aide de la méthode de la descente, indroduite et développée par Colliot-Thélène et Sansuc dans les années 1970-1980. Pour les variétés auxquelles cette méthode s'applique, on obtient une injection $X(k)/R \hookrightarrow H^1(k, S)$ où S est le tore dual du $Gal(\bar{k}/k)$-module $\operatorname{Pic} X_{\bar{k}}$. Ceci vaut pour X une compactification lisse d'un k-tore (cf. [CTSan77] Théorème 2 ou [CTSan79]) et, sous des hypothèses supplémentaires sur k, en particulier pour k un corps local, pour X une compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe (cf. [CT08] 8.4. et 5.4). Cette méthode s'applique aussi à X une surface de Châtelet, c'est-à-dire une surface projective lisse, birationnelle à la surface affine d'équation $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ séparable de degré 3 ou 4 ([CTSan87]). Pour k un corps p-adique, pour certaines de ces surfaces, on dispose d'une description précise de $X(k)/R$, qui forme dans ce cas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ([Dal00]).

Dans les années 1990-2000, des résultats généraux sur $X(k)/R$ furent obtenus par Kollár et Kollár-Szabó. Ils utilisent des méthodes de la théorie des déformations, ainsi que l'extension de l'approche de [GHS03] au cas où le corps de base n'est pas nécessairement algébriquement clos. Ces résultats généraux sont une vaste généralisation de cas particuliers connus auparavant. Soit k un corps local et soit X une variété projective lisse sur k séparablement rationnellement connexe. Kollár [Kol99] démontre qu'alors chaque classe de R-équivalence est un ouvert de $X(k)$, ce qui implique en particulier que l'ensemble $X(k)/R$ est fini. Pour illustrer les méthodes de Kollár, donnons ici un résumé de la preuve. Soit U une classe de R-équivalence sur $X(k)$ et soit $x \in U$. Il s'agit de montrer que U contient un voisinage de x. Pour voir cela on utilise que pour tout point x d'une variété séparablement rationnellement connexe X définie sur k il existe un k-morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que f^*T_X soit ample et $f(0:1) = x$ (cf.[Kol99], 1.4). Cette propriété est particulière aux corps dits fertiles. Posons $y := f(1:0)$. Soit $V \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X, (1:0) \mapsto y)$ un ouvert du schéma paramétrant les morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans X, contenant $[f]$ et tel que g^*T_X soit ample pour tout $g \in V$. La condition d'amplitude implique que le morphisme universel $F : \mathbb{P}^1 \times V \to X$ est lisse en dehors de $\{(1:0)\} \times V$. Le résultat découle donc du fait que les morphismes lisses induisent des applications ouvertes pour la topologie de $X(k)$, induite par la topologie de k.

Pour k un corps fini, Kollár et Szabó [KS03] établirent que pour X une variété projective et lisse sur k SRC, l'ensemble $X(k)/R$ est réduit à un seul élément si l'ordre de k est plus grand qu'une certaine constante qui ne dépend que de la géométrie de X.

La finitude de la R-équivalence pour des variétés SRC sur les corps locaux soulève la question naturelle suivante : étant donné un morphisme projectif et lisse $f : X \to Y$ dont les fibres sont des variétés SRC sur un corps local, que peut-on dire de la variation de l'ensemble $X_y(k)/R$ quand y parcourt les k-points de Y ? Kollár [Kol04] démontre que dans cette situation l'application $Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(K)/R|$ est semicontinue supérieurement. Nous nous intéressons à savoir si cette application est continue (i.e. localement constante). On ne connaissait pas de résultats dans cette direction, sauf si chaque fibre X_y a bonne réduction (cf. [Kol04], Remarque 4). En effet, dans ce cas les nombres de classes de R-équivalence sur X_y et sur la fibre spéciale d'un modèle projectif et lisse de X_y sur l'anneau des entiers de k sont égaux ([Kol04]). Plus généralement, soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions k et de corps résiduel F. Soit $\mathcal{X}$ un k-schéma intègre, propre et lisse, dont on note $X = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre générique et $\mathcal{X}_s = \mathcal{X} \times_A F$ la fibre spéciale. On a alors une application $X(k)/R \to \mathcal{X}_s(F)/R$, induite par spécialisation (cf. [Mad05]). Si A est hensélien et si $\mathcal{X}_s$ est une variété SRC, cette application est une bijection ([Kol04]).

Par analyse du cas des tores algébriques et de certaines surfaces de Châtelet sur des corps p-adiques, cas où l'on comprend explicitement la R-équivalence ([CTSan77], [Dal00]), on peut voir que le cardinal de l'ensemble des classes de la R-équivalence varie continûment dans les familles de telles variétés, ce qui donne déjà de nouveaux exemples. Plus généralement, dans le premier chapitre de cette partie, *nous établissons la continuité de la R-équivalence dans les familles de variétés rationnelles, pour lesquelles la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc s'applique.* Plus précisément, on demande que la R-équivalence soit triviale sur les compactifications lisses des torseurs universels.

D'après la définition, on peut voir les variétés rationnellement connexes comme des analogues des espaces connexes par arcs en topologie. En utilisant ce point de vue, dans leurs travaux récents [dJS], de Jong et Starr développent une notion analogue à celle d'espace simplement connexe. Cette notion est aussi liée à la recherche d'une classe de variétés qui ont un point rationnel sur un corps de fonctions de deux variables sur $\mathbb{C}$. Le principe est de demander que l'espace qui paramètre des chaînes de courbes rationnelles qui passent par deux points x, y de X soit lui même rationnellement connexe. Dans [dJS], de Jong et Starr proposent une définition possible d'une variété rationnellement simplement connexe (RSC) et ils démontrent qu'une intersection complète lisse dans $\mathbb{P}^n$ de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_r$ avec $\sum_i d_i^2 \leq n+1$, de dimension au moins 3, est RSC. Nous nous intéressons à l'étude de la R-équivalence sur de telles variétés. Dans le deuxième chapitre de cette partie *nous établissons que pour k un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ ou pour $k = \mathbb{C}((t))$ et pour X une variété projective sur k*

rationnellement simplement connexe, l'ensemble des classes de R-équivalence est réduit à un élément. Ce résultat s'applique aux intersections complètes comme ci-dessus. Cette section est rédigée en anglais et a fait l'objet d'une publication indépendante [Pir1].

Les questions de comparaison de la R-équivalence sur une variété projective et lisse X, définie sur un corps p-adique k, avec les propriétés de la fibre spéciale d'un modèle propre mais pas nécessairement lisse $\mathcal{X}$ de X sur l'anneau des entiers de k nous amènent à introduire une autre notion d'équivalence, que nous appelons la R_1-équivalence. *Nous étudions quelques propriétés de cette relation d'équivalence dans le troisième chapitre.*

Dans le dernier chapitre de cette partie, *nous nous intéressons à l'étude de la R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes définies sur les corps réels clos ou p-adiqument clos.* En utilisant des techniques de déformation de Kollár (cf. [Kol99], [Kol04]), on étudie l'injectivité (resp. la surjectivité) de l'application naturelle $X(k)/R \to X_K(K)/R$ pour $k \subset K$ une extension de corps réel clos (resp. p-adiquement clos) et pour X une variété rationnellement connexe définie sur k.

Chapitre 1

Familles de variétés rationnelles et méthode de la descente

Résumé. La méthode de la descente a été introduite et développée par Colliot-Thélène et Sansuc. Elle permet d'étudier l'arithmétique de certaines variétés rationnelles. Dans ce chapitre on montre comment il en résulte que pour certaines familles projectives et lisses $f : X \to Y$ de variétés rationnelles sur un corps local k de caractéristique nulle le nombre des classes de R-équivalence de la fibre $X_y(k)$ est localement constant quand y varie dans $Y(k)$.

Introduction

Soit X une variété propre géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro. La question de décrire les propriétés de l'ensemble de ses points rationnels fait l'objet de l'étude des propriétés arithmétiques de X. Dans le cas où X possède beaucoup de courbes rationnelles, en particulier, si X est rationnellement connexe, on peut demander de décrire l'ensemble $X(k)/R$ des classes de R-équivalence. Si k est un corps local et si X est une k-variété projective lisse rationnellement connexe, Kollár [Kol99] montre que l'ensemble $X(k)/R$ est fini. Il est ainsi naturel de se demander comment le nombre $|X(k)/R|$ des classes de R-équivalence varie dans des familles plates de telles variétés. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme projectif et lisse dont les fibres sont des variétés rationnellement connexes. D'après le résultat de Kollár [Kol04], l'application $\rho(f) : Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(k)/R|$ est semi-continue supérieurement pour la topologie induite par celle de k. On s'intéresse alors à savoir si cette application est de fait continue ([Kol04],[CT11] 10.10). Pour $k = \mathbb{R}$ c'est une conséquence du théorème d'Ehresmann ([Voi02], 9.3). Dans ce texte on montre que l'application $\rho(f)$ est continue pour certaines familles de variétés rationnelles (et a fortiori rationnellement connexes) sur un corps p-adique en utilisant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc ([CTSan79],[CTSan87]). Pour ce faire, on étudie la continuité en famille d'une relation d'équivalence associée à un torseur. Plus précisément, soit k un corps local et soit X une k-variété projective et lisse. Soit S un k-tore que l'on voit comme un X-tore par changement de base. On associe à un torseur T sur X sous S une relation d'équivalence $\sim_T$ sur $X(k)$ (cf. section 1.1.1). Pour k un corps local, l'ensemble $X(k)/\sim_T$ est fini. Lorsqu'on a une famille projective et lisse $f : X \to Y$ de k-variétés, un Y-tore S et un torseur T sur X sous S, on montre que l'application $Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(k)/\sim_{T_y}|$ est localement constante. On en déduit l'énoncé pour la R-équivalence en utilisant que, pour certaines familles de variétés rationnelles, la R-équivalence coïncide avec la relation d'équivalence associée à un torseur particulier, dit *universel*.

Dans la section 1.1 on rappelle les étapes principales de la méthode de la descente pour les variétés rationnelles sur un corps. Pour appliquer cette méthode à des familles de variétés rationnelles $X \to Y$ on aura besoin de mettre les torseurs universels en familles. Pour ce faire, il est nécessaire d'étudier les propriétés du schéma de Picard $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ pour de telles familles. Cela est fait dans la section 1.2. Dans la section 1.3 on étudie la continuité en famille de la relation d'équivalence associée à un torseur (théorème 1.3.1). Ensuite, on applique la méthode de la descente pour montrer que $\rho(f)$ est localement constante pour certaines familles $f : X \to Y$ de variétés rationnelles sur un corps local (théorème 1.3.2).

Notations et rappels. Dans tout ce texte sauf dans la section 1.3 on note k un corps de caractéristique nulle. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et on pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Soit X une $\bar{k}$-variété projective intègre. On dit que X est *$\bar{k}$-rationnelle* si X est birationnelle à $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$. On dit que X est *rationnellement connexe* si pour tout corps algébriquement clos $\Omega \supset \bar{k}$, par deux points quelconques de $X(\Omega)$ il passe une courbe rationnelle : pour tous $x_1, x_2 \in X(\Omega)$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1_\Omega \to X$ tel que $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1_\Omega)$.

Si X est une k-variété projective géométriquement intègre, on dit que X est *rationnelle* si $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est $\bar{k}$-rationnelle et on dit que X est *rationnellement connexe* si $\bar{X}$ l'est. Deux points rationnels $x_1, x_2 \in X(k)$ sont dits *directement R-liés* s'il existe un k-morphisme $p : \mathbb{P}^1_k \to X$ tel que $p(0:1) = x_1$ et $p(1:0) = x_2$. On appelle R-équivalence la relation d'équivalence engendrée (cf. [Man72]) et on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence.

Pour X un schéma on note $\mathbb{G}_{m,X} = \mathbb{G}_m \times_{\mathbb{Z}} X$ le groupe multiplicatif sur X. On appelle *X-tore* un X-schéma en groupes localement isomorphe à $\mathbb{G}^n_{m,X}$ pour la topologie *fpqc* ([SGA3], VIII et IX). On appelle *X-groupe constant tordu* un X-schéma en groupes localement constant pour la topologie *fpqc* ([SGA3], X). Lorsque l'on considère des groupes de type fini (resp. à engendrement fini), ce qui sera toujours le cas ici, on peut remplacer *fpqc* par *ét.* Lorsque X est localement noethérien connexe et normal, un X-tore est toujours *isotrivial* ([SGA3], X 5.16), c'est-à-dire, qu'il est diagonalisable après un revêtement fini étale (morphisme étale fini surjectif). On a une anti-équivalence de catégories entre les X-tores S et les X-groupes constants tordus sans torsion M ([SGA3], X), via :

$$S \mapsto \hat{S} = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(S, \mathbb{G}_{m,X}),\ M \mapsto D(M) = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(M, \mathbb{G}_{m,X}).$$

On appelle *torseur* sur X sous un X-tore S un espace principal homogène $\mathcal{T} \to X$ sur X sous S ([Mil80], III). Les classes d'isomorphisme de X-torseurs sous S sont paramétrées par le groupe de cohomologie étale $H^1(X, S)$ ([Mil80], III). On note $[\mathcal{T}]$ la classe de $\mathcal{T}$ dans $H^1(X, S)$.

1.1 Méthode de la descente

Soit X une k-variété rationnelle. La méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc consiste à attacher à la variété X un certain nombre de variétés auxiliaires $(Y_i \xrightarrow{p_i} X)_{i\in I}$ dont l'arithmétique est a priori plus simple, même si leur dimension est plus grande. En particulier, dans les cas que l'on considère, on aura que chaque classe de R-équivalence de X est précisement l'image $p_i(Y_i(k))$ pour un $i \in I$. Donnons la description plus explicite des étapes principales de la méthode, nécessaires pour la suite.

1.1.1 Idée de la méthode

Soit X une k-variété projective telle que $X(k) \neq \emptyset$. Soit S un k-tore que l'on voit comme un X-tore par changement de base. Un torseur $\mathcal{T} \xrightarrow{p} X$ sur X sous S définit une application

$$\begin{aligned} X(k) &\xrightarrow{\theta} H^1(k,S) \\ x &\mapsto [\mathcal{T}_x]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Notons que la classe $[\mathcal{T}_x]$ est triviale si et seulement si $\mathcal{T}_x(k) \neq 0$, c'est-à-dire, si $x \in p(\mathcal{T}(k))$.

Si $\alpha \in H^1(k,S)$ on note $\mathcal{T}^\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X$ un torseur sur X de classe $[\mathcal{T}] - \alpha$. On dit que $\mathcal{T}^\alpha$ est un *tordu* de $\mathcal{T}$ par α. Notons que l'image $p_\alpha(\mathcal{T}^\alpha(k))$ ne dépend que de la classe de α dans $H^1(k,S)$. On a les propriétés suivantes :

1. on a une partition (cf. [CTSan79])

$$X(k) = \bigsqcup_{\alpha\in \operatorname{im}\theta} p_\alpha(\mathcal{T}^\alpha(k)) = \bigsqcup_{\alpha\in H^1(k,S)} \theta^{-1}(\alpha), \tag{1.2}$$

   ce qui définit la relation d'équivalence $\sim_\mathcal{T}$ sur $X(k)$ associée à l'application θ ;

2. l'application θ passe au quotient par la R-équivalence ([CTSan77], prop. 12) et induit ainsi une application

$$X(k)/R \xrightarrow{\theta} H^1(k,S); \tag{1.3}$$

On voit ainsi que la partition (1.2) est moins fine que la partition en classes de R-équivalence. La méthode de la descente permet d'établir que sur certaines variétés rationnelles ces partitions coïncident lorsque $\mathcal{T} \to X$ est un torseur dit *universel*.

1.1.2 Torseurs universels

Soit X une k-variété projective lisse rationnelle admettant un point rationnel. Le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est un groupe abélien libre de type fini (cf. [CTSan87], 2.A.2 ou [Vos98] p.47). On pose $S = \mathcal{H}om_{k\text{-gr}}(\operatorname{Pic}\bar{X}, \mathbb{G}_{m,k})$ le tore dual. On dispose d'une suite exacte (cf. [CTSan87], 2.2.8) :

$$0 \to H^1(k,S) \to H^1(X,S) \xrightarrow{\chi} \operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(\hat{S}, \operatorname{Pic}\bar{X}) \to 0, \tag{1.4}$$

où l'application χ associe à un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S et à un caractère $\lambda : \bar{S} \to \bar{\mathbb{G}}_m$ le torseur sur $\bar{X}$ sous $\bar{\mathbb{G}}_m$ déduit de $\bar{\mathcal{T}}$ par λ. Cela donne un élément de $\operatorname{Pic}\bar{X} = H^1(\bar{X}, \bar{\mathbb{G}}_m)$. On dit qu'un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S est *universel* si $\chi([\mathcal{T}])$ est l'application identité sur $\operatorname{Pic}\bar{X}$.

Définition 1.1.1. On dit que *les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels*, si la partition (1.2), obtenue à l'aide d'un torseur universel $\mathcal{T}$, coïncide avec la partition en classes de R-équivalence.

Notons que cette définition ne dépend pas de choix du torseur universel car les classes de deux tels torseurs dans $H^1(X, S)$ diffèrent par un unique élément de $H^1(k, S)$. On peut montrer (cf. [CTSan87] 2.8.5, ceci utilise l'hypothèse car.$k = 0$) que les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels si les torseurs universels $\mathcal{T}$ sur X qui possèdent un point rationnel sont des variétés k-rationnelles, c'est-à-dire, leurs corps de fonctions sont transcendants purs sur k.

1.1.3 Cas auxquels la méthode s'applique

On sait que les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels dans les cas suivants :

1. X est une surface de Châtelet : une surface projective, lisse, birationnelle à la surface affine d'équation
$$y^2 - az^2 = P(x)$$
avec $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ séparable de degré 3 ou 4 ([CTSan87]). Plus généralement, on peut prendre X une surface projective lisse admettant un morphisme dominant $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ avec au plus quatre fibres géométriques singulières et la fibre générique lisse de genre zéro (cf. [CTS87]).
2. X est une compactification lisse d'un k-tore (cf. [CTSan77] théorème 2 ou [CTSan79]).
3. Sous des hypothèses supplémentaires sur k, en particulier pour k un corps local, ceci vaut plus généralement pour X une compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe (cf. [CT08] 8.4. et 5.4). Ce dernier cas est plus délicat. Les torseurs universels avec un point rationnel ne sont pas ici en général des variétés k-rationnelles, alors que c'est le cas pour les exemples précédents.

En général, si X est une surface rationnelle, la question de savoir si les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels reste ouverte.

1.2 Torseurs universels en famille

On commence par rappeler quelques résultats de Grothendieck sur le schéma de Picard. Soit Y un schéma noethérien connexe et soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse, à fibres géométriquement intègres. Supposons que f admet une section. Alors le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/Y}$:
$$\mathrm{Pic}_{X/Y}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_Y T)/\mathrm{Pic}(T)$$
est un faisceau pour la topologie étale (cf.[Kle05], 9.2.5) qui est représentable par un Y-schéma $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ ([Kle05] 9.4.8). La formation de ce schéma est compatible avec le changement de base (cf. [Kle05] 9.4.4). De plus, les composantes connexes de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ sont des Y-schémas projectifs, qui sont ouverts et fermés dans $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ (cf. [Kle05] 9.6.25 et 9.5.7 pour la projectivité).

Proposition 1.2.1. *Soit Y un schéma noethérien connexe. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse, à fibres géométriquement intègres, tel que f admet une section. Supposons que $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout point géométrique y de Y. Alors $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu.*

Démonstration. Soit y_0 un point fermé de Y de corps résiduel κ. Soit $\bar{\kappa}$ une clôture algébrique de κ et soit $\bar{X}_{y_0} = X_{y_0} \times_\kappa \bar{\kappa}$.

La fibre de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ en y_0 est le schéma $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}$. Soit $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ la composante connexe de l'identité (i.e. de $\mathcal{O}_{X_{y_0}}$). Les $\bar{\kappa}$-points de ce schéma correspondent aux classes de faisceaux inversibles sur $\bar{X}_{y_0}$ algébriquement équivalents à $\mathcal{O}_{\bar{X}_{y_0}}$ ([Kle05], 5.10). Soit $NS(\bar{X}_{y_0}) = \mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})/\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})$ le groupe de Néron-Severi. Ce dernier groupe est un groupe de type fini ([SGA6], XIII.5.1).

Puisque $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout point géométrique y de Y, le schéma $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est lisse sur Y et ses composantes connexes sont finies étales sur Y ([Kle05], 5.13 et 5.19). En particulier, $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ est un κ-schéma fini (et étale). Comme il est connexe et contient un κ-point correspondant à $\mathcal{O}_{X_{y_0}}$, alors $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ est réduit à un point. Ainsi $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa}) = NS(\bar{X}_{y_0})$ est de type fini. Quitte à remplacer Y par $Y' \to Y$ étale, on peut alors supposer que les éléments $l_1, \ldots, l_m$ qui engendrent le groupe $M = \mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})$ sont tous définis sur κ. Autrement dit, on peut supposer que la fibre $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}$ de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ en y_0 est formée de κ-points. On l'identifie alors avec $\coprod_M \operatorname{Spec} \kappa$.

Montrons qu'il existe un morphisme étale $Y' \to Y$ dont l'image contient le point y_0, tel que $\mathbf{Pic}_{X/Y} \times_Y Y' = \mathbf{Pic}_{X'/Y'}$, où $X' = X \times_Y Y'$, est isomorphe à $M_{Y'}$. Comme $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est lisse, il existe un morphisme étale $Y' \to Y$ avec un κ-point au-dessus de y_0, tel qu'on a des sections $s_{l_i} : Y' \to \mathbf{Pic}_{X'/Y'}$, $i = 1, \ldots, m$ passant par l_i (cf. le lemme ci-dessous). On peut supposer que Y' est connexe. Comme $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ représente le foncteur $\mathrm{Pic}_{X'/Y'}$, chaque section s_{l_i} correspond à un faisceau inversible $\mathcal{L}_i$ sur X', défini à un isomorphisme et à un élément de $\mathrm{Pic}Y'$ près. Inversement, pour tout $m = \sum_i a_i l_i$, le faisceau $\otimes_i \mathcal{L}_i^{\otimes a_i}$ correspond à une section s_m telle que $s_m(y_0) = m$. On a ainsi un morphisme de schémas en groupes

$$\begin{aligned} \phi : M_{Y'} &\to \mathbf{Pic}_{X'/Y'}, \\ \phi|_{m \times Y'} &= s_m. \end{aligned}$$

Le noyau de ϕ est un sous-groupe fermé de $M_{Y'}$ car $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ est séparé. Comme $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ et $M_{Y'}$ sont des Y'-schémas en groupes étales, le morphisme ϕ est étale et son noyau est aussi un sous-groupe ouvert de $M_{Y'}$ (cf. [SGA1] 4.3, 5.3). Puisque $M_{Y'}$ est constant, le noyau de ϕ est donc l'union disjointe de copies de Y'. C'est donc la section unité de M'_Y car sa fibre en y_0 est nulle. Comme ϕ est étale, c'est donc une immersion ouverte. Puisque chaque composante connexe de $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ est surjective sur Y', elle rencontre la fibre en y_0. On en déduit que ϕ est un isomorphisme. □

Lemme 1.2.2. *Soit Y un schéma. Soit $X \to Y$ un morphisme lisse. Soit x un point de X de corps résiduel κ et soit y son image dans Y. Supposons que κ est une extension finie séparable du corps résiduel de y. Il existe alors un morphisme étale $Y' \to Y$, un κ-point $y' \in Y'$ au-dessus de y et un Y-morphisme $g : Y' \to X$ tels que $g(y') = x$.*

Démonstration. D'après la description locale des morphismes lisses on peut supposer que X est étale sur $\mathbb{A}^n_Y$. Prenons une section $Y \to \mathbb{A}^n_Y$ qui envoie $y \in Y$ sur l'image de point x. Alors $Y' = Y \times_{\mathbb{A}^n_Y} X$ convient : il est étale sur Y, le morphisme $g : Y' \to X$ est donné par projection et le point $y' = (y, x)$ s'envoie sur x. □

Remarque 1.2.3. Dans la proposition 1.2.1 il suffit de demander que les groupes $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$, $i = 1, 2$ s'annulent pour un point géométrique y de Y. En effet, dans ce cas les fonctions $h^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$ sont constantes sur Y (cf. [Mum70] section 5, p. 50).

La proposition 1.2.1 s'applique en particulier aux familles de variétés rationnellement connexes :

Corollaire 1.2.4. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés, dont les fibres sont des variétés rationnellement connexes. Supposons que f admet une section. Alors $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu sans torsion.*

Démonstration. Si Z est une k-variété projective lisse rationnellement connexe, les groupes de cohomologie $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ s'annulent pour tout i positif. En effet, comme k est un corps de caractéristique nulle, il suffit de le montrer sur $\mathbb{C}$. D'après la décomposition de Hodge, $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à $H^0(Z, \Omega^i_Z)$ (cf.[Voi02], 6.12). Or $H^0(Z, \Omega^i_Z) = 0$ pour une variété rationnellement connexe ([Kol96], IV.3.8), on voit que $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ pour tout $i > 0$. En particulier, $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout $y \in Y$. D'après la proposition 1.2.1, $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est alors un Y-groupe constant tordu. Il est sans torsion car les groupes $\mathbf{Pic}_{X_y/k(y)}$ le sont (cf. [Deb01], 4.18). □

On introduit ensuite les torseurs universels en famille exactement de la même manière que sur un corps. On montre d'abord

Lemme 1.2.5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés qui admet une section $s : Y \to X$. Soit S un Y-tore qu'on voit comme un X-tore par changement de base. On a une suite exacte, fonctorielle en S et en Y*

$$0 \to H^1(Y, S) \to H^1(X, S) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}) \to 0. \tag{1.5}$$

Démonstration. D'après [CTSan87], 1.5.1, on a une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1_Y(\hat{S}, f_*\mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_Y(\hat{S}, f_*\mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X}). \end{aligned}$$

En effet, il s'agit de la suite des termes de bas degré de la suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{Y_{\acute{e}t}}(\mathcal{F}, R^q f_* \mathcal{G}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{X_{\acute{e}t}}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

appliquée à $\mathcal{F} = \hat{S}$ et $\mathcal{G} = \mathbb{G}_{m,X}$. Comme f est un morphisme projectif à fibres géométriques intègres, on a $f_*\mathbb{G}_{m,X} = \mathbb{G}_{m,Y}$. On applique ensuite [CTSan87], 1.4.3 qui donne des isomorphismes $H^i(X,S) \tilde{\to} \mathrm{Ext}^i_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X})$ et de même pour Y. On obtient ainsi une suite

$$0 \to H^1(Y,S) \to H^1(X,S) \to \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1f_*\mathbb{G}_{m,X}) \xrightarrow{\partial} H^2(Y,S) \to H^2(X,S).$$

Comme le morphisme $f : X \to Y$ admet une section, cette suite est scindée et donc $\partial = 0$. On obtient ainsi la suite de l'énoncé du lemme. □

Remarque 1.2.6. D'après [Kle05] 2.11, on peut identifier le faisceau étale $R^1f_*\mathbb{G}_{m,X}$ avec $\mathrm{Pic}_{X/Y}$. Si Y est le spectre d'un corps, ce dernier correspond au module galoisien $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$ et on a donc la même construction que dans la partie 1.1.2.

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés dont les fibres sont des variétés rationnelles. Supposons que f admet une section. D'après le corollaire 1.2.4, $\mathrm{Pic}_{X/Y}$ est représentable par un Y-schéma en groupes constant tordu. On note S le Y-tore dual.

Définition 1.2.7. On dit qu'un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S est *universel* si l'application $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, \mathrm{Pic}_{X/Y})$ déduite de la suite (1.5), est l'application identité.

Notons que par fonctorialité en Y de la suite exacte (1.5), le torseur $\mathcal{T}_y$ est aussi un torseur universel sur X_y sous S_y pour tout $y \in Y(k)$.

1.3 Relation d'équivalence associée à un torseur en famille

Soit k un corps. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés. Soit S un Y-tore, que l'on voit comme un X-tore par changement de base. Soit $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur sur X sous S. De la même manière que dans la section 1.1.1 on associe à $\mathcal{T}$ une relation d'équivalence sur $X(k)$ compatible avec f. Plus précisément, pour $y \in Y(k)$ et $x_1, x_2 \in X_y(k)$ on a

$$x_1 \sim_{\mathcal{T}} x_2$$

si x_1, x_2 appartiennent à $p_\alpha(\mathcal{T}_y^\alpha(k))$ pour un élément $\alpha \in H^1(k, S_y)$.

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. *Soit k un corps local*[1]*. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés. Soit S un Y-tore et soit $\mathcal{T}$ un torseur sur X sous S. Alors chaque classe d'équivalence de la relation $\sim_{\mathcal{T}}$ définie ci-dessus est un ouvert de $X_y(k)$ pour $y \in Y(k)$, et l'application induite $f_{\mathcal{T}} : X(k)/_{\sim_{\mathcal{T}}} \to Y(k)$ est une fibration à fibres finies, localement triviale pour la topologie du corps k.*

On obtient comme conséquence :

1. i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p((t))$

Théorème 1.3.2. *Soit k un corps local de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés dont les fibres sont des variétés rationnelles. Supposons que pour tout $y \in Y(k)$ les classes de R-équivalence sur $X_y(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels. Alors la fonction*

$$\rho(f) : Y(k) \to \mathbb{N},\ y \mapsto |X_y(k)/R|$$

est localement constante.

Démonstration. Soit $y_0 \in Y(k)$. Pour montrer que l'application $\rho(f)$ est continue en y_0 on peut remplacer Y par $Y' \to Y$ étale avec un k-point au-dessus de y_0 et X par $X' = X \times_Y Y'$. Cela provient du fait que les applications étales induisent des applications ouvertes sur les points rationnels. D'après le lemme 1.2.2, on peut donc supposer que f admet une section.

D'après le corollaire 1.2.4, sous l'hypothèse que k est un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu. Soit S un Y-tore dual. Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel sur X sous S. Par fonctorialité de la suite exacte (1.5), pour tout point $y \in Y(k)$, le torseur $\mathcal{T}_y$ est un torseur universel sur X_y sous S_y. Ainsi la R-équivalence sur $X_y(k)$ coïncide avec la relation d'équivalence associée à $\mathcal{T}_y$. On obtient alors l'énoncé comme conséquence du théorème 1.3.1. $\square$

Remarque 1.3.3. Sous les hypothèses du théorème, soit R_f la relation d'équivalence sur $X(k)$ engendrée par la R-équivalence dans les fibres de f. D'après la preuve du théorème, on obtient que la fibration $X(k)/R_f \to Y(k)$ est une fibration localement triviale à fibres finies.

Remarque 1.3.4. Plus généralement, dans le théorème 1.3.2 il suffit de demander que les fibres de f soient des variétés rationnellement connexes. Dans les cas où l'on sait que les classes de R-équivalence sur $X_y(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels, il s'agit des variétés rationnelles (cf. section 1.1.3). En particulier, le résultat s'applique pour les familles de surfaces de Châtelet, pour les compactifications lisses de familles de tores algébriques ou de groupes réductifs connexes (cf. 1.1.3). Notons que pour ces familles on démontre la continuité de la R-équivalence uniquement à partir de propriétés de torseurs, sans utiliser le résultat de Kollár que $\rho(f)$ est semi-continue.

Pour montrer le théorème 1.3.1 on établit d'abord un lemme préliminaire.

Lemme 1.3.5. *Soit k un corps valué hensélien. Soient X une k-variété, S un X-tore et $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur sur X sous S. Alors $p(\mathcal{T}(k))$ est ouvert et fermé dans $X(k)$ pour la topologie définie par la valuation.*

Démonstration. Posons $W = p(\mathcal{T}(k))$. Notons que $\mathcal{T}$ est lisse sur X comme torseur sous un X-schéma en groupes lisse (cf. [Mil80], III 4.2). Puisque k est hensélien, W est ouvert (cf. [MB10], 2.2.1(i) et 2.2.2). Pour montrer que W est fermé, on va remplacer $p : \mathcal{T} \to X$ par un morphisme propre dont l'image dans $X(k)$ est encore W.

Supposons d'abord que S est un tore isotrivial. On dispose alors d'une compactification lisse équivariante S^c de S (cf. par exemple [CTHS05]). Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c$ le produit contracté (cf. [Sko01], 2.2.3), ce qui compactifie dans les fibres $\mathcal{T} \to X$. C'est-à-dire, $p^c : \mathcal{T}^c \to X$ est un morphisme propre et lisse, et $\mathcal{T}$ est dense dans chaque fibre. On a de plus :

$$W = p(\mathcal{T}(k)) = p^c(\mathcal{T}^c(k)).$$

En effet, pour tout $x \in X(k)$ les k-points de la fibre $\mathcal{T}_x^c$ sont Zariski denses, car $\mathcal{T}_x^c$ est lisse et k est un corps fertile [2]. En particulier, si $\mathcal{T}_x^c(k)$ est non vide, alors il en est de même pour $\mathcal{T}_x(k)$. Puisque p^c est propre, W est fermé dans $X(k)$ (cf. [MB11], 1.4).

