**Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer**

Alena PIRUTKA
École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France
Courriel : pirutka@dma.ens.fr

**Résumé.** Soit $K$ le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$, car.$\mathbb{F} \neq 2$. Soit $C/K$ une conique. Parimala et Suresh [9] ont montré que le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul pour tout $\ell \neq$ car.$\mathbb{F}$. Dans cette note on étend leur résultat aux variétés de Severi-Brauer associées à une algèbre centrale simple dont l'indice $\ell$ est premier et différent de car.$\mathbb{F}$.

**Degree three unramified cohomology of Severi-Brauer varieties**

**Abstract.** Let $S$ be a smooth projective geometrically integral surface defined over a finite field $\mathbb{F}$, char.$\mathbb{F} \neq 2$, and let $K$ be its field of fractions. Parimala and Suresh [9] proved that for $C$ a conic over $K$, the group $H^3_{\mathrm{nr}}(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ is zero for $\ell \neq$ char.$\mathbb{F}$. In this note we extend their result to the case of Severi-Brauer varieties of prime index.

## English abriged version.

Let $K$ be a field and $F$ a function field over $K$. For $n$ invertible on $K$ one defines

$$H^j_{\mathrm{nr}}(F/K, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\partial_{j,A}}{\to} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})],$$

where $A$ runs through all discrete valuation rings of rank one with $K \subset A$ and fraction field $F$. We denote by $k_A$ the residue field of $A$ and by $\partial_{j,A}$ the residue map.

**Theorem 1.** *Let $S$ be a smooth projective geometrically integral surface defined over a finite field $\mathbb{F}$ and let $K$ be its field of fractions. Let $X$ be a Severi-Brauer variety associated to a central division algebra $D$ over $K$ of prime index $\ell \neq$ char.$\mathbb{F}$. Then $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$ for any prime $\ell'$, $\ell' \neq$ char.$\mathbb{F}$.*

This theorem generalizes the result of Parimala and Suresh [9] in case of conics.
Let $X$ be as above and let $\alpha$ be the class of $D$ in $BrK$. To prove theorem 1, we should essentially establish that $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. By a corestriction argument, we may also assume that $K$ contains all $\ell^{\mathrm{th}}$ roots of unity. We proceed in two steps.

(i) We first prove that the image of a natural map $H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2}) \to H^3(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2})$ contains the group $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$.

(ii) Next, let $\beta$ be an element of $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$. By (i), it comes from $\xi \in H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$. We show that there exists an element $f \in K^*$ such that $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$ (see p. 2 for the definition of this group).

These two steps imply that $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$ as the group $H^3_{nr}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$ is zero by [4], p.790.

In the proof of (i) we use a result of B. Kahn ([6] 5.3(8), 7.1 and [7] 2.5) to get a surjection $H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \twoheadrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Then we deduce (i) using the Merkur'ev-Suslin theorem ([8], p. 339).

The main ingredient to prove (ii) is the local-global principle of Parimala and Suresh ([9] 3.1). By this principle, it is sufficient to find $f$ locally. Let $x$ be a codimension 1 point of $S$, let $k$ be its residue field, let $v$ be the corresponding valuation on $K$ and let $K_x$ be the completion of $K$ at $x$. It is sufficient to find $f_x \in K_x^*$ such that $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mu_\ell^{\otimes 2})$. Let us describe the choice of the function $f_x$.

If $\xi$ is unramified at $x$, we take $f_x = 1$.
Suppose that $\xi$ is ramified at $x$. Let $\pi$ be a uniformizing parameter of $\mathcal{O}_{S,x}$. If $\alpha$ is unramified at $x$, denote by $\bar{\alpha} = \partial_x(\alpha \cup \pi)$ the specialisation of $\alpha$ at $x$. In this case we use [5] 1.2 to extend $v$ to a valuation on $K(X)$ with residue field $\kappa = k(\bar{X})$, where $\bar{X}$ is the Severi-Brauer variety over $k$ corresponding to $\bar{\alpha}$. If $\alpha$ is ramified at $x$, we use [1] 1.4 to get an extension of $v$ on $K(X)$ whose residue field $\kappa$ is purely transcendental over $k'/k$ of degree $\ell$.

