# Алгебраические и геометрические подходы к вопросам рациональности и унирациональности

Е. Пирютко

Ярославль, 2012

# 1 Введение

## 1.1 Проблема Нётера

Проблема (Noether): Пусть $k(x_1, \dots x_n)$ – чисто трансцендентное расширение поля $k$ и пусть задано линейное действие конечной группы $G$ на поле $k(x_1, \dots x_n)$. Является ли чисто трансцендентным над $k$ поле инвариантов $k(x_1, \dots x_n)^G$?

Случай $k = \mathbb{Q}$:

**Утверждение 1.1.** *Если $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)^G/\mathbb{Q}$ является чисто трансцендентным расширением, то обратная проблема Галуа разрешима для $G$: существует конечное расширение Галуа $L/\mathbb{Q}$, такое, что $G \simeq Gal(L/\mathbb{Q})$.*

*Доказательство.* Расширение $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)/\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)^G$ является расширением Галуа с группой $G$. Условие $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)^G = \mathbb{Q}(t_1, \dots t_n)$, где $t_1, \dots, t_n$ алгебраически независимы, значит, что существует неприводимый многочлен $f = f(t_1, \dots t_n)(y) \in \mathbb{Q}(t_1, \dots t_n)[y]$, полем разложения которого является поле $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)$. Утверждение следует из теоремы неприводимости Гильберта : для бесконечного количества значений $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{Q}^n$ многочлен $f(a_1, \dots a_n)(y)$ остаётся неприводимым, и, значит, поле разложение многочлена $f(a_1, \dots a_n)(y)$ является искомым. $\square$

Однако существуют примеры, когда расширение $\mathbb{Q}(x_1, \dots x_n)^G/\mathbb{Q}$ не является чисто трансцендентным (Swan для $G = \mathbb{Z}/47$, Saltman для $\mathbb{Z}/8$.)

Случай $k = \mathbb{C}$: проблема Нётера также может иметь отрицательный ответ, и для линейного действия, и для произвольного действия группы $G$ ($G = \mathbb{Z}/2$, Clemens-Griffiths, Artin-Mumford). В этом курсе мы подробно рассмотрим один из примеров.

**Упражнение 1.** Пусть $L$ – поле функций эллиптической кривой $y^2 = x(x-1)(x+1)$, $L = \mathbb{C}(x, \sqrt{x(x-1)(x+1)})$. Используя дискретные нормирования, покажите, что $L/\mathbb{C}$ не является чисто трансцендентным расширением:

1. Напомним, что *дискретным нормированием* (ранга 1) на поле $F$ называется отображение $v : F \to \mathbb{Z} \cup \infty$, такое, что $v(ab) = v(a) + v(b)$, $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ и $v(a) = \infty \iff a = 0$. Покажите, что для любого дискретного нормирования $v$ на $L$, $v(x)$ является чётным.
2. Покажите, что $x$ не может быть квадратом элемента поля $L$.
3. Покажите, что элемент $a$ поля $\mathbb{C}(t)$ является квадратом тогда и только тогда, когда $v(a)$ является чётным для любого дискретного нормирования $v$ на $\mathbb{C}(t)$.

## 1.2 Рациональные и унирациональные многообразия

**Определение 1.2.** Многообразие $X$ над полем $k$ называется *рациональным*, если существует бирациональное отображение $\mathbb{P}^n_k \dashrightarrow X$. Эквивалетно, поле функций $X$ является чисто трансцендентным расширением поля $k$.

**Определение 1.3.** Многообразие $X$ над полем $k$ называется *унирациональным*, если существует доминантное отображение $\mathbb{P}^n_k \dashrightarrow X$. Эквивалетно, поле функций $X$ является подполем чисто трансцендентного расширения поля $k$.

Примеры.
Пусть $X$ – гладкое проективное комплексное многообразие.

1. $\dim X = 1$: рациональность $\iff$ унирациональность (Lüroth).
2. $\dim X = 2$: рациональность $\iff$ унирациональность (классификация поверхностей).
3. $\dim X = 3$: существуют многообразия, которые не являются рациональными, но являются унирациональными (Clemens-Griffiths, Artin-Mumford, Исковских-Манин).
4. $X_d$ – гиперповерхность степени $d$ в $\mathbb{P}^n$.
   (a) $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ не является рациональным многообразием (Clemens-Griffiths).
   (b) $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ не является рациональным многообразием (Исковских-Манин), унирациональность в общем случае остаётся открытым вопросом.
   (c) Если $d = 3$, то многообразие $X_3$ унирационально (Kollár).
   (d) Для достаточно больших значений $n$ (т.е. $n > n(d)$ для некоторой функции $n(d)$), многообразие $X_d$ унирационально (Harris, Mazur, Pandharipande).