Dans le cas général, pour montrer que $p(\mathcal{T}(k))$ est un fermé de $X(k)$, il suffit de le faire localement [3]. Soit $x \in X(k)$. D'après [SGA3] X 4.5, il existe un morphisme étale $\pi : X' \to X$ avec un k-point x' au-dessus de x, tel que le tore $S_{X'}$ soit isotrivial. Soit $p' : \mathcal{T}_{X'} \to X'$. Soit $\pi_k : X'(k) \to X(k)$ l'application induite par π. Comme π est un morphisme étale, on a que $U \overset{\text{def}}{=} \pi_k(X'(k))$ est un ouvert de $X(k)$; de plus, $F \subset U$ est un fermé de U si et seulement si $\pi_k^{-1}(F)$ est un fermé de $X'(k)$ (cf. [MB10] 2.2.1(i)). Comme $S_{X'}$ est un tore isotrivial, $p'(\mathcal{T}_{X'}(k))$ est un fermé de $X'(k)$. Or $\pi_k^{-1}(p(\mathcal{T}(k))) = p'(\mathcal{T}_{X'}(k))$, on déduit que $p(\mathcal{T}(k)) \cap U$ est un fermé de U. Ainsi $p(\mathcal{T}(k))$ est un fermé de $X(k)$ car on vient de l'établir localement.

□

Fin de la preuve du théorème 1.3.1.

Fixons un point $y_0 \in Y(k)$. Soit r le nombre des classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ de $X_{y_0}(k)$. Ce nombre est fini d'après le lemme 1.3.5 puisque $X_{y_0}(k)$ est compact. Prenons un point $x_{0,j}$ dans chacune des classes, $j = 1, \dots, r$.

Pour montrer le théorème, on peut remplacer Y par $Y' \to Y$ étale avec un k-point au-dessus de y_0 et X par $X' = X \times_Y Y'$. D'après le lemme 1.2.2, on peut donc supposer qu'il existe r sections $s_j : Y \to X$, $j = 1, \dots, r$ telles que $s_j(y_0) = x_{0,j}$.

Soient $\mathcal{A}_j = s_j^*\mathcal{T}$, $j = 1, \dots, r$; on note encore $\mathcal{A}_j$ leurs images réciproques sur X. Soient $p_j : \mathcal{T}_j \to X$ les tordus de $\mathcal{T}$ par les $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, r$, et soient $\Omega_j = p_j(\mathcal{T}_j(k))$. D'après cette construction, pour tout k-point y de Y, la fibre $\Omega_{j,y}$ est la classe de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ sur $X_y(k)$ contenant le point $s_j(y)$. Ainsi, pour $y \in Y(k)$ et pour $i \neq j$, soit $\Omega_{i,y}$ et $\Omega_{j,y}$ sont disjoints, soit ils coïncident.

D'après la construction, les Ω_{j,y_0}, $j = 1, \dots, r$ forment les r classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ sur $X_{y_0}(k)$. D'après le lemme 1.3.5, les Ω_j sont ouverts dans $X(k)$. Comme f est propre et k est un corps local, l'image par f du fermé complémentaire de $\bigcup_j \Omega_j$ est un fermé de $Y(k)$ qui ne contient pas le point y_0. Ainsi, les $\Omega_{j,y}$ recouvrent les fibres voisines $X_y(k)$. Pour y dans un voisinage assez petit de y_0, on a aussi que les $\Omega_{i,y}$ et $\Omega_{j,y}$, $i \neq j$ sont disjoints. En effet, il suffit de montrer que $s_i(y) \notin \Omega_{j,y}$, ce qui résulte du fait que le complémentaire de Ω_j dans $X(k)$ est un ouvert (cf. 1.3.5) qui contient le point $s_i(y_0)$.

Ainsi, pour y assez proche de y_0, on obtient que les classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ de $X_y(k)$

2. C'est-à-dire, si V est une k-variété lisse connexe telle que $V(k)$ est non vide, alors l'ensemble $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski.

3. Si $X(k) = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ où les U_i, $i = 1, \dots, r$, sont des ouverts de $X(k)$ et si $W_i = p(\mathcal{T}(k)) \cap U_i$ est un fermé de U_i, alors $p(\mathcal{T}(k)) = \bigcap_{i=1}^{r} (W_i \cup (X(k) \setminus U_i))$ est un fermé de $X(k)$. En effet, $U_i \setminus W_i$ est un ouvert de $X(k)$, son complémentaire $W_i \cup (X(k) \setminus U_i)$ est donc fermé.

sont précisément les $\Omega_{j,y}(k)$, $j = 1, \dots, r$. On termine ainsi la preuve du théorème. $\square$

Remarque 1.3.6. Dans la preuve du théorème 1.3.1, on peut même se ramener au cas d'un tore constant sur Y. Cette astuce est due à L. Moret-Bailly. Avec les notations du théorème, soit $y_0 \in Y(k)$ et soit $S_0 = S_{y_0} \times_k Y$ un tore constant sur Y. D'après [SGA3] X 5.10,

$$\underline{\mathrm{I}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underline{\mathrm{Isom}}_{Y-\mathrm{gr}}(S_0, S)$$

est un Y-schéma constant tordu. Ce schéma a un point rationnel y' au-dessus de y_0. Soit Y' un voisinage de y' dans $\underline{\mathrm{I}}$ qui est de type fini sur Y. L'immersion $Y' \hookrightarrow \underline{\mathrm{I}}$ correspond à un isomorphisme $S_{y_0} \times_k Y' \stackrel{\sim}{\to} S \times_Y Y'$ de Y'-tores, ainsi le tore S devient constant sur Y'. Comme Y' admet un point rationnel y' au-dessus de Y et est étale sur Y, dans la preuve du théorème 1.3.1 on peut remplacer Y par Y' et X par $X' = X \times_Y Y'$.

Quant aux applications pour la R-équivalence, cet argument et le corollaire 1.2.4 impliquent immédiatement le cas des compactifications lisses de familles de tores algébriques ou de groupes réductifs connexes (cf. section 1.1.3). En effet, si k est un corps de caractéristique nulle et si X est une compactification lisse d'un k-tore, alors $X(k)/R \stackrel{\sim}{\to} H^1(k, S)$ où S est le tore dual de $\mathrm{Pic}\bar{X}$ (cf. [CTSan77] théorème 2 et proposition 13). Sous des hypothèses supplémentaires sur k, en particulier pour k un corps local, si X est une compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe, on a encore $X(k)/R \stackrel{\sim}{\to} H^1(k, S)$ où S est le tore dual de $\mathrm{Pic}\bar{X}$ (cf. [CT08] 8.4. et 5.4). Néanmoins, si X est une surface de Châtelet, on dispose d'une application injective $X(k)/R \to H^1(k, S)$ mais elle n'est pas nécessairement surjective ([CTSan87]).

Chapitre 2

R-équivalence sur les intersections complètes

Let k be a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$. Let X be a k-rationally simply connected variety defined over k. We show that R-equivalence on rational points of X is trivial and that the Chow group of zero-cycles of degree zero $A_0(X)$ is zero. In particular, this holds for a smooth complete intersection of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \ldots, d_r$ with $\sum\limits_{i=1}^{r} d_i^2 \leq n+1$.

2.1 Introduction

Let X be a projective variety over a field k. Two rational points x_1, x_2 of X are called *directly R-equivalent* if there is a morphism $f : \mathbb{P}^1_k \to X$ such that x_1 and x_2 belong to the image of $\mathbb{P}^1_k(k)$. This generates an equivalence relation called *R-equivalence* [Man72]. The set of R-equivalence classes is denoted by $X(k)/R$. If $X(k) = \emptyset$ we set $X(k)/R = 0$.

From the above definition, the study of R-equivalence on $X(k)$ is closely related to the study of rational curves on X, so that we need many rational curves on X. The following class of varieties sharing this property was introduced in the 1990s by Kollár, Miyaoka and Mori [KMM92a], and independently by Campana.

Definition 2.1.1. Let k be a field of characteristic zero. A projective geometrically integral variety X over k is called *rationally connected* if for any algebraically closed field Ω containing k, two general Ω-points x_1, x_2 of X can be connected by a rational curve, i.e. there is a morphism $\mathbb{P}^1_\Omega \to X_\Omega$ such that its image contains x_1 and x_2.

Remark 2.1.2. One can define rational connectedness by other properties ([Kol96], Section IV.3). For instance, if k is uncountable, one may ask that the condition above is satisfied for *any* two points $x_1, x_2 \in X(\Omega)$.

By a result of Campana [Cam92] and Kollár-Miyaoka-Mori [KMM92b], smooth Fano varieties are rationally connected. In particular, a smooth complete intersection of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \ldots, d_r$ with $\sum_{i=1}^{r} d_i \leq n$ is rationally connected. Another important result about rationally connected varieties has been established by Graber, Harris and Starr [GHS03]. Let k be a function field in one variable over $\mathbb{C}$, that is, k is the function field of a complex curve. Graber, Harris and Starr prove that any smooth rationally connected variety over k has a rational point.

One can see rationally connected varieties as an analogue of path connected spaces in topology. From this point of view, de Jong and Starr introduce the notion of rationally simply connected varieties as an algebro-geometric analogue of simply connected spaces. For X a projective variety with a fixed ample divisor H we denote by $\overline{M}_{0,2}(X, d)$ the Kontsevich moduli space for all genus zero stable curves over X of degree d with two marked points (see section 2 for more details). In this paper we use the following definition :

Definition 2.1.3. Let k be a field of characteristic zero. Let X be a projective geometrically integral variety over k. Suppose that $H_2(X, \mathbb{Z})$ has rank one. We say that X is *k-rationally simply connected* if for any sufficiently large integer e there exists a geometrically irreducible component $M_{e,2} \subset \overline{M}_{0,2}(X, e)$ intersecting the open locus of irreducible curves $M_{0,2}(X, e)$ and such that the restriction of the evaluation morphism

$$ev_2 : M_{e,2} \to X \times X$$

is dominant with rationally connected general fiber.

Remark 2.1.4. Following the work of de Jong and Starr, we restrict ourselves to the case where $H_2(X, \mathbb{Z})$ has rank one.

Note that a k-rationally simply connected variety X over a field k is rationally connected as $X \times X$ is dominated by $M_{e,2} \cap M_{0,2}(X, e)$ from the definition above. This implies that over any algebraically closed field $\Omega \supset k$ two general points of $X(\Omega)$ can be connected by a rational curve.

By a recent result of de Jong and Starr [dJS], a smooth complete intersection X of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \ldots, d_r$ and of dimension at least 3 is k-rationally simply connected if $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq n + 1$.

Let us now recall the definition of $A_0(X)$. Denote by $Z_0(X)$ the free abelian group generated by the closed points of X. *The Chow group of degree* 0 is the quotient of the group $Z_0(X)$ by the subgroup generated by the $\pi_*(\mathrm{div}_C(g))$, where $\pi : C \to X$ is a proper morphism from a normal integral curve C, g is a rational function on C and $\mathrm{div}_C(g)$ is its divisor. It is denoted by $CH_0(X)$. If X is projective, the degree map $Z_0(X) \to \mathbb{Z}$ which sends a closed point $x \in X$ to its degree $[k(x) : k]$ induces a map $\deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ and we denote by $A_0(X)$ its kernel.

At least in characteristic zero, the set $X(k)/R$ and the group $A_0(X)$ are k-birational invariants of smooth projective k-varieties, and they are reduced to one element if X is a projective space. Thus $X(k)/R = 1$ and $A_0(X) = 0$ if X is a smooth projective k-rational variety.

Let k be a field of characteristic zero and let X be a rationally connected variety over k. Assuming one of the following hypotheses :

(i) $k = \mathbb{C}(C)$ a function field of a complex curve ;

(ii) $k = \mathbb{C}((t))$ a formal power series field ;
(iii) k is a C_1 field ;
(iv) $cd\,k \leq 1$
one wonders ([CT11], 10.11) if the set $X(k)/R$ is trivial. In general, the answer is not expected to be positive, as pointed out in [CT11], see also the remark below.

Nevertheless, it turns out that this is the case in all results we know :

1. X is a smooth compactification of a linear algebraic group and $cd\,k \leq 1$ ([CTSan77]) ;
2. X is a surface fibered in conics of degree 4 ($\omega \cdot \omega = 4$) over the projective line and $cd\,k \leq 1$ ([CTS87]) ;
3. X is a smooth intersection of two quadrics in $\mathbb{P}^n_k$ with $n \geq 5$ and $cd\,k \leq 1$([CTSSD87]) ;
4. X is a smooth cubic hypersurface in $\mathbb{P}^n_k$ with $n \geq 5$ and k is C_1 ([Mad08]) ;

Remark 2.1.5. The triviality of R-equivalence for smooth projective geometrically rational surfaces over $\mathbb{C}(t)$ would imply the unirationality of (smooth projective) varieties of dimension 3, fibered in conics over $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, which is an open question.

In fact, let $p : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ be a morphism from a smooth projective variety X of dimension 3, such that the general fiber of p is a conic. As $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ is birational to $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, we can replace X by $p' : X' \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ with the same assumption : the general fiber of p' is a conic. Let $\eta : \operatorname{Spec} \mathbb{C}(t) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ be the generic point. Base change by η on the second factor gives a morphism $p'_\eta : X'_\eta \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}(t)}$. The variety X'_η is a (geometrically) rational surface over $k = \mathbb{C}(t)$. If the R-equivalence on $X'_\eta(k)$ is trivial, one can find a rational curve $f : C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}(t)} \to X'_\eta$ joining two rational points in different fibers of p'_η. This means that the induced map $p'_\eta \circ f : C \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}(t)}$ is surjective. Base change by $p'_\eta \circ f$ gives the following diagram :

$$\begin{array}{ccc} Y = X'_\eta \times_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}(t)}} C & \xrightarrow{g} & C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}(t)} \\ \downarrow & & \\ X'_\eta & & \end{array}$$

The general fiber of g is a conic, having a rational point as the map g has a section by our construction. This means that Y is rational over $\mathbb{C}(t)$. The projection $Y \to X'_\eta$ now shows that X' is unirational.

We prove the following result :

Theorem 2.1.6. *Let k be either a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$. Let X be a k-rationally simply connected variety over k. Then*
(i) $X(k)/R = 1$;
(ii) $A_0(X) = 0$.
Combined with the theorem of de Jong and Starr, this gives :

Corollary 2.1.7. *Let k be either a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$. Let X be a smooth complete intersection of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \ldots, d_r$. Assume that $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq n+1$. Then*
(i) $X(k)/R = 1$;

(ii) $A_0(X) = 0$.

Note that one knows better results for smooth cubics and smooth intersections of two quadrics. Let k be either a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$.

In the case of smooth cubic hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ we have $X(k)/R = 1$ if $n \geq 5$ ([Mad08], 1.4). It follows that $A_0(X) = 0$ if $n \geq 5$. In fact, we have $A_0(X) = 0$ if $n \geq 3$. One can prove it by reduction to the case $n = 3$. The latter case follows from the result on geometrically rational k-surfaces ([CT83], Thm.A), obtained by K-theoretic methods.

In the case of smooth intersections of two quadrics in $\mathbb{P}^n_k$ we have $X(k)/R = 1$ if $n \geq 5$ ([CTSSD87], 3.27). Hence $A_0(X) = 0$ if $n \geq 5$. In fact, we also have $A_0(X) = 0$ if $n = 4$ as a particular case of [CT83], Thm.A.

It was also known that under the assumption of the theorem there is a bound $N = N(d_1, \ldots, d_r)$ such that $A_0(X) = 0$ if $n \geq N$ ([Par94], 5.4). The bound N here is defined recursively : $N(d_1, \ldots, d_r) = f(d_1, \ldots, d_r; N(d_1 - 1, \ldots, d_r - 1))$ where the function f grows rapidly with the degrees. For example, one can deduce that $N(3) = 12$ and $N(4) = 3 + 3^{12}$.

Theorem 2.1.6 is inspired by the work of de Jong and Starr [dJS] and we use their ideas in the proof. In section 2.2 we recall some notions about the moduli space of curves used in [dJS] and we analyse the case when we can deduce some information about R-equivalence on X from the existence of a rational point on the moduli space. Next, in section 2.3 we deduce Theorem 2.1.6. In section 2.4 we give an application to complete intersections.

2.2 Rational points on a moduli space of curves

2.2.1 The moduli space $\overline{M}_{0,n}(X, d)$

Let X be a projective variety over a field k of characteristic zero with an ample divisor H. Let $\bar{k}$ be an algebraic closure of k. While studying R-equivalence on rational points of X we need to work with a space parametrizing rational curves on X. We fix the degree of the curves we consider in order to have a space of finite type.

The space of rational curves of fixed degree on X is not compact in general. One way to compactify it, due to Kontsevich ([KM94], [FP97]), is to use stable curves.

Definition 2.2.1. A *stable* curve over X of degree d with n marked points is a datum $(C, p_1, \ldots, p_n, f)$ of

(i) a proper geometrically connected reduced k-curve C with only nodal singularities,

(ii) an ordered collection $p_1, \ldots, p_n$ of distinct smooth k-rational points of C,

(iii) a k-morphism $f : C \to X$ with $\deg_C f^*H = d$,

such that the stability condition is satisfied :

(iv) C has only finitely many $\bar{k}$-automorphisms fixing the points $p_1, \ldots, p_n$ and commuting with f.

We say that two stable curves $(C, p_1, \ldots, p_n, f)$ and $(C', p'_1, \ldots, p'_n, f')$ are *isomorphic* if there exists an isomorphism $\phi : C \to C'$ such that $\phi(p_i) = p'_i$, $i = 1, \ldots, n$ and $f' \circ \phi = f$.

We use the construction of Araujo and Kollár [AK03] to parametrize stable curves. They show that there exists a *coarse moduli space* $\overline{M}_{0,n}(X,d)$ for all genus zero stable curves over X of degree d with n marked points, which is a projective k-scheme ([AK03], Thm. 50). Over $\mathbb{C}$ the construction was first given in [FP97]. The result in [AK03] holds over an arbitrary, not necessarily algebraically closed field and, more generally, over a noetherian base.

We denote by $M_{0,n}(X,d)$ the open locus corresponding to irreducible curves and by

$$ev_n : \overline{M}_{0,n}(X,d) \to \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n}$$

the evaluation morphism which sends a stable curve to the image of its marked points. When one says that $\overline{M}_{0,n}(X,d)$ is a coarse moduli space, it means that the following two conditions are satisfied :

(i) there is a bijection of sets :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{isomorphism classes of} \\ \text{genus zero stable curves over } \bar{k} \\ f : C \to X_{\bar{k}} \text{ with } n \text{ marked points,} \\ \deg_C f^*H = d \end{array} \right\} \tilde{\to} \overline{M}_{0,n}(X,d)(\bar{k});$$

(ii) if $\mathcal{C} \to S$ is a family of genus zero stable curves of degree d with n marked points, parametrized by a k-scheme S, then there exists a unique morphism $M_S : S \to \overline{M}_{0,n}(X,d)$ such that for every $s \in S(\bar{k})$ we have

$$M_S(s) = \Phi(\mathcal{C}_s).$$

In general, over nonclosed fields we do not have a bijection between isomorphism classes of stable curves and rational points of the corresponding moduli space, see [AK03] p.31. In particular, a k-point of $\overline{M}_{0,n}(X,d)$ does not in general correspond to a stable curve defined over k.

2.2.2 Rational points on $\overline{M}_{0,2}(X,d)$

Let P and Q be two k-points of X. Suppose there exists a stable curve $f : C \to X_{\bar{k}}$ over $\bar{k}$ with two marked points mapping to P and Q, such that the corresponding point $\Phi(f)$ is a k-point of $\overline{M}_{0,2}(X,d)$. Even if we are not able to prove that f can be defined over k, using combinatorial arguments we will show that P and Q are R-equivalent over k. Let us state the main result of this section.

Proposition 2.2.2. *Let X be a projective variety over a field k of characteristic zero. Let P and Q be k-points of X. Let $f : C \to X_{\bar{k}}$ be a stable curve over $\bar{k}$ of genus zero with two marked points mapping to P and Q. Let H be a fixed ample divisor on X and let $d = \deg_C f^*H$. If the corresponding point $\Phi(f) \in \overline{M}_{0,2}(X,d)$ is a k-point of $\overline{M}_{0,2}(X,d)$, then the points P and Q are R-equivalent over k.*

Let us first fix some notation. Let k be a field of characteristic zero. Let us fix an algebraic closure $\bar{k}$ of k. Let $L \overset{i}{\hookrightarrow} \bar{k}$ be a finite Galois extension of k, and let $G = \mathrm{Aut}_k(L)$. For any

$\sigma \in G$ we denote by $\sigma^* : \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} L$ the induced morphism. If Y is an L-variety, denote by ${}^\sigma Y$ the base change of Y by σ^* and ${}^\sigma Y_{\bar{k}}$ the base change by $(i \circ \sigma)^*$. We denote the projection ${}^\sigma Y \to Y$ by σ^* too. If $f : Z \to Y$ is an L-morphism of L-varieties, then we denote by ${}^\sigma f : {}^\sigma Z \to {}^\sigma Y$ and ${}^\sigma f_{\bar{k}} : {}^\sigma Z_{\bar{k}} \to {}^\sigma Y_{\bar{k}}$ the induced morphisms.

Note that if $Y \subset \mathbb{P}^n_L$ is a projective variety, then ${}^\sigma Y$ can be obtained by applying σ to each coefficient in the equations defining Y. Thus, if Y is defined over k, then the subvarieties Y, ${}^\sigma Y$ of $\mathbb{P}^n_L$ are given by the same embedding for all $\sigma \in G$. In this case the collection of morphisms $\{\sigma^* : Y \to Y\}_{\sigma \in G}$ defines a right action of G on Y. By Galois descent ([BLR90], 6.2), if a subvariety $Z \subset Y$ is stable under this action of G, then Z also is defined over k.

For lack of a suitable reference, let us next give a proof of the following lemma :

Lemma 2.2.3. *Let C be a projective geometrically connected curve of arithmetic genus $p_a(C) = h^1(C, O_C) = 0$ over a field k. Assume C has only nodal singularities. Then any two smooth k-points a, b of C are R-equivalent.*

Proof. Since the arithmetic genus of C is zero, its geometric components are smooth rational curves over $\bar{k}$ intersecting transversally and, moreover, there exists a unique (minimal) chain of $\bar{k}$-components joining a and b. We may assume that all the components of the chain, as well as their intersection points, are defined over some finite Galois extension L of k. By unicity we see that every component of the chain is stable under the action of $\operatorname{Aut}_k(L)$ on C_L, hence it is defined over k. By the same argument, the intersection points of the components of the chain are k-points. We conclude that the points a and b are R-equivalent over k. □

Let us now give the proof of Proposition 2.2.2.

We call a and b the marked points of C. We may assume that C, f, a and b are defined over a finite Galois extension $L \overset{i}{\hookrightarrow} \bar{k}$ of k. Let us put $T = \operatorname{Spec} L$ and $G = \operatorname{Aut}_k(L)$. Note that $T \times_k \bar{k} = \coprod_G \operatorname{Spec} \bar{k}$ where the morphism $\operatorname{Spec} \bar{k} \to T$ is given by $(i \circ \sigma)^*$ on the corresponding component. We view T as a k-scheme and $f : C \to X \times_k T$ as a family of stable curves parametrized by T. Thus we have a moduli map $M_T : T = \operatorname{Spec} L \to \overline{M}_{0,2}(X, d)$ defined over k and such that for every $t \in T(\bar{k})$, corresponding to $\sigma \in G$, we have

$$M_T(t) = \Phi({}^\sigma C_{\bar{k}})$$

where ${}^\sigma f_{\bar{k}} : {}^\sigma C_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ and the marked points of ${}^\sigma C_{\bar{k}}$ are $\sigma(a)$ and $\sigma(b)$.

Since the curve $f_{\bar{k}} : C_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ corresponds to a k-point of $\overline{M}_{0,2}(X, d)$, we can factor M_T as

$$T = \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k \overset{\Phi(f_{\bar{k}})}{\to} \overline{M}_{0,2}(X, d).$$

We thus see that for every $t \in T(\bar{k})$ the point $M_T(t)$ is the same point $\Phi(f_{\bar{k}})$ of $\overline{M}_{0,2}(X, d)$. Hence for every $\sigma \in G$ the curves ${}^\sigma C_{\bar{k}}$ and $C_{\bar{k}}$ are isomorphic as stable curves. This means that there exists a $\bar{k}$-morphism $\phi_\sigma : C_{\bar{k}} \to {}^\sigma C_{\bar{k}}$, such that $\phi_\sigma(a) = \sigma(a)$, $\phi_\sigma(b) = \sigma(b)$ and ${}^\sigma f_{\bar{k}} \circ \phi_\sigma = f_{\bar{k}}$.

As a consequence, the proposition results from the following lemma.

Lemma 2.2.4. *Let X be a projective variety over a perfect field k. Let L be a finite Galois extension of k with Galois group G. Let P and Q be k-points of X. Suppose we can find an L-stable curve of genus zero $f : C \to X_L$ with two marked points $a, b \in C(L)$, satisfying the following conditions :*

(i) $f(a) = P$, $f(b) = Q$;

(ii) for every $\sigma \in G$ there exists a $\bar{k}$-morphism $\phi_\sigma : C_{\bar{k}} \to {}^\sigma C_{\bar{k}}$ such that

$$\phi_\sigma(a) = \sigma(a),\ \phi_\sigma(b) = \sigma(b) \text{ and } {}^\sigma f_{\bar{k}} \circ \phi_\sigma = f_{\bar{k}}.$$

Then the points P and Q are R-equivalent over k.

Proof. By lemma 2.2.3, we have a unique (minimal) chain $\{C_1, \dots, C_m\}$ of geometrically irreducible L-components of C, joining $a \in C_1(L)$ and $b \in C_m(L)$.

Let us take $\sigma \in G$. We have two chains of $\bar{k}$-components of ${}^\sigma C$ joining $\sigma(a)$ and $\sigma(b)$: $\{{}^\sigma C_{1,\bar{k}}, \dots, {}^\sigma C_{m,\bar{k}}\}$ and $\{\phi_\sigma(C_{1,\bar{k}}), \dots, \phi_\sigma(C_{m,\bar{k}})\}$. Since the arithmetic genus of ${}^\sigma C_{\bar{k}}$ is zero, we thus have

$$\phi_\sigma(C_{i,\bar{k}}) = {}^\sigma C_{i,\bar{k}},\ i = 1, \dots, m.$$

Let us fix $1 \leq i \leq m$. Denote the image $f(C_i)$ of C_i in X_L by Z_i. From the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} {}^\sigma C_i \arrow[r, "{}^\sigma f"] \arrow[d] & {}^\sigma X \arrow[d] \\ C_i \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

we see that ${}^\sigma f({}^\sigma C_i) = {}^\sigma Z_i$ and that ${}^\sigma f_{\bar{k}}({}^\sigma C_{i,\bar{k}}) = {}^\sigma Z_{i,\bar{k}}$ (using base change by $i : L \to \bar{k}$ in the first line of the diagram above). On the other hand, since $\phi_\sigma(C_{i,\bar{k}}) = {}^\sigma C_{i,\bar{k}}$ and ${}^\sigma f_{\bar{k}} \circ \phi_\sigma = f_{\bar{k}}$, we have ${}^\sigma Z_{i,\bar{k}} = {}^\sigma f_{\bar{k}}({}^\sigma C_{i,\bar{k}}) = {}^\sigma f_{\bar{k}}(\phi_\sigma(C_{i,\bar{k}})) = f_{\bar{k}}(C_{i,\bar{k}}) = Z_{i,\bar{k}}$. Since ${}^\sigma Z_i$ and Z_i are L-subvarieties of X_L, we deduce that ${}^\sigma Z_i = Z_i$ for all $\sigma \in G$. By Galois descent, there exists a k-curve $D_i \subset X$ such that $Z_i = D_i \times_k L$.

Let $\tilde{D}_i \to D_i$ be the normalisation morphism. Since C_i is smooth, the morphism $f|_{C_i} : C_i \to D_i \times_k L$ extends to a morphism $f_i : C_i \to \tilde{D}_i \times_k L$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{D}_i \times_k L \arrow[d] \\ C_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f|_{C_i}"'] & D_i \times_k L. \end{tikzcd}$$

We have $\phi_\sigma(C_i \cap C_{i+1}) = {}^\sigma C_i \cap {}^\sigma C_{i+1}$ and ${}^\sigma f_{i,\bar{k}} \circ \phi_\sigma = f_{i,\bar{k}}$, as this is true over a Zariski open subset of D_i. Using the same argument as above, we deduce that the point $f_i(C_i \cap C_{i+1})$ is a k-point of $\tilde{D}_i$. This implies that $\tilde{D}_i$ is a k-rational curve as it is L-rational and has a k-point. We also notice that the point $f(C_i \cap C_{i+1})$ is a k-point of X as the image of $f_i(C_i \cap C_{i+1})$. We deduce that P and Q are R-equivalent by the chain $\tilde{D}_i \to X$, $i = 1, \dots m$. $\square$

Remark 2.2.5. If the cohomological dimension of the field k is at most 1, one can use more general arguments to prove Proposition 2.2.2 : we discuss it in the appendix.

2.3 Proof of the theorem

In this section we use the previous arguments to prove Theorem 2.1.6. Let k be a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$. Let X be a k-rationally simply connected variety. In particular, X is rationally connected. Note that by the theorem of Graber, Harris and Starr [GHS03], a smooth rationally connected variety over a function field in one variable over $\mathbb{C}$ has a rational point, and the same result is also known over $k = \mathbb{C}((t))$ (cf. [CT11] 7.5). As any smooth projective variety equipped with a birational morphism to X is still rationally connected, it has a rational point. This implies that $X(k) \neq \emptyset$.

Let us fix a sufficiently large integer e and an irreducible component $M_{e,2} \subset \overline{M}_{0,2}(X, e)$ such that the restriction of the evaluation morphism $ev_2 : M_{e,2} \to X \times X$ is dominant with rationally connected general fibre.

Let P and Q be two k-points of X. A strategy is the following. We would like to apply [GHS03] and to deduce that there is a rational point in a fibre over (P, Q). Then, by Proposition 2.2.2, we deduce that P and Q are R-equivalent. But we only know that a general fibre of ev_2 is rationally connected. If $k = \mathbb{C}((t))$, this is sufficient as R-equivalence classes are Zariski dense in this case by [Kol99]. If k is a function field in one variable over $\mathbb{C}$, our strategy will also work by a specialization argument of the lemma below (see also [Sta] p.25 and [Lie10] 4.5). So we obtain $X(k)/R = 1$ as $X(k) \neq \emptyset$.

Let us now prove that the group $A_0(X)$ is trivial. Pick $x_0 \in X(k)$. It is sufficient to prove that for every closed point $x \in X$ of degree d we have that $x - dx_0$ is zero in $CH_0(X)$. Let us take a rational point $x' \in X_{k(x)}$ over the point x. By the first part of the theorem, applied to $X_{k(x)}$, x' is R-equivalent to x_0 over $k(x)$. Hence $x' - x_0$ is zero in $CH_0(X_{k(x)})$. Applying the push-forward by the morphism $p : X_{k(x)} \to X$, we deduce that $x - dx_0$ is zero in $CH_0(X)$. This completes the proof. $\square$

Lemma 2.3.1. *Let $k = \mathbb{C}(C)$ be the function field of a (smooth) complex curve C. Let Z and T be projective k-varieties, with T smooth. Let $f : Z \to T$ be a morphism with rationally connected general fibre. Then for every $t \in T(k)$ there exists a rational point in the fibre Z_t.*

Proof. One can choose proper models $\mathcal{T} \to C$ and $F : \mathcal{Z} \to \mathcal{T}$ of T and Z respectively with $\mathcal{T}$ smooth. We know that any fibre of F over some open set $U \subset \mathcal{T}$ is rationally connected (cf. [Kol96] IV.3.11).