We have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_x"] & H^3(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2}) \arrow[d, "\partial_v"] \\ H^2(k, \mu_\ell) \arrow[r] & H^2(\kappa, \mu_\ell). \end{tikzcd}$$

As $\xi$ becomes unramified on $K(X)$, its residue $\partial_x(\xi)$ lies in the kernel of the map $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(\kappa, \mu_\ell)$. If $\alpha$ is unramified at $x$, we deduce that $\partial_x(\xi) = r\bar{\alpha}$ and we take $f_x = \pi^r$. If $\alpha$ is ramified at $x$, we deduce that $\partial_x(\xi) = (\partial_x(\alpha), c)$ for some element $c \in \kappa^*$. We then lift $c$ to a unit $c' \in K_x$ and we take $f_x = c'$. With these choices we have $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mu_\ell^{\otimes 2})$, which finishes the step (ii).

## 1. Introduction

Soit $K$ un corps. Pour $n$ un entier inversible sur $K$, on note $\mu_n$ le $K$-schéma en groupes (étale) des racines $n$-ièmes de l'unité. Pour $j$ un entier positif on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ ($j$ fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = Hom_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$ si $j$ est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. Ces $k$-schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore $\mu_n^{\otimes j}$, sur toute $K$-variété $X$. On note $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de $X$ à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Lorsque $K$ contient une racine primitive $n$-ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $j$.

Pour $A$ un groupe abélien et $\ell$ un nombre premier on note $A\{\ell\}$ le sous-groupe de $A$ formé des éléments annulés par une puissance de $\ell$.

Soit $K$ un corps. Soit $F$ un corps de fonctions sur $K$. Soient $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Dans la suite on va utiliser les notions suivantes de cohomologie *non ramifiée* :

(i) $H^j_{\mathrm{nr}}(F/K, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})]$. Dans cette formule, $A$ parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions $F$, contenant le corps $K$. Le corps résiduel d'un tel anneau $A$ est noté $k_A$ et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

(ii) Pour $X$ une $K$-variété intègre, on note $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\text{déf}}{=} H^j_{\mathrm{nr}}(K(X)/K, \mu_n^{\otimes i})$.
Pour $X$ propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur $X$ associé au préfaisceau $U \mapsto H^j(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [2]).

(iii) Si $X$ est régulier en codimension 1, on pose

$$H^j_{\mathrm{nr}}(K(X)/X, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}\, \partial_{j, \mathcal{O}_{X,x}}$$

la cohomologie non ramifiée de $K(X)$ par rapport à $X$.

Soit maintenant $K$ le corps des fractions d'une surface lisse géométriquement intègre $S$, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Dans [9], Parimala et Suresh montrèrent que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$, pour $X$ une conique sur $K$. Le but de cette note est d'étendre leurs arguments au cas des variétés de Severi-Brauer d'indice premier :

**Théorème 1.** *Soit $K$ le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre $S$, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit $X$ la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre $K$ et d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. On a alors $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$ pour tout premier $\ell'$, $\ell' \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$.*

**Remarque 2.** Ce résultat est aussi vrai pour une variété de Severi-Brauer associée à une $K$-algèbre centrale simple d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$. En effet, $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(X \times \mathbb{P}^n_K, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2))$ d'après [3] 1.2.

Pour montrer ce théorème, on doit essentiellement établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$ (cf. section 2). Pour ce faire, on suit les mêmes étapes que dans [9]. On montre d'abord que tout élément $\beta \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$ (cf. section 2). Dans la section 3, en utilisant le principe de type local-global de [9], on montre que l'on peut en effet supposer que $\xi \in H^3_{nr}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$. D'après le théorème de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [4], le groupe $H^3_{nr}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$ est nul, ce qui nous permet de conclure.