(e) Если $\frac{2}{3}n+\frac{1}{3} \leq d \leq n$, то "большинство"[1] многообразий $X_d$ не являются рациональными (Kollár).

5. Заметим, что если многообразие $X$ унирационально, то существует $U \subset X$ непустое открытое подмногообразие, такое, что любые две точки $x, y \in U(\mathbb{C})$ можно соединить рациональной кривой (на самом деле, можно показать, что $U = X$). Многообразия, обладающие этим свойством, называются рационально связными. Обратный вопрос: «существуют ли многообразия, которые являются рационально связными, но не являются унирациональными»,– остаётся открытым. Возможные кандитаты: $X_n \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 5$; $X$ – многообразие размерности 3, расслоенное на коники над $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

**Краткое содержание лекций.** В этом курсе мы рассмотрим два метода доказательства нерациональности. В первой части мы рассмотрим пример комплексного многообразия размерности 3, которое не является рациональным, но является унирациональным (см. [CTOj], [Oj]). Во второй части мы обратимся к примерам нерациональных многообразий Фано (см. [Kol]). Для доказательства нерациональности в первом случае, используя теорию квадратичных форм, мы будем использовать инвариант $W_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C})$ который является тривиальным для чисто трансцендентных расширений. Во втором случае, нам потребуются метод, основанный на некоторых свойствах дифференциальных форм $\Omega^i_X$.

# 2 Квадратичные формы

## 2.1 Основные понятия и свойства

Пусть $F$ – поле характеристики $car.F \neq 2$.

**Определение 2.1.** 1. *Квадратичной формой* над полем $F$ называется пара $(V, F)$, где $V$ – векторное пространство над $F$ и $q : V \to F$ —отображение, такое, что

$$q(\lambda x) = \lambda^2 x \quad \forall \lambda \in F, x \in V;$$

отображение $B_q(x,y) := \dfrac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ является билинейным.

Обозначение: $(V, q)$ или $(V, B_q)$, сокращённо, $q$.

2. Квадратичная форма $q$ называется *невырожденной*, если

$$Rad(q) := \{x \in V,\, \forall y\ B_q(x,y) = 0\} = \{0\}.$$

[1] возможно, за исключением гиперповерхностей, заданных уравнением, коэффициенты которого удовлетворяют некоторым условиям из счётного множества условий.

3. Квадратичная форма $q$ называется *изотропной*, если $\exists x \in V \setminus \{0\}, q(x) = 0$.

4. Квадратичные формы $(V, q)$ и $(V', q')$ называются *изометричными*, если существует линейный изоморфизм $f : V \to V'$, такой, что $q(x) = q'(f(x)), \forall x \in V$. Обозначение: $q \simeq q'$.

5. *Размерность:* $\dim q := \dim V$.

6. *Множество значений* $q$*:* $D_q(F) = \{a \in F^*, \exists\, x \in V, q(x) = a\}$.

7. Если $(V, q)$ – квадратичная форма над полем $F$ и $L/F$ – расширение полей, обозначим
$$q_L := (V \otimes L, q \otimes L), \quad D_q(L) := D_{q_L}(L).$$

Далее мы будем рассматривать только невырожденные квадратичные формы.

Пусть $(V, q)$ – (невырожденная) квадратичная форма. Следующие свойства хорошо известны :

**Утверждение 2.2.** *1. Существует базис пространства $V$, такой, что $q = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$.*
*Обозначение:* $q \simeq \langle a_1, \ldots a_n \rangle$.

*2. Пусть $a \in F^*$. Тогда $a \in D_q(F) \iff \exists a_2, \ldots a_n \in F, q \simeq \langle a, a_2, \ldots a_n \rangle$.*[2]

*3. Квадратичная форма $q$ является изотропной $\iff q \simeq \langle 1, -1, a_2, \ldots a_n \rangle$.*

## 2.2 Кольцо $W(F)$

На множестве всех квадратичных форм можно ввести следующие операции:

1. $\perp$ : если $(V_1, q_1) \simeq \langle a_1, \ldots a_n \rangle$ и $(V_2, q_2) \simeq \langle b_1, \ldots b_m \rangle$, то $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2) := (V_1 \oplus V_2, \langle a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m \rangle)$.

2. $\otimes$ : $(V_1, B_{q_1}) \otimes (V_2, B_{q_2}) := (V_1 \otimes V_2, B_{q_1 \otimes q_2})$, где $B_{q_1 \otimes q_2}(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = B_{q_1}(x_1, y_1) B_{q_2}(x_2, y_2)$.
Обозначение: Если $q \simeq \langle a_1, \ldots a_n \rangle$, то обозначим $aq := \langle a \rangle \otimes q \simeq \langle aa_1, \ldots aa_n \rangle$.