The point $t \in T(k)$ corresponds to a section $s : C \to \mathcal{T}$. What we want is to find a section $C \to \mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} C$. One can view the image $s(C)$ in $\mathcal{T}$ as a component of a complete intersection C' of hyperplane sections of $\mathcal{T}$ for some projective embedding. In fact, it is sufficient to take $\dim \mathcal{T} - 1$ functions in the ideal of $s(C)$ in $\mathcal{T}$ generating this ideal over some open subset of $s(C)$. Moreover, one may assume that C' is a special fibre of a family $\mathcal{C}$ of hyperplane sections with general fibre a smooth curve intersecting U. After localization, we may also assume that $\mathcal{C}$ is parametrized by $\mathbb{C}[[t]]$. We have the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{Z} \arrow[d, "F"] \\
\xi \arrow[r] & \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{C}[[t]]} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T} \\
 & Spec\,\mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]]. &
\end{tikzcd}$$

Let $K = \mathbb{C}((t))$ and let $\bar{K}$ be an algebraic closure of K. By construction, the generic fibre of $F_{\bar{K}} : \mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{C} \times_{\mathbb{C}[[t]]} \bar{K} \to \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{C}[[t]]} \bar{K}$ is rationally connected. By [GHS03] we obtain a rational section of $F_{\bar{K}}$. As $\bar{K}$ is the union of the extensions $\mathbb{C}((t^{1/N}))$ for $N \in \mathbb{N}$, we have a rational section for the morphism $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} \mathbb{C}[[t^{1/N}]] \to \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{C}[[t]]} \mathbb{C}[[t^{1/N}]]$ for some N. By properness, this section extends to all codimension 1 points of $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{C}[[t]]} \mathbb{C}[[t^{1/N}]]$, in particular, to the point ξ on the special fiber. This extends again to give a section $C \to \mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} C$ as desired. $\square$

Remark 2.3.2. Let k be a field of characteristic zero. Let X be a k-rationally simply connected variety. Using a difficult result of Hogadi and Xu [HX09] instead of Lemma 2.3.1 in the proof of the theorem, one can show that

(i) if any rationally connected variety over k has a rational point, then $X(k)/R = 1$;

(ii) if for any finite extension k'/k, any rationally connected variety over k' has a rational point, then $A_0(X) = 0$.

2.4 Proof of the corollary

The following result is essentially contained in [dJS]. We include the proof here as we need the precise statement over a field which is not algebraically closed.

Proposition 2.4.1. *Let k be a field of characteristic zero. Let X be a smooth complete intersection of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \ldots, d_r$ with $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq n+1$. Suppose that $\dim X \geq 3$. Then for every $e \geq 2$ there exists a geometrically irreducible k-component $M_{e,2} \subset \overline{M}_{0,2}(X, e)$ such that the restriction of the evaluation morphism*

$$ev_2 : M_{e,2} \to X \times X$$

is dominant with rationally connected generic fibre.

Proof. Let us first recall the construction of [dJS] in the case $k = \mathbb{C}$. Note that, as $\dim X \geq 3$, we know that $H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha$ where the degree of α is equal to 1 ([Voi02], 13.25).

In [dJS], de Jong and Starr prove that for every integer $e \geq 2$ there exists an irreducible component $M_{e,2} \subset \overline{M}_{0,2}(X, e)$ such that the restriction of the evaluation morphism $ev_2 : M_{e,2} \to X \times X$ is dominant with rationally connected generic fibre. In order to convince ourselves that $M_{e,2}$ is in fact the unique component satisfying the above property, we will specify the construction of $M_{e,2}$ more precisely :

1. One first shows that there exists a *unique* irreducible component $M_{1,1} \subset \overline{M}_{0,1}(X,1)$ such that the restriction of the evaluation $ev_1|_{M_{1,1}} : M_{1,1} \to X$ is dominant ([dJS], 1.7).
2. The component $M_{1,0} \subset \overline{M}_{0,0}(X,1)$ is constructed as the image of $M_{1,1}$ under the morphism $\overline{M}_{0,1}(X,1) \to \overline{M}_{0,0}(X,1)$ forgetting the marked point. Then one constructs the component of higher degree $M_{e,0}$ as the *unique* component of $\overline{M}_{0,0}(X,e)$ which intersects the subvariety of $\overline{M}_{0,0}(X,e)$ parametrizing a degree e cover of the smooth, free curve parametrized by $M_{1,0}$ ([dJS], 3.3).
3. The component $M_{e,2} \subset \overline{M}_{0,2}(X,e)$ is the *unique* component such that its image under the morphism $\overline{M}_{0,2}(X,e) \to \overline{M}_{0,0}(X,e)$, which forgets about the marked points, is $M_{e,0}$.

Let us now consider the general case. Let $\bar{k}$ be an algebraic closure of k. As k is of finite type over $\mathbb{Q}$, we may assume that $\bar{k} \subset \mathbb{C}$. Since the decomposition into geometrically irreducible components does not depend on which algebraically closed field we choose, by the first step above there exists a unique irreducible component $M_{1,1} \subset \overline{M}_{0,1}(X_{\bar{k}},1)$ such that the restriction of the evaluation $ev_1|_{M_{1,1}}$ is dominant. As this component is unique, it is defined over k. Hence, from the construction above, the component $M_{e,2}$ is also defined over k, which completes the proof. □

Let us now prove the corollary. Let X be a smooth complete intersection of r hypersurfaces in $\mathbb{P}^n_k$ of respective degrees $d_1, \dots, d_r$ with $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq n+1$. Thus, if $\dim X = 1$ then X is a line and the corollary is obvious. If $\dim X = 2$ then X is a quadric surface in $\mathbb{P}^3_k$. We have that X is birational to $\mathbb{P}^2_k$ as it has a k-point and the corollary follows. If $\dim X \geq 3$, we have that X is k-rationally simply connected by Proposition 2.4.1. If k is a function field in one variable over $\mathbb{C}$ or the field $\mathbb{C}((t))$ we have $X(k)/R = 1$ and $A_0(X) = 0$ by Theorem 2.1.6. This completes the proof of the corollary.

Remark 2.4.2. The next argument, due to Jason Starr, gives a simpler way to prove the corollary in the case $\sum d_i^2 \leq n$. More precisely, we have :

Proposition 2.4.3. *Let k be a C_1 field. Let $X \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_k$ be the vanishing set of r polynomials $f_1, \dots f_r$ of respective degrees $d_1, \dots d_r$. If $\sum d_i^2 \leq n$ then any two points $y_1, y_2 \in X(k)$ can be joined by two lines defined over k : there is a point $x \in X(k)$ such that $l(x, y_i) \subset X$, $i = 1, 2$, where $l(x, y_i)$ denote the line through x and y_i.*

Proof. We may assume that $y_1 = (1 : 0 : \dots : 0)$ and $y_2 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ via the embedding i. The question is thus to find a point $x = (x_0 : \dots : x_n)$ with coordinates in k such that

$$\begin{cases} f_i(tx_0 + s, tx_1, \dots tx_n) = 0 \\ f_i(tx_0, tx_1 + s, \dots tx_n) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots r.$$

As y_1, y_2 are in $X(k)$ these conditions are satisfied for $t = 0$. Thus we may assume $t = 1$. Writing $f_i(x_0 + s, x_1, \dots x_n) = \sum_{j=0}^{d_i} P^i_j(x_0, \dots x_n) s^j$ where P^i_j are homogeneous polynomials with $\deg P^i_j = d_i - j$ we see that each equation $f_i(x_0 + s, x_1, \dots x_n) = 0$ gives us d_i conditions on $x_0, \dots x_n$ of degrees $1, \dots d_i$. By the same argument, each equation $f_i(x_0, x_1 + s, \dots x_n) = 0$ gives $d_i - 1$ conditions of degrees $1, \dots d_i - 1$ as we know from the previous equation that we have no term of degree zero. The sum of the degrees of all these conditions on $x_0, \dots x_n$ is $\sum_{i=0}^{r} d_i^2$. As $\sum_{i=0}^{r} d_i^2 \leq n$ and k is a C_1 field, we can find a non trivial solution over k, which completes the proof. □

2.5 Appendix

We will give a second proof of Proposition 2.2.2 in the case when the base field k is of cohomological dimension at most 1. In fact, using this assumption and the fact that the automorphism group of a stable curve is *finite*, we will show that any rational point of a coarse moduli space corresponds to an object defined over the base field. We will present the point of view of [DDE00], all the arguments can be found there.

Definition 2.5.1. Let k be a perfect field, $\bar{k}$ an algebraic closure and $G = Gal(\bar{k}/k)$. We say that k is of *cohomological dimension at most* 1 if for any (continuous) finite G-module M and any integer $i \geq 2$ we have $H^i(G, M) = 0$.

Example 2.5.2. Any C_1 field is of cohomological dimension at most 1. Note that the converse is not true ([Ax75]). Thus finite fields, function fields in one variable over an algebraically closed field and formal series fields in one variable over an algebraically closed field give examples of a field of $cd \leq 1$.

Let us give a short sketch of the argument. It is a general fact that, given a point x on a coarse moduli space, corresponding to an object over $\bar{k}$ with the automorphism group G, the obstruction to lifting x to an object over k lives in a certain (non-abelian, as G is not necessarily abelian) 2-cohomology set (and not a group in general), in the sense of [Gir71]. Now, the fact that G is finite, allows us to reduce to the abelian case and to deduce that H^2 vanishes under the hypothesis $cd\, k \leq 1$.

We first give some notions from non-abelian cohomology.

Gerbes and non-abelian cohomology

Let X be a scheme. Denote by S the étale site $X_{ét}$.

Definition 2.5.3. An S-*gerbe* is a stack [1] satisfying the following conditions :

(i) locally each fibre is nonempty : there exists a covering $(U_i \to X)_{i\in I}$ such that for any $i \in I$ the fibre above U_i is nonempty.

(ii) for any $U \in \mathrm{Ob}(S)$ any two sections over U are locally isomorphic.

1. Let us briefly recall the definition of a stack. It is a category X fibered in groupoids over S (i.e. for each open $U \subset S$ the fiber $X(U)$ is a groupoid), such that for each open $U \subset S$ and $x, y \in X(U)$, $Hom(x, y)$ is a sheaf and the following glueing condition is satisfied : given an open $U \subset S$, an open covering $(U_i)_{i\in I}$ of U and elements $x_i \in X(U_i), i \in I$, if for all i, j there exists an isomorphism ϕ_{ij} between the restrictions of x_i and x_j to $U_i \cap U_j$ such that $\phi_{ij} = \phi_{ik}\phi_{kj}$ over $U_i \cap U_j \cap U_k$, then there exists $x \in X(U)$ restricting to x_i over U_i.

Example 2.5.4. Consider the same notations as in Proposition 2.2.2. Let us define the following stack $\mathcal{G}_f$ over the étale site $\operatorname{Spec} k_{ét}$:

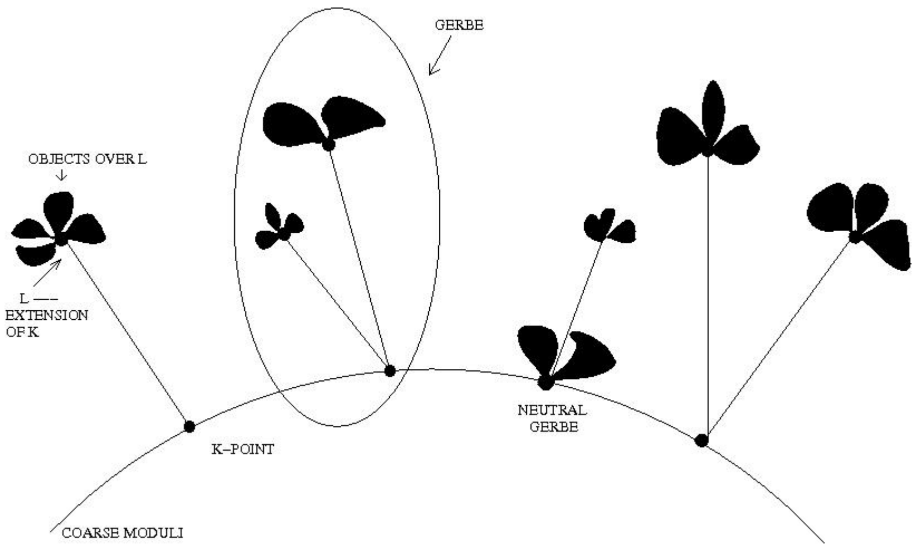
(i) the objects of $\mathcal{G}_f$ over an extension L of k are stable curves $D \to X_L$ over L which become isomorphic over $\bar{k}$ to the $\bar{k}$-curve $C \to X_{\bar{k}}$ corresponding to the point $\Phi(f)$, note that this condition does not depend on the embedding $L \hookrightarrow \bar{k}$;

(ii) the morphisms between two stable curves over L are L-isomorphisms.

One can also view $\mathcal{G}_f$ as the fibre of the morphism $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(X,d) \to \bar{M}_{0,2}(X,d)$ over the point $\Phi(f)$, where $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(X,d)$ is the stack of all genus zero stable curves over X of degree d with two marked points. By this description, the objects of $\mathcal{G}_f$ exist locally (that is, over some finite extension of k). Moreover, any two such objects are locally isomorphic (that is, after taking some finite extension of k). What we want to prove is the existence of objects over k, that is, that the curve $C \to X_{\bar{k}}$ is defined over k.

Definition 2.5.5. A gerbe which has objects over S is called *neutral.*

Remark 2.5.6. The following picture may illustrate the terminology of gerbes and stacks :



By considering the automorphism groups of objects of $\mathcal{G}$ one can associate a *band* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ to the gerbe $\mathcal{G}$, see [Gir71] Ch.IV for details. For example, if $S = \operatorname{Spec} k_{\text{ét}}$, then an S-band corresponds to a group A endowed with a homomorphism $Gal(\bar{k}/k) \to \operatorname{Aut}(A)/\operatorname{Inn}(A)$. Next, one can define a cohomological set $H^2(S,\mathcal{L})$ parametrizing all classes of gerbes whose associated band is $\mathcal{L}$. Note that in the case of $\mathcal{G}_f$ the automorphism group of objects is locally (that is, starting from some extension of k) a finite constant group consisting of the automorphisms of $C \to X_{\bar{k}}$ over $\bar{k}$.

A morphism $u : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ of bands induces a relation

$$H^2(S,\mathcal{L}) \multimap H^2(S,\mathcal{M})$$

where $p \multimap q$ means that there are gerbes P and Q of classes p and q respectively and a u-morphism $P \to Q$. If p is neutral and if $p \multimap q$ than q is neutral.

Reduction to the abelian case

For the sake of completeness, let us give a sketch of the proof of the following result of Dèbes, Douai and Emsalem ([DDE00], cor. 1.3) :

Theorem 2.5.1. *If the cohomological dimension of k is at most one, then any gerbe $\mathcal{G}$ over the étale site $S = \operatorname{Spec} k_{ét}$ whose associated band $\mathcal{L}$ is locally a constant finite group C is neutral.*

Proof. As the authors point out, their idea goes back to the work of Springer [Spr65]. Let us first suppose that C is not nilpotent. Then one can find a prime p and a p-Sylow subgroup H of C which is not normal. One verifies that the following data define a gerbe $\mathcal{G}'$ over S :

(i) the objects of $\mathcal{G}'$ over a separable extension L of k are the couples (x, T), where $x \in \mathcal{G}(L)$ and T is a sheaf of p-Sylow subgroups of $\operatorname{Aut}_L(x)$;

(ii) the L-morphisms $(x, T) \to (x', T')$ are the L-morphisms $a : x \to x'$ such that the induced morphism $a_* : \operatorname{Aut}_L(x) \to \operatorname{Aut}_L(x')$ maps T to T'.

The band associated to the gerbe $\mathcal{G}'$ is locally the normalizer $B = N_C(H)$ and by construction B is a proper subgroup of C. From the definition, if $\mathcal{G}'$ has objects over k, then we have the same for $\mathcal{G}$.

Thus we may reduce to the case C is nilpotent. Let

$$0 \to C' \to C \xrightarrow{\pi} C'' \to 0$$

be an exact sequence where C' is the derived subgroup of G. One may define a band $\pi_*\mathcal{L}$ and a *morphism* $\pi_* : H^2(S, \mathcal{L}) \to H^2(S, \pi_*\mathcal{L})$ (cf. [Gir71] VI.2.5 and IV.1.3.7 for the definition of $\pi_*\mathcal{L}$). As $cd\, k \leq 1$ and C'' is abelian, the image $\pi_*([\mathcal{G}])$ is zero. As one can check, this implies that $[\mathcal{G}]$ comes from an element of $H^2(S, \mathcal{L}_{C'})$. Thus we conclude the proof by an induction argument. □

Now we can apply the previous theorem to $\mathcal{G}_f$. We conclude that $\mathcal{G}_f$ is neutral and thus there is a genus zero k-stable curve $f' : C' \to X$ with two marked points $a, b \in C'(k)$ such that the images of a and b are respectively the points P and Q. By lemma 2.2.3 we deduce that a and b are R-equivalent in C', thus their images P and Q in X are also R-equivalent.

Chapitre 3

R_1-équivalence

Introduction

Soit K un corps et soit X une variété propre sur K. On dit que deux points rationnels $x_1, x_2 \in X(K)$ sont *directement R-liés* s'il existe un morphisme $p : \mathbb{P}^1_K \to X$ tel que $p(0:1) = x_1$ et $p(1:0) = x_2$. On appelle R-équivalence la relation d'équivalence engendrée et on note $X(K)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence. Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien A et si X a un modèle sur A dont la fibre spéciale X_s est une variété projective et lisse, séparablement rationnellement connexe, Kollár [Kol04] a montré qu'on dispose d'une application de spécialisation bijective entre l'ensemble des classes de la R-équivalence sur X et sur la fibre spéciale X_s. Le cas où X n'a pas nécessairement bonne réduction, même si X admet un modèle régulier propre sur A reste ouvert. Pour une telle variété X, nous introduisons une autre notion d'équivalence sur $X(K)$, que nous appelons la R_1-équivalence. Cette relation ne coïncide pas nécessairement avec la R-équivalence, même pour les variétés rationnellement connexes (3.3.5). Néanmoins, on arrive à relier la R_1-équivalence avec certaines propriétés de la fibre spéciale d'un modèle régulier $\mathcal{X}$ de X.

Notations. On note A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, π une uniformisante et F le corps résiduel. On pose $S = \mathrm{Spec}A$ et on note s le point de S correspondant à l'idéal maximal (π) de A .

3.1 Relations R_n

Soit X une K-variété. Soit $n \geq 1$ un entier. On introduit des relations d'équivalence sur les points de $X(K)$.

Définition 3.1.1. On dit que deux K-points $P, Q \in X(K)$ sont *R_n-liés* s'il existe une A-courbe C connexe, régulière, un K-morphisme $f : C_K \to X$ et deux K-points $a, b \in C(K)$ tels que

(i) $f(a) = P, f(b) = Q$;

(ii) les points a et b se prolongent en des sections $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in C(A)$ qui ont même réduction dans $C(A/\pi^n)$.

On appelle R_n-équivalence la relation d'équivalence engendrée. On note $X(K)/R_n$ l'ensemble des classes de R_n-équivalence.

Dans cette définition, les points a et b sont dans l'ouvert de lissité de C sur A. On peut alors demander que C soit lisse sur A.

Remarque 3.1.2. Pour $n = 1$ la condition (ii) dit que les points a et b ont même réduction dans $C(F)$.

Remarque 3.1.3. Pour X propre, dans la définition ci-dessus on peut demander que C soit regulière et *propre*. En effet, on dispose d'un plongement $C \hookrightarrow D$ où D est une A-courbe connexe, régulière et propre (cf. [CS86] XI). Comme X est propre, le morphisme $f : C_K \to X$ se prolonge en un morphisme $D_K \to X$.

Les propriétés suivantes sont immédiates d'après la définition.

Lemme 3.1.4.

(i) Soit X une K-variété. Soit K' une extension finie de K munie d'une valuation discrète prolongeant la valuation de K. Si deux K-points P et Q de X sont R_n-équivalents dans $X(K)$, alors ils le sont dans $X(K')$.

(ii) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de K-variétés. Si deux K-points P et Q de X sont R_n-équivalents, alors $f(P)$ et $f(Q)$ sont R_n-équivalents dans Y. En particulier, on a une application $X(K)/R_n \to Y(K)/R_n$ induite par f.

$\square$

Soit X une K-variété. Si X n'est pas nécessairement propre, on dit que deux K-points P, Q de $X(K)$ sont directement R-équivalents s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{P}^1_K$ contenant les points 0 et 1 et un morphisme $p : U \to X$ tels que $p(0) = P$ et $p(1) = Q$.

Lemme 3.1.5. *Si deux K-points de X sont R-équivalents, alors ils sont R_n-équivalents pour tout entier $n \geq 1$.*

Démonstration. Soient $P, Q \in X(K)$. On dispose d'un ouvert $U \subset \mathbb{P}^1_K$ contenant les points 0 et 1, et d'un morphisme $p : U \to X$ tels que $f(0) = P$ et $f(1) = Q$. On considère le K-automorphisme $\sigma : \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ défini par $(u, v) \mapsto (\pi^n u, v)$. Ceci envoie le point $(0, 1)$ sur $(0, 1)$ et le point $(1, 1)$ sur $(\pi^n, 1)$. Les deux points $(0, 1)$ et $(\pi^n, 1)$ ont même réduction modulo π^n et le morphisme $f \circ \sigma^{-1}$ les envoie sur P et Q respectivement. $\square$

En particulier, on voit que la R_n-équivalence est triviale sur $\mathbb{P}^m_K(K)$.

On démontre l'invariance birationnelle de l'ensemble $X(K)/R_n$ de la même manière que pour la R-équivalence (cf.[CTSan77] Proposition 10).

Proposition 3.1.6. *Soit K un corps de caractéristique zéro muni d'une valuation discrète. Soient X, Y deux K-variétés projectives lisses géométriquement intègres. Si X et Y sont K-birationnelles, alors on a une bijection $X(K)/R_n \simeq Y(K)/R_n$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'assertion dans le cas où X est un éclatement d'un sous-schéma fermé lisse Z de Y de codimension $r+1$. On a donc une application $X(K)/R_n \to Y(K)/R_n$, qui est surjective. Montrons qu'elle est injective. Soient $P, Q \in Y(K)$ deux points qui sont R_n-équivalents. Il suffit de considérer le cas où ils sont directement R_n-liés. Soit A l'anneau de valuation de K. Soit C une A-courbe connexe, régulière, telle qu'on dispose d'un K-morphisme $f : C_K \to Y$ et de deux K-points $a, b \in C(K)$ tels que $f(a) = P, f(b) = Q$ et que de plus a et b ont même réduction dans $C(A/\pi^n)$. Montrons qu'il existe des préimages $P_1, Q_1 \in X(K)$ de P et Q, qui sont R_n-équivalents. C'est le cas si l'image de C_K n'est pas incluse dans Z. En effet, le morphisme $C_K \to Y$ se relève dans ce cas à un morphisme $C_K \to X$. Sinon il existe un ouvert U de $f_K(C_K)$ contenant P et Q tel que $U \times_Y X$ est K-isomorphe à $U \times_K \mathbb{P}^r_K$ pour $r > 0$ convenable. On utilise ici que si B est un anneau semi-local connexe, tout B-module projectif est libre (cf. [Ser57]). On a donc l'application $f^{-1}(U) \to X$, $c \mapsto (f(c), z)$, où z est un point rationnel de $\mathbb{P}^r_K$. En utilisant le lemme 3.1.5 et le fait que les fibres de $X \to Y$ au-dessus des points rationnels de Y sont des espaces projectifs, on déduit l'injectivité de $X(K)/R_n \to Y(K)/R_n$.

Dans le cas général, soit $g : X \to Y$ un morphisme birationnel. D'après Hironaka il existe un diagramme commutatif de morphismes K-birationnels

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

tels que les flèches verticales sont composées d'un nombre fini d'éclatements comme ci-dessus. D'après ce qui précède on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} X'(K)/R_n \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y'(K)/R_n \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dl] \\ X(K)/R_n \arrow[r] & Y(K)/R_n \end{tikzcd}$$

d'où on déduit le résultat. □

L'énoncé suivant relie la R_1-équivalence avec la R-équivalence sur la fibre spéciale d'un modèle propre $\mathcal{X}$ de X.

Proposition 3.1.7. *Soit X une K-variété propre et soit $\mathcal{X}$ un modèle propre de X sur S. Si $x_1, x_2 \in X(K)$ sont deux points de X qui sont R_1-équivalents, alors leurs réductions $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ dans $\mathcal{X}(F)$ sont R-équivalentes.*

Démonstration. D'après les hypothèses de la proposition, on dispose d'un morphisme $f : C \to X$ où C est une K-courbe connexe, régulière et propre, et de $c_1, c_2 \in C(K)$ tels que $f(c_1) = x_1, f(c_2) = x_2$ et que de plus c_1 et c_2 ont même réduction $\bar{c}$ dans $\mathcal{C}_s$ pour un modèle régulier propre $\mathcal{C}$ de C. Cette réduction est un point lisse de $\mathcal{C}_s$.

Le morphisme $f : C \to X$ donne une application rationnelle $\mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{X}$. Soit $\Gamma \subset \mathcal{C} \times \mathcal{X}$ l'adhérence de son graphe. Le morphisme $\Gamma \to \mathcal{C}$ est birationnel. Soit $\mathcal{C}'$ une surface régulière birationnelle à Γ, qui existe d'après [Liu02] 8.3.50. Le morphisme $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est encore birationnel et, d'après [Liu02] 9.2.2, c'est un éclatement de points fermés. Ainsi les réductions des points

c_1 et c_2 dans la fibre spéciale de $\mathcal{C}'$ sont R-équivalentes. Puisqu'on a un morphisme $\mathcal{C}' \to \mathcal{X}$, les points $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont aussi R-équivalents. $\square$

3.2 Le cas régulier

Proposition 3.2.1. *Soit X une K-variété lisse. Soit $\mathcal{X}/A$ un modèle régulier*[1] *de X. Si x_1, x_2 sont deux K-points de X qui se prolongent en des sections $x_1, x_2 \in \mathcal{X}(A)$ ayant même réduction dans $\mathcal{X}(A/\pi^n)$, alors les points x_1 et x_2 sont R_n-équivalents dans $X(K)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}^{lisse}$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}$. Notons $\bar{x}$ la réduction de x_1 et x_2 dans la fibre spéciale $\mathcal{X}_F$. Puisque $\mathcal{X}$ est régulier, $\bar{x} \in \mathcal{X}^{lisse}$. D'après la description locale des morphismes lisses il existe un ouvert $U \subset \mathcal{X}^{lisse}$ contant $\bar{x}$ et étale sur $Y = \mathbb{A}^N_A$. On a $x_1, x_2, \bar{x} \in U$. Soient $y_1, y_2, \bar{y}$ les images des points $x_1, x_2, \bar{x}$ dans Y. On voudrait avoir une courbe régulière $\mathcal{C}$ et un morphisme $\mathcal{C} \to Y$ dont l'image passe par les points y_1 et y_2.

Soient $y_1 = (y_1^1, \dots y_N^1) \in A^N$, $y_2 = (y_1^2, \dots y_N^2) \in A^N$. Notons $\mathcal{C} = \mathbb{A}^1_A$ la droite affine sur A. Considérons le morphisme

$$\phi : \mathcal{C} \to Y$$

$$t \mapsto \left(\frac{y_i^2 - y_i^1}{\pi^n} t + y_i^1 \right)_{i=1 \dots N}$$

Puisque y_1 et y_2 ont même réduction modulo π^n, le quotient $\frac{y_i^2 - y_i^1}{\pi^n}$ est un élément de A, i.e. l'application ci-dessus est bien définie. De plus, $\phi(0) = y_1$ et $\phi(\pi^n) = y_2$.

Soit $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times_Y \mathcal{X}$ l'image réciproque de $\mathcal{C}$. C'est une courbe lisse qui possède deux K-points $z_1 = (0, x_1), z_2 = (\pi^n, x_2)$ qui ont même réduction modulo π^n et qui s'envoient sur x_1 et x_2 par la projection sur $\mathcal{X}$.

3.3 Comparaisons

Définition 3.3.1. Soit k un corps. Soit X/k une variété. Soient $P, Q \in X(k)$. On dit que P et Q sont *Brauer-équivalents* si pour tout élément $\alpha \in Br(X)$ on a :

$$\alpha(P) = \alpha(Q) \text{ dans } Br(k).$$

Lemme 3.3.2. *Soit k un corps. Soit X/k une variété propre. Si $P, Q \in X(k)$ sont R-équivalents, alors ils sont Brauer-équivalents.*

1. pas nécessairement propre

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où P est directement lié à Q. On dispose alors d'un morphisme $f : \mathbb{P}^1_k \to X$, $0 \mapsto P, \infty \mapsto Q$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Br(X) \times X(k) \arrow[r] \arrow[d] & Br(k) \arrow[d, equal] \\ Br(\mathbb{P}^1_k) \times \mathbb{P}^1_k(k) \arrow[r] \arrow[u] & Br(k). \end{tikzcd}$$

On en déduit l'énoncé du lemme, vu que $Br(\mathbb{P}^1_k) \simeq Br(k)$. $\square$

La proposition suivante établit le lien entre la R_1-équivalence et l'équivalence de Brauer. Comme précédemment, on note A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions et F le corps résiduel. Soit X une K-variété.

Proposition 3.3.3. *Soit l un nombre premier différent de la caractéristique p de F. Soit $\alpha \in Br(X)$ un élément de torsion l-primaire. Si $P, Q \in X(K)$ sont R_1-liés, alors $\alpha(P)$ et $\alpha(Q)$ ont même image par l'application résidu*

$$Br(K)\{l\} \to H^1(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l).$$

Démonstration. Soient $P, Q \in X(K)$ deux points R_1-liés, soit $\mathcal{C}/A$ une courbe correspondante. On dispose du diagramme commutatif suivant (cf.[CTS96]) :

$$\begin{tikzcd} Br(X) \times X(K) \arrow[r] \arrow[d] & Br(K) \arrow[d, equal] \\ Br(\mathcal{C}_K) \times \mathcal{C}(K) \arrow[r] \arrow[u] & Br(K) \end{tikzcd}$$

Il suffit alors de montrer que si $a, b \in \mathcal{C}(K)$ ont même réduction $\bar{a}$ dans $\mathcal{C}(F)$, alors pour tout $\alpha \in Br(\mathcal{C}_K)$ les images de $\alpha(a)$ et $\alpha(b)$ par l'application résidu $Br(K)\{l\} \to H^1(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ sont les mêmes. Il existe un ouvert affine U de $\mathcal{C}$ contenant les points a et b. Fixons $\alpha \in Br(\mathcal{C}_K)$. D'après [CTS96] l'image de $\alpha(a)$ par l'application résidu est égale à $\beta(\bar{a})$ où β est un certain élément de $H^1(\operatorname{Spec} B, \mathbb{Z}/l)$ où $\operatorname{Spec} B$ est étale sur U [2]. Ainsi cette image ne dépend que de la réduction de a dans la fibre spéciale $\mathcal{C}_F$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 3.3.4. *Supposons que A est hensélien. Soit X/K une variété propre. Si $P, Q \in X(K)$ sont R_1-équivalents, le zéro-cycle $P - Q$ appartient à un sous-groupe uniquement l-divisible de $A_0(X)$, $l \neq p$.*

Démonstration. (cet argument est dû à L. Moret-Bailly) Il suffit de considérer le cas où $X = C$ est une courbe projective et lisse, avec un modèle régulier et propre $\mathcal{C}$ tel que les points P et Q ont la même spécialisation. D'après [BLR90] 9.5.1, la composante neutre du schéma de Picard de $\mathcal{C}$ sur S est représentable par un schéma en groupes lisse est quasi-projectif $\mathcal{P}$, qui est le modèle de Néron de la jacobienne de C. On a $\mathcal{P}(K) = \operatorname{Pic}^0(C) = A_0(C)$, puisque $C(K)$

2. On peut de plus s'assurer qu'il existe un point $\bar{b} \in \operatorname{Spec} B$ au-dessus de $\bar{a}$

est non vide. Soit $U \subset \mathcal{P}(S)$ le noyau de l'application de spécialisation $\mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(k)$. On a $P - Q \in U$. Puisque la multiplication par l dans $\mathcal{P}$ est étale et A est hensélien, on obtient le résultat. $\square$

Remarque 3.3.5. L'équivalence de Brauer permet de comparer la R-équivalence et la R_1-équivalence. L'exemple suivant montre que pour K p-adique même pour les variétés rationnellement connexes ces deux notions d'équivalence ne coïncident pas *a priori*.
Prenons $K = \mathbb{Q}_2$ et soit X^c un modèle projectif et lisse de la surface de Châtelet X d'équation affine

$$y^2 - 3z^2 = (x-5)(x-43)(x+2).$$

On voit que X^c est fibré en conique au-dessus d'une droite projective. On a donc que X^c est rationnellement connexe. Dans X on trouve une courbe affine C d'équation :

$$y^2 = (x-5)(x-43)(x+2).$$

Soit C^c la compactification de C d'équation $y^2t = (x-5t)(x-43t)(x+2t)$ et soit $\mathcal{C}^c$ l'adhérence de C^c dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}$. Soit $\tilde{\mathcal{C}^c}$ un modèle régulier propre de $\mathcal{C}^c$ sur $\mathbb{Z}_2$. On vérifie que les points $P : x = t = 0, y = 1$ et $Q : x = 2, t = 8, y = 19 \cdot 9 = 171$ vérifient l'équation de C et ont même réduction dans la fibre spéciale $\mathcal{C}^c_s/\mathbb{F}_2$ de $\mathcal{C}^c$, qui est un point lisse de $\mathcal{C}^c_s$. Ainsi P et Q sont des points lisses de $\mathcal{C}^c$ (lemme de Hensel) et donc l'application $\tilde{\mathcal{C}^c} \to \mathcal{C}^c$ est un isomorphisme sur un ouvert U contenant ces deux points. On écrit de même P et Q pour les points de $\tilde{\mathcal{C}^c}$ correspondants. Par propreté, l'application rationnelle $\tilde{\mathcal{C}^c_K} \dashrightarrow X^c$, qui peut être supposée un plongement sur U d'après la construction, se prolonge à un morphisme. On note x_P et x_Q les images des points P et Q respectivement.
D'après la construction, les points x_P et x_Q sont R_1-équivalents. Montrons qu'ils ne sont pas R-équivalents. D'après le lemme 3.3.2, il suffit d'exhiber un élément $\alpha \in Br(X^c)$ qui ait des résidus différents en x_P et x_Q. Prenons α la classe de $(x-5, 3)$ dans $Br(K(X))$. On vérifie que tous les résidus de α aux points de codimension 1 sont nuls. On a donc $\alpha \in Br(X^c)$. L'image de $\alpha(x_P)$ par l'application $Br(X^c) \times X^c(K) \to Br(K)$ est la classe de $(-5, 3)$ dans $Br(\mathbb{Q}_2)$ et l'image de $\alpha(x_Q)$ est la classe de $(-3, 3)$. D'après [Ser68], p.219, on a $(-5, 3) = -1$ et $(-3, 3) = 1$. Ces classes sont donc différentes, d'où l'assertion.