## 2. Comparaison entre cohomologie non-ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer et cohomologie du corps de base

**Proposition 3.** *Soit $K$ un corps. Soit $X$ la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche $D$ de centre $K$ et d'indice premier $\ell \neq \mathrm{car}.K$. L'application naturelle*

$$H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

*est surjective.*

*Démonstration.* Cette proposition est une conséquence des résultats de B. Kahn [6], [7]. Supposons d'abord que $K$ est parfait. Soient $K^s$ une clôture séparable de $K$, $\bar{X} = X \times_K K^s$ et $G = Gal(K^s/K)$. D'après [6] 5.3(8) et [7] 2.5, pour $X$ une $K$-variété de Severi-Brauer, on a alors un complexe :

$$0 \to \mathrm{Coker}\,\phi \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G]\{\ell\} \xrightarrow{\delta} Br\,K\{\ell\},$$

qui est exact sauf peut-être au terme du milieu. Si $X$ est une conique, on a immédiatement $\mathrm{Coker}\phi = 0$ car $CH^2(\bar{X}) = 0$ (ce résultat est dû à Suslin, [11]).

Supposons que $\ell \geq 3$. Puisque $D$ est d'indice premier $\ell$, on a que $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G] \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ([8], 8.7.2). Dans ce cas, d'après [6] 7.1 et [7] 2.5, on a explicitement $\delta(1) = 2[D] \neq 0$, où $[D]$ désigne la classe de $D$ dans $BrK$ et $1 \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est identifié au générateur de $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G]$. Ainsi, sur un corps $K$ parfait, l'application $H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \xrightarrow{\phi} H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective. Dans le cas général, on passe à une clôture parfaite de $K$ et on déduit le résultat par un argument de corestriction. □

**Corollaire 4.** *Soit $K$ le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre $S$, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit $X$ la $K$-variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre $K$ et d'indice premier $\ell \neq$ car.$\mathbb{F}$. Alors*

*(i) pour tout $\ell' \neq \ell, \mathrm{car}.K$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$ ;*

*(ii) $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ et l'image de l'application naturelle*

$$H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2}) \to H^3(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2})$$

*contient le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$.*

*Démonstration.* Soit $K'$ une extension de $K$ de degré $\ell$, telle que $X_{K'}$ est isomorphe à un espace projectif. Par le même argument que dans [2] 2.1.10, on a une application entre les cohomologies non ramifiées
$$H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) \to H^3_{nr}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)).$$
Puisque $K'(X_{K'})$ est une extension transcendante pure de $K'$, on a un isomorphisme ([3] 1.2) :
$$H^3_{nr}(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)).$$
Le groupe $H^3_{nr}(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2))$ est nul d'après [4] p.790. Un argument de corestriction montre alors que pour $\ell'$ premier, $\ell' \neq \ell$, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell'}/\mathbb{Z}_{\ell'}(2)) = 0$, et que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par $\ell$. On a alors que tout élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par $\ell$ et il vient donc de $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$ par [8] (p. 339).

Soit $\xi \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$. On voit $\xi$ aussi comme un élément de $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mu_\ell^{\otimes 2})$ et on déduit de la proposition précédente que $\xi$ provient d'un élément $\beta \in H^3(K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Montrons que $\beta$ est annulé par $\ell$.

Par le même raisonnement que précédemment, l'image $\xi'$ de $\xi$ dans $H^3(K'(X_{K'}), \mu_\ell^{\otimes 2})$ est nulle. En effet, $\xi' \in H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(K'/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. On en déduit que l'image de $\beta$ dans $H^3(K', \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nulle. On a alors : $\ell\beta = Cor_{K'/K} \circ Res_{K'/K}(\beta) = 0$. D'après [8], on a alors que $\beta$ vient d'un élément de $H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$. □

### 3. Preuve du théorème 1

**Lemme 5.** *Soit $R$ un anneau de valuation discrète dont on note $K$ le corps des fractions et $k$ le corps résiduel. Soit $X$ la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche $D$ de centre $K$ et d'indice premier $\ell$, $(\ell, \mathrm{car.}\, k) = 1$. Soit $\alpha$ la classe de $D$ dans $Br\, K$. Soit $\xi \in H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2})$. Supposons que pour toute valuation $v$ sur $K(X)$ induisant sur $K$ soit la valuation triviale, soit la valuation associée à $R$, le résidu $\partial_v(\xi_{K(X)})$ est nul. On a alors :*

*(i) si $\alpha$ est non ramifiée en $R$, alors $\partial_R(\xi)$ est un multiple de la spécialisation $\bar{\alpha} = \partial_R(\alpha \cup \pi)$, où $\pi$ est la classe d'une uniformisante de $R$ dans $H^1(K, \mu_\ell)$ ;*

*(ii) si $\alpha$ est ramifiée en $R$, alors ou bien $\xi$ est non ramifiée en $R$, ou bien $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in H^1(k, \mu_\ell)$.*

*Démonstration.* Pour prolonger la valuation sur $K$ en une valuation sur $K(X)$ on s'intéresse à la structure de la fibre spéciale d'un modèle de $X$ au-dessus de $R$.