**Теорема 2.3** (Сокращение Витта)**.** *Пусть $q, q_1, q_2$ – квадратичные формы над полем $F$. Тогда*
$$q \perp q_1 \simeq q \perp q_2 \iff q_1 \simeq q_2.$$

[2] рассмотреть ортогональное дополнение к $Fe$, где $e \in V$ удовлетворяет условию $q(e) = a$.

*Доказательство.* Достаточно показать, что если существует изоморфизм $f : \langle a\rangle \perp q_1 \xrightarrow{\sim} \langle a\rangle \perp q_2$, то $q_1 \simeq q_2$. Утверждение теоремы следует по индукции.

Положим $Q = \langle a\rangle \perp q_1$. Пусть $(x, V)$ (соотв. $(y, W)$) – базис, в котором квадратичная форма $Q$ имеет вид $\langle a\rangle \perp q_1$ (соотв. $\langle a\rangle \perp q_2$). Положим $(x', V') = (f^{-1}(y), f^{-1}(W))$. Так как $q(x) = q(x')$, то существует отражение $u : V \to V$, такое, что $u(x) = \pm x'$ (см. упражнение 2). Так как $V = x^{\perp}$ и $V' = x'^{\perp}$, то $u$ индуцирует изометрию между $q_1$ и $q_2$.

□

**Упражнение 2.** Пусть $(V, q)$ – квадратичная форма. Пусть $e \in V$, $q(e) \neq 0$. Отражением относительно прямой $l = Fe \subset V$ называется изометрия $(V, q) \to (V, q)$ заданная матрицей $\begin{pmatrix} -Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$ в базисе $(e, e^{\perp})$. Покажите, что если $q(x) = q(y) \neq 0$, $x, y \in V$, то существует отражение $u$, такое, что $u(x) = \epsilon y$, где $\epsilon = 1$ или $-1$ (рассмотреть отражение относительно прямой $x - y$ или $x + y$).

**Определение 2.4.**

1. *Гиперболическая плоскость:* $\mathbb{H} \simeq \langle 1, -1\rangle$.
2. Квадратичная форма $q$ называется *гиперболической*, если $q \simeq m\mathbb{H} := \mathbb{H} \perp \ldots \perp \mathbb{H}$ ($m$ раз).

**Упражнение 3.** Показать, что $D_{\mathbb{H}}(F) = F^*$.

**Следствие 2.5.** *Для любой квадратичной формы $q$ существует единственное число $i_q$ и анизотропная квадратичная форма $q_{an}$, единственная с точностью до изоморфизма, такие, что $q \simeq i_q\mathbb{H} \perp q_{an}$.*

**Определение 2.6** (Кольцо Витта)**.**

$$W(F) := \{\text{квадратичные формы над } F\}/\sim,$$

где $q_1 \sim q_2$ если $q_1 \perp r_1\mathbb{H} \simeq q_2 \perp r_2\mathbb{H}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $W(F)$ образует кольцо относительно операций $\perp$ и $\otimes$.

**Определение 2.7.** *Фундаментальным идеалом* в $WF$ называется идеал $IF$, образованный квадратичными формами чётной размерности.

**Лемма 2.8.** *Идеал $IF$ порождается формами $\langle\langle a\rangle\rangle := \langle 1, -a\rangle$.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что $\langle a, b\rangle = \langle 1, -1, a, b\rangle = \langle 1, b\rangle - \langle 1, -a\rangle$.

□

**Упражнение 4.**

1. Покажите, что $\langle a, b\rangle \simeq \langle a + b, ab(a + b)\rangle$.

2. Покажите, что если $q, q'$ – анизотропные квадратичные формы, такие, что $q \perp -q' \simeq n\mathbb{H} \perp \rho$, то существует предствление $q \simeq \phi \perp q_1$ и $q' \simeq \phi \perp q_1'$, где $\phi, q', q_1'$ – некоторые квадратичные формы и $\dim \phi = n$.

3. Пусть $V(F)$ – аддитивная группа, порождённая элементами $[a]$, $a \in F$, связанными соотношениями $[a] = [ab^2]$, $\quad [-a] = -[a]$, $\quad [a]+[b] = [a+b]+[ab(a+b)]$. Покажите, что если $\langle a_1, \dots a_n \rangle \simeq \langle b_1, \dots b_n \rangle$, то $[a_1] + \dots + [a_n] = [b_1] + \dots + [b_n]$ в $V(F)$.

   (a) рассмотрите случай $n = 1, 2$.

   (b) если $n \geq 3$, примените утверждение предыдущего пункта к $q = \langle a_1, \dots a_{n-1} \rangle, q' = \langle b_1, \dots b_{n-1} \rangle$.