Par ailleurs, il est connu (cf.[CTSan79]) que pour X une surface de Châtelet on a une injection

$$X^c(K)/R \hookrightarrow (K^*/NL^*)^2$$

où $L = K(\sqrt{3})$, qui est donnée par

$$(x, y, z) \mapsto (x - e_1, x - e_2)$$

sur l'ouvert $x \neq e_1, x \neq e_2$. Ainsi on doit comparer $(-5, -43)$ et $(-3, -41)$. Comme précédemment, -5 n'est pas une norme de L, puisque la classe de $(-5, 3)$ n'est pas triviale, bien que $-3 \in NL^*$. On obtient encore que x_P n'est pas R-équivalent à x_Q.

Remarque 3.3.6. Soit X une variété projective et lisse, rationnellement connexe, définie sur un corps p-adique K. Soient $x_1, x_2 \in X(k)$. L'exemple précédent montre que si x_1 est R_1-équivalent à x_2, on n'a pas nécessairement que x_1 est R-équivalent à x_2. La question de savoir si la condition que x_1 est R_n-équivalent à x_2 *pour tout* $n \geq 1$ implique que x_1 et x_2 sont R-équivalents reste ouverte.

Chapitre 4

R-équivalence sur les corps réels clos et p-adiquement clos

Résumé. Dans ce chapitre on s'intéresse à la R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes définies sur les corps réels clos ou p-adiquement clos.

4.1 Corps réels clos.

Définition 4.1.1. Un corps *réel* est un corps F qui vérifie une des propriétés équivalentes suivantes (cf. [BCR87] 1.1.6) :
(i) F peut être ordonné ;
(ii) -1 n'est pas une somme de carrés dans F ;
(iii) Pour tous $x_1, \dots x_n \in F$, si $\sum x_i^2 = 0$, alors $x_i = 0$, $i = 1, \dots n$.

Notons qu'un corps réel est toujours de caractéristique 0.

Définition 4.1.2. Un corps *réel clos* est un corps réel F qui n'admet pas d'extension algébrique réelle non triviale. Il est équivalent de dire (cf.[BCR87] 1.2.2) que c'est un corps réel tel que $F[i] = F[x]/(x^2 + 1)$ est un corps algébriquement clos.

Proposition 4.1.3. *Tout corps ordonné F a une clôture réelle, i.e. une extension algébrique qui est un corps réel clos dont l'ordre prolonge celui de F, unique à un unique F-isomorphisme près* (cf. [BCR87], 1.3.2).

Donnons quelques exemples de corps réels clos :

1. Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{R}_{alg}$ des nombres réels qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.
2. Le corps $\mathbb{R}(X)\hat{}$ des séries de Puiseux à coefficients réels (cf. [Wal78], p.98), i.e. le corps dont les éléments s'écrivent sous la forme

$$s = \sum_{i=k}^{+\infty} a_i X^{i/q},$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. On pose

$$v(s) = k/q.$$

On dit qu'un tel élément s est positif si $a_k > 0$.

On obtient ainsi un exemple d'un corps réel clos non-archimédien : il contient des éléments infinitésimaux par rapport à $\mathbb{R}$, i.e. des éléments qui sont plus petits que chaque nombre réel. Par exemple, une série à un terme X.

Soit $k \subset K$ une inclusion de corps réels clos. La construction suivante tient compte des éléments de K qui sont infinitésimaux par rapport à k. Plus précisément, considérons l'anneau :

$$A = \{a \in K \,|\, \exists b \in k, -b < a < b\}.$$

On appelle cet anneau *l'anneau de Bär*[1]. Son corps des fractions est K. En effet, si $a \in K \setminus A$, que l'on peut supposer positif sans restreindre la généralité, alors il existe $b \in k$ tel que $a > b$. On a donc $a^{-1} < b^{-1}$, i.e. $a^{-1} \in A$. Considérons l'idéal

$$\mathfrak{m} = \{a \in K \,|\, \forall b \in k, b > 0 \text{ on a } -b < a < b\} \subset A.$$

On vérifie que c'est un idéal maximal. Notons $\tilde{k} = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel. C'est un corps réel. En effet, il s'agit de vérifier que -1 n'est pas une somme de carrés dans $\tilde{k}$. Supposons le contraire : $-1 = \tilde{a}_1^2 + \ldots + \tilde{a}_n^2$. Soient $a_j \in A \setminus \mathfrak{m}$ des relèvements des $\tilde{a}_j$. On a donc : $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + 1 = a$, $a \in \mathfrak{m}$. Puisque K est un corps réel, alors $a > 0$ et cet élément n'est pas infinitésimal par rapport à k, puisque les a_j ne le sont pas. On obtient une contradiction avec le fait que $a \in \mathfrak{m}$. Montrons que le corps $\tilde{k}$ est un corps réel clos. Il s'agit de montrer que le corps $\tilde{k}[i]$ est algébriquement clos. Soit $\tilde{f} \in \tilde{k}[i][x]$, $\tilde{f} = \sum_{j=0}^{n} (\tilde{b}_j + \tilde{c}_j i) x^j$. Soit $f \in K[i][x]$ un polynôme obtenu en relèvant arbitrairement $\tilde{b}_j$ et $\tilde{c}_j$. Puisque K est réel clos, le polynôme f a une racine $x = a + ib$. On obtient donc que $\tilde{a} + i\tilde{b}$ est une racine de $\tilde{f}$, d'où le résultat.

Le résultat suivant est très important en géométrie algébrique réelle. C'est le principe de Tarski-Seidenberg, qu'on énonce sous la forme suivante (cf. [BCR87] 1.4.6) :

Théorème 4.1.4. *Soit F un corps réel, soient $f_1(x, Y), \ldots f_n(x, Y)$ des polynômes en $n+1$ variables (x, Y), $Y = (y_1, \ldots y_n)$, à coefficients dans F. Soit S un système d'équations et d'inégalités $f_i(x, Y) \,|\, 0$ où $|$ est un des symboles $>, <$ ou $=$. Alors il existe une combinaison booléenne $B(Y)$ d'équations et d'inégalités polynomiales en des variables Y à coefficients dans F telle que :*

pour tout corps réel clos R contenant F et tout $y \in R^n$ le système S a une solution x dans R si et seulement si $B(y)$ est vraie dans R.

Remarque 4.1.5. Les parties de K^n, où K est un corps réel clos, définies par des intersections finies, des unions finies et par des passages au complémentaire des parties définies par des équations et des inégalités polynômiales à coefficients dans K s'appellent parties *semi-algébriques* de K^n (cf. [BCR87] 2.1.3).

1. on peut être plus précis et dire que c'est l'anneau de Bär de K par rapport à k

Corollaire 4.1.6. *Soient $k \subset K$ deux corps réels clos. Soit X une k-variété, i.e. un k-schéma séparé et de type fini. Alors $X(k) \neq \emptyset$ ssi $X(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. L'implication $X(k) \neq \emptyset \Rightarrow X(K) \neq \emptyset$ est immédiate. Pour le sens inverse il suffit de considérer le cas affine : $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots x_n]/(f_1, \dots f_m)$. Montrons que si le système d'équations et d'inégalités $S_n(x_1, \dots x_n)$ en n variables à coefficients dans k admet une solution dans K, alors on a une solution dans k. L'assertion du lemme en est une conséquence. En faisant la récurrence sur n, d'après le principe de Tarski-Seidenberg il suffit de le montrer pour $n = 1$. Dans ce cas soit l'ensemble des solutions $S_1(x_1)$ contient un intervalle (a, b) à coefficients dans k et donc $\frac{a+b}{2}$ est une solution de $S_1(x_1)$, soit cet ensemble coïncide avec l'ensemble des solutions d'une équation à coefficients dans k. Les solutions sur k de ce système sont donc ses solutions sur $k[i]$ qui sont stables par conjugaison. On sait qu'il existe une solution sur K, i.e. une solution qui est stable par conjugaison. Alors cette solution est en effet définie sur k.

□

4.2 Corps p-adiquement clos.

Définition 4.2.1. Un corps *p-valué* de rang d est un corps K muni d'une valuation v dont le corps résiduel est de caractéristique p et telle que $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}/(p) = d$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau de valuation.

Définition 4.2.2. Un corps *p-adiquement clos* est un corps p-valué K qui n'admet pas d'extension algébrique non triviale L qui est un corps p-valué de même rang.

D'après le lemme de Zorn on voit que tout corps p-valué a une clôture qui est un corps p-adiquement clos. Cette clôture n'est pas forcément unique.

Donnons quelques exemples de corps p-adiquement clos :

1. les corps suivants sont des corps p-adiquement clos de rang 1 :
   (a) le corps $\mathbb{Q}_p$ muni d'une valuation p-adique v_p ;
   (b) la clôture algébrique $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$;
   (c) le corps des séries de Puiseux à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ où la valuation considérée est $v : K \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ est muni d'ordre lexicographique, $v(s) = (k/q, v_p(a_k))$ pour $s = \sum_{i=k}^{+\infty} a_i X^{i/q}$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus 0$, $a_i \in \mathbb{Q}_p$;
   (d) une clôture p-adique de $\mathbb{Q}_p(t)$ où $\mathbb{Q}_p(t)$ est muni de la valuation $v : \mathbb{Q}_p(t) \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ telle que $v(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{m+i}) = (m, v_p(a_0))$;
2. les extensions algébriques de degré d de $\mathbb{Q}_p$ sont des corps p-adiquement clos de rang d.

Le lemme suivant est un analogue de l'énoncé 4.1.6.

Lemme 4.2.3. *Soient $k \subset K$ deux corps p-valués de même p-rang avec k p-adiquement clos*[2]*. Soit X une k-variété, i.e. un k-schéma séparé et de type fini. Alors $X(k) \neq \emptyset$ ssi $X(K) \neq \emptyset$.*

2. par exemple, $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}} \subset \mathbb{Q}_p$

Démonstration. Soit $\bar{K}$ une clôture p-adique de K. Si $X(K) \neq \emptyset$, alors $X(\bar{K}) \neq \emptyset$. On en déduit que $X(k) \neq \emptyset$ d'après le principe de la théorie des modèles [PR84] 5.1 qui dit que $\bar{K}$ est une extension élémentaire de k. C'est-à-dire, tout «énoncé du premier ordre à paramètres dans k» qui est vrai dans $\bar{K}$ est vrai dans k. L'énoncé qui dit que la k-variété X a un point en est un exemple. □

4.3 R-équivalence et changement de base

Soit X une variété projective sur un corps k. Rappelons que deux points $x, x' \in X(k)$ sont dits *directement R-équivalents* s'il existe un morphisme $p : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que $p(0:1) = x$ et $p(1:0) = x'$. La relation d'équivalence ainsi engendrée est la R-équivalence.

Le théorème suivant décrit la R-équivalence pour les variétés rationnellement connexes sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.3.1 ([Kol99]). *Soit X une $\mathbb{R}$-variété projective et lisse rationnellement connexe. Alors chaque classe de R-équivalence est un ouvert de $X(\mathbb{R})$ et l'ensemble $X(\mathbb{R})/R$ est fini. Plus précisément, les classes de R-équivalence de $X(\mathbb{R})$ coïncident avec les composantes connexes de $X(\mathbb{R})$.*

Soit $k \subset K$ une extension de corps. On a ainsi une application naturelle injective $X(k) \to X_K(K)$, ce qui donne une application $X(k)/R \to X_K(K)/R$.

Dans la suite on s'intéresse aux questions suivantes :

1. Soient $k \subset K$ deux corps réels clos (resp. p-adiquement clos). Soit X une k-variété projective. Sous quelles conditions sur X peut-on obtenir que l'application $X(k)/R \to X_K(K)/R$ est bijective (resp. injective, surjective) ?
2. Soit k un corps réel clos (resp. p-adiquement clos). Soit X une k-variété projective. Est-ce que l'ensemble des classes $X(k)/R$ est fini, au moins si X est rationnellement connexe ?

Proposition 4.3.2. *Soient $k \subset K$ deux corps réels avec k réel clos (resp. deux corps p-valués de même p-rang avec k p-adiquement clos). Soit X une k-variété projective. Alors l'application $X(k)/R \to X_K(K)/R$ est injective.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si deux k-points x, y de X peuvent être liés par une chaîne de courbes rationnelles définies sur K, alors ils peuvent être liés par une chaîne définie sur k. Plus précisément, dire que x, y sont R-équivalents dans $X_K(K)$ est équivalent à dire qu'il existe une courbe projective C définie sur k avec deux k-points a et b marqués, qui est une chaîne de $\mathbb{P}^1_k$ dont les points d'intersection sont des k-points, telle que le schéma $\mathrm{Hom}(C, X, a \mapsto x, b \mapsto y)$ a un K-point, i.e. il existe une composante de type fini H de ce k-schéma qui admet un K-point. Elle a donc un k-point d'après 4.1.6 (resp. 4.2.3), les points x, y sont donc R-équivalents sur k. □

Avec les notations de la proposition ci-dessus, l'application $X(k)/R \to X_K(K)/R$ n'est en général pas surjective. Par exemple, on peut prendre X une courbe elliptique avec $X(k)/R = X(k)$ et $X_K(K)/R = X_K(K)$ et $X(k) \subsetneq X_K(K)$. On va étudier la surjectivité dans le cas des variétés rationnellement connexes.

Proposition 4.3.3. *Soient $k \subset K$ deux corps réels clos (resp. deux corps p-adiquement clos de même p-rang) avec $K = \mathbb{R}$ (resp. avec K une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$). Soit X une k-variété projective et lisse rationnellement connexe. Alors l'application $X(k)/R \to X_K(K)/R$ est bijective.*

Démonstration. D'après la proposition précédente il suffit de montrer la surjectivité. C'est-à-dire, il s'agit de montrer que chaque classe de R-équivalence de $X_K(K)$ admet un point défini sur k. D'après Kollár (cf.[Kol99]), chaque telle classe est ouverte dans $X_K(K)$. Il suffit donc de montrer que $X(k)$ est dense dans $X_K(K)$, ce qui résulte du lemme ci-dessous. □

Lemme 4.3.4. *Soient $k \subset K$ deux corps réels clos (resp. deux corps p-adiquement clos de même p-rang) avec $K = \mathbb{R}$ (resp. avec K une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$). Soit X une k-variété. Alors $X(k)$ est dense dans $X_K(K)$.*

Démonstration. Considérons le cas où K est une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$, le cas des corps réels clos est analogue. Montrons d'abord que k est dense dans K. Soient $e_1, \dots e_d \in k$ tels que leurs images dans $\mathcal{O}_k/(p)$ forment une base de $\mathcal{O}_k/(p)$ sur $\mathbb{F}_p$. Alors $e_1, \dots e_d$, vus comme éléments de K sont indépendants sur $\mathbb{Q}_p$. Comme le degré de K est d, c'est donc une base de K sur $\mathbb{Q}_p$. *Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_p$*, alors $\mathbb{Q}(e_1, \dots, e_d)$ est dense dans K. Donc k est dense dans K.

Pour montrer le lemme il suffit de supposer que X est affine. Soit $x = (A_1, \dots A_n) \in X(K)$. Un ouvert U de $X_K(K)$ tel que $x \in U$, contient une partie de K^n, définie par les équations de X et des inégalités $v(x_i - A_i) > v(B_i)$ où les $A_i, B_i \in K$. Montrons que quitte à prendre un ouvert plus petit on peut choisir $A_i, B_i \in k$.

Puisque k est dense dans K il existe des éléments $b_i \in k$ tels que $v(b_i) > v(B_i)$ et des éléments $a_i \in k$ tels que $v(a_i - A_i) > v(b_i)$. Considérons un ouvert V de $X_K(K)$ qui est une partie de K^n, définie par les équations de X et des inégalités $v(x_i - a_i) > v(b_i)$. Notons d'abord que $V(K) \subset U(K)$: si $v(x_i - a_i) > v(b_i)$, alors $v(x_i - A_i) = v(x_i - a_i + a_i - A_i) > v(b_i) > v(B_i)$ car $v(a_i - A_i) > v(b_i)$ et $v(b_i) > v(B_i)$. De plus, $V(K) \neq \emptyset$: $(A_1, \dots A_n) \in V(K)$ puisque $v(A_i - a_i) > v(b_i)$. On obtient donc que U contient un ouvert V défini sur k tel que $V(K) \neq \emptyset$. D'après le principe de la théorie des modèles [PR84] 5.1, $V(k)$ est non vide, $X(k)$ est donc dense dans $X_K(K)$, ce qui finit la preuve du lemme. □

Remarque 4.3.5. Plus généralement, la proposition ci-dessus s'applique pour $k \subset K$ deux corps réels clos (resp. p-adiquement clos de même p-rang) tels que k est dense dans K.

On déduit de la proposition précédente que si $k \subset K \subseteq L$ sont des corps réels clos avec $L = \mathbb{R}$ (resp. des corps p-adiquement clos de rang d avec L une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$), alors $X(k)/R \simeq X_K(K)/R$ pour une k-variété X projective lisse rationnellement connexe. En effet, ces deux ensembles sont en bijection avec $X_L(L)/R$.

Proposition 4.3.6. *Soit X une variété projective et lisse rationnellement connexe sur $k = \mathbb{R}$ (resp. sur k une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$). Soit $K \supset \mathbb{R}$ un corps réel clos (resp. $K \supset k$ un corps p-adiquement clos de rang d). Alors l'application $X(k)/R \to X_K(K)/R$ est bijective.*

Démonstration. Considérons le cas où k est une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$, le cas des corps réels clos est analogue. Soit $x \in X(k)$ un point rationnel. D'après [Kol99], il existe une courbe rationnelle *très libre* $f_x : \mathbb{P}^1_k \to X$, $f_x(0:1) = x$, $f_x(1:0) = y \neq x$. La condition «très libre» implique qu'on a un k-point $[f_x]$ du schéma $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1_k, X, (1:0) \mapsto y)$ qui est un point lisse. De plus, il existe un voisinage ouvert $U_x \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1_k, X, (1:0) \mapsto y)$ de ce point tel que le morphisme d'évaluation $e : U_x \to X$, $g \mapsto g(0:1)$ soit lisse. Ainsi $e(U_x(k))$ est un ouvert de $X(k)$ qui contient le point x. Puisque $X(k)$ est compact, on peut trouver un nombre fini de points $x_i \in X(k)$, tels que $X(k) = \bigcup_i e(U_{x_i}(k))$. D'après le principe de la théorie des modèles [PR84] 5.1, $X_K(K)$ est aussi recouvert par $\bigcup_i e(U_{x_i}(K))$. Chaque point de $X(K)$ est donc R-équivalent sur K à un des k-points x_i. L'application $X_k(k)/R \to X_K(K)/R$ est donc surjective, ce qui finit la preuve de la proposition d'après 4.3.2. □

D'après les deux propositions précédentes, si $k \subset K$ sont deux corps réels clos (resp. deux corps p-adiquement clos de rang d) avec $k \subseteq \mathbb{R}$ (resp. avec $k \subseteq L$, où L est une extension algébrique de degré d de $\mathbb{Q}_p$), alors on a $X(k)/R \simeq X_K(K)/R$ pour une k-variété X projective rationnellement connexe. De plus, ce sont des ensembles finis.

4.4 Le cas d'une infinité de classes de R-équivalence

Dans l'article [Kol04] J. Kollár construit des exemples des variétés rationnellement connexes (et même unirationnelles) qui ont une infinité de classes de R-équivalence. La même construction s'applique aussi dans le cas de certains corps réels clos. Donnons ici les arguments.

Soit $K = \mathbb{R}(X)\hat{}$. Plus généralement, on considère $k \subset K$ deux corps réels clos, tels que K contient un élément t infinitésimal par rapport à k, A l'anneau de Bär de K par rapport à k, $\tilde{k}$ est le corps résiduel. On note $\tilde{k} = \mathbb{R}$ dans le premier cas. La construction est la suivante :

1. Soit Y une $\mathbb{Q}$-variété lisse. D'après Mumford (cf. [Mum69]) il existe un plongement de Y dans $\mathbb{P}^n$ tel que Y peut être définie par des équations quadratiques $g_1 = \ldots = g_m = 0$ et qu'elle soit contenue dans une quartique lisse $g = 0$. On considère la K-variété projective X définie par l'équation
$$X : g_1^2 + \ldots + g_m^2 + tg = 0.$$
On note $X_{\tilde{k}}$ la fibre spéciale de X. C'est une $\tilde{k}$-variété définie par l'équation [3]
$$X_{\tilde{k}} : g_1^2 + \ldots + g_m^2 = 0.$$

3. notons que $\tilde{k} \supset k \supset \mathbb{Q}$ dans le deuxième cas

Puisque le corps $\tilde{k}$ est un corps réel clos,

$$X_{\tilde{k}}(\tilde{k}) = Y_{\tilde{k}}(\tilde{k}).$$

De plus, l'inclusion $Y_{\tilde{k}} \hookrightarrow X_{\tilde{k}}$ donne une bijection

$$Y_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R \simeq X_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R.$$

Cette application est surjective d'après la construction. Elle aussi injective. En effet, si $h : \mathbb{P}^1 \to X_{\tilde{k}}$ est un morphisme, alors l'image $h(\mathbb{P}^1)$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $X_{\tilde{k}}(\tilde{k})$ [4], donc dans $Y_{\tilde{k}}$. On a donc que si deux points de $Y_{\tilde{k}}$ sont R-équivalents dans $X_{\tilde{k}}$, alors ils sont R-équivalents dans $Y_{\tilde{k}}$.
D'après [Kol04], on dispose d'une flèche de spécialisation

$$X(K)/R \to X_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R \simeq Y_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R.$$

Cette flèche est surjective : chaque point de $X_{\tilde{k}}(\tilde{k})$ se relève en un point de $X(K)$ d'après le choix de $g_1, \dots g_m$, g et le lemme ci-dessous.

2. D'après [Kol04], on peut prendre $Y = E \cup Z$ l'union disjointe d'une courbe elliptique ayant une infinité de $\mathbb{Q}$-points et d'une autre variété Z telles que la variété X construite ci-dessus soit unirationnelle. On a ainsi une surjection :

$$X(K)/R \twoheadrightarrow E_{\tilde{k}}(\tilde{k}) + Z_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R,$$

ce qui montre que le nombre des classes de R-équivalence de $X(K)$ est infini.

Cette construction montre que l'application $X(k)/R \to X(K)/R$, où $k \subset K$ est une inclusion de corps réels clos et $k \nsubseteq \mathbb{R}$ n'est pas forcément surjective même si X est rationnellement connexe. Si l'on prend pour k le corps des séries de Puiseux et si l'on construit X/k comme ci-dessus, on a que $X(k)/R \to X(K)/R$ n'est pas surjective si $\tilde{k} \supsetneq k$. Cela montre aussi que la composée $X(k)/R \to X_K(K)/R \to X_{\tilde{k}}(\tilde{k})/R$ n'est pas forcément une bijection.

Lemme 4.4.1. *Soit A un anneau de valuation, dont le corps résiduel k et le corps des fractions K sont des corps réels clos. Soit $S = \operatorname{Spec} A$. Soit X un S-schéma, $x \in X(k)$ un point lisse de X. Il existe alors une section $s : S \to X$, telle que $s(\operatorname{Spec} k) = x$.*

Démonstration. On peut supposer que X est étale sur $Y = \operatorname{Spec} A[x_1, \dots x_n]$. Soit $(a_1, \dots a_n) \in Y(k)$ l'image du point x. On le relève en un point $(A_1, \dots A_n) \in Y(A)$. La fibre du morphisme $X \to Y$ en ce point est étale sur S, on peut donc supposer que c'est $\operatorname{Spec}(A[T]/P)_f$, où P est un polynôme unitaire séparable. Il s'agit donc de montrer que si sa réduction $\bar{P}$ admet une racine $\bar{y} \in k$, alors P admet une racine y dont la spécialisation est $\bar{y}$. En utilisant que K est un corps réel clos et le lemme de Gauss, il suffit de considérer les cas où P est quadratique. Si P n'a pas de racine sur K, alors ces racines sont $c \pm id$, $c, d \in K$, $d \neq 0$. Puisque $\bar{P}$ admet une racine sur k, on a que l'image de d est zéro dans k et on obtient une contradiction avec le fait que $\bar{P}$ est séparable. □

Remarque 4.4.2. Voir aussi [Duc02].

4. les $\tilde{k}$-points de $\mathbb{P}^1$ sont Zariski denses

Deuxième partie

Cohomologie non ramifiée

Sommaire

Introduction

Soit k un corps. À toute k-variété intègre on associe ([BO74], [CTO89], [CT95a]) les groupes de cohomologie non ramifiée définis de la manière suivante.

Pour n un entier inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour i un entier positif on note $\mu_n^{\otimes i} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ (i fois). On pose $\mu_n^{\otimes i} = Hom_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-i)}, \mathbb{Z}/n)$ si i est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$.

Pour F un corps de fonctions sur k, $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif on définit

$$H^j_{\mathrm{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\partial_A}{\to} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application ∂_A est l'application résidu.

Pour X une k-variété intègre, on note

$$H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i})$$

où $k(X)$ est le corps de fonctions de X.

On utilise aussi les groupes $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ (resp. $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i))$ pour l un nombre premier) obtenus par passage à la limite inductive.

Définis comme ci-dessus, les groupes de cohomologie non ramifiée sont de manière évidente des invariants birationnels des k-variétés intègres.

Ces groupes furent utilisés par Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO89] en 1989, qui montrèrent que ce sont des invariants birationnels stables. Ceci leur a permis de donner de nouveaux types d'exemples des variétés unirationnelles non rationnelles sur $\mathbb{C}$ (cf. aussi [AM72], [Sal84]). L'étude détaillée de leurs propriétés générales est disponible dans [CT95a].

Lorsque X est propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus [BO74] permettent d'identifier le groupe $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie de Zariski $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j_{ét}(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT95a] 4.1.1). Pour X propre et lisse, pour vérifier qu'un élément de $H^j(k(X), \mu_n^{\otimes i})$ est non ramifié, il suffit de le faire pour les anneaux de valuation discrète associés aux points de codimension 1 de X :

$$H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}\, \partial_{\mathcal{O}_{X,x}}.$$

On dispose d'une description explicite des groupes H^1_{nr} et H^2_{nr}. Pour X une variété intègre, projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et pour tout entier $n > 0$, on a ([CT95a] 4.2.1 et 4.2.3) :

$$H^1_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n) \tilde{\to} \mathrm{Pic}(X)[n]$$
$$H^2_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n) \tilde{\to} \mathrm{Br}(X)[n].$$

En degrés supérieurs on n'a pas de formules analogues (voir [Duc02], [Pey08], [Ngu10] pour des cas où l'on trouve des descriptions plus précises).

On voit en particulier que les groupes $H^1_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n)$ et $H^2_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n)$ sont des groupes finis. Même pour des variétés projectives et lisses sur $\mathbb{C}$, la situation en degré 3 n'était pas connue dans les années 1990. En 2002, Schoen a donné des exemples où le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est infini ([Sch02], [CTV]).

Les groupes de cohomologie non ramifiée en degré 3 apparaissent dans plusieurs contextes dans les travaux récents, en particulier dans [CTV], [CTK], [Kah]. Pour les variétés complexes, il y a un lien avec le défaut de la conjecture de Hodge entière en degré 4 ([CTV]). Sur des corps finis, on relie le groupe H^3_{nr} avec le groupe de Chow $CH^2(X)$ de cycles de codimension 2 modulo l'équivalence rationnelle ([CTK], [Kah]). Soit X une variété projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$, géométriquement rationnelle et soit $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{F}}$. On obtient en particulier un complexe

$$0 \to CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G \to H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0,$$

qui est exact à la $car.\mathbb{F}$-torsion près. Dans le premier chapitre de cette partie, *on donne des exemples où le terme de droite de ce complexe est non nul. Plus précisement, en utilisant la méthode de Colliot-Thélène et Ojanguren, pour une infinité de nombres premiers p, on construit un exemple d'une variété projective et lisse de dimension* 5*, géométriquement rationnelle, définie sur le corps fini* $\mathbb{F}$ *à* p *éléments telle que le groupe* $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ *n'est pas nul. Ainsi, via le complexe ci-dessus, on obtient des exemples de variétés sur un corps fini, telles que l'application* $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ *n'est pas surjective.* Cela répond à une question de T. Geisser et a fait l'objet d'une publication [Pir2].

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et soit l un nombre premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Pour une variété projective et lisse X sur $\mathbb{F}$, de dimension 3, on ne sait pas si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est toujours nul (cf. [CTK] 5.4). D'après un résultat de Parimala et Suresh [PS], il en est ainsi dans le cas où la variété X est fibrée en coniques au-dessus d'une surface. Dans le deuxième chapitre de cette partie, *on étend leur résultat aux fibrations au-dessus d'une surface dont la fibre générique est une variété de Severi-Brauer associée à une algèbre centrale simple dont l'indice* l *est premier et différent de la caractéristique de* $\mathbb{F}$ (cf. [Pir11]).

Dans le cas des variétés complexes, les résultats de comparaison de Colliot-Thélène et Voisin permettent de démontrer la nullité du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour X une variété complexe de dimension trois, uniréglée, projective et lisse ([CTV] 6.2). Sur un corps fini $\mathbb{F}$, on conjecture la nullité du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$, $l \neq car.\mathbb{F}$, pour X projective et lisse de dimension trois, géométriquement uniréglée. Le théorème de Parimala et Suresh démontre un cas particulier de cette conjecture. Considérons un autre cas, où on a une fibration $X \to C$ au-dessus d'une courbe, dont la fibre générique X_η est géometriquement rationnelle. On s'intéresse particulièrement à ce cas pour la raison suivante. Colliot-Thélène et Kahn viennent d'établir ([CTK] 7.7) que pour une telle variété X, sous la conjecture de Tate pour les diviseurs, si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible, alors l'existence d'un zéro-cycle de degré premier à l sur X_η se détecte seulement en utilisant l'obstruction de Brauer-Manin. Plus précisement, s'il existe sur la surface X_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de X_η via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [Man71]), alors il existe sur X_η un zéro-cycle de degré premier à l. La nullité du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour de telles variétés reste un problème ouvert.

En dimension plus grande, pour X une variété projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$, de dimension n, munie d'un morphisme $X \to C$ où C est une courbe, Saito [Sai89] obtint la même conclusion sous l'hypothèse que l'application classe de cycle l-adique

$$CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$$

est surjective. Plus précisément, sous cette hypothèse, s'il existe sur la fibre générique X_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de X_η, alors il existe sur X_η un zéro-cycle de degré premier à l. On s'intéresse ainsi à décrire le conoyau de l'application $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ pour des variétés sur des corps finis. Ce dernier problème est considéré dans le troisième chapitre de cette partie.