Quitte à changer $K$ par son complété, on peut supposer que $K$ est complet. Notons d'abord que $\alpha$ est trivialisée par une extension non ramifiée de $K$. En effet, soit $K_{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $K$, soit $R_{nr}$ l'anneau des entiers de $K_{nr}$ et soit $k^s$ une clôture séparable de $k$. On a une suite exacte
$$0 \to H^2(R_{nr}, \mu_\ell) \to H^2(K_{nr}, \mu_\ell) \xrightarrow{\partial_R} H^1(k^s, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Puisque $k^s$ est séparablement clos, on a $H^1(k^s, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(R_{nr}, \mu_\ell) = H^2(k^s, \mu_\ell) = 0$, d'où $H^2(K_{nr}, \mu_\ell) = 0$ et donc $\alpha$ est trivialisée par une extension non ramifiée de $K$.

Supposons que $\alpha$ est non ramifiée. Dans ce cas, puisque $\alpha$ est trivialisée par une extension non ramifiée de $K$, on a que $D$ se prolonge en une algèbre d'Azumaya $\Lambda$ sur $R$, qui a pour la classe $\alpha$ (cf. [5], 1.1 et 1.2). Ainsi $X$ se prolonge en un schéma de Severi-Brauer au-dessus de $R$, associé à $\Lambda$, dont la fibre spéciale $\bar{X}$ est donnée par l'image de $\alpha$ dans $H^2(k, \mu_\ell)$, qui est précisement $\bar{\alpha}$.

Supposons que $\alpha$ est ramifiée. Sous l' hypothèse que $\alpha$ est trivialisée par une extension non ramifiée de $K$, d'après Artin [1] 1.4, il existe un modèle de $X$ au-dessus de $R$ dont la fibre spéciale géométrique contient $\ell$ composantes de multiplicité 1, conjuguées sur $k$, qui sont des variétés rationnelles.

On voit ainsi qu'il existe une valuation $v$ sur $K(X)$ qui prolonge la valuation sur $K$ avec le corps résiduel $\kappa(v)$ tel que

– $\kappa(v) = k(\bar{X})$, ou $\bar{X}$ est une $k$-variété de Severi-Brauer de classe $\bar{\alpha}$, si $\alpha$ est non ramifiée ;
– $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure d'une extension $k'$ de $k$ de degré $\ell$, sinon.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^3(K, \mu_\ell^{\otimes 2}) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\partial_R"] & H^3(K(X), \mu_\ell^{\otimes 2}) \arrow[d, "\partial_v"] \\ H^2(k, \mu_\ell) \arrow[r, "Res"] & H^2(\kappa(v), \mu_\ell). \end{tikzcd}$$

Puisque $\xi$ devient non ramifiée sur $K(X)$, on a que $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(\kappa(v), \mu_\ell)$. Si $\alpha$ est non ramifiée, $\partial_R(\xi)$ est alors un multiple de $\bar{\alpha}$ d'après le théorème d'Amitsur, ce qui établit $(i)$.

Supposons maintenant que $\alpha$ et $\xi$ sont ramifiées en $R$. Puisque $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure de $k'$, $H^2(k', \mu_\ell)$ s'injecte dans $H^2(\kappa(v), \mu_\ell)$. Ainsi $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(k', \mu_\ell)$.

D'autre part, puisque $\alpha$ devient triviale sur $K(X)$, on voit que $\partial_R(\alpha)$ est dans le noyau de l'application $H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to H^1(k', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ par le même argument. Puisque $\partial_R(\alpha)$ est un élément non nul dans $H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, il correspond à une extension galoisienne, cyclique, de degré $\ell$, qui coïncide avec $k'$ car $\partial_R(\alpha) \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to H^1(k', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})]$ et $[k' : k] = \ell$. Puisque $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_\ell) \to H^2(k', \mu_\ell)$, cela implique que $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in H^1(k, \mu_\ell)$ ([10], p.211), ce qui établit $(ii)$.