4. Покажите, что аддитивная группа $W(F)$ порождается элементами $\langle a \rangle$, связанными соотношениями:

$$\langle a \rangle = \langle ab^2 \rangle, \quad \langle -a \rangle = -\langle a \rangle, \quad \langle a, b \rangle = \langle a+b, ab(a+b) \rangle. \tag{1}$$

## 2.3 Формы Пфистера

**Определение 2.9.** 1. *Формой Пфистера* называется называется квадратичная форма $\langle\langle a_1, \dots a_n \rangle\rangle := \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle$.

2. Квадратичная форма $\phi$ называется *соседней* к форме Пфистера $\pi$, если

   (i) $\dim \phi > \frac{1}{2} \dim \pi$,

   (ii) $\pi \simeq c\phi \perp \pi'$, где $\pi'$ – некоторая квадратичная форма и $c \in F^*$.

**Утверждение 2.10.** *Пусть $\pi$ – квадратичная форма Пфистера над полем $F$.*

*1. $\pi$ изотропна тогда и только тогда, когда $\pi$ гиперболична.*

*2. $c \in D_\pi(F) \iff \pi \simeq c\pi$.*

*Доказательство.* По индукции.

1. Случай $\pi = \langle\langle a \rangle\rangle$ следует из равенства $(u^2 - av^2)(x_1^2 - ax_2^2) = (ux_1 - avx_2)^2 - a(vx_1 - ux_2)^2$.

2. Переход от $\pi$ к $\pi \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$:

   (i) $\pi$ гиперболична $\Rightarrow \pi \otimes \langle 1, -a \rangle$ тоже; $D_{\mathbb{H}}(F) = F^*$.

   (ii) Случай $\pi$ анизотропна и $\pi \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ изотропна: $\pi(u) - a\pi(v) = 0$. Имеем: $\pi(u) \neq 0 \neq \pi(v)$ и $\pi \simeq \pi(u)\pi$, $a\pi \simeq a\pi(v)\pi \simeq \pi(u)\pi$ по индуции. Получаем: $\pi \perp -a\pi \simeq \pi(u)\pi \perp -\pi(u)\pi$– гиперболическая форма; $D_{\mathbb{H}}(F) = F^*$.

(iii) Случай $\pi$ анизотропна и $\pi \otimes \langle\langle a \rangle\rangle$ анизотропна.
Пусть $c \in D_{\pi\otimes\langle 1,-a\rangle} : c = \pi(u) - a\pi(v)$.
Случай $u = 0$ (соотв. $v = 0$) следует из того, что $\pi \simeq \pi(v)\pi$ (соотв. $\pi \simeq \pi(u)\pi$).
Если $\pi(u) \neq 0 \neq \pi(v)$, то $\pi(u)\pi \simeq \pi \simeq \frac{\pi(v)}{\pi(u)}\pi$, откуда:

$$c(\pi\perp -a\pi) \simeq (1-a\frac{\pi(v)}{\pi(u)})(\pi\perp -a\frac{\pi(v)}{\pi(u)}\pi) \simeq (1-a\frac{\pi(v)}{\pi(u)})\langle\langle a\frac{\pi(v)}{\pi(u)}\rangle\rangle\pi \simeq \langle\langle a\frac{\pi(v)}{\pi(u)}\rangle\rangle\pi \simeq \pi\otimes\langle\langle a\rangle\rangle.$$

□

## 2.4 Некоторые свойства $D_q$, теоремы Пфистера и Касселса-Пфистера

**Теорема 2.11** (Cassels-Pfister). *Пусть $(V, q)$ – квадратичная форма над полем $F$ и пусть $f \in F[x]$. Предположим, что $f \in D_q(F(x))$. Тогда $f = q(v')$ для некоторого $v' \in V \otimes F[x]$.*

*Доказательство.* Используя упражнение 3, можно предположить, что форма $q$ анизотропна. По условию, квадрика $Q : \{fx_0^2 - q = 0\} \subset \mathbb{P}^n_{F(x)}$ имеет рациональную точку $P$. Положим $P = (f_0 : \ldots f_n)$, где $f_i \in F[x]$ взаимно просты. Не нарушая общности, можно выбрать $P$ такую, что степень $deg f_0$ является минимальной. Поделим $f_i$ на $f_0$ с остатком: $f_i = f_0 g_i + r_i$. Пусть $P' = (g_0 : \ldots : g_n)$. Если $P' \in Q$, то теорема доказана. В противном случае, несложно показать (упражнение), что вторая точка пересечения прямой $PP'$ с квадрикой $Q$ может быть представлена как $(s_0 : \ldots : s_n)$, $s_i \in F[x]$, $deg s_0 < deg f_0$. Получили противоречие.