Soit X une variété intègre projective et lisse sur un corps k, soit n un entier premier à la caractéristique de k et soit $\mathcal{H}^j_X(\mu_n^{\otimes i})$ le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j_{ét}(U, \mu_n^{\otimes i})$. La conjecture de Gersten, établie par Bloch et Ogus ([BO74]) permet de calculer les groupes de cohomologie de ces faisceaux comme les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \to H^j(k(X), \mu_n^{\otimes i}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{j-1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes (i-1)}) \to \ldots \to \bigoplus_{x \in X^{(r)}} H^{j-r}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes (i-r)}) \to \ldots$$

où $X^{(r)}$ désigne l'ensemble des points de codimension r de X ; $\kappa(x)$ est le corps résiduel du point x. Les flèches de ce complexe sont induites par des résidus et le terme $\bigoplus_{x \in X^{(r)}}$ est en degré r.

Ce résultat permet de voir les groupes de cohomologie non ramifiée $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) = H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, ainsi que les autres groupes de cohomologie $H^r(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$ comme les groupes de Chow associés à des modules de cycles de Rost [Ros96]. En utilisant cette description, dans le troisième chapitre *on établit l'invariance birationnelle des groupes $H^r(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes i}))$ pour X une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension n, définie sur un corps k de dimension cohomologique au plus d, sous l'hypothèse que l est premier à la caractéristique de k. Sur un corps fini, on obtient l'invariance birationnelle pour les groupes $H^r(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)))$ (avec une condition $r < n-1$ si $i = n-1$) et on relie le groupe $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ avec le conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$.*

Dans le quatrième et dernier chapitre de cette partie on revient à des questions de ramification et on considère le problème suivant. Soit k un corps de caractéristique nulle et soit X une variété géométriquement intègre sur k, de corps des fractions $K = k(X)$. Soit $n > 0$ un entier. Supposons que K contient une racine primitive n-ième de l'unité. On a dans ce cas un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout j. Soit $\alpha \in H^r(K, \mathbb{Z}/n)$. Si la classe α est ramifiée, i.e. si α n'appartient pas au sous-groupe $H^r_{\mathrm{nr}}(K/k, \mathbb{Z}/n)$ de $H^r(K, \mathbb{Z}/n)$, on peut se demander si l'on peut borner la ramification de α. Plus précisément, on demande s'il existe une extension finie L de K dont le degré est borné et ne dépend pas de α, telle que α devient non ramifiée sur L. Dans le cas où k est un corps p-adique et X est une courbe, Saltman ([Sal97], [Sal98]) démontra que pour l premier différent de p, tout élément de $H^2(K, \mathbb{Z}/l)$ devient non ramifié sur une extension L de K of degree l^2. Ce résultat implique que α est triviale sur L, en utilisant que le groupe de Brauer d'une courbe régulière propre sur l'anneau des entiers d'un corps p-adique est nul (cf. [Lic69], [Tat57]). Pour les dimensions supérieures on ne dispose pas de résultats généraux qui permettent de déduire qu'un élément non ramifié est trivial. Néanmoins, dans le quatrième chapitre *on démontre que si X une variété géométriquement intègre sur un corps k, de corps des fractions K, alors pour tout élément donné $\alpha \in H^r(K, \mathbb{Z}/n)$ on peut trouver une extension L de degré $l^{(\dim X)^2}$ telle que α devient non ramifié sur L.* Cette partie, qui répond à une question soulevée pendant l'atelier à Palo Alto en janvier 2011, est rédigée en anglais.

Chapitre 1

Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis

Résumé. En utilisant la construction de Colliot-Thélène et Ojanguren, on donne un exemple d'une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que d'une part le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ est non nul et, d'autre part, l'application $CH^2(X) \to CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ n'est pas surjective.

Soit $\mathbb{F}_p$ un corps fini de cardinal p. Soit $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et soit $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ le groupe de Galois absolu. Soit X une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension d et soit $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p$. On dispose d'une application naturelle

$$CH^i(X) \to CH^i(\bar{X})^G$$

entre les groupes de Chow des cycles de codimension i sur X (resp. sur $\bar{X}$) modulo l'équivalence rationnelle. Cette application est surjective pour $i = 0, 1, d$ (cf. remarque 1.3.1). Suivant Geisser [Ge], on s'intéresse à savoir s'il en est ainsi pour $2 \leq i < d$.

Dans ce chapitre, on donne un contre-exemple pour $i = 2$. Dans ce cas, des arguments de K-théorie algébrique (cf. [Kah96]) permettent de faire un lien entre le conoyau de l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ et le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. On montre qu'il suffit d'assurer que ce dernier groupe est non nul (cf. section 1.2). Pour ce faire, les techniques développées par Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO89] sont disponibles. En utilisant leur méthode, on construit ainsi (cf. section 1.3) une variété projective lisse X géométriquement connexe définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ convenable, telle que

l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ *n'est pas surjective.*

Plus précisément, X est une variété géométriquement rationnelle de dimension 5, admettant un morphisme vers $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ à fibre générique une quadrique lisse «voisine» de Pfister. Notre méthode permet d'obtenir de tels exemples sur des corps finis $\mathbb{F}_p$ pour une infinité de nombres premiers p.

1.1 Notations et rappels

1.1.1 Notations

Étant donné un corps k, on note k^* le groupe multiplicatif $k - \{0\}$, $\bar{k}$ une clôture séparable de k et $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini de cardinal p.

Si X est une variété algébrique définie sur un corps k, on note $\bar{X} = X_{\bar{k}} = X \times_k \bar{k}$. Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fractions et si X est géométriquement intègre, on note $\bar{k}(X)$ le corps des fractions de $\bar{X}$. On dit que X est *k-rationnelle* si X est birationnelle à $\mathbb{P}^n_k$ et on dit que X est *géométriquement rationnelle* si $\bar{X}$ est $\bar{k}$-rationnelle.

Pour une k-variété intègre X et un entier i, on note $X^{(i)}$ l'ensemble des points de X de codimension i et on note $CH^i(X)$ le groupe des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle.

Si A est un groupe abélien et si n est un entier, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé par les éléments annulés par n. Pour l un nombre premier, on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire.

Pour M un G-module continu discret on note $H^i(k, M) = H^i(G, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne et on note $M^G = H^0(k, M)$ le sous-groupe formé par les éléments invariants par G.

1.1.2 Rappels de cohomologie étale

Étant donnés un corps k et un entier n inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ (j fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = Hom_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$ si j est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. Ces k-schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore $\mu_n^{\otimes j}$, sur toute k-variété X. On note $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de X à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Lorsque $n = 2$, on a un isomorphisme $\mu_2^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$ pour tout j.

Définition 1.1.1. Soit k un corps. Soit F un corps de fonctions sur k. Soient $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. On définit les groupes de cohomologie *non ramifiée* par la formule

$$H^j_{\mathrm{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

Pour X une k-variété intègre, on note $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i})$.

Lorsque X est propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier le groupe $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie de Zariski $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT95a]).

On note $H^i(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, resp. $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (resp. $H^i(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$, resp. $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$) la limite inductive des groupes $H^i(X,\mu_n^{\otimes j})$, resp. $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mu_n^{\otimes j})$ lorsque n varie parmi les entiers (resp. parmi les puissances d'un nombre premier l, $l \neq \mathrm{car}.k$).

On note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif sur un schéma X et le faisceau étale ainsi défini. On écrit $\mathrm{Br}\,X = H^2_{\acute{e}t}(X,\mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Brauer cohomologique de X et $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{O}_X^*) \simeq H^1_{\acute{e}t}(X,\mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Picard.

1.1.3 Rappels de K-théorie

Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U,\mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen [Qui73] à l'anneau A.

Lorsque X est une variété lisse sur un corps k, la conjecture de Gersten, établie par Quillen [Qui73], permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski $H^i(X,\mathcal{K}_j)$ comme les groupes de cohomologie du complexe de Gersten. Lorsque $j = 2$, qui est le cas qui nous intéresse dans la suite, ce complexe s'écrit

$$K_2k(X) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z},$$

où l'application d_2 est donnée par le symbole modéré et l'application d_1 est obtenue par la somme des flèches diviseurs après normalisation des variétés considérées. On a ainsi $H^0(X,\mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\,d_2$ et $H^1(X,\mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\,d_1/\mathrm{Im}\,d_2$.

Étant donné un corps k, le groupe K_2k coïncide avec le groupe de K-théorie de Milnor $K_2^M k$, quotient de $k^* \otimes_{\mathbb{Z}} k^*$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a \otimes b$ avec $a + b = 1$.

Cette description permet de voir que pour X une variété lisse sur un corps k on a une flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X,\mathcal{K}_2). \tag{1.1}$$

En effet, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
k(X)^* \otimes k^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k^* & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \otimes k^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \phi \downarrow & & & & \\
K_2k(X) & \xrightarrow{d_2} & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* & \xrightarrow{d_1} & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

où la première ligne est obtenue à partir de la suite exacte définissant le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ par tensorisation avec k^*. On vérifie que la composé $d_1 \circ \phi$ vaut zéro, ce qui permet de définir la flèche $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X,\mathcal{K}_2)$ par chasse au diagramme.

1.2 Comparaison entre groupes de Chow en codimension deux et cohomologie non ramifiée en degré trois

Dans cette section on donne la preuve du théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit X une $\mathbb{Q}$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle. Pour presque tout nombre premier p, il existe une réduction X_p de X modulo p qui est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, telle que*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Coker}[CH^2(X_p) \to CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}$$

pour tout nombre premier l, $(l,p)=1$.

Remarque 1.2.2. Pour définir X_p on choisit un modèle projectif et lisse $\mathcal{X}$ de X au-dessus d'un ouvert convenable $U \subset \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, $(p) \in U$, et on pose $X_p = \mathcal{X} \otimes \mathbb{F}_p$. Cette construction dépend du modèle choisi.

Pour démontrer le théorème 1.2.1, on utilise le résultat suivant de B. Kahn :

Théorème 1.2.3. ([Kah96], Th.1 et corollaire p.397, partie 1)) *Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$, de dimension cohomologique au plus 3. Soit X une k-variété projective et lisse. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) $K_2\bar{k} \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$;
(ii) le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, resp. de torsion p-primaire si car.$k > 0$.

Alors on a une suite exacte naturelle, resp. exacte à la p-torsion près si car.$k > 0$

$$\begin{aligned} H^1(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) &\to \mathrm{Coker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ &\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G] \to H^2(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)). \quad (1.2) \end{aligned}$$

Remarque 1.2.4. Voir [Kah96] p.398 pour la définition des groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ en caractéristique positive.

Il est ainsi nécessaire de vérifier les hypothèses (i) et (ii) pour une variété géométriquement rationnelle X. Les énoncés suivants, cas particuliers de [CT95a], 2.1.9 (cf. aussi 4.1.5), sont bien connus.

Proposition 1.2.5. *Soit k un corps. Soit X une k-variété projective et lisse, k-rationnelle. Alors*
(i) $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \simeq H^j(k, \mu_n^{\otimes i})$ pour tout $j \geq 1$;
(ii) l'application naturelle $K_2k \to H^0(X, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme ;
(iii) le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ est libre de type fini.

L'énoncé suivant permet de comprendre le module galoisien $H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$.

Proposition 1.2.6. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le noyau $K(X)$ et le conoyau $C(X)$ de l'application $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ sont des invariants birationnels des k-variétés intègres, projectives et lisses. En particulier, l'application $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme pour X une variété projective et lisse, k-rationnelle.*

Démonstration. Considérons le complexe de groupes abéliens

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2).$$

Ce complexe est fonctoriel contravariant pour les morphismes dominants de variétés projectives et lisses. Le noyau $K(X)$ et le conoyau $C(X)$ de $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ sont alors des foncteurs contravariants pour de tels morphismes. Soit F l'un de ces foncteurs.

Soient X, Y deux variétés intègres, projectives et lisses. Montrons qu'un morphisme birationnel $X \to Y$ induit un isomorphisme $F(Y) \to F(X)$. D'après Hironaka, il existe deux k-variétés projectives et lisses X' et Y' et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. D'après le lemme cidessous, $F(X)$ est isomorphe à $F(X')$, respectivement $F(Y)$ est isomorphe à $F(Y')$. On en déduit par fonctorialité que $F(X)$ est isomorphe à $F(Y)$.

Si maintenant on a une application rationnelle $X \dashrightarrow Y$, on utilise Hironaka pour trouver une variété projective et lisse Z avec $Z \to X$ et $Z \to Y$ deux morphismes birationnels. D'après ce qui précède, $F(X) \simeq F(Z) \simeq F(Y)$. Ainsi $F(X)$ est un invariant birationnel des k-variétés intègres, projectives et lisses.

Le fait que $F(\mathbb{P}^n_k) = 0$ est bien connu. On établit d'abord que $H^1(\mathbb{A}^1_k, \mathcal{K}_2) = 0$ et ensuite que $H^1(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{K}_2) = 0$ par des fibrations successives à fibres $\mathbb{A}^1$. L'énoncé pour $\mathbb{P}^n_k$ s'en suit par récurrence, en se restreignant à l'hyperplan à l'infini. □

Remarque 1.2.7. On peut montrer plus généralement que pour X lisse sur un corps, $H^i(\mathbb{A}^n_X, \mathcal{K}_j)$ est isomorphe à $H^i(X, \mathcal{K}_j)$, et donner une expression explicite de $H^i(\mathbb{P}^n_X, \mathcal{K}_j)$ en termes de K-cohomologie de X, cf. [She79].

Lemme 1.2.8. *Soit k un corps algébriquement clos. Soit X une k-variété intègre, projective et lisse. Soit $Z \subset X$ une sous-variété intègre, projective et lisse, de codimension au moins 2 et soit $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X le long de Z. Alors les applications $K(X) \to K(X')$, respectivement $C(X) \to C(X')$, sont des isomorphismes.*

Démonstration. Soit Z' le diviseur exceptionnel de X' et soit $U = X \setminus Z \simeq X' \setminus Z'$. Supposons d'abord que Z est de codimension 2. On a les suites exactes horizontales de complexes verticaux :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K_2k(X) \arrow[r] \arrow[d] & K_2k(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} k(x)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{x\in U^{(2)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K_2k(X') \arrow[r] \arrow[d] & K_2k(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & k(Z')^* \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in X'^{(1)}} k(x)^* \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} k(x)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Z'^{(1)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X'^{(2)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{x\in U^{(2)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On a ainsi des suites longues induites en cohomologie :

$$0 \to H^0(X,\mathcal{K}_2) \to H^0(U,\mathcal{K}_2) \to 0 \to H^1(X,\mathcal{K}_2) \to H^1(U,\mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z} \to \\ \to CH^2(X) \to CH^2(U) \to 0, \quad (1.3)$$

$$0 \to H^0(X',\mathcal{K}_2) \to H^0(U,\mathcal{K}_2) \to k^* \to H^1(X',\mathcal{K}_2) \to H^1(U,\mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Z') \to \\ \to CH^2(X') \to CH^2(U) \to 0. \quad (1.4)$$

Dans la suite (1.3), la flèche $\mathbb{Z} \to CH^2(X)$ est donnée par $1 \mapsto [Z]$. En prenant l'intersection avec un hyperplan général, on voit que cette flèche est injective. Ainsi l'application $H^1(X,\mathcal{K}_2) \to H^1(U,\mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme.

Si Z est de codimension plus grande que 2, on a encore la suite (1.4) et les groupes $H^1(X,\mathcal{K}_2)$ et $H^1(U,\mathcal{K}_2)$ sont isomorphes, car ils ne dependent que de points de codimension au plus 2.

Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,\mathcal{K}_2) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^0(U,\mathcal{K}_2) \arrow[d, equal] \\
H^0(X',\mathcal{K}_2) \arrow[r, hook] & H^0(U,\mathcal{K}_2).
\end{tikzcd}$$

Ainsi l'application $H^0(X',\mathcal{K}_2) \to H^0(U,\mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme. En utilisant la suite (1.4), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^1(X,\mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^1(U,\mathcal{K}_2) \\ & & & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & H^1(X',\mathcal{K}_2) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{K}_2). \end{array}$$

On a donc une suite exacte scindée :

$$0 \to k^* \to H^1(X',\mathcal{K}_2) \to H^1(X,\mathcal{K}_2) \to 0.$$

Ainsi $H^1(X',\mathcal{K}_2) \simeq H^1(X,\mathcal{K}_2) \oplus k^*$. Puisque $\mathrm{Pic}(X') = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}\cdot[Z']$, on en déduit l'énoncé du lemme. □

Remarque 1.2.9. En utilisant l'action des correspondances sur les groupes de Chow supérieurs, on peut établir la proposition 1.2.6 en toute caractéristique. Cela n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème 1.2.1.

Preuve du théorème 1.2.1. Puisque X est une $\mathbb{Q}$-variété géométriquement rationnelle, il existe une extension finie $K/\mathbb{Q}$ et une K-variété projective et lisse Z, deux morphismes K-birationnels $Z \to X_K$ et $Z \to \mathbb{P}^n_K$, et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \arrow[dl] \\ Z \arrow[r] & X_K \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ Z \arrow[r] & \mathbb{P}^n_K \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. Pour presque toute place v de K, les centres d'éclatements admettent des réductions lisses et les diagrammes (1.5) induisent des diagrammes analogues sur le corps résiduel $k(v)$. Ainsi, pour presque toute place v de K, on peut définir une réduction X_p de X modulo p, $p = \mathrm{car}.k(v)$, qui est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle et des réductions de Z, Z', Z'', X et Y sur $k(v)$, qui sont des variétés lisses et telles qu'on a des diagrammes commutatifs sur $\bar{\mathbb{F}}_p$

$$\begin{tikzcd} \bar{Z}'_{k(v)} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X}'_{k(v)} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bar{Z}_{k(v)} \arrow[r] & \bar{X}_p \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \bar{Z}''_{k(v)} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{Y}_{k(v)} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bar{Z}_{k(v)} \arrow[r] & \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{F}}_p} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. En appliquant le lemme 1.2.8, on déduit que l'application $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^* \to H^1(\bar{X}_p,\mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme (cf. aussi 1.2.6).

Montrons que les hypothèses du théorème 1.2.3 sont satisfaites pour une telle réduction X_p. D'après la proposition 1.2.5, $K_2\bar{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}_p,\mathcal{K}_2) = 0$ car X_p est géométriquement rationnelle. De même, $H^3_{\mathrm{nr}}(\bar{X}_p,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3(\bar{\mathbb{F}}_p,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ car $\bar{\mathbb{F}}_p$ est séparablement clos.

Montrons ensuite que le groupe $H^i(\mathbb{F}_p, H^1(\bar{X}_p,\mathcal{K}_2)) \simeq H^i(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*)$ est nul pour tout $i \geq 1$. D'après la proposition 1.2.5, le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p)$ est libre de type fini. Considérons une extension finie galoisienne $L/\mathbb{F}_p$ qui déploie $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p)$. Considérons la suite de restriction-inflation :

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \mathrm{Pic} X_{p,L} \otimes L^*) \to H^1(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \mathbb{F}_p^*) \to H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}_p}/L), \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*).$$

On a $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}_p}/L), \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*) = 0$ d'après le théorème 90 de Hilbert. Puisque la dimension cohomologique de $\mathbb{F}_p$ est 1, $H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \mathrm{Pic} X_{p,L} \otimes L^*) = 0$ (cf. [Ser68], p.170). On a donc $H^i(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Notons que $H^3(\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ car la dimension cohomologique de $\mathbb{F}_p$ est 1. La suite (1.2) donne alors un isomorphisme :

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}[CH^2(X_p) \to CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}.$$

□

Remarque 1.2.10. Pour établir $H^i(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) = 0, i = 1, 2$ pour X une variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, définie sur un corps fini k, on aurait pu faire appel à des résultats généraux sur les variétés projectives et lisses ([CTR85] 2.12 et 2.14, [GS88] 4.1). Ces résultats généraux reposent en particulier sur les conjectures de Weil (démontrées par Deligne). Pour ce dont on a besoin dans la suite, le théorème 1.2.1 suffit.

Remarque 1.2.11. En utilisant des méthodes de la cohomologie motivique, Colliot-Thélène et Kahn (cf. [CTK] 6.9) viennent d'établir que pour *toute* variété projective et lisse géométriquement rationnelle X définie sur un corps fini de caractéristique p on a un complexe

$$0 \to CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G \to H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0,$$

qui est exact à la p-torsion près.

1.3 L'exemple

Dans cette section, pour une infinité de nombres premiers p, on construit une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que l'application

$$CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$$

n'est pas surjective.

Remarque 1.3.1. Si X est une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension d, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, l'application $CH^i(X) \to CH^i(\bar{X})^G$ est surjective pour $i = 0, 1, d$. Le cas $i = 0$ est immédiat. Pour $i = 1$, $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} CH^1(X)$ car X est lisse. Puisque X est projective et géométriquement intègre, $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ et la suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(G, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$ donne une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\bar{X})^G \to H^2(G, \bar{k}^*) \to \mathrm{Br}\, X.$$

Puisque le groupe $H^2(G, \bar{k}^*) = \mathrm{Br}\, k$ est nul pour un corps fini, on a la surjectivité pour $i = 1$. Plus généralement, il en est ainsi pour toute variété X projective et lisse, géométriquement intègre, avec un point rationnel, définie sur un corps k quelconque : pour une telle variété l'application $H^2(G, \bar{k}^*) \to \mathrm{Br}\, X$ est injective.

Pour $i = d$, c'est-à-dire dans le cas de zéro-cycles, on sait que X possède un zéro-cycle de degré 1 d'après les estimations de Lang-Weil (cf.[LW54]). Il suffit donc de voir que l'application entre les groupes de Chow de zéro-cycles de degré zéro $A_0(X) \to A_0(\bar{X})^G$ est surjective. Ceci résulte de la comparaison de ces derniers groupes avec les points rationnels (resp. les $\bar{\mathbb{F}}_p$-points) de la variété d'Albanese Alb_X de X. En effet, l'application $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{F}_p)$ est surjective (cf. [KS83], Prop. 9, p.274), et l'application $A_0(\bar{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est un isomorphisme (cf.[Roj80] et [Mil82]).

D'après le théorème 1.2.1, si X est géométriquement rationnelle, il suffit d'assurer que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est non nul pour un certain nombre premier l, $l \neq p$. Dans l'article [CTO89], Colliot-Thélène et Ojanguren construisent de tels exemples sur le corps des complexes pour $l = 2$. Les variétés qu'ils construisent sont unirationnelles (c'est-à-dire, dominées par un ouvert de l'espace projectif). Via la proposition 1.2.5, ils obtiennent ainsi des exemples de variétés unirationnelles non rationnelles. Dans la suite, on utilise la méthode de [CTO89] pour produire des exemples sur les corps finis.

La stratégie est la suivante :

1. On considère une quadrique projective et lisse Q sur le corps $F = \mathbb{F}_p(x, y)$, $p \neq 2$, définie dans $\mathbb{P}^4_F$ par une équation homogène
$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0 \tag{1.6}$$
où $a \in \mathbb{F}_p^*$ est une constante et $f, g_1, g_2 \in F^*$. La quadrique Q admet un point rationnel sur $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$, elle est donc $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$-rationnelle.
2. On donne des conditions suffisantes sur les coefficients dans (1.6) pour que le cup-produit (a, f, g_1) soit non nul dans $H^3_{\mathrm{nr}}(F(Q)/\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/2)$.
3. On vérifie que l'on peut trouver $a \in \mathbb{Z}$ et $f, g_1, g_2 \in \mathbb{Q}(x, y)$ tels que leurs réductions modulo p vérifient les conditions de l'étape précédente pour le corps $\mathbb{F}_p$ pour une infinité de nombres premiers p. Par Hironaka, on trouve une variété projective et lisse X définie sur $\mathbb{Q}$, admettant une fibration sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ de fibre générique la quadrique définie par (1.6). Pour presque tout p, X admet une réduction X_p modulo p qui est lisse sur $\mathbb{F}_p$ et pour une infinité de premiers p le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Z}/2)$ est ainsi non nul.

1.3.1 Cohomologie des quadriques

On commence par citer un résultat d'Arason [Ara75] sur la cohomologie des quadriques.

Soit k un corps, car.$k \neq 2$. Soit ϕ une forme quadratique non dégénérée de dimension m définie sur k. On note X_ϕ la quadrique projective et lisse dans $\mathbb{P}^{m-1}_k$ définie par ϕ. On appelle *n-forme de Pfister* sur k une forme quadratique de type $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, -a_n\rangle$, $a_i \in k^*$. Une forme quadratique non dégénérée ϕ est dite *«voisine de Pfister»* s'il existe une forme de Pfister ϕ' sur k et $a \in k^*$ tels que ϕ soit une sous-forme de $a\phi'$ et que la dimension de ϕ soit strictement supérieure à la moitié de la dimension de ϕ'.

Théorème 1.3.2. (cf. [Ara75]) *Soit k un corps,* car.$k \neq 2$. *Soit ϕ une forme quadratique définie sur k, voisine d'une 3-forme de Pfister $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \langle 1, -a_2\rangle \otimes \langle 1, -a_3\rangle$. Alors*
$$\ker[H^3(k, \mathbb{Z}/2) \to H^3(k(X_\phi), \mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a_1, a_2, a_3), \tag{1.7}$$

chaque a_i étant identifié à sa classe dans $H^1(k,\mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$.

Soit Q la quadrique définie sur le corps $F = \mathbb{F}_p(x,y)$, $p \neq 2$, par l'équation homogène (1.6). D'après le théorème d'Arason,

$$\ker[H^3(F,\mathbb{Z}/2) \to H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a,f,g_1g_2).$$

Pour trouver un élément non nul dans $H^3_{\mathrm{nr}}(Q,\mathbb{Z}/2)$, on peut ainsi essayer de chercher un élément de $H^3(F,\mathbb{Z}/2)$, différent de (a,f,g_1g_2) et qui devient non ramifié dans $H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)$ (par rapport à $\mathbb{F}_p$). On va choisir les éléments a, f, g_1 et g_2 pour que l'élément (a,f,g_1) convienne.

Faisons d'abord quelques rappels sur les calculs de résidus.

Proposition 1.3.3. ([CTO89], 1.3 et 1.4) *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit $j \geq 1$ un entier.*

1. *Soit $\alpha \in H^j(A,\mathbb{Z}/2)$ et soit $\alpha_0 \in H^j(k,\mathbb{Z}/2)$ son image par l'application de réduction. Soit $b \in K^*$ de valuation m dans A et soit β la classe de b dans $H^1(K,\mathbb{Z}/2)$. Alors $\partial_A(\alpha \cup \beta) = m\alpha_0$.*
2. *Soit $\alpha \in H^j(K,\mathbb{Z}/2)$ et soit $b \in A^*$ dont la classe est un carré dans k. Soit β la classe de b dans $H^1(K,\mathbb{Z}/2)$. Alors $\partial_A(\alpha \cup \beta) = 0$.*

On décrit ensuite les conditions qu'on va imposer sur les coefficients de la quadrique Q :

Proposition 1.3.4. *Soit k un corps de dimension cohomologique au plus 1, car.$k \neq 2$. Soit $F = k(x,y)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables sur k. Soit $a \in k^* \setminus k^{*2}$ et soient $f, g_1, g_2 \in F$ non nuls. Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_F$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0.$$

Supposons

1. *pour tout $i = 1,2$, il existe un anneau de valuation discrète B_i de corps des fractions F, tel que $\partial_{B_i}(a,f,g_i) \neq 0$;*
2. *pour tout anneau de valuation discrète B de corps des fractions F, associé à un point de codimension 1 de $\mathbb{P}^2_k$, soit $\partial_B(a,f,g_1) = 0$, soit $\partial_B(a,f,g_2) = 0$.*
3. *pour tout anneau de valuation discrète de corps des fractions F, centré en un point fermé M de $\mathbb{P}^2_k$, quitte à la multiplier par un carré dans F^*, l'une au moins des fonctions f, g_1, g_2 est inversible en M.*

Alors l'image $\xi_{F(Q)}$ du cup-produit $\xi = (a,f,g_1)$ dans $H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)$ est un élément non nul de $H^3_{\mathrm{nr}}(F(Q)/k,\mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. Notons d'abord que (a,f,g_1) est non nul dans $H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)$. Sinon, d'après le théorème 1.3.2, on a soit $(a,f,g_1) = 0$, soit $(a,f,g_1) = (a,f,g_1g_2)$. Ainsi soit $(a,f,g_1) = 0$, soit $(a,f,g_2) = 0$, contradiction avec la condition 1.

Montrons que

$$\text{pour tout anneau de valuation discrète } B \text{ de } F, \quad \text{soit } \partial_B(a,f,g_1) = 0, \text{ soit } \partial_B(a,f,g_2) = 0. \quad (*)$$

Pour un tel anneau B on dispose d'un morphisme $\operatorname{Spec} B \to \mathbb{P}^2_k$ et les cas 2 et 3 correspondent à deux possibilités pour l'image du point fermé de B. La condition 2 assure $(*)$ si cette image est un point de codimention 1 de $\mathbb{P}^2_k$. Sinon l'image du point $\operatorname{Spec} k_B$ est un point fermé M de $\mathbb{P}^2_k$. Soit $\mathcal{O}_M$ l'anneau local de M, son corps des fractions est F. On dispose d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_M \to B$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que la fonction g_1 est inversible dans $\mathcal{O}_M$, quitte à la multiplier par un carré. Ainsi la fonction g_1 est inversible dans B. Soit m la valuation de f dans B. D'après 1.3.3.1, $\partial_B(a,f,g_1) = \partial_B(g_1,a,f) = m(\bar{g}_1,\bar{a})$, où l'on note $\bar{g}_1$ (resp. $\bar{a}$) la classe de g_1 (resp. a) dans $H^1(k_B,\mathbb{Z}/2)$. Comme g_1 et a sont inversibles dans $\mathcal{O}_M$, ces dernières classes proviennent de classes dans $H^1(k_M,\mathbb{Z}/2)$. Ainsi $(\bar{g}_1,\bar{a})$ provient d'un élément de $H^2(k_M,\mathbb{Z}/2)$. Ce dernier groupe est nul, car k_M est de dimension cohomologique au plus 1. Ainsi $\partial_B(a,f,g_1) = 0$.

Montrons maintenent que $\xi_{F(Q)}$ est non ramifié. Soit A un anneau de valuation discrète de $F(Q)$ de corps résiduel k_A. Si A contient F, alors $\xi_{F(Q)}$ provient d'un élément de $H^3(A,\mathbb{Z}/2)$ et son résidu est donc nul. Supposons que A ne contient pas F. Alors $B = A \cap F$ est un anneau de valuation discrète de F. Soit k_B son corps résiduel. On a le diagramme commutatif suivant (cf. [CTO89], §1) :

$$\begin{tikzcd} H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\partial_A"] & H^2(k_A,\mathbb{Z}/2) \\ H^3(F,\mathbb{Z}/2) \arrow[u, "\mathrm{res}_{F/F(Q)}"] \arrow[r, "\partial_B"] & H^2(k_B,\mathbb{Z}/2). \arrow[u, "e_{B/A}\mathrm{res}_{k_B/k_A}"'] \end{tikzcd}$$

D'après ce qui précède, $\partial_B(a,f,g_i) = 0$ pour $i=1$ ou pour $i=2$. Si $\partial_B(a,f,g_1) = 0$, alors $\partial_A(a,f,g_1) = 0$ d'après le diagramme ci-dessus. Supposons que $\partial_B(a,f,g_2) = 0$. Ainsi $\partial_A(a,f,g_2) = 0$. Comme (a,f,g_1g_2) est nul dans $H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)$, son résidu l'est aussi dans $H^2(k_A,\mathbb{Z}/2)$. On a donc $\partial_A(a,f,g_1) = \partial_A(a,f,g_1g_2) - \partial_A(a,f,g_2) = 0$. Ainsi $\xi_{F(Q)}$ est non ramifié. □

1.3.2 Construction explicite

On procède maintenant à la construction des exemples.

Soit k un corps. Dans la suite, on va prendre $k = \mathbb{F}_p$ ou $k = \mathbb{Q}$. On fixe x, y, z des coordonnées homogènes pour $\mathbb{P}^2_k$. Soit $a \in k^* \setminus k^{*2}$. Soient $b_i, c_i, d_i \in k^* \setminus \{-1\}$, $i = 1, 2$, et soit $l_i = b_i x + c_i y + d_i z$. Soient h_j, $j = 1, \dots, 8$, les formes linéaires $e_x x + e_y y + e_z z$, $e_x, e_y, e_z \in \{0, 1\}$.

On choisit b_i, c_i, d_i de sorte que :

(i) Les droites dans $\mathbb{P}^2_k$ données par les équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $l_i + h_j = 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 8$, soient deux à deux distinctes.