□

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. D'après le corollaire 4, il suffit d'établir que $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$. Notons qu'on peut supposer que $K$ contient une racine primitive $\ell$-ième de l'unité. En effet, le degré $d$ de l'extension $K'$ de $K$, obtenue en ajoutant une racine primitive $\ell$-ième de l'unité, divise $\ell - 1$. Ainsi $d\mathrm{Id} = Cor_{K'(X)/K(X)} \circ Res_{K'(X)/K(X)}$ est un isomorphisme sur $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2})$. Il suffit donc d'établir $H^3_{\mathrm{nr}}(K'(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$.

Soit $\alpha$ la classe de $D$ dans $BrK$. Soit $\beta \in H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. D'après le corollaire 4, $\beta$ provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Montrons qu'il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Pour ce faire, on utilise le principe local-global de Parimala et Suresh :

**Théorème 6.** ([9], 3.1)*Soit $K$ le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre $S$, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit $\ell$ un entier premier, $(\ell, \mathrm{car}.K) = 1$. Supposons que $K$ contient une racine primitive $\ell$-ième de l'unité. Soit $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ un élément d'indice $\ell$ et soit $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) il existe $f \in K^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ ;*

*(ii) pour tout point $x \in S$ de codimension 1, il existe un élément non nul $f_x$ dans le complété $K_x$ de $K$ en $x$ tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.*

D'après ce théorème, il suffit de trouver, pour tout point $x \in S$ de codimension 1, un élément $f_x \in K_x^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H^3_{\mathrm{nr}}(K_x, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. On a trois cas à considérer :

1. $\xi$ est non ramifiée en $x$. Dans ce cas, $f_x = 1$ convient.
2. $\xi$ est ramifiée en $x$ et $\alpha$ est non ramifiée en $x$. D'après le lemme 5, $\partial_x(\xi) = r\bar{\alpha}$. Soit $\pi$ une uniformisante de $\mathcal{O}_{S,x}$. Alors $f_x = \pi^r$ convient : $\partial_x(\xi - \alpha \cup \pi^r) = r\bar{\alpha} - r\bar{\alpha} = 0$.
3. $\xi$ est ramifiée en $x$ et $\alpha$ est ramifiée en $x$. D'après le lemme 5, on peut écrire $\partial_x(\xi) = (\partial_x(\alpha), c)$. On relève $c$ en une unité $c'$ pour la valuation de $K_x$. Puisque $\partial_x(\alpha \cup c') = (\partial_x(\alpha), c)$, $f_x = c'$ convient.

Ainsi il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H^3_{\mathrm{nr}}(K/S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. On a ainsi que $\beta$ provient de $\xi' \in H^3_{nr}(K/S, \mu_\ell^{\otimes 2})$. D'après [4], p.790, ce groupe est nul (cf. [2] 2.1.8 pour l'identification de divers groupes de cohomologie non ramifiée). Ainsi $H^3_{\mathrm{nr}}(K(X)/\mathbb{F}, \mu_\ell^{\otimes 2}) = 0$, ce qui termine la preuve du théorème 1. □

# Références


[1] M. Artin, *Left ideals in maximal orders*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), pp. 182–193, Lecture Notes in Math., **917**, Springer, Berlin-New York, 1982.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, $K$-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64,Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), no. 1, 141–158.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 763–801.

[5] E. Frossard, *Fibres dégénérées des schémas de Severi-Brauer d'ordres*, J. Algebra **198** (1997), no. 2, 362–387.

[6] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic $K$-theory (Seattle, WA, 1997), 149–174, Proc. Sympos. Pure Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[7] B. Kahn, *Cohomological approaches to $SK_1$ and $SK_2$ of central simple algebras*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 317–369.

[8] A. S. Merkur'ev and A. A. Suslin, *$K$-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета* (*$K$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.

[9] R. Parimala and V. Suresh, *Degree three cohomology of function fields of surfaces*, (2010), arXiv :1012.5367.

[10] J-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968.

[11] A. A. Suslin, *Кватернионный гомоморфизм для поля функций на конике* (*Quaternion homomorphism for the field of functions on a conic*), Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), no. 2, 292–296.