□

**Упражнение 5.** Что произойдёт, если в теореме заменить $F(x)$ на $F(x_1, \ldots x_m)$? (Указание: рассмотрите многочлен $f(x, y) = 1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$. Тогда

$$f(x, y) = \frac{(1 + x^2 - 2x^2y^2)^2 + [xy(1 - x^2)]^2 + [xy^2(1 - x^2)]^2 + [x^2y^2(1 - x^2)]^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Покажите, что $f(x, y)$ не является суммой квадратов в $\mathbb{R}[x, y]$.)

**Следствие 2.12.** *Пусть $q = \langle a_1\rangle \perp q'$ – анизотропная квадратичная форма над полем $F$. Пусть $b \in F^*$. Если $a_1x^2 + b \in D_q(F(x))$, то $b \in D_{q'}(F)$.*

*Доказательство.* Положим $q' = \langle a_2, \ldots a_n\rangle$. По теореме Касселса-Пфистера,

$$a_1x^2 + b = a_1f_1^2 + \ldots + a_nf_n^2, \quad f_i \in F[x]. \tag{2}$$

Тогда $f_i$ можно представить в виде $f_i = p_ix + q_i$. Подставив $x = \frac{q_1}{1-p_1}$ или $x = \frac{-q_1}{1+p_1}$ (если $p_1 = 1$) в (2), получаем утверждение леммы. □

**Следствие 2.13.** *Пусть $P \in F[x_1, \dots x_m]$ и $c = (c_1, \dots c_m) \in F^m$. Предположим, что $P(c) \neq 0$. Если $P \in D_q(F(x_1, \dots x_m))$, то $P(c) \in D_q(F)$.*

*Доказательство.* Применить последовательно теорему Касселса-Пфистера к $P(x_1, \dots x_m) \in F(x_1, \dots x_{m-1})[x_m]$, затем к $P(x_1, \dots x_{m-1}, c_m) \in F(x_1, \dots x_{m-2})[x_{m-1}]$ и т.д.

□

**Теорема 2.14** (Pfister). *Пусть $q = \langle a_1, \dots a_n \rangle$ и $q' = \langle a'_1, \dots a'_n \rangle$. Следующие утверждения эквивалентны:*

*(i) $q' = q \perp \rho$ для некоторой формы $\rho$;*

*(ii) $a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 \in D_{q'}(F(x_1, \dots x_n))$.*

*Доказательство.* Так как $a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 \in D_q(F(x_1, \dots x_n))$, то необходимость очевидна.

Покажем достаточность. Применив следствие 2.13 к $P = q$, получим $a_n = q(0, \dots, 0, 1) \in D_{q'}(F)$. Следовательно, $q' = \langle a_n \rangle \perp q''$ (см. утверждение 2.2). По следствию 2.12, $a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2 \in D_{q''}(F(x_1, \dots x_{n-1}))$. Утверждение теоремы следует по индукции. □

## 2.5 $W(F)$ и $W(F(q))$, теорема Арасона-Пфистера

Пусть $q = \langle a_1, \dots a_n \rangle$ – квадратичная форма над полем $F$ и пусть $X_q \subset \mathbb{P}_F^{n-1}$ – квадрика $q = 0$. Обозначим через $F(q)$ поле функций квадрики $X_q$:

$$F(q) = F[x_1, \dots x_{n-1}]/a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + a_n.$$

**Упражнение 6.** Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) $q$ является изотропной;

(ii) $X_q(F) \neq \emptyset$;

(iii) $X_q$ является рациональным многообразием.

В этом параграфе мы докажем следующий результат:

**Теорема 2.15** (Arason-Pfister). *Пусть $q$ – квадратичная форма, соседняя с формой Пфистера $\pi$. Тогда*

$$\operatorname{Ker}\left[W(F) \to W(F(q))\right]$$

*порождается классом $\pi$.*

Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений:

**Утверждение 2.16.** *Пусть $L = F(\sqrt{a})$ – квадратичное расширение и пусть $(V, q)$ – квадратичная форма над $F$.*

*(i) Форма $q_L$ изотропна $\iff$ $q \simeq q' \perp c\langle 1, -a\rangle$ для некоторой квадратичной формы $q'$ над $F$ и $c \in F^*$.*

*(ii) Форма $q_L$ гиперболична $\iff$ $q \simeq q' \otimes \langle 1, -a\rangle$ для некоторой квадратичной формы $q'$ над $F$.*

*Доказательство.* (i) По условию, $q(u + \sqrt{a}v) = 0$ для некоторых $u, v \in V$, откуда получаем $q(u) = -aq(v) \neq 0$ ($q$ – анизотропна) и $B_q(u, v) = 0$. Таким образом, $\langle q(v), q(u)\rangle = q(v)\langle 1, -a\rangle$ и искомое представление $q$ получается в базисе $(v, u, (v, u)^{\perp})$.