(ii) Pour tous $1 \leq j, j' \leq 8$ les trois droites $x = 0$, $l_1 + h_j = 0$, $l_2 + h_{j'} = 0$ dans $\mathbb{P}^2_k$ sont d'intersection vide.

(iii) Pour tous $1 \leq j, j' \leq 8$ les trois droites $y = 0$, $l_1 + h_j = 0$, $l_2 + h_{j'} = 0$ dans $\mathbb{P}^2_k$ sont d'intersection vide.

On prend pour $f, g_1, g_2 \in k(\mathbb{P}^2_k)$ les éléments suivants :

$$f = \frac{x}{y}, \quad g_1 = \frac{\prod_j (l_1 + h_j)}{y^8}, \quad g_2 = \frac{\prod_j (l_2 + h_j)}{z^8}. \tag{1.8}$$

Remarque 1.3.5. Soit $h_j = e_x x + e_y y + e_z z$. Les droites $x = 0$, $l_1 + h_j = 0$ s'intersectent en un seul point $[0 : (d_1 + e_z) : -(c_1 + e_y)]$. Ainsi les conditions (ii) et (iii) ci-dessus sont équivalentes aux conditions suivantes :

(ii') les ensembles

$$\{[(d_1 + e_z) : -(c_1 + e_y)], e_y, e_z \in \{0,1\}\} \text{ et } \{[(d_2 + e_z) : -(c_2 + e_y)], e_y, e_z \in \{0,1\}\}$$

sont d'intersection vide ;

(iii') de même,

$$\{[(d_1 + e_z) : -(b_1 + e_x)], e_x, e_z \in \{0,1\}\} \cap \{[(d_2 + e_z) : -(b_2 + e_x)], e_x, e_z \in \{0,1\}\} = \emptyset.$$

Par exemple, pour

$$l_1 = x + y + 2z, \; l_2 = 3x + 3y + z$$

il s'agit de vérifier que les ensembles $\{[2 : -1], [2 : -2], [3 : -1], [3 : -2]\}$ et $\{[1 : -3], [1 : -4], [2 : -3], [2 : -4]\}$ sont d'intersection vide. Cette condition est satisfaite pour $k = \mathbb{Q}$ ou $k = \mathbb{F}_p$ un corps fini avec $p \geq 13$.

Proposition 1.3.6. *Soit $F = \mathbb{F}_p(x, y)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, $p \neq 2$. Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_F$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - a x_1^2 - f x_2^2 + a f x_3^2 - g_1 g_2 x_4^2 = 0$$

avec $a \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$ et f, g_1, g_2 définis comme dans (1.8) pour $k = \mathbb{F}_p$. Alors le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(F(Q)/\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/2)$ est non nul.

Démonstration. Notons A_x, resp. A_y, resp. A_z, resp. $B_{i,j}$, l'anneau de valuation discrète associé au point générique de la droite $x = 0$, resp. $y = 0$ resp. $z = 0$, resp. $l_i + h_j = 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 8$.

Il s'agit de vérifier les conditions 1, 2 et 3 de la proposition 1.3.4. Soit B un anneau de valuation discrète de F. On a les cas suivants à considérer :

1. B correspond à un point de codimension 1 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$.
   (a) Si B est différent de $A_x, A_y, A_z, B_{i,j}$, le résidu $\partial_B(a, f, g_i)$, $i = 1, 2$, est nul, puisque les fonctions a, f, g_1, g_2 sont inversibles dans un tel anneau B.
   (b) $B = B_{i,j}$. Si $r \neq i$, $r = 1, 2$, alors $\partial_{B_{r,j}}(a, f, g_i) = 0$ comme le cas précédent. Fixons $i \in \{1, 2\}$. Montrons que $\partial_{B_{i,j}}(a, f, g_i) \neq 0$. Supposons $h_j = 0$, les autres cas sont identiques. Soit k le corps résiduel de $B_{i,0}$, i.e. le corps des fonctions de la droite $b_i x + c_i y + d_i z = 0$, $b_i, c_i, d_i \in k^*$ (pour h_j différent de zéro on utilise ainsi l'hypothèse que b_i, c_i, d_i sont différents de -1). D'après le lemme 1.3.3.1, $\partial_{B_{i,0}}(a, f, g_i) = (a, \frac{x}{y}) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2)$. Après passage à des coordonnées affines, on est réduit à établir que le cup-produit (a, x) n'est pas nul dans $H^2(\mathbb{F}_p(x), \mathbb{Z}/2)$. On le voit par exemple en appliquant le lemme 1.3.3.1 à l'anneau de valuation discrète associé à $x = 0$: $a \in \mathbb{F}_p$ est non carré.

(c) $B = A_x$. Montrons que $\partial_{A_x}(a,f,g_i) = 0$, $i = 1, 2$. Soit k_x le corps résiduel de A_x, i.e. le corps des fonctions de la droite $x = 0$. D'après le lemme 1.3.3.1, $\partial_{A_x}(a,f,g_i) = -\partial_{A_x}(a,g_i,f) = -(a,g_{i,x}) \in H^2(k_x,\mathbb{Z}/2)$, où $g_{i,x}$ désigne la fonction induite par g_i sur la droite $x = 0$. Mais $g_{i,x}$ est un carré dans k_x, d'où $\partial_{A_x}(a,f,g_i) = 0$ d'après 1.3.3.2.

(d) $B = A_y$. Comme dans le cas précédent, $\partial_{A_y}(a,f,g_2) = (a,g_{2,y}) = 0$.

(e) $B = A_z$. Alors $\partial_{A_z}(a,f,g_1) = 0$, car les fonctions a, f, g_1 sont inversibles dans A_z.

2. B correspond à un point fermé M de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$.

(a) Si M n'est pas situé sur une des deux droites $x = 0$, $y = 0$, alors f est inversible dans B.

(b) Si M est situé sur une des deux droites $x = 0$, $y = 0$, alors l'une au moins des fonctions $g_1\frac{y^8}{z^8}$, g_2 est inversible dans B d'après les hypothèses (ii)-(iii), car le système $xy = 0, \prod_j(l_1 + h_j) = 0, \prod_j(l_2 + h_j) = 0$ n'a pas de solutions.

□

On finit par décrire explicitement les exemples énoncés.

Théorème 1.3.7. *Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}(x,y)}$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0$$

avec $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}^{*2}$ et f, g_1, g_2 définis comme dans (1.8) pour $k = \mathbb{Q}$. Soit X un modèle projectif et lisse de Q sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$: X est une k-variété projective et lisse et admet une fibration sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ à fibre générique Q. Pour une infinité de nombres premiers p, la réduction X_p de X modulo p est bien définie et est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, telle que :

(i) $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p,\mathbb{Z}/2) \neq 0$;

(ii) l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ n'est pas surjective.

Démonstration. D'après Hironaka, un modèle projectif et lisse X de Q comme dans l'énoncé existe. De plus, pour une infinité de nombres premiers p, l'image de a dans $\mathbb{F}_p$ n'est pas un carré (par Chebotarev, ou par application de la loi de réciprocité quadratique) et la variété X a bonne réduction en p : X_p est lisse. D'après la proposition 1.3.6, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p,\mathbb{Z}/2)$ est non nul. Ainsi, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ est non nul (cf. [Mer81], [MS82] p. 1045). Le théorème 1.2.1 permet de conclure. □

Remarque 1.3.8. Plus précisément, d'après la construction l'énoncé ci-dessus vaut pour presque tout nombre premier p, sur tout corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique p tel que l'image de a dans $\mathbb{F}$ n'est pas un carré.

Chapitre 2

Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer

Résumé. Soit K le corps des fonctions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$, car.$\mathbb{F} \neq 2$. Soit C/K une conique. Parimala et Suresh [PS] ont montré que le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour tout $l \neq$ car.$\mathbb{F}$. Dans ce chapitre on étend leur résultat aux variétés de Severi-Brauer associées à une algèbre centrale simple dont l'indice l est premier et différent de car.$\mathbb{F}$.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on garde les mêmes notations que dans le chapitre précédent. Précisons ici les notions suivantes de la cohomologie *non ramifiée*, qu'on va utiliser dans la suite. Soit K un corps. Soit F un corps de fonctions sur K. Soient $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

(i) $H^j_{\mathrm{nr}}(F/K, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\partial_{j,A}}{\to} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})]$. Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps K. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

(ii) Pour X une K-variété intègre, on note

$$H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^j_{\mathrm{nr}}(K(X)/K, \mu_n^{\otimes i}).$$

Pour X propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT95a]).

(iii) Si X est régulier en codimension 1, on pose

$$H^j_{\mathrm{nr}}(K(X)/X, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}\, \partial_{j, \mathcal{O}_{X,x}}$$

la cohomologie non ramifiée de $K(X)$ par rapport à X.

(iv) Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète R, on note $H^j_{\mathrm{nr}}(K, \mu_n^{\otimes i}) = \operatorname{Ker} \partial_{j,R}$.

Soit maintenant K le corps des fonctions d'une surface lisse géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Dans [PS], Parimala et Suresh montrèrent que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$, $l \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$, pour X une conique sur K. Le but de ce chapitre est d'étendre leurs arguments au cas des variétés de Severi-Brauer d'indice premier :

Théorème 2.1.1. *Soit K le corps des fonctions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $l \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. On a alors $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$ pour tout premier l', $l' \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$.*

Remarque 2.1.2. Ce résultat est aussi vrai pour une variété de Severi-Brauer associée à une K-algèbre centrale simple d'indice premier $l \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. En effet, $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(X \times \mathbb{P}^n_K, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2))$ d'après [CTO89] 1.2.

Pour montrer ce théorème, on doit essentiellement établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$ (cf. section 2). Pour ce faire, on suit les mêmes étapes que dans [PS]. On montre d'abord que tout élément $\beta \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$. En utilisant le principe de type local-global de [PS], on montre ensuite que l'on peut en effet supposer que $\xi \in H^3_{nr}(K/S, \mu_l^{\otimes 2})$. D'après le théorème de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [CTSS83], le groupe $H^3_{nr}(K/S, \mu_l^{\otimes 2})$ est nul, ce qui nous permet de conclure.

2.2 Comparaison entre cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer et cohomologie du corps de base

Proposition 2.2.1. *Soit K un corps. Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche D de centre K et d'indice premier $l \neq \mathrm{car}.K$. L'application naturelle*

$$H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est surjective.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence des résultats de B. Kahn [Kah97], [Kah10]. Supposons d'abord que K est parfait. Soient K^s une clôture séparable de K, $\bar{X} = X \times_K K^s$ et $G = Gal(K^s/K)$. D'après [Kah97] 5.3(8) et [Kah10] 2.5, pour X une K-variété de Severi-Brauer, on a alors un complexe :

$$0 \to \operatorname{Coker} \phi \to \operatorname{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G]\{l\} \xrightarrow{\delta} Br\, K\{l\},$$

qui est exact sauf peut-être au terme du milieu. Si X est une conique, on a immédiatement $\operatorname{Coker}\phi = 0$ car $CH^2(\bar{X}) = 0$ (ce résultat est dû à Suslin, [Sus82]).

Supposons que $l \geq 3$. Fixons un isomorphisme $\bar{X} \simeq \mathbb{P}^n_{K^s}$. Puisque D est d'indice premier l, on a que $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G] \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ([MS82], 8.7.2). Dans ce cas, d'après [Kah97] 7.1 et [Kah10] 2.5, on a explicitement $\delta(1) = 2[D] \neq 0$, où $[D]$ désigne la classe de D dans BrK et $1 \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ est identifié au générateur de $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G]$. Ainsi, sur un corps K parfait, l'application $H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est surjective. Dans le cas général, on passe à une clôture parfaite de K et on déduit le résultat par un argument de corestriction. □

Corollaire 2.2.2. *Soit K le corps des fonctions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit X la K-variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $l \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. Alors*

(i) pour tout $l' \neq l, \mathrm{car}.K$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$;

(ii) $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ et l'image de l'application naturelle

$$H^3(K, \mu_l^{\otimes 2}) \to H^3(K(X), \mu_l^{\otimes 2})$$

contient le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$.

Démonstration. Soit K' une extension de K de degré l, telle que $X_{K'}$ est isomorphe à un espace projectif. Par le même argument que dans [CT95a] 2.1.10, on a une application entre les cohomologies non ramifiées

$$H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) \to H^3_{nr}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)).$$

Puisque $K'(X_{K'})$ est une extension transcendante pure de K', on a un isomorphisme ([CTO89] 1.2) :

$$H^3_{nr}(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)).$$

Le groupe $H^3_{nr}(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2))$ est nul d'après [CTSS83] p.790. Notons que les raisonnements ci-dessus s'appliquent aussi à coefficients $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$.

Par un argument de corestriction, on obtient alors que pour l' premier, $l' \neq l$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$, et que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est annulé par l. On a alors que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est annulé par l et il vient donc de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ par [MS82] (p. 1045).

Soit $\xi \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$. On voit ξ aussi comme un élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mu_l^{\otimes 2})$ et on déduit de la proposition précédente que ξ provient d'un élément $\beta \in H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Montrons que β est annulé par l.

Par le même raisonnement que précédemment, l'image ξ' de ξ dans $H^3(K'(X_{K'}), \mu_l^{\otimes 2})$ est nulle. En effet, $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(K'/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$. On en déduit que l'image de β dans $H^3(K', \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nulle. On a alors : $l\beta = Cor_{K'/K} \circ Res_{K'/K}(\beta) = 0$. D'après [MS82], on a alors que β vient d'un élément de $H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$. □

2.3 Preuve du théorème 2.1.1

Lemme 2.3.1. *Soit R un anneau de valuation discrète dont on note K le corps des fractions et k le corps résiduel. Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche D de centre K et d'indice premier l, $(l, \mathrm{car.}\, k) = 1$. Soit α la classe de D dans $\mathrm{Br}\, K$. Soit $\xi \in H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$. Supposons que pour toute valuation v sur $K(X)$ induisant sur K soit la valuation triviale, soit la valuation associée à R, le résidu $\partial_v(\xi_{K(X)})$ est nul. On a alors :*

(i) si α est non ramifiée en R, alors $\partial_R(\xi)$ est un multiple de la spécialisation $\bar{\alpha} = \partial_R(\alpha \cup \pi)$, où π est la classe d'une uniformisante de R dans $H^1(K, \mu_l)$;

(ii) si α est ramifiée en R, alors ou bien ξ est non ramifiée en R, ou bien $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in H^1(k, \mu_l)$.

Démonstration. Pour prolonger la valuation sur K en une valuation sur $K(X)$ on s'intéresse à la structure de la fibre spéciale d'un modèle de X au-dessus de R.

Quitte à remplacer K par son complété, on peut supposer que K est complet. Notons d'abord que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K. En effet, soit K_{nr} l'extension maximale non ramifiée de K, soit R_{nr} l'anneau des entiers de K_{nr} et soit k^s une clôture séparable de k. On a une suite exacte

$$0 \to H^2(R_{nr}, \mu_l) \to H^2(K_{nr}, \mu_l) \overset{\partial_R}{\to} H^1(k^s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}).$$

Puisque k^s est séparablement clos, on a $H^1(k^s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(R_{nr}, \mu_l) = H^2(k^s, \mu_l) = 0$, d'où $H^2(K_{nr}, \mu_l) = 0$ et donc α est trivialisée par une extension non ramifiée de K.

Supposons que α est non ramifiée. Dans ce cas, puisque α est trivialisée par une extension non ramifiée de K, on a que D se prolonge en une algèbre d'Azumaya Λ sur R, qui a pour classe α (cf. [Fro97], 1.1 et 1.2). Ainsi X se prolonge en un schéma de Severi-Brauer au-dessus de R, associé à Λ, dont la fibre spéciale $\bar{X}$ est donnée par l'image de α dans $H^2(k, \mu_l)$, qui est précisement $\bar{\alpha}$.

Supposons que α est ramifiée. Sous l' hypothèse que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K, d'après Artin [Art82] 1.4, il existe un modèle de X au-dessus de R dont la fibre spéciale géométrique contient l composantes de multiplicité 1, conjuguées sur k, qui sont des variétés rationnelles.

On voit ainsi qu'il existe une valuation v sur $K(X)$ qui prolonge la valuation sur K avec le corps résiduel $\kappa(v)$ tel que

– $\kappa(v) = k(\bar{X})$, ou $\bar{X}$ est une k-variété de Severi-Brauer de classe $\bar{\alpha}$, si α est non ramifiée ;
– $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure d'une extension k' de k de degré l, sinon.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^3(K, \mu_l^{\otimes 2}) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\partial_R"] & H^3(K(X), \mu_l^{\otimes 2}) \arrow[d, "\partial_v"] \\ H^2(k, \mu_l) \arrow[r, "Res"] & H^2(\kappa(v), \mu_l). \end{tikzcd}$$

Puisque ξ devient non ramifiée sur $K(X)$, on a que $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_l) \to H^2(\kappa(v), \mu_l)$. Si α est non ramifiée, $\partial_R(\xi)$ est alors un multiple de $\bar{\alpha}$ d'après le théorème d'Amitsur, ce qui établit (i).

Supposons maintenant que α et ξ sont ramifiées en R. Puisque $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure de k', $H^2(k',\mu_l)$ s'injecte dans $H^2(\kappa(v),\mu_l)$. Ainsi $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k,\mu_l)\to H^2(k',\mu_l)$.

D'autre part, puisque α devient triviale sur $K(X)$, on voit que $\partial_R(\alpha)$ est dans le noyau de l'application $H^1(k,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})\to H^1(k',\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ par le même argument. Puisque $\partial_R(\alpha)$ est un élément non nul dans $H^1(k,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, il correspond à une extension galoisienne, cyclique, de degré l, qui coïncide avec k' car $\partial_R(\alpha)\in \mathrm{Ker}[H^1(k,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})\to H^1(k',\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})]$ et $[k':k]=l$. Puisque $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k,\mu_l)\to H^2(k',\mu_l)$, cela implique que $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha),c)$ pour $c\in H^1(k,\mu_l)$ ([Ser68], p.211), ce qui établit (ii).

□

Passons maintenant à la preuve du théorème 2.1.1. D'après le corollaire 2.2.2, il suffit d'établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_l^{\otimes 2})=0$. Notons qu'on peut supposer que K contient une racine primitive l-ième de l'unité. En effet, le degré d de l'extension K' de K, obtenue en ajoutant une racine primitive l-ième de l'unité, divise $l-1$. Ainsi $d\mathrm{Id}=Cor_{K'(X)/K(X)}\circ Res_{K'(X)/K(X)}$ est un isomorphisme sur $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_l^{\otimes 2})$. Il suffit donc d'établir $H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X)/\mathbb{F},\mu_l^{\otimes 2})=0$.

Soit α la classe de D dans BrK. Soit $\beta\in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. D'après le corollaire 2.2.2, β provient d'un élément $\xi\in H^3(K,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Montrons qu'il existe $f\in K^*$ tel que $\xi=\alpha\cup f$. Pour ce faire, on utilise le principe local-global de Parimala et Suresh 2.4.1 (cf. la section suivante).

D'après ce théorème, il suffit de trouver, pour tout point $x\in S$ de codimension 1, un élément non nul f_x dans le complété K_x de K en x tel que $\xi-\alpha\cup f_x\in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On a trois cas à considérer :

1. ξ est non ramifiée en x. Dans ce cas, $f_x=1$ convient.
2. ξ est ramifiée en x et α est non ramifiée en x. D'après le lemme 2.3.1, $\partial_x(\xi)=r\bar{\alpha}$. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{S,x}$. Alors $f_x=\pi^r$ convient : $\partial_x(\xi-\alpha\cup\pi^r)=r\bar{\alpha}-r\bar{\alpha}=0$.
3. ξ est ramifiée en x et α est ramifiée en x. D'après le lemme 2.3.1, on peut écrire $\partial_x(\xi)=(\partial_x(\alpha),c)$. On relève c en une unité c' pour la valuation de K_x. Puisque $\partial_x(\alpha\cup c')=(\partial_x(\alpha),c)$, $f_x=c'$ convient.

Ainsi il existe $f\in K^*$ tel que $\xi=\alpha\cup f\in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On a donc que β provient de $\alpha\cup f$, d'où $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F},\mu_l^{\otimes 2})=0$, ce qui termine la preuve du théorème 2.1.1. □

2.4 Le principe local-global de Parimala et Suresh dans le cas d'indice premier

Le théorème suivant est démontré dans [PS] seulement dans le cas où α est un symbole. Rappelons ici la preuve pour nous assurer que l'hypothèse que α est d'indice l suffit.

Théorème 2.4.1. *Soit K le corps des fonctions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit l un entier premier, $(l,\mathrm{car}.K)=1$. Supposons que K contient une racine primitive l-ième de l'unité. Soit $\alpha\in H^2(K,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ un élément d'indice l et soit $\xi\in H^3(K,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $f\in K^*$ tel que $\xi=\alpha\cup f$;

(ii) pour tout point $x \in S$ de codimension 1, il existe un élément non nul f_x dans le complété K_x de K en x tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Soit K le corps des fonctions d'une surface régulière propre, géométriquement intègre S, définie sur un corps k. Soit l un entier premier, $(l, \mathrm{car}.k) = 1$. Supposons que K contient une racine primitive l-ième de l'unité. Soit $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ un élément d'indice l. Pour démontrer le principe 2.4.1 on va utiliser la théorie de ramification d'algèbres à division, développée par Saltman ([Sal97], [Sal98]).

Soit $\mathrm{ram}_S(\alpha)$ le diviseur de ramification de α dans S. D'après la résolution des singularités de surfaces, quitte à éclater S, on peut supposer que le support de $\mathrm{ram}_S(\alpha)$ est réunion de courbes régulières intègres à croisements normaux. On note $C_1, \dots C_n$ ces courbes. D'après Saltman, après éventuellement quelques éclatements, on peut associer à chaque C_i son coefficient s_i. La construction de s_i tient compte de la ramification de α au-dessus des points d'intersections des divers C_i et C_j. Pour la suite on n'aura pas besoin de détailler cette construction.

Soient $F_1, \dots F_r$ des courbes irréductibles régulières et propres dans S, telles que $\{C_1, \dots C_n, F_1, \dots F_r\}$ soient à croisements normaux. Soient $m_1, \dots m_r$ des entiers. L'assertion suivante est démontrée dans [PS], 2.2 (et utilise [Sal97], 4.6 et [Sal98], 7.8) :

Proposition 2.4.2. *Avec les notations précédentes, il existe $f \in K^*$ tel que*

$$\mathrm{div}_S(f) = \sum_{i=1}^{n} s_i C_i + \sum_{s=1}^{r} m_s F_s + \sum_{j=1}^{t} n_j D_j + lE'$$

où

(i) $D_1, \dots D_t$ sont des courbes irréductibles, distinctes de $C_1, \dots C_n, F_1, \dots F_r$;
(ii) E' est un diviseur sur S ;
(iii) $(n_j, l) = 1$;
(iv) la spécialisation de α en D_j est dans $H^2_{nr}(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Remarque 2.4.3. La spécialisation $\bar{\alpha}$ de α en D_j est définie par $\bar{\alpha} = \partial_{\mathcal{O}_{S,D_j}}(\alpha \cup \pi)$ où π est une uniformisante de $\mathcal{O}_{S,D_j}$, $\kappa(D_j)$ est son corps résiduel. Le groupe $H^2_{nr}(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ désigne ici le sous-groupe de $H^2(\kappa(D_j), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ formé des éléments qui sont non ramifiés pour toute valuation discrète de $\kappa(D_j)$ au-dessus d'un point fermé de D_j. Cette définition ne nécessite pas d'hypothèse de régularité de D_j.

On passe maintenant à la preuve du principe local-global de [PS].

Démonstration du théorème 2.4.1.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est immédiate. Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$. On dispose alors des éléments f_x dans le complété K_x de K pour tout point $x \in S$ de codimension 1. Notons $\kappa(x)$ le corps résiduel de K_x.

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble fini de points de codimension 1 de S, qui consiste exactement des points de $\mathrm{ram}_S(\alpha) \cup \mathrm{ram}_S(\xi)$. Par l'approximation faible, il existe un élément $f \in K^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{C}$, f/f_x est une puissance l-ième dans K_x. On écrit :

$$\mathrm{div}_S(f) = C - \sum_{s=1}^{r} m_s F_s + lE$$

où C est à support dans $\mathcal{C}$ et où $F_s \nsubseteq \mathrm{Supp}E$, $s = 1, \ldots r$.

Ensuite, par l'approximation faible, on choisit $u \in K^*$ tel que
(i) la valuation de u en F_i est m_i ;
(ii) u est une unité en chaque point $x \in \mathcal{C}$ et l'image $\bar{u}_x$ de u dans $\kappa(x)^*/(\kappa(x)^*)^l$ est $\bar{u}_x = \begin{cases} \partial_x(\alpha), & x \in \mathrm{ram}_S(\alpha); \\ \text{non nul}, & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose $L = K(\sqrt[l]{u})$. On note $Y \xrightarrow{\pi} S$ la normalisation de S_L. Notons que la condition $(m_j, l) = 1$ assure que $Y \xrightarrow{\pi} S$ est ramifié en F_i. Ainsi on trouve une seule courbe $\tilde{F}_i$ dans la préimage de F_i et, de plus, $\kappa(\tilde{F}_i) = \kappa(F_i)$. Soit $\tilde{Y} \xrightarrow{\eta} Y$ un modèle régulier de Y, tel que $\mathrm{ram}_{\tilde{Y}}\alpha_L$ et les transformés stricts des $\tilde{F}_i$, que l'on note aussi $\tilde{F}_i$, soient à croisements normaux.

On applique ensuite la proposition 2.4.2 à $\tilde{Y}$, α_L et $\tilde{F}_i$. On trouve $g \in L^*$ tel que

$$\mathrm{div}_{\tilde{Y}}(g) = C' + \sum_{s=1}^{r} m_s \tilde{F}_s + \sum_{j=1}^{t} n_j D_j + lE'$$

où C' est à support dans $\mathrm{ram}_{\tilde{Y}}\alpha_L$. De plus, la spécialisation de α_L en D_j est dans $H^2_{nr}(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Soit $\xi' \stackrel{\text{def}}{=} \xi - \alpha \cup f N_{L/K}(g)$. Montrons que $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Soit $x \in S^{(1)}$. On a trois cas à considérer :

1. si $x \notin \mathrm{ram}_S(\alpha) \cup \mathrm{ram}_S(\xi) \cup \mathrm{Supp}(f N_{L/K}(g))$, ξ' est non ramifiée en x.
2. Supposons que $x \in \mathrm{ram}_S(\alpha) \cup \mathrm{ram}_S(\xi)$. D'après le choix de f, on a $\partial_x(\xi - \alpha \cup f) = \partial_x(\xi - \alpha \cup f_x) = 0$. Montrons que $\partial_x(\alpha \cup N_{L/K}(g)) = 0$. On étend la valuation sur K donnée par x en une valuation v sur L. D'après le choix de u, α_L est triviale sur L_v. Ainsi $\partial_x(\alpha \cup N_{L/K}(g)) = \partial_x(Cores_{L_v/K_x}(\alpha_L \cup g)) = 0$.
3. Supposons que $x \in \mathrm{Supp}(f N_{L/K}(g)) \setminus (\mathrm{ram}_S(\alpha) \cup \mathrm{ram}_S(\xi))$. On a alors $\partial_x(\xi') = \partial_x(\alpha \cup f N_{L/K}(g))$. On a
$\mathrm{div}_S(f N_{L/K}(g)) = \mathrm{div}_S(f) - \pi_*\eta_*(\mathrm{div}_{\tilde{Y}}(g))$. Puisque $\kappa(\tilde{F}_i) = \kappa(F_i)$, on en déduit

$$\mathrm{div}_S(f N_{L/K}(g)) = C'' + \sum_{j=1}^{t} n_j \pi_*\eta_*(D_j) + lE'',$$

où C'' est supporté sur $\mathcal{C}$.
Soit $D'_j = \pi(\eta(D_j))$. Si $\pi_*\eta_*(D_j) = cD'_j$ est non nul et si $l \nmid c$, on a nécessairement que $\kappa(D'_j) = \kappa(D_j)$. Ainsi soit $\partial_x(\alpha \cup f N_{L/K}(g))$ est nul, soit c'est un multiple de la spécialisation de α en D'_j, qui est dans $H^2_{nr}(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ par le choix de g. Puisque D_j est une courbe sur un corps fini, $H^2_{nr}(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$. On obtient donc $\partial_x(\xi') = 0$.

Ainsi $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. D'après [CTSS83], p.790, ce groupe est nul (cf. [CT95a] 2.1.8 pour l'identification de divers groupes de cohomologie non ramifiée), ce qui termine la preuve. □

Chapitre 3

Invariants birationnels dans la suite spectrale de Bloch-Ogus

Résumé. Dans ce chapitre, on établit l'invariance birationnelle des groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ pour X une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension n, définie sur un corps k de dimension cohomologique au plus d, $(l, \mathrm{car}.k) = 1$. En utilisant la conjecture de Kato, démontrée récémment par Kerz et Saito [KS], on obtient aussi un résultat analogue sur un corps fini pour les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$ et on relie un de ces invariants avec le conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H_{ét}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$, ce qui donne une version sur un corps fini d'un résultat de Colliot-Thélène et Voisin [CTV] 3.11 sur le corps des complexes.

3.1 Introduction

Soit k un corps et soit X une k-variété intègre, projective et lisse. Pour l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.k) = 1$, et pour $r > 0$ un entier, soit $\mathcal{H}_X^q(\mu_{l^r}^{\otimes j})$ le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H_{ét}^q(U, \mu_{l^r}^{\otimes j})$. La conjecture de Gersten, établie par Bloch et Ogus ([BO74]) permet de calculer les groupes de cohomologie de ces faisceaux comme les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \to H^q(k(X), \mu_{l^r}^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{q-1}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes (j-1)}) \to \ldots \to \bigoplus_{x \in X^{(i)}} H^{q-i}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes (j-i)}) \to \ldots$$

où $X^{(i)}$ désigne l'ensemble des points de codimension i de X ; $\kappa(x)$ est le corps résiduel du point x. Les flèches de ce complexe sont induites par des résidus et le terme $\bigoplus_{x \in X^{(i)}}$ est en degré i.

On a une suite spectrale (cf. [BO74])

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \Rightarrow H_{ét}^{p+q}(X, \mu_{l^r}^{\otimes j}). \tag{3.1}$$

Les termes E_2^{0q} de cette suite spectrale s'identifient à des groupes de cohomologie non ramifiée $H_{\mathrm{nr}}^q(X, \mu_{l^r}^{\otimes j})$ qui sont des invariants birationnels des k-variétés intègres projectives et lisses. Dans ce chapitre on s'intéresse à d'autres invariants birationnels dans (3.1).

Pour k un corps de dimension cohomologique au plus d on établit l'invariance birationnelle des groupes $H^i(X,\mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ pour $q=n+d$. Ceci est fait dans la section 3.3 par un argument d'action des correspondances. Cette action est fournie par la théorie de cycles de Rost, dont on fait des rappels dans la section 3.2. D'après la conjecture de Kato ([Kat86], [KS]) les groupes $H^i(X,\mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes n}))$, $i<n$, sont nuls pour X une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension n, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$, avec l premier à la caractéristique de $\mathbb{F}$. Dans ce cas, on établit l'invariance birationnelle des groupes $H^i(X,\mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$, cf. 3.4.2. Dans la section 3.4.3, on montre que le quotient du groupe $H^{n-3}(X,\mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ par son sous-groupe divisible maximal est isomorphe au groupe de torsion du conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_l\to H^{2n-2}_{ét}(X,\mathbb{Z}_l(n-1))$.

3.2 Rappels sur les modules de cycles de Rost

Tous les énoncés de ce paragraphe se trouvent dans les articles de Rost [Ros96] et de Déglise [Deg06].

Soit k un corps, soit X un k-schéma équidimensionnel et soit $\mathcal{F}(X)$ une classe de corps sur X (corps qui contiennent un corps résiduel d'un point de X).