(ii) Так как $\langle 1, -a\rangle_{F(\sqrt{a})}$ является гиперболической формой, то получаем $(ii)$ последовательным применением утверждения $(i)$.

□

Заметим, что если форма $q$ над полем $F$ является анизотропной, то и форма $q_{F(t)}$ является анизотропной. Получаем:

**Лемма 2.17.** *Отображение $W(F) \to W(F(t))$ инъективно.*

**Утверждение 2.18.** *Пусть $\pi$ – форма Пфистера размерности $\dim q \geq 4$. Пусть $q$ – анизотропная квадратичная форма. Если класс $q$ в $W(F(\pi))$ является тривиальным, то $q = \pi \otimes q'$ для некоторой квадратичной формы $q'$.*

*Доказательство.* Положим $\pi = \langle 1, a_2, \dots a_n\rangle$. Пусть $c \in D_q(F)$. Покажем, что $q = c\pi \perp q_1$. По теореме Пфистера 2.14, достаточно показать, что

$$cx_1^2 + ca_2x_2^2 + \ldots + ca_nx_n^2 \in D_q(F(x_1, \dots x_n)). \qquad (3)$$

Положим $f = a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$. Из условия следует, что класс формы $q$ принадлежит ядру отображения

$$W(F(x_2, \dots x_n)) \to W(F(x_2, \dots x_n)\sqrt{-f}).$$

Из утверждения 2.16 получаем, что

$$q_{F(x_2, \dots x_n)} \simeq \langle 1, f\rangle \otimes q_1$$

для некоторой квадратичной формы $q_1$ над $F(x_2, \dots x_n)$. Имеем:

$$(x_1^2 + f)q_{F(x_2, \dots x_n)} \simeq (x_1^2 + f)\langle 1, f\rangle \otimes q_1.$$

Так как $(x_1^2+f) \in D_{\langle 1,f\rangle}(F(x_1,\dots x_n))$, то $(x_1^2+f)\langle 1,f\rangle \simeq (x_1^2+f)$ по утверждению 2.10. Получаем:

$$(x_1^2+f)q_{F(x_1,x_2,\dots x_n)} \simeq q_{F(x_1,x_2,\dots x_n)}.$$

Таким образом, если $c \in D_q(F)$, то $cx_1^2 + cf \in D_q(F(x_1,\dots x_n))$, то есть условие (3) выполняется.

Таким образом, $q = c\pi \perp q_1$. Заметим, что условие теоремы выполняется для формы $q_1$, так как форма Пистера $\pi$ является изотропной и, следовательно, гиперболической, над $F(\pi)$. Применив предыдущее рассуждение к $q_1$, получаем: $q = c\pi\perp c_1\pi\perp q_2$ и аналогично для $q_2$ и т.д., откуда получаем разложение $q = \pi \otimes q'$ по индукции. □

*Доказательство теоремы 2.15.* Заметим, что форма $\pi_{F(\pi)}$ изотропна и, следовательно, гиперболична (см. 2.10): $\pi_{F(\pi)} \simeq m\mathbb{H}$. Так как $\dim q > \frac{1}{2}\dim\pi$ по определению, то $q_{F(\pi)} = \mathbb{H}\perp q'$ для некоторой формы $q'$, то есть форма $q_{F(\pi)}$ изотропна. Таким образом, расширение $F(\pi)(q)/F(\pi)$ – чисто трансцендентное расширение. По Лемме 2.17, отображение $W(F(\pi)) \to W(F(\pi)(q))$ инъективно.

Аналогично, форма $q_{F(q)}$ изотропна и, значит, форма $\pi_{F(q)}$ также изотропна. Получаем, что расширение $F(\pi)(q)/F(q)$ чисто трансцендентно и отображение $W(F(q)) \to W(F(\pi)(q))$ инъективно.

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
W(F) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & W(F(q)) \arrow[d, hook] \\
W(F(\pi)) \arrow[r, hook] & W(F(\pi)(q)).
\end{tikzcd}$$

следует, что $\ker\alpha_1 = \ker\alpha_2$. По теореме Арасона-Пфистера, $\ker\alpha_1 = \ker\alpha_2$ порождается классом формы $\pi$. □

# 3 Унирациональные и нерациональные комплексные многообразия

## 3.1 Неразветвлённая группа Витта

Пусть $F$ – поле и пусть $v$ – дискретное нормирование на $F$. Обозначим $A_v$ – кольцо нормирования $v$, $k_v$ – поле вычетов и $\pi_v$ — фиксированный локальный параметр.

**Утверждение 3.1.** *1. Существует единственный гомоморфизм групп $\partial^1 : W(F) \to W(k_v)$, удовлетворяющий следующим условиям*

*(i) $\partial^1(\langle u\rangle) = 0$ если $u \in A_v$ и $v(u)$ нечётно.*

*(ii)* $\partial^1(\langle u\rangle) = \langle\bar{u}\rangle$, *если* $u \in A_v^*$, $\bar{u}$ *обозначает образ* $u$ *в поле* $k_v$.

2. *Ядро отображения* $\partial_v : W(F) \to W(k_v), q \mapsto \partial^1(\pi_v q)$ *не зависит от выбора локального параметра* $\pi_v$.

*Доказательство.* Для доказательства первой части достаточно проверить, что $\partial^1$ сохраняет соотношения (1) (см. упражнение 4), что мы оставляем в качестве упражнения.

Квадратичную форму $q$ над $F$ можно представить в виде $\langle a_1, \dots a_n\rangle \perp \pi_v\langle b_1, \dots b_m\rangle$, $a_i, b_j \in A_v^*$. Тогда $\partial_v(q) = \langle\bar{b}_1, \dots \bar{b}_m\rangle$. Если $\pi_v'$ – локальный параметр $A_v$, отличный от $\pi_v$, то $\pi_v = u\pi_v'$ для некоторого $u \in A_v^*$. Если $\langle\bar{b}_1, \dots \bar{b}_m\rangle = 0$ в $W(k_v)$, то и $\bar{u}\langle\bar{b}_1, \dots \bar{b}_m\rangle = 0$ в $W(k_v)$, из чего следует второе утверждение. □

**Определение 3.2.** Пусть $F/k$ – расширение полей.

$$W_{\mathrm{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes j}) := \bigcap_A \mathrm{Ker}\partial_v,$$

где пересечение рассматривается по всем кольцам дискретного нормирования (ранга 1) $A \supset k$, с полем частных $F$.

**Теорема 3.3** (Milnor)**.** *Существует естественный изоморфизм*

$$W(k) \xrightarrow{\sim} W_{\mathrm{nr}}(k(t)/k).$$

*Доказательство.* Оставляем в качестве упражнения (см. [Lam] IX.3.1) □

**Упражнение 7.** 1. Пусть $i : W(k) \to W(k(t))$ – естественное отображение и пусть $\tau : W(k(t)) \to W(k)$ – отображение, индуцированное $\partial^1$ для нормирования, соответствующего $t$ (см. утверждение 3.1). Докажите, что $\tau \circ i$ является тождественным отображением.

2. Если $P \in k[t]$ неприводимый многочлен, обозначим $\kappa(P)$ – поле вычетов соответствующего дискретного нормирования. Пусть $L_d \subset W(k(t))$ – подкольцо, порождённое элементами $\langle f\rangle$, где $f \in k[t]$ степени не более $d$. Покажите, что отображение

$$\bigoplus_{\deg P = d} \partial_P : L_d/L_{d-1} \to \bigoplus_{\deg P = d} W(\kappa(P)) \tag{4}$$

является изоморфизмом:

(i) Покажите, что если $f, P \in k[t]$, $deg\, P = d$ и $f = Pf' + r$ – деление с остатком $f$ на $P$, то $\langle fP\rangle = \langle rP\rangle \bmod L_{d-1}$ (используйте, что $\langle f\rangle + \langle frPf'\rangle = \langle Pf'\rangle + \langle r\rangle$ в $W(k(t))$).

(ii) Если $\bar{g} \in \kappa(P)$, пусть $g \in k[t]$ – единственный многочлен степени меньше $d$, образ которого в $\kappa(P)$ равен $\bar{g}$. Докажите, что отображение $\tau_P : W(\kappa(P)) \to L_d/L_{d-1}$, $\langle\bar{g}\rangle \mapsto \langle Pg\rangle + L_{d-1}$ определено корректно (по аналогии с утверждением 3.1).

(iii) Докажите, что $\partial_P \circ \tau_P = Id$.

(iv) Покажите, что $L_d$ аддитивно порождается $L_{d-1}$ и элементами $\langle fg_1 \dots g_s \rangle$, где $f$ монический многочлен степени $d$, и $g_1, \dots g_s$ – многочлены степени не более $d-1$ (используйте, что $L_d$ порождается элементами $\langle f_1 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle$, где $f_1, \dots f_r$ монические, степени $d$, и $g_1, \dots g_s$ – степени не более $d-1$; используйте, что $\langle f_2, h \rangle \simeq \langle f_1 f_2, f_1 f_2 h \rangle$)

(v) Покажите, что $L_d / L_{d-1}$ аддитивно порождается элементами $\tau_P$.