1. On peut voir un **module de cycles** comme un foncteur $M:\mathcal{F}(X)\to Ab$, $M=\coprod M_q$, qui satisfait certains axiomes (existence des analogues de restriction, corestriction, résidus, multiplication par K_1 et compatibilités entre ces applications).
   Exemples.
   - $M_H(F)=\coprod_q H^q(F,D\otimes\mu_{l^r}^{\otimes q})$ où D est un G-module fini continu, d'exposant [1] l^r.
   - $M_K(F)=\coprod_q K_q^M(F)$.
   Le groupe $K_q^M(F)$ est le q-ième groupe de K-théorie de Milnor de F. C'est le quotient de $\underbrace{F^*\otimes\ldots\otimes F^*}_{\text{q fois}}$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a_1\otimes\ldots\otimes a_q$ avec $a_i+a_j=1$ pour certains $1\leq i<j\leq q$. En particulier, $K_0^M(F)=\mathbb{Z}$ et $K_1^M(F)=F^*$.
2. Un **accouplement** $M\times M'\to M''$ de modules de cycles est la donnée pour tout $F\in\mathcal{F}(X)$ de $M(F)\times M'(F)\to M''(F)$, qui satisfait des propriétés de compatibilité.
   Exemple. Pour tout module de cycles M, la multiplication par K_1 donne un accouplement $M_K\times M\to M$.
3. **Complexes et groupes de Chow**. Les groupes $C^i(X,M):=\coprod_{x\in X^{(i)}} M(\kappa(x))$ forment un complexe
   $$C(X,M)=[\ldots\to C^i(X,M)\to C^{i+1}(X,M))\to\ldots]$$
   et on note
   $$A^i(X,M)=H^i(C(X,M)).$$
   Exemples.
   - D'après la définition, le groupe de Chow $CH^i(X)$ est un facteur direct de $A^i(X,M_K)$.
   - Pour X lisse, d'après les résultats de Bloch et Ogus [BO74], on a $A^i(X,M_H)=\coprod_q H^i(X,\mathcal{H}^q(D\otimes\mu_{l^r}^{\otimes q}))$, où $\mathcal{H}^q(D\otimes\mu_{l^r}^{\otimes q})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U\mapsto H^q(U,D\otimes\mu_{l^r}^{\otimes q})$.

1. Tous les énoncés de ce paragraphe sont vrais aussi à coefficients μ_m où $m>0$ est un entier.

4. **Fonctorialités**.
   (a) Pour $f : Y \to X$ propre, on a $f_* : A^i(Y, M) \to A^{i-d_f}(X, M)$ où $d_f = dim\, Y - dim\, X$ est la dimension relative de f (pour simplifier, pour X et Y intègres). Ce morphisme est induit par un morphisme de complexes de bidegré $(d_f, 0)$, correspondant respectivement à la graduation de C et de M (cf. [Deg06] 1.3). Il est fonctoriel, c'est-à-dire, pour $g : Z \to Y$ propre, on a $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ ([Ros96] 4.1).
   Exemples.
   - Pour Y de codimension 1 dans X et $f : Y \to X$ une immersion fermée on a
   $$H^i(Y, \mathcal{H}^q(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes q})) \to H^{i+1}(X, \mathcal{H}^{q+1}(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes (q+1)})).$$
   - Pour Y propre et $f : X \times Y \to X$ une projection, on a
   $$H^i(X \times Y, \mathcal{H}^q(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes q})) \to H^{i-\dim Y}(X, \mathcal{H}^{q-\dim Y}(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes (q-\dim Y)})).$$
   (b) Pour $f : Y \to X$ un morphisme plat, on dispose d'un morphisme $f^* : A^i(X, M) \to A^i(Y, M)$, induit par un morphisme de complexes de bidegré $(0, 0)$. Dans le cas où X et Y sont lisses, par la construction plus difficile ([Ros96] 12, [Deg06] 3.18) on dispose d'un morphisme $f^* : A^i(X, M) \to A^i(Y, M)$ pour $f : Y \to X$ quelconque. Pour $g : Z \to Y$ avec Z lisse, on a $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ([Ros96] 12.1).
5. **Localisation**. Pour $Y \overset{\imath_Y}{\to} X$ un fermé purement de codimension c et $U = X \setminus Y \overset{\imath_U}{\hookrightarrow} X$ son complémentaire, on a une longue suite exacte de localisation[2] ([Ros96] 5, p.356)
   $$\ldots \overset{\partial}{\to} A^{i-c}(Y, M) \overset{\imath_{Y*}}{\to} A^i(X, M) \overset{\imath_U^*}{\to} A^i(U, M) \overset{\partial}{\to} A^{i-c+1}(Y, M) \to \ldots$$
6. **Invariance homotopique**. Pour $\pi : \mathbb{A}^n_X \to X$ la projection naturelle, l'application $\pi^* : A^i(X, M) \to A^i(\mathbb{A}^n_X, M)$ est un isomorphisme[3] ([Ros96] 8.6).
7. **Cup-produits**. Pour un accouplement $N \times M \to M$ de modules de cycles, on a des produits
   $$\times : C^p(Y, N) \times C^i(Z, M) \to C^{p+i}(Y \times Z, M).$$
   Pour X lisse cela donne
   $$\cup : A^*(X, N) \times A^*(X, M) \to A^*(X \times X, M) \overset{\Delta_X^*}{\to} A^*(X, M)$$
   où Δ_X est la diagonale. On a ici une formule de projection ([Deg06] 5.9(3)) pour X, Y lisses et $f : Y \to X$ propre
   $$f_*(x \cup f^* y) = f_* x \cup y.$$
   Exemple. En utilisant que $CH^p(X)$ est un facteur direct de $A^p(X, M_K)$, pour X propre et lisse, l'accouplement $M_K \times M \to M$ donne
   $$CH^p(X) \times A^i(X, M) \to A^{p+i}(X, M).$$
   Pour $M = M_H$ cela donne
   $$CH^p(X) \times H^i(X, \mathcal{H}^q(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes q})) \to H^{p+i}(X, \mathcal{H}^{q+p}(D \otimes \mu_{l^r}^{\otimes (q+p)})).$$

2. sans hypothèses de lissité
3. sans hypothèses de lissité

8. **Action de correspondances**. (cf. [Deg06] §6) Étant donné une correspondance $\alpha \in CH^p(X \times Y)$ avec X et Y propres et lisses, on définit une application $\alpha_* : A^i(X, M) \to A^{p+i-\dim X}(Y, M)$ par la formule usuelle

$$\alpha_*(x) = p_{Y,*}(\alpha \cup p_X^* x),$$

où p_X (resp. p_Y) est une projection de $X \times Y$ sur le premier (resp. sur le deuxième) facteur. Au moins pour les correspondances finies, i.e. pour les correspondances $\alpha \in CH^p(X \times Y)$ qui sont finies et surjectives sur une composante connexe de X, cette action est compatible avec la composition de correspondances, d'après [Deg06] 6.5. Ce cas de correspondances finies nous suffira pour la suite. Dans le cas général, on peut voir qu'il suffit de vérifier les trois propriétés de [CTV] 9.3 ; on les trouve dans [Deg06] 5.9, puis dans [Ros96] 12.5.

3.3 Application aux invariants birationnels

Soit k un corps et soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement intègre. Soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}\, .k) = 1$. On peut voir les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ comme les groupes de Chow, associés à des modules de cycles de Rost. On dispose ainsi d'une action de correspondances sur ces groupes.

Lemme 3.3.1. *Soit k un corps et soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension n. Soit $Z \subset X \times X$ un cycle premier de dimension n, dont l'image par la première projection est contenue dans une sous-variété fermée stricte $D \subset X$. Soient $i, q \geq 0$ et j des entiers. Soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}\, .k) = 1$. Supposons que le groupe $H^i(V, \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ est nul pour toute k-variété projective et lisse V, de dimension $n-1$. Alors pour toute classe $\alpha \in H^i(X, \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ on a $[Z]_*(\alpha) = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que D est un diviseur sur X.

D'après le théorème de de Jong, amélioré par Gabber (cf.[Ill]), il existe un morphisme propre, génériquement fini $f : X' \to X$ dont le degré d_f est premier à l, tel que X' est lisse et $f^{-1}(D)_{\mathrm{red}}$ est à croisements normaux, en particulier, ses composantes irréductibles sont lisses.

On a le diagramme commutatif suivant, où l'on note $X_2 = X \times X, X_2' = X' \times X'$, $\mathcal{H}^q = \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes j})$ et $\mathcal{H}^{q+n} = \mathcal{H}^{q+n}(\mu_{l^r}^{\otimes(n+j)})$:

$$\begin{tikzcd}
CH^n(X_2') \times H^i(X', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "id \times pr_1^*"] \arrow[d, shift right=4ex, "f_*"] & CH^n(X_2') \times H^i(X_2', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, shift right=4ex, "f_*"] & H^{n+i}(X_2', \mathcal{H}^{q+n}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] \arrow[d, "f_*"] & H^i(X', \mathcal{H}^q) \arrow[d, "f_*"] \\
CH^n(X_2) \times H^i(X, \mathcal{H}^q) \arrow[r, "id \times pr_1^*"] \arrow[u, shift right=4ex, "f^*"'] & CH^n(X_2) \times H^i(X_2, \mathcal{H}^q) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, shift right=4ex, "f^*"'] & H^{n+i}(X_2, \mathcal{H}^{q+n}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] & H^i(X, \mathcal{H}^q)
\end{tikzcd}$$

Le carré au milieu de ce diagramme commute d'après la formule de projection. C'est-à-dire, si $x \in CH^n(X_2')$ et $y \in H^i(X_2, \mathcal{H}^q)$, on a $f_* x \cup y = f_*(x \cup f^* y)$. Soit $\alpha \in H^i(X, \mathcal{H}^q)$. Puisque $f_* f^*[Z] = d_f[Z]$ dans $CH^n(X_2)$, on a

$$d_f[Z]_*(\alpha) = pr_{2,X,*}(d_f[Z] \cup pr_{1,X}^* \alpha) = pr_{2,X,*}(f_*(f^*[Z] \cup f^* pr_{1,X}^* \alpha)) =$$
$$= f_*(pr_{2,X',*}(f^*[Z] \cup pr_{1,X'}^* f^* \alpha)) = f_*([f^* Z]_*(f^* \alpha)).$$

Puisque d_f est premier à l, il suffit donc de montrer que $[f^*Z]_*(f^*\alpha) = 0$. On peut le faire pour chaque composante irréductible séparément. On peut donc supposer que $Z' := f^*Z$ est inclus dans $D' \times X'$ avec D' lisse. On écrit $\imath$ pour les inclusions $D' \hookrightarrow X'$ et $D' \times X' \hookrightarrow X \times X'$.

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
CH^{n-1}(D' \times X') \times H^i(D', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "id\times pr_1^*"] \arrow[d, shift right, "\imath_*"] & CH^{n-1}(D' \times X') \times H^i(D' \times X', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "pr_{2,*}\circ\cup"] \arrow[d, shift right, "\imath_*"] & H^i(X', \mathcal{H}^q) \arrow[d] \\
CH^n(X' \times X') \times H^i(X', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "id\times pr_1^*"] \arrow[u, shift right, "\imath^*"] & CH^n(X' \times X') \times H^i(X' \times X', \mathcal{H}^q) \arrow[r, "pr_{2,*}\circ\cup"] \arrow[u, shift right, "\imath^*"] & H^i(X', \mathcal{H}^q).
\end{tikzcd}$$

On a donc que l'action de $[Z']$ se factorise par $H^i(D', \mathcal{H}^q)$, groupe qui est nul d'après l'hypothèse. Cela termine la preuve du lemme. □

Remarque 3.3.2. (i) Ce lemme s'applique aussi à des groupes $H^i(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$.

(ii) Plus généralement, le lemme s'applique à des groupes $A^i(X, M_q)$ pour un module de cycles $M = \coprod M_q$, sous les hypothèses que $A^i(X, M_q)$ est de torsion l-primaire avec $(l, \text{car}.k) = 1$ et que $A^i(V, M_q) = 0$ pour toute k-variété V projective et lisse de dimension $n-1$.

Théorème 3.3.3. *Pour k un corps de dimension cohomologique $cd\,k \leq d$, les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$, où $j \in \mathbb{Z}$ et $(l, \text{car}.k) = 1$, sont des invariants birationnels des k-variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimension n. De plus,*

(i) pour X/k lisse, $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \simeq H^{i+N}(\mathbb{P}^N_X, \mathcal{H}^{n+N+d}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+N)}))$;

(ii) on a $H^i(\mathbb{P}^N_k, \mathcal{H}^{N+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) = 0$ pour $i < N$ et $H^N(\mathbb{P}^N_k, \mathcal{H}^{N+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \simeq H^d(k, \mu_{l^r}^{\otimes(j-N)})$;

(iii) si X et Y sont des k-variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimensions respectives n_X et n_Y, stablement birationnelles[4], alors

$$H^i(X, \mathcal{H}^{n_X+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \simeq H^{i+n_Y-n_X}(Y, \mathcal{H}^{n_Y+d}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+n_Y-n_X)})), \quad i \geq 0.$$

Démonstration. On raisonne comme dans [CTV] 3.4. Soient X, Y deux k-variétés géométriquement intègres, projectives et lisses, et soit $\phi : X \dashrightarrow Y$ une application birationnelle. On note $n = \dim X = \dim Y$. L'adhérence Γ_ϕ du graphe de ϕ définit une correspondance $[\Gamma_\phi] \in CH^n(X \times Y)$. On note $\Gamma_{\phi^{-1}} \subset Y \times X$ le graphe de ϕ^{-1}. D'après [CTV] 3.5, le composé $[\Gamma_{\phi^{-1}}] \circ [\Gamma_\phi] \in CH^n(X \times X)$ se décompose comme $[\Gamma_{\phi^{-1}}] \circ [\Gamma_\phi] = \Delta_X + W$ où Δ_X est la diagonale de X et W est un cycle sur $X \times X$ supporté sur $D \times X$, D étant une sous-variété fermée propre de X.

Les correspondances $[\Gamma_\phi]$ et $[\Gamma_{\phi^{-1}}]$ permettent de définir des applications entre les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ et $H^i(Y, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ (cf. section 3.2). D'après Bloch-Ogus et l'hypothèse $cd\,k \leq d$, $H^i(V, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) = 0$ pour toute k-variété projective et lisse V, de dimension $n-1$. Le lemme ci-dessus, appliqué à chaque composante irréductible de W (resp. à chaque composante de $[\Gamma_\phi] \circ [\Gamma_{\phi^{-1}}] - \Delta_Y$), montre alors que les applications composées induites sont des identités, d'où le premier énoncé du théorème.

4. c'est-à-dire, il existent des entiers N_X et N_Y tels que $X \times \mathbb{P}^{N_X}_k$ et $Y \times \mathbb{P}^{N_Y}_k$ sont birationnelles

D'après ce qui précède, pour établir (i), il suffit de montrer que $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \simeq H^{i+1}(X \times \mathbb{P}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes (j+1)}))$. On écrit la suite de localisation pour $Y = X \times \{\infty\} \subset X \times \mathbb{P}^1$:

$$H^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+1)})) \to H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) \to H^{i+1}(X \times \mathbb{P}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+1)})) \to$$
$$\to H^{i+1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+1)})).$$

On a

$$H^s(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+1)})) \overset{pr_X^*}{\simeq} H^s(X, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{l^r}^{\otimes(j+1)})) = 0, \ s \geq 0$$

d'après Bloch-Ogus ($dim\, X = n$ et $cd\, k \leq d$). On applique cela à $s = i$ et $i+1$ et on obtient l'énoncé (i).

Les énoncés (ii) et (iii) résultent de (i), ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

3.4 Invariants sur un corps fini

3.4.1 Rappels sur la conjecture de Kato

Soit X un schéma de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit l un entier, $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ et soit $r > 0$. Dans [Kat86], Kato a introduit le complexe $KC(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})$ suivant :

$$\ldots \to \bigoplus_{x \in X_{(i)}} H^{i+1}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes i}) \to \bigoplus_{x \in X_{(i-1)}} H^i(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes(i-1)}) \to$$
$$\ldots \to \bigoplus_{x \in X_{(1)}} H^2(\kappa(x), \mu_{l^r})) \to \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}))$$

où le terme $\bigoplus_{x \in X_{(i)}}$ est en degré i. On note $KH_i(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})$ le i-ème groupe d'homologie de ce complexe.

On pose $KC(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) = \varinjlim KC(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})$ et on note $KH_i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ le i-ème groupe d'homologie de ce complexe.

Pour X projective et lisse, géométriquement intègre, Kato [Kat86] a conjecturé l'exactitude de ces complexes, sauf au terme 0. Cette conjecture a été récemment démontrée par Kerz et Saito, ce qui utilise aussi des travaux de Jannsen.

Théorème 3.4.1. (Kerz et Saito [KS], Thm.0.4) *Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbb{F}$ et soit l un nombre premier,* $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$. *Alors $KH_i(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i > 0$ et $r > 0$ et $KH_0(X, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$.*

D'après la définition, pour X une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension n, $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes n})) = KH_{n-i}(X, \mathbb{Z}/l^r)$. Ces invariants birationnels sont donc tous nuls, sauf le dernier.

Pour $j \neq n$ et pour les coefficients $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$, un lemme de Sato et Saito permet de voir aussi la nullité des groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}((\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$, ce qui n'utilise pas la conjecture de Kato.

En effet, on a dans ce cas que tous les termes dans la résolution de Bloch-Ogus du faisceau $\mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ sont nuls.

Proposition 3.4.2. (Kahn [Kah93a] ; Saito et Sato [SS10], Lemma 2.7) *Soit L un corps de degré de transcendance t sur $\mathbb{F}$. Soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. Alors*

$$H^{t+1}(L, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) = 0$$

pour tout $j \neq t$. En particulier, pour X une variété projective et lisse sur $\mathbb{F}$ de dimension n et pour tout $j \neq n$ le faisceau $\mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ est identiquement nul, ainsi que tous les termes de sa résolution de Bloch-Ogus. Ainsi, $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))) = 0$ pour tout i et pour $j \neq n$.

Quant aux coefficients finis, en utilisant certains des arguments de Bruno Kahn [Kah93a], on établit aussi la nullité des groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et $i < n$ comme une conséquence de la conjecture de Kato. Cette méthode utilise également la conjecture de Bloch-Kato. Donnons ici les arguments, ce qui corrige la preuve de [Kah93a].

Proposition 3.4.3. *Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbb{F}$, de dimension n, et soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. Alors $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j})) = 0$ pour $i < n$ et $r > 0$.*

Démonstration. Soit $L/\mathbb{F}$ une extension galoisienne, de groupe G, qui trivialise le faisceau $\mu_{l^r}^{\otimes(j-n)}$ et qui est minimale pour cette propriété. Soit $\pi : Y = X \times_{\mathbb{F}} L \to X$ le revêtement de X correspondant. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{H}_Y^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j})$ et soit

$$0 \to \mathcal{F} \to F^0 \to F^1 \to \ldots \to F^n \to 0$$

la résolution de Gersten de $\mathcal{F}$.

Lemme 3.4.4. *(i) on a $\hat{H}^*(G, \pi_* F^i) = 0$;*
(ii) $(\pi_* \mathcal{F})^G \simeq \mathcal{H}_X^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j})$.

Démonstration. (cf. [Kah93a] prop.2) D'après la définition, F^i est la somme directe sur les points de codimension i de Y des faisceaux $\imath_{y,*} H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})$). Pour établir (i), il suffit donc de voir que $\hat{H}^*(G, H^{n+1-i}(\kappa(x) \otimes_X Y, \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})) = 0$ pour $i > 0$ et pour tout point $x \in X^{(i)}$. Si y est un point de Y au-dessus de x et $D_y \subset G$ son groupe de décomposition, on a $\hat{H}^*(G, H^{n+1-i}(\kappa(x) \otimes_X Y, \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})) = \hat{H}^*(D_y, H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)}))$ d'après le lemme de Shapiro. On peut donc supposer que G est le groupe de décomposition de y.

Sous la condition $\mathrm{cd}_l\, \kappa(x) \leq n + 1 - i$, on a un isomorphisme

$$H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})_G \to H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)}),$$

induit par la corestrection. On peut le voir par exemple en utilisant une suite spectrale de Tate ([Ser68], appendice au ch. 1, Th. 1)

$$E^2_{pq} = H_p(G, H^{n+1-i-q}(\kappa(y), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})) \Rightarrow H^{n+1-i-p-q}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)}).$$

Puisque G est cyclique ($\mathbb{F}$ est un corps fini), pour conclure, il suffit d'établir que la restriction induit un isomorphisme $H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)}) \to H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^r}^{\otimes(j-i)})^G$. Sous la conjecture de Bloch-Kato, c'est l'énoncé (1) du Th. 1 de Bruno Kahn [Kah93b]. □

Pour montrer la proposition, on utilise la cohomologie mixte de Grothendieck. On a deux suites spectrales ([Gro57], 5.2.1) :

$$\begin{aligned} E_2^{pq} &= H^p(G, H^q(X_{Zar}, \pi_*\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{Zar}, G; \pi_*\mathcal{F}) \\ E_2^{\prime pq} &= H^p(X_{Zar}, H^q(G, \pi_*\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{Zar}, G; \pi_*\mathcal{F}) \end{aligned}$$

où les $H^i(X_{Zar}, G; \mathcal{G})$ désignent les foncteurs dérivés du foncteur

$$\mathcal{G} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{G})^G$$

de la catégorie des faisceaux de Zariski sur X, munis d'une action de G, compatible avec l'action triviale de G sur X, dans la catégorie des groupes abéliens.

D'après le lemme de Shapiro, les termes E_2^{pq} de la première suite spectrale se récrivent comme $E_2^{pq} = H^p(G, H^q(Y_{Zar}, \mathcal{F}))$. Ainsi, pour $p < n$, le théorème 3.4.1 et la suite E_2^{pq} donnent

$$H^p(X_{Zar}, G; \pi_*\mathcal{F}) = 0. \tag{3.2}$$

D'après [Kah93a], prop. 3, la suite

$$0 \to H^q(G, \pi_*F^0) \to H^q(G, \pi_*F^1) \to \ldots \to H^q(G, \pi_*F^n) \to 0$$

est une résolution flasque de $H^q(G, \pi_*\mathcal{F})$. Ainsi, $H^p(X_{Zar}, H^q(G, \pi_*\mathcal{F})) = 0$, $q > 0$, d'après le lemme précédent. La deuxième suite spectrale, commençant à $E_2^{\prime pq}$, et le (ii) du lemme donnent alors des isomorphismes pour tout $p \geq 0$:

$$H^p(X_{Zar}, G; \pi_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X_{Zar}, H^0(G, \pi_*\mathcal{F})).$$

D'après 3.4.4(ii) et (3.2), cela donne, pour $0 \leq p < n$

$$0 = H^p(X_{Zar}, G; \pi_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{H}_X^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j})).$$

Cela termine la preuve de la proposition. □

3.4.2 Les invariants

Sur un corps fini, on a des analogues du théorème 3.3.3.

Théorème 3.4.5. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ où $i < n-1$ et $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$, sont des invariants birationnels des $\mathbb{F}$-variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimension n. De plus,*

(i) pour $X/\mathbb{F}$ projective et lisse, de dimension n et pour $i < n-1$ on a $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \simeq H^{i+N}(\mathbb{P}_X^N, \mathcal{H}^{n+N}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$;

(ii) on a $H^i(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{H}^N(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) = 0$ pour $i < N-1$;

(iii) si X et Y sont des k-variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimensions respectives $n_X \leq n_Y$, stablement birationnelles[5], alors

$$H^i(X, \mathcal{H}^{n_X}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \simeq H^{i+n_Y-n_X}(Y, \mathcal{H}^{n_Y}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))), \quad i < n_X - 1.$$

5. c'est-à-dire, il existent des entiers N_X et N_Y tels que $X \times \mathbb{P}_k^{N_X}$ et $Y \times \mathbb{P}_k^{N_Y}$ sont birationnelles

Démonstration. On procède comme dans la preuve de 3.3.3. Avec les mêmes notations, pour établir la première partie, il suffit de montrer que la correspondance $[W]$ agit trivialement sur $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$. Cela résulte du lemme 3.3.1, car les groupes $H^i(V, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$, $i < n-1$, sont nuls pour toute k-variété projective et lisse V, de dimension $n-1$, d'après le théorème de Kerz et Saito 3.4.1. On obtient l'énoncé (i) en utilisant la suite de localisation et le fait que

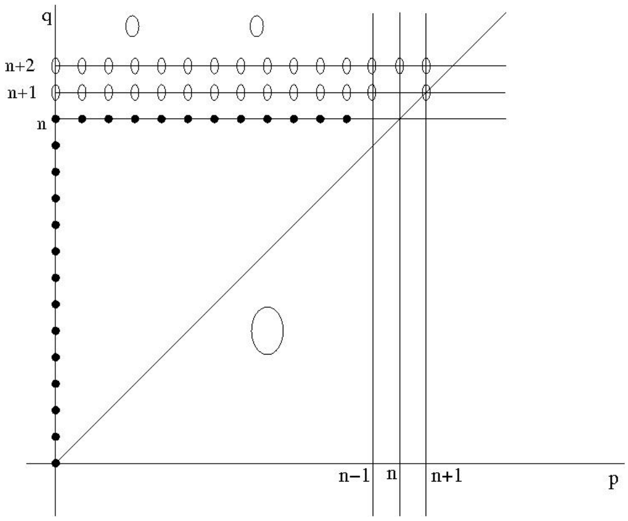
$$H^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \overset{pr_X^*}{\simeq} H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) = 0,\ i < n-1,$$

d'après 3.4.2 ; (ii) et (iii) en résultent.

□

Notons que pour $i = n-1$ le groupe $H^{n-1}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ n'est pas un invariant birationnel. En effet, ce groupe est dual de $H^2_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(1))$ (cf.[Mil86b] 1.14).

Pour des variétés projectives et lisses, de dimension n sur un corps fini $\mathbb{F}$ on a ainsi le schéma suivant de la page E_2 de la suite spectrale de Bloch et Ogus [BO74] $E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \Rightarrow H^{p+q}_{ét}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))$, où les lignes $p = 0$ et $q = n$ (sauf pour les points $p = n-1$ et $p = n$) sont formées d'invariants birationnels (cf. [CT95a] 4.4.1 pour la ligne $p = 0$).



Remarque 3.4.6. L'énoncé du théorème ci-dessus vaut aussi dans les deux cas suivants :

(i) Pour les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$ où $i \geq 0$, $j \neq n-1$ et $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. Dans ce cas, comme dans la preuve du théorème ci-dessus, pour appliquer le lemme 3.3.1, on utilise 3.4.2 pour voir que les groupes $H^i(V, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ sont nuls pour V projective et lisse de dimension $n-1$. Cela n'utilise donc pas la conjecture de Kato.

(ii) Pour les groupes $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ où $i < n-1$ et $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. Dans ce cas on utilise 3.4.3 pour appliquer le lemme 3.3.1.

3.4.3 Lien avec les 1-cycles

Pour k un corps, X un k-schéma lisse et A un groupe abélien, on dispose d'un complexe de faisceaux $A_X(n)_{ét}$ (resp. $A_X(n)$ pour le complexe de faisceaux de Zariski), défini à partir du complexe de cycles de Bloch $z^n(X,\cdot)$ (cf. par exemple [Kah] 2.2). On note $\mathbb{H}^i_{ét}(X, A_X(n))$ (resp. $\mathbb{H}^i(X, A_X(n))$) l'hypercohomologie de ce complexe. Pour $n = 0$ on a $\mathbb{Z}_X(0) = \mathbb{Z}$. Pour $n = 1$ le complexe $\mathbb{Z}_X(1)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{G}_m[-1]$ (cf. par exemple [Kah] (2.4)).

Pour X quasi-projectif et lisse, on a $CH^n(X, 2n-i) \simeq \mathbb{H}^i(X, \mathbb{Z}_X(n))$.

Pour X lisse, on a une suite spectrale de coniveau ([Kah10] 2.7),

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \mathbb{H}^{q-p}_{ét}(\kappa(x), \mathbb{Z}(n-p)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(n))$$

où

1. pour $q \geq n+2$, $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^{q-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)))$, cf. [Kah97] 5.1.
2. $E_1^{p,q} = 0$ pour $q = n+1$ (sous la conjecture de Bloch-Kato, qui est maintenant établie par Voevodsky [Voe]), cf. [Kah10] 2.7.

Théorème 3.4.7. *Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension n. On a une suite exacte à la* car.$\mathbb{F}$*-torsion près*

$$H^{n-4}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) \to CH^{n-1}(X) \to \mathbb{H}^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(n-1)) \to H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) \to 0$$

Démonstration. On dispose d'une suite spectrale de coniveau pour $\mathbb{Z}_X(n-1))$:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \mathbb{H}^{q-p}_{ét}(\kappa(x), \mathbb{Z}(n-1-p)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(n-1)).$$

On a :

1. $E_2^{p,q} = E_1^{p,q} = 0$ pour $p \geq n+1$ car $X^{(p)}$ est vide pour un tel p.
2. la ligne $E_2^{p,n}$ est constituée de zéros, sous la conjecture de Bloch-Kato ;
3. $E_2^{p,n+1} = H^p(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)))$;
4. à la p-torsion près, $E_2^{p,n+2} = H^p(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) = 0$ d'après 3.4.2 ;
5. pour $q \geq n+3$, $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^{q-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n))) = 0$ d'après Bloch-Ogus ($dim\, X = n$ et $cd\, \mathbb{F} \leq 1$) ;
6. pour $q = n-1$ et pour $q = n-2$, $E_2^{n,q} = E_1^{n,q} = 0$. En effet, pour F un corps et pour $m < 0$, on a $H^r(F, \mathbb{Z}(m)) = H^{r-1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(m-1)) = 0$ pour $r \leq 0$, cf. [Kah97] 2.4.
7. $E_2^{n-1,n-1} = CH^{n-1}(X)$. En effet, $E_1^{n-1,n-1} = \bigoplus_{x\in X^{(n-1)}} \mathbb{H}^0_{ét}(\kappa(x), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{x\in X^{(n-1)}} \mathbb{Z}$ et $E_1^{n-2,n-1} = \bigoplus_{x\in X^{(n-2)}} \mathbb{H}^1_{ét}(\kappa(x), \mathbb{Z}(1)) = \bigoplus_{x\in X^{(n-2)}} \kappa(x)^*$.

Ainsi, à la p-torsion près, dans la filtration sur $\mathbb{H}^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(n-1))$, on n'a que deux termes

$$E_\infty^{n-3,n+1} = E_2^{n-3,n+1} = H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)))$$

et

$$E_\infty^{n-1,n-1} = E_2^{n-1,n-1}/E_2^{n-4,n+1} = CH^{n-1}(X)/H^{n-4}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))).$$

On obtient ainsi la suite du théorème. □

La méthode de Colliot-Thélène et Kahn [CTK] 2.1 permet de relier le groupe $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ avec le conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$. Rappelons que pour un corps k on dit que k est à cohomologie galoisienne finie, si pour tout module galoisien fini M et tout entier $i \geq 0$, les groupes de cohomologie $H^i(k, M)$ sont finis. L'énoncé suivant pour $i = 2$ est dans [CTK] 2.1. La preuve du cas général utilise les mêmes arguments, on les détaille ci-dessous.

Théorème 3.4.8. (cf. [CTK] 2.1) *Soient k un corps à cohomologie galoisienne finie, X une k-variété lisse et l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.k) = 1$. Soit $i \geq 0$. Notons*

$$M = Coker[CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(i))]$$

le conoyau de l'application classe de cycle l-adique étale et

$$C = Coker[CH^i(X) \to \mathbb{H}^{2i}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(i))]$$

le conoyau de l'application classe de cycle motivique étale.
Alors le groupe (fini) de torsion M_{tors} est isomorphe au quotient du groupe $C\{l\}$ de torsion l-primaire de C par son sous-groupe divisible maximal.

Remarque 3.4.9. Le groupe C est de torsion. En effet, il résulte de [Kah] (2.2) et 2.6(c) qu'on a un isomorphisme $CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{2i}_{Zar}(X, \mathbb{Q}_X(i)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{2i}_{ét}(X, \mathbb{Q}_X(i))$.

En combinant le théorème ci-dessus avec le théorème 3.4.7, on obtient

Corollaire 3.4.10. *Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension n et soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. Alors le groupe (fini) de torsion du conoyau de l'application classe de cycle $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ est isomorphe au quotient du groupe $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ par son sous-groupe divisible maximal.*

Remarque 3.4.11.
(i) Si $n \geq 2$ et si $\mathrm{Br}\, X$ est fini (ce qui est le cas sous la conjecture de Tate pour les cycles de codimension 1), le conoyau de l'application $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ est fini ([CTK] 7.3).
(ii) Pour X une variété appartenant à la classe $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$ (conjecturalement, c'est le cas pour toute $\mathbb{F}$-variété projective et lisse), le groupe $\mathbb{H}^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(n-1))$ est de type fini ([Kah03] 3.10). Ainsi, le groupe $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ est conjecturalement fini.

Remarque 3.4.12. Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension n, munie d'un morphisme $\phi : X \to C$ où C est une courbe projective et lisse, géométriquement connexe. Soit l un nombre premier, $(l, \mathrm{car}.\mathbb{F}) = 1$. D'après un théorème de Saito (cf. [Sai89] et [CT99]), si l'application classe de cycle l-adique $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2n-2}_{ét}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ est surjective, alors l'existence d'un zéro-cycle de degré premier à l sur la fibre générique X_η de l'application ϕ se détecte seulement en utilisant l'obstruction de Brauer-Manin. Plus précisement, s'il existe sur X_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de X_η

via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [Man71]), alors il existe sur X_η un zéro-cycle de degré premier à l.

Démonstration du théorème 3.4.8. Pour montrer ce théorème, on va d'abord établir qu'on a une application naturelle $\phi : \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(i))$ telle que

(i) le conoyau de ϕ est sans torsion ;

(ii) l'application induite

$$\phi/l^r : [\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l]/l^r \to H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(i))/l^r$$

est injective.

On dispose d'un triangle exact (cf. [Kah] 2.6)

$$\mathbb{Z}_{\acute{e}t}(i) \overset{\times l^r}{\to} \mathbb{Z}_{\acute{e}t}(i) \to \mu_{l^r}^{\otimes i}.$$

En prenant l'hypercohomologie, on en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r \to H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mu_{l^r}^{\otimes i}) \to \mathbb{H}^{2i+1}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))[l^r] \to 0. \tag{3.3}$$

Puisque le groupe de milieu est fini, on obtient une suite exacte en passant à la limite projective :

$$0 \to \varprojlim [\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r] \to H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(i)) \to \varprojlim [\mathbb{H}^{2i+1}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))[l^r]] \to 0. \tag{3.4}$$

Les applications $\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \to \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r$ induisent une application $\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \to \varprojlim [\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r]$ qui est surjective d'après [CTK] 2.2 (ii). On définit alors ϕ comme une application composée

$$\phi : \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \to \varprojlim [\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r] \to H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(i)).$$

Son conoyau est sans torsion car le terme de droite de la suite (3.4) l'est, puisque c'est un module de Tate.

L'injectivité de ϕ/l^r résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l]/l^n} \arrow[r] \arrow[d, "\phi/l^n"'] & \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}(i))/l^n. \arrow[d] \\
H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l(i))/l^n \arrow[r] & H^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mu_{l^r}^{\otimes i}).
\end{tikzcd}$$

où les applications du bas et de droite sont injectives (cf. la suite (3.3) pour celle de droite) et l'application du haut est un isomorphisme d'après [CTK] 2.2 (i).

Puisque C est de torsion (cf. 3.4.9), on a un diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{H}^{2i}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & C\{l\} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0"'] & 0 \\
CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] & H^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i)) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

où l'application ψ_0 est induite par le diagramme. Notons que la commutativité du carré de gauche de ce diagramme, i.e. la compatibilité des applications classe de cycle résulte de [Kah] 3.1.

Comme $C\{l\}$ est un groupe de torsion, l'application ψ_0 induit une application $\psi : C\{l\} \to M_{tors}$. Puisque le conoyau de ϕ est sans torsion, on déduit par chasse au diagramme que ψ est surjective. Puisqu'on a de plus que ϕ/l^n est injective, on en déduit qu'on a un isomorphisme $\psi/l^n : C\{l\}/l^n \to M_{tors}/l^n$.

Puisque le groupe M_{tors} est fini, on a $M_{tors} \simeq M_{tors}/l^N$ pour N assez grand, i.e. pour $N \geq N_0$. Pour un tel N, on a donc un isomorphisme $l^{N+1}C\{l\} \simeq l^N C\{l\}$. Ainsi, le groupe $l^{N_0}C\{l\}$ est le sous-groupe divisible maximal de $C\{l\}$ et le quotient de $C\{l\}$ par ce sous-groupe et isomorphe à M_{tors}. $\square$

Chapitre 4

Ramification dans les corps de fonctions

Let k be a field of characteristic zero, let X be a geometrically integral k-variety of dimension n and let K be its field of functions. Under the assumption that K contains all r^{th} roots of unity for an integer r, we prove that, given an element $\alpha \in H^m(K, \mathbb{Z}/r)$, there exist n^2 functions $\{f_i\}_{,i=1,\dots,n^2}$ such that α becomes unramified in $L = K(f_1^{1/r}, \dots, f_{n^2}^{1/r})$.

4.1 Introduction

Let K be a field and let $\alpha \in \operatorname{Br} K$ be an element of order r. In [Sal97], [Sal98], Saltman proved that if K is the function field of a p-adic curve and $(r, p) = 1$, then α becomes trivial over an extension of K of degree r^2. As a motivation for the question we consider in this paper, let us give a brief sketch of his arguments. Let us assume that r is prime and that K contains all r^{th} roots of unity. In fact, one can see that this case implies the general case. We view K as a function field of a regular, integral two-dimensional scheme X, projective over the spectrum of the ring of integers of a p-adic field. Saltman then proved that one can find two functions $f_1, f_2 \in K$ such that α becomes unramified in $L = K(f_1^{1/r}, f_2^{1/r})$ with respect to any rank one discrete valuation ring centered on X. This is sufficient to conclude, using the classical result that the Brauer group of a regular flat proper (relative) curve over the ring of integers of a p-adic field is trivial (cf. [Lic69], [Tat57]).

Let us consider the case of higher dimensions, that is, assume that K is the field of functions of an n-dimensional variety X, defined over a field k. Following Saltman's work, given a class $\alpha \in \operatorname{Br} K$, one may wonder if there is a bound N depending only on K, such that we can kill the ramification of α with N functions. Our result (cf. theorem 4.2.1) gives an affirmative answer $N = n^2$ for α of order r under the assumption that K contains all r^{th} roots of unity. Our method also works for elements of $H^m(K, \mathbb{Z}/r)$ and not only for $m = 2$.

4.2 Statement of the main result

Let k be a field of characteristic zero. For L a function field over k containing all r^{th} roots of unity we fix an isomorphism $\mu_r \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/r$ of $Gal(\bar{K}/K)$-modules and we write

$$H^m_{nr}(L/k, \mathbb{Z}/r) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^m(L, \mathbb{Z}/r) \xrightarrow{\partial_A} H^{m-1}(k_A, \mathbb{Z}/r)],$$

where A runs through all discrete valuation rings of rank one with $k \subset A$ and fraction field L. We denote by k_A the residue field of A and by ∂_A the residue map.

Theorem 4.2.1. *Let k be a field of characteristic zero. Let X be an integral k-variety of dimension n and let K be its field of functions. Let r be an integer and assume that K contains all r^{th} roots of unity. Let α be an element of $H^m(K, \mathbb{Z}/r)$. There exist n^2 functions $\{f_i\}_{,i=1,\ldots,n^2}$ such that α becomes unramified over $L = K(f_1^{1/r}, \ldots, f_{n^2}^{1/r})$, that is, we have $\alpha_L \in H^m_{nr}(L/k, \mathbb{Z}/r)$.*

We first prove two lemmas.

4.3 Local description

In the case of dimension two, the following statement is due to Saltman (cf. [Sal97] 1.2).

Lemma 4.3.1. *Let k be an infinite field. Let A be a local ring of a smooth k-variety and let K be its field of fractions. Let r be an integer prime to characteristic of k. Assume that K contains all r^{th} roots of unity and fix an isomorphism $\mu_r \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/r$ of $Gal(\bar{K}/K)$-modules. Let α be an element of $H^m(K, \mathbb{Z}/r)$ ramified only at $s_1, \ldots, s_h$ forming a regular subsystem of parameters of the maximal ideal of A. Then*

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots h\}} \alpha_I \cup s_I,$$

with $\alpha_0 \in H^m(A, \mathbb{Z}/r)$, $\alpha_I \in H^{m-|I|}(A, \mathbb{Z}/r)$, and $s_I = \cup_{i \in I}(s_i)$, where we denote by (s_i) the class of s_i in $H^1(K, \mathbb{Z}/r) \simeq K^*/K^{*r}$.

Proof. We proceed by induction on h and m. Assume first $h = 1$. For A a local ring of a smooth k-variety, with field of fractions K and for $Y = Spec\,A$, we have an exact sequence due to Bloch and Ogus (cf. [CTHK97] 2.2.2)

$$0 \to H^m(A, \mathbb{Z}/r) \to H^m(K, \mathbb{Z}/r) \to \coprod_{x \in Y^{(1)}} H^{m-1}(\kappa(x), \mathbb{Z}/r) \to \coprod_{x \in Y^{(2)}} H^{m-2}(\kappa(x), \mathbb{Z}/r) \to \ldots \quad (4.1)$$

where the maps are induced by the residues. Denote by $K(A/s_1)$ the field of fractions of A/s_1. As α is ramified only at s_1, we see from the sequence (4.1) that $\partial_{s_1}(\alpha) \in H^{m-1}(K(A/s_1), \mathbb{Z}/r)$ is unramified. Hence, from the sequence (4.1) for A/s_1, it comes from an element of $H^{m-1}(A/s_1, \mathbb{Z}/r)$. From Levine's conjecture (generalizing Bloch-Kato's conjecture proved by Rost and Voevodsky), proved by Kerz [Ker09] 1.2, any element of $H^{m-1}(A/s_1, \mathbb{Z}/r)$ is a sum of cup products of units in A/s_1. In particular, any element of $H^{m-1}(A/s_1, \mathbb{Z}/r)$ lifts to A :

there exists an element $\alpha_1 \in H^{m-1}(A, \mathbb{Z}/r)$ such that $\bar{\alpha}_1 = \partial_{s_1}(\alpha)$. Hence $\alpha - \alpha_1 \cup (s_1)$ is unramified, so it comes from $\alpha_0 \in H^m(A, \mathbb{Z}/r)$, by (4.1) again.

If $m = 1$, we have $\alpha = (s)$ for s a function in K and the result follows from the decomposition $s = u \prod_i s_i^{t_i}$ with $t_i \in \mathbb{Z}$ and $u \in A^*$.

Next, we assume the assertion for $(m-1, h-1)$ and $(m, h-1)$ and we prove it for (m, h). From the sequence (4.1), $\partial_{s_1}(\alpha) \in H^{m-1}(K(A/s_1), \mathbb{Z}/r)$ is ramified only at $\bar{s}_2, \dots, \bar{s}_h$ where we denote by $\bar{s}_i$ the image of s_i in A/s_1. By induction, $\partial_{s_1}(\alpha) = \bar{\alpha}_1 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \{2,\dots h\}} \bar{\alpha}_I \cup \bar{s}_I$, where $\bar{\alpha}_1 \in H^{m-1}(A/s_1, \mathbb{Z}/r)$, $\bar{\alpha}_I \in H^{m-1-|I|}(A/s_1, \mathbb{Z}/r)$, and $\bar{s}_I = \cup_{i \in I}(\bar{s}_i)$. As before, we deduce from [Ker09] 1.2 that all the $\bar{\alpha}_I$ and $\bar{\alpha}_1$ are sums of cup products of units in A/s_1 and so we can lift them to α_I (resp. to α_1) on A. Now the element $\alpha - (\alpha_1 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \{2,\dots h\}} \alpha_I \cup s_I) \cup (s_1)$ is ramified only at $s_2, \dots, s_h$ and the lemma follows by induction.

□

4.4 Divisor decomposition

Lemma 4.4.1. *Let k be a field of characteristic zero and let X be a smooth projective k-variety of dimension n. Let D be a divisor on X. There exists a sequence of blowing-ups $f : X' \to X$ such that the support of the total transform f^*D is a simple normal crossing divisor which can be expressed a union of n regular (but not necessarily connected) divisors of X'.*

Proof. By Hironaka, we may assume that $\mathrm{Supp}(D)$ is a simple normal crossing divisor, which means that any irreducible component of $\mathrm{Supp}(D)$ is smooth and that the fiber product over X of any c components of $\mathrm{Supp}(D)$ is smooth and of codimension c. Let $G = (V, E)$ be the dual graph of D :

– the vertices of V correspond to irreducible components $D_1, \dots D_N$ of D

– the edge (D_i, D_j) is in E if the intersection $D_i \cap D_j$ is nonempty.

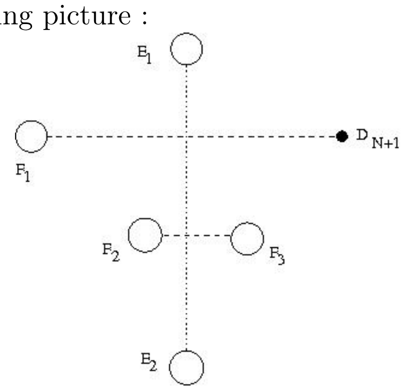
We say that we blow-up the edge (D_i, D_j) if we change X by the blow-up of the intersection $D_i \cap D_j$ (with reduced structure) and we change G by the dual graph of the total transform of D, i.e. we add a vertex and corresponding edges. We write again $G = (V, E)$ for the modified graph.

We will show that after a finite sequence of blowing-ups $f : X' \to X$ of some edges we may color the vertices of G in n colors so that for any edge $AB \in E$ the vertices A and B are of different colors. Then $\mathrm{Supp}(f^*D)$ is a simple normal crossing divisor and we have $\mathrm{Supp}(f^*D) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ where F_i is the (disjoint) union of components of f^*D such that the corresponding vertex is of the i^{th} color. Hence F_i are regular and the lemma follows.

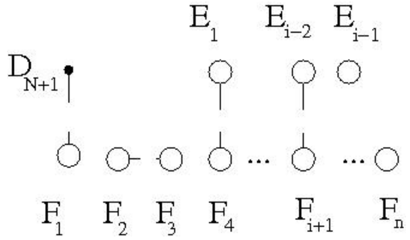
If $n = 2$ we may assume, after blowing-ups of some edges, that any cycle in G has even number of edges, which is sufficient to conclude.

Let us now assume that $n \geq 3$. We proceed by induction on the number N of irreducible components of D. If $N \leq n$ the statement is clear. Assume it holds for N. Let D be a divisor with $N + 1$ components. By the induction hypothesis, after blowing-ups of some edges, we may assume that we may color all but the vertex D_{N+1} of G in n colors as desired. We have $\mathrm{Supp}(D) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \cup D_{N+1}$ where F_i is the union of components of D of the i^{th} color. If D_{N+1} does not intersect F_i for some i we color D_{N+1} in i^{th} color. Hence we may assume that all the intersections $D_{N+1} \cap F_i$ are nonempty. By the same reason, we may assume that the intersection $F_2 \cap F_3$ is nonempty. On the other hand, note that the intersection $\bigcap_i F_i \cap D_{N+1}$ is empty as $\mathrm{Supp}(D)$ is a simple normal crossing divisor. We proceed by the following algorithm :

1. We first blow up all the edges $D_j D_{N+1}$ for all the components D_j of F_1. Let us denote by E_1 the union of all the exceptional divisors. This union is disjoint as the components of F_1 do not intersect. Note that $E_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$. Otherwise, we get a point in the intersection $\bigcap_i F_i \cap D_{N+1}$ by projection. Moreover, there are no more edges between (the components of) F_1 and D_{N+1} as the strict transforms of the corresponding divisors do not intersect.
2. Next, we blow up all the edges between F_2 and F_3 and we call E_2 the (disjoint) union of all new exceptional divisors. Again, we have no more edges between F_2 and F_3 and also $E_2 \cap E_1 \cap F_4 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$ (or $E_2 \cap E_1$ is empty if $n = 3$).
3. If $n = 3$ we have the following picture :

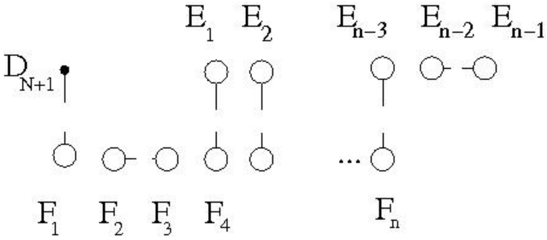


   Here and in what follows the dotted line (for example, F_2F_3) means that there are no edges between components of corresponding groups (e.g. no edges between elements of $F_2 \cup F_3$).
   We color (all the vertices from) F_1 and D_{N+1} in red, E_1 and E_2 in green and F_2 and F_3 in blue and this terminates the algorithm.
4. Assume that $n \geq 4$. We proceed until we get the group of exceptional divisors E_{n-1} and then we go to step 6. Suppose $3 \leq i \leq n-1$ and we constructed E_{i-2} and E_{i-1} but not E_i. Suppose there are some edges between E_{i-2} and F_{i+1}, otherwise we go to step 5. We blow up all these edges and we call E_i the (disjoint) union of all new exceptional divisors. We get no more edges between E_{i-2} and F_{i+1} and also $E_i \cap E_{i-1} \cap F_{i+2} \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.
5. If there are no edges between E_{i-2} and F_{i+1}, we have the following picture :



We color F_1 and D_{N+1} in the first color, F_2 and F_3 in the second color, E_1 and F_4 in the third, ... , E_{i-2} and F_{i+1} in the i^{th}-color, E_{i-1} in color $i+1$, and, finally, $F_{i+2}, \ldots F_n$ in colors $i+2, \ldots n$ respectively.

6. At this step, we have the following picture :



Moreover, $E_{n-1} \cap E_{n-2} = \emptyset$ by construction. We color F_1 and D_{N+1} in the first color, F_2 and F_3 in the second color, E_1 and F_4 in the third, ... , E_{n-3} and F_n in color $n-1$, E_{n-1} and E_{n-2} in color n. This terminates the algorithm. $\square$

4.5 Proof of theorem 4.2.1

By resolution of singularities, we may assume that X is smooth. By lemma 4.4.1, we may assume that the ramification divisor $D = \mathrm{ram}(\alpha)$ is a simple normal crossing divisor whose support is a union of n regular divisors : $\mathrm{Supp}\, D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Let G be a divisor on X. We say that G is in *general position* with a closed subvariety $Z \subset X$ if for any irreducible component Z_i of Z and for any irreducible component W_i of the intersection $G \cap Z_i$ we have $\dim W_i < \dim Z_i$.

By a semilocal argument, we successively choose functions $f_1^j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, then $f_2^j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, $\ldots$, and then $f_n^j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, such that

$$\mathrm{div}_X(f_i^j) = D_i + E_i^j$$

where E_i^j are in general position with $D \cap \bigcap_{j'<j} E_i^{j'}$.

We claim that with this choice of n^2 functions α_L is unramified. Let v be a discrete valuation on L and let $x \in X$ be the point where the discrete valuation ring R of v is centered. We may assume that $x \in \mathrm{Supp}\, D$, otherwise α is already unramified at v. From the construction, for any i, $D \cap \bigcap_{j=1}^{n} E_i^j = \emptyset$. Hence for any $1 \le i \le n$ we can find j_i such that $x \notin E_i^{j_i}$, which means that $s_i = f_i^{j_i}$ is a local parameter of D_i at x. Now the theorem follows from lemma 4.3.1, as any s_I from the lemma is a cup product of r^{th} powers on L. $\square$

Remark 4.5.1. The bound n^2 is not sharp. For example, for $n = 3$ one can kill all the ramification with four functions. Let us write $\mathrm{ram}(\alpha) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ as in lemma 4.4.1. As in the proof of the theorem above, we take $f_i \in K$, $i = 1, \ldots 4$, such that

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f_1) &= D_1 + D_2 + D_3 + E_1; \\ \mathrm{div}(f_2) &= D_1 + D_2 + E_2; \\ \mathrm{div}(f_3) &= D_2 + D_3 + E_3; \\ \mathrm{div}(f_4) &= D_1 + 2D_2 + D_3 + E_4. \end{aligned}$$

and each E_i is in general position with $\mathrm{ram}(\alpha) \cap \bigcap_{i'<i} \mathrm{Supp}(E_{i'})$. Let x be a center of a valuation v on $L = K(f_i^{1/r})_{i=1,\dots,4}$. We may assume that $x \in \mathrm{ram}(\alpha)$. It is sufficient to see that if $x \in D_i$ then a local parameter of D_i at x can be expressed as a product of powers of the functions f_i.

1. If $x \in X^{(1)}$ then x lies on only one component D_i, which is thus defined by f_1.
2. If $x \in X^{(2)}$ and if x lies on two components D_i and D_j, then $\frac{f_1}{f_3}$ defines D_1, $\frac{f_2 f_3}{f_1}$ defines D_2, $\frac{f_1}{f_2}$ defines D_3. If x lies on only one component D_i, then, by construction, $x \notin E_{i_1} \cup E_{i_2}$ for at least two indexes $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$. By construction, D_i is then defined at x by at least one among the functions f_{i_1} and f_{i_2}.
3. Suppose that x is a closed point of X. If $x \in D_1 \cap D_2 \cap D_3$, we use the same formulas as in the previous case. Next, suppose that x lies on only two components of $\mathrm{ram}(\alpha)$. Consider the case $x \in D_1 \cap D_2$, the other cases are similar. By construction, x lies on at most one component among E_1, E_2, E_3. Hence we see that if $x \notin E_2 \cup E_3$ (resp. $x \notin E_1 \cup E_3$, resp. $x \notin E_1 \cup E_2$) then D_1 is defined by $\frac{f_2}{f_3}$ and D_2 is defined by f_3 (resp. by $\frac{f_1}{f_3}$ and by f_3, resp. by $\frac{f_1^2}{f_4}$ and by $\frac{f_4}{f_1}$).
   The last case is when x lies on only one component of $\mathrm{ram}(\alpha)$. Consider the case $x \in D_1$, the other cases are similar. Then $x \notin E_1 \cap E_2 \cap E_4$ by construction. Then D_1 is defined by f_1 (resp. by f_2, f_4) if x does not lie on E_1 (resp. on E_2, E_4).

Remark 4.5.2. By the same arguments as in the previous remark, if r is prime to 2 and 3 and if $n = 3$, one can kill all the ramification with three functions f_1, f_2, f_3, such that

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f_1) &= D_1 + 3D_2 + 3D_3 + E_1; \\
\mathrm{div}(f_2) &= D_1 + 2D_2 + D_3 + E_2; \\
\mathrm{div}(f_3) &= D_1 + D_2 + 2D_3 + E_3.
\end{aligned}$$

and each E_i is in general position with $\mathrm{ram}(\alpha) \cap \bigcap_{i'<i} \mathrm{Supp}(E_{i'})$.

Bibliographie

[Ara75] J.Kr. Arason, *Cohomologische invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), no. 3, 448–491.

[AK03] C. Araujo and J. Kollár, *Rational curves on varieties*, in "Higher dimensional varieties and rational points" (Budapest, 2001), 13–68, Bolyai Soc. Math. Stud., **12**, Springer, Berlin, 2003.

[Art82] M. Artin, *Left ideals in maximal orders*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), pp. 182–193, Lecture Notes in Math., **917**, Springer, Berlin-New York, 1982.

[AM72] M. Artin, D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.

[Ax75] J. Ax, *A field of cohomological dimension* 1 *which is not* C_1. Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1975), 7–17.

[BO74] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–201 (1975).

[BCR87] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **12**. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Bou64] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative.* Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308 Hermann, Paris 1964.

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.

[CT83] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem* 90 *for* K_2*, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983), no. 1, 1–20.

[CT95a] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[CT95b] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux **7**, 1995, pp. 51-73.

[CT99] J.-L. Colliot-Thélène, *Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), 1–12, Proc. Sympos. Pure Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[CT08] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. **618** (2008), 77–133.

[CT11] J.-L. Colliot-Thélène, *Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences*, in "Arithmetic Algebraic Geometry, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, September 10-15, 2007", 1–44, Lecture Notes in Mathematics **2009**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

[CTHS05] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)*, Expo. Math. 23 (2005), no. 2, 161–170.

[CTHK97] J.-L. Colliot-Thélène, R.T. Hoobler, B. Kahn, *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), 31–94, Fields Inst. Commun., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[CTK] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, *Cycles de codimension* 2 *et* H^3 *non ramifié pour les variétés sur les corps finis*, arXiv :1104.3350v1.

[CTO89] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.

[CTR85] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2*-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

[CTS96] J.-L. Colliot-Thélène et Shuji Saito *Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer*, International Mathematical Research Notices 1996, n. 4, pp. 151–160.

[CTSan77] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 2, 175–229.

[CTSan79] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (Juillet 1979), édité par A.Beauville, Sijthof et Noordhof (1980) pp. 223–237.

[CTSan87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J.54 (1987), no. 2, 375–492.

[CTSS83] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 763–801.

[CTSSD87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, I, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **373** (1987) 37–107 ; II, ibid. **374** (1987) 72–168.

[CTS87] J.-L. Colliot-Thélène and A. N. Skorobogatov, *R-equivalence on conic bundles of degree 4*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 671–677.

[CTV] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, prépublication disponible sur arXiv.

[CES03] B. Conrad, B. Edixhoven, W. Stein, $J_1(p)$ *has connected fibers*, Doc. Math. **8** (2003), 331–408.

[CS86] G. Cornell, J. Silverman, *Arithmetic Geometry*, Springer-Verlag, 1986.

[Dal00] C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface de Châtelet sur un corps local*, Indag. Math. (N.S.) **11** (2000), no. 2, 173–185.

[Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[Deg06] F. Déglise, *Transferts sur les groupes de Chow à coefficients*, Math. Z. 252 (2006), no. 2, 315–343.

[dJS] A.J. de Jong and J.Starr, *Low degree complete intersections are rationally simply connected*, preprint, 2006, available at http ://www.math.sunysb.edu/∼ jstarr/papers/nk1006g.pdf

[DDE00] P. Dèbes, J.-C. Douai et M. Emsalem, *Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 1, 113–149.

[Duc01] A. Ducros, *Points rationnels sur la fibre spéciale d'un schéma au-dessus d'un anneau de valuation*, Math. Z. **238** (2001), no. 1, 177–185.

[Duc02] A. Ducros, *Cohomologie non ramifiée sur une courbe p-adique lisse*, Compositio Math. **130** (2002), no. 1, 89–117.

[EGAIV] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 32, 1967.

[Fro97] E. Frossard, *Fibres dégénérées des schémas de Severi-Brauer d'ordres*, J. Algebra **198** (1997), no. 2, 362–387.

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[FP97] W. Fulton and R. Pandharipande, *Notes on stable maps and quantum coho- mology*, Algebraic geometry–Santa Cruz 1995, 45–96, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Ge] T. Geisser, *Bass's conjectures and Tate's conjecture over finite fields*, en préparation.

[GHS03] T. Graber, J. Harris and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[GS88] M. Gros et N. Suwa, *Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques*, Duke Math. J.**57** (1988), no. 2, 579–613.

[Gir71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **Band 179**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Gre66] M.J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Publ. Math. I.H.É.S. **31** (1966) 59–64.

[Gro57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957) 119–221.

[Gro68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, I, II, III. Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris 1968.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[HX09] A. Hogadi, Ch. Xu, *Degenerations of rationally connected varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 7, 3931–3949.

[Ill] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, disponible sur http ://www.math.upsud.fr/∼illusie/

[JS] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, arXiv :0910.2815.

[Kah93a] B. Kahn, *Résultats de "pureté" pour les variétés lisses sur un corps fini* (appendice à un article de J.-L. Colliot-Thélène), Actes du Colloque de K-théorie algébrique de Lake Louise, décembre 1991 (P.G Goerss, J.F. Jardine, ed.), Algebraic K-theory and algebraic topology, NATO ASI Series, Ser. C. **407** (1993), 57–62.

[Kah93b] B. Kahn, *Deux théorèmes de comparaison en cohomologie étale : applications*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 1, 137–165.

[Kah96] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395–416.

[Kah97] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), 149–174, Proc. Sympos. Pure Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Kah03] B. Kahn, *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), no. 6, 977–1002 (2004).

[Kah10] B. Kahn, *Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 317–369.

[Kah] B. Kahn, *Classes de cycles motiviques étales*, arXiv :1102.0375v2.

[Kat86] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[KS83] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.

[Ker09] M. Kerz, *The Gersten conjecture for Milnor K-theory*, Invent. math. **175** (2009), no.1, 1–33.

[KS] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes*, arXiv :1010.5930v1.

[Kle05] S. Kleiman, *The Picard scheme*, Fundamental algebraic geometry, 235–321, Math. Surveys Monogr., **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Kol99] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Annals of Math. **150** (1999), no. 1, 357–367.

[Kol04] J. Kollár, *Specialization of zero-cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 3, 689–708.

[KMM92a] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.

[KMM92b] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779.

[KS03] J. Kollár and E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), no. 2, 251–267.

[KM94] M. Kontsevich and Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 3, 525–562.

[LW54] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76**, (1954). 819–827.

[Lic69] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. Math. **7** 1969, 120–136.

[Lie10] M. Lieblich, *Deformation theory and rational points on rationally connected varieties*, in "Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology", 83–108, Dev. Math., **18**, Springer, New York, 2010.

[Liu02] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.

[Mad05] D. Madore, *Hypersurfaces cubiques, R-équivalence et approximation faible*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2005.

[Mad08] D. Madore, *Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques de mauvaise réduction*, J. Number Theory **128** (2008), no. 4, 926–944.

[Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 401–411. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Man72] Yu. I. Manin, *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1972.

[Maz77] B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 33–186 (1978).

[Mer81] A. S. Merkur'ev, *О гомоморфизме норменного вычета степени два*, (*On the norm residue symbol of degree* 2), Dokl. Akad. Nauk SSSR **261** (1981), 542–547.

[MS82] A. S. Merkur'ev and A. A. Suslin, *K-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета* (*K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.

[Mil80] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.

[Mil82] J.S. Milne, *Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojtman's theorem*, Compositio Math. **47** (1982), no. 3, 271–287.

[Mil86a] J.S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Math. vol. 1, Academic Press, 1986.

[Mil86b] J.S. Milne, *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 2, 297–360.

[Mon70] A. F. Monna, *Analyse non-archimédienne*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 56. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[MB10] L. Moret-Bailly,*Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos*, arXiv :1010.0341v3.

[MB11] L. Moret-Bailly, *An extension of Greenberg's theorem to general valuation rings*, arXiv :1106.0984.

[Mum69] D. Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, 1970, Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969) pp. 29–100.

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London 1970.

[Ngu10] T.-K.-Ngan Nguyen, *Cohomologie non ramifiée sur un espace classifiant*, thèse de l'Université Paris VII, 2010.

[Par94] K. H. Paranjape, *Cohomological and cycle-theoretic connectivity*, Ann. of Math. **140** (1994) 641–660.

[PS] R. Parimala and V. Suresh, *Degree three cohomology of function fields of surfaces*, arXiv :1012.5367.

[Pey08] E. Peyre, *Unramified cohomology of degree* 3 *and Noether's problem*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 191–225.

[Pir1] A. Pirutka, *R-equivalence on low degree complete intersections*, à paraître dans Journal of Algebraic Geometry.

[Pir2] A. Pirutka, *Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis*, à paraître dans Algebra and Number Theory.

[Pir11] A. Pirutka, *Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **349** (2011) 369–373.

[PR84] A. Prestel, P. Roquette, *Formally p-adic fields*, Lecture Notes in Mathematics, **1050**. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Qui73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. **341**, Springer, Berlin 1973.

[Roj80] A. A. Rojtman, *The torsion of the group of* 0*-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 553–569.

[Ros96] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. 1 (1996), No. 16, 319–393.

[Sai89] S. Saito,*Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 371–404.

[SS10] S. Saito and K. Sato, *A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields*, with an appendix by U. Jannsen, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 1593–1639.

[Sal84] D.J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. 77 (1984), no. 1, 71–84.

[Sal97] D.J. Saltman, *Division algebras over p-adic curves*, J. Ramanujan Math. Soc. **12** (1997), no. 1, 25–47.

[Sal98] D.J. Saltman, *Correction to : "Division algebras over p-adic curves"*, J. Ramanujan Math. Soc. **13** (1998), no. 2, 125–129.

[Ser57] J.-P. Serre, *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle*, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (1957-1958), **11** no. 2.

[Ser64] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Ser68] J-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968.

[SGA1] A. Grothendieck et M. Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie SGA 3, Lecture Notes in Math. **151, 152, 153**, Springer, Berlin-Heildelberg-New York, 1977.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lect. Notes Math. **225**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[Sch02] C. Schoen, *Complex varieties for which the Chow group mod n is not finite*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 1, 41–100.

[She79] C. Sherman, *K-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), no. 10, 999–1027.

[Sko01] A.N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[Spr65] T.A. Springer, *Nonabelian H^2 in Galois cohomology*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965) pp. 164–182 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[Sta] J. Starr, *Rational points of rationally simply connected varieties*, preprint, 2009, available at http ://www.math.sunysb.edu/$\sim$ jstarr/papers/s_01_09a_nocomment.pdf

[Sus82] A. A. Suslin, *Кватернионный гомоморфизм для поля функций на конике* (*Quaternion homomorphism for the field of functions on a conic*), Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), no. 2, 292–296.

[Tat57] J. Tate, *WC-groups over p-adic fields*, Séminaire Bourbaki **156**, 1957.

[Voi02] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, **10**, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Voe] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$ coefficients*, arXiv :0805.4430v2, à paraître dans Ann. of Math.

[Vos98] V.E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Transl. Math. Monogr. **179**, Amer. Math. Soc., 1998.

[Wal78] R. Walker, *Algebraic curves*, Reprint of the 1950 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.