(vi) Используя предыдущий пункт, покажите изоморфизм (4).

3. Сделайте вывод, что существует точная последовательность

$$0 \to W(k) \to W(k(t)) \stackrel{\oplus \partial_P}{\to} \bigoplus_P W(\kappa(P)) \to 0.$$

**Следствие 3.4.** *Если расширение $F/k$ – чисто трансцендентное расширение, то $W(k) \xrightarrow{\sim} W_{\mathrm{nr}}(F/k)$.*

## 3.2 Пример

В этом параграфе мы построим пример комплексного унирационального многообразия $X$ размерности 3, которое не является рациональным.

Используя результаты предыдущего параграфа, мы построим $X$, расслоенное на коники над $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ :

$$\phi : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

с общим слоем

$$q : \qquad x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 = 0, a, b \in k := \mathbb{C}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}). \tag{5}$$

**Утверждение 3.5.** $\ker[W(k) \to W(k(q))] = \{0, \langle\langle a, b \rangle\rangle\}$.

*Доказательство.* Форма $q$ является соседней к форме Пфистера $\langle\langle a, b \rangle\rangle$. По теореме 2.15, $\ker[W(k) \to W(k(q))]$ порождается классом формы $\langle\langle a, b \rangle\rangle$. Однако $W(k)\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle$, как показывает следующее упражнение. □

**Упражнение 8.** (i) Поле $k$ называется полем $C_i$, если каждая проективная гиперповерхность в $\mathbb{P}^n_k$ степени $d$ с $n \geq d^i$ имеет рациональную точку. По теореме Тцена, если $k$ является полем $C_i$, то $k(t)$ является полем $C_{i+1}$. Докажите частный случай этой теоремы: каждая квадратичная форма над $\mathbb{C}(x, y)$ от пяти или более переменных имеет рациональную точку.

(ii) Пусть $k$ – поле $C_2$ и пусть $a, b, c \in k$. Докажите, что $\langle\langle a, bc \rangle\rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle + \langle\langle a, c \rangle\rangle$ в $W(k)$.

Предположим, что $b = -b_1 b_2$. Тогда $\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle\langle a, b_1 \rangle\rangle - \langle\langle a, b_2 \rangle\rangle$ (см. предыдущие упражнение). Обозначим $\alpha_i = \langle\langle a, b_1 \rangle\rangle$,

$$Ram_k \alpha_i = \{v \text{ дискретное нормирование на } k, \partial_v(\alpha_i) \neq 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $F$ – поле функций многообразия $X$, $F = k(q)$.

**Теорема 3.6.** *Предположим*

$$Ram_k\alpha_1 \neq 0, Ram_k\alpha_2 \neq 0, Ram_k\alpha_1 \cap Ram_k\alpha_2 = \emptyset. \tag{6}$$

*Тогда* $W_{\mathrm{nr}}(F/\mathbb{C}) \neq 0$. *Многообразие* $X$ *не является рациональным. Если* $a$ *– многочлен степени* 2 *от* $x$ *и* $y$, *то многообразие* $X$ *унирационально.*

*Доказательство.* Покажем, что $\alpha_{1,F} \neq 0$. Так как $0 \neq Ram_k\alpha_1 \neq Ram_k\alpha_2 \neq 0$, то $0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2$. Если $\alpha_{1,F} = 0$, то получаем два различных нетривиальных элемента $\alpha_1$ и $\alpha_1 - \alpha_2$ в $\ker[W(k) \to W(F)]$, противоречие с утверждением 3.5.

Покажем, что $\alpha_{1,F} \in W_{\mathrm{nr}}(F/\mathbb{C})$. Пусть $w$ – дискретное нормирование на $F$. Если $k \subset A_w$, то $\partial_w(\alpha_{1,F}) = 0$. В противном случае, $w$ индуцирует дискретное нормирование $v$ на $k$. Так как $\alpha_{1,F} = \alpha_{2,F}$ и по условию $\partial_v(\alpha_1) = 0$ либо $\partial_v(\alpha_2) = 0$, то $\partial_w(\alpha_{1,F}) = 0$.

Получаем, что $W_{\mathrm{nr}}(F/\mathbb{C}) \neq 0$. Так как $W(\mathbb{C}) = 0$, то расширение $F/\mathbb{C}$ не является чисто трансцендентным по следствию 3.4, значит, многообразие $X$ не может быть рациональным. С другой стороны, $F = k(q) \subset k(q)(\sqrt{a})$ и расширение $k(q)(\sqrt{a})/k(\sqrt{a})$ является чисто трансцендентным, так как квадрика $q_{k(\sqrt{a})}$ изотропна. Поле $k(\sqrt{a}) = k[z]/(z^2 - a)$ является полем функций коники $C : z^2 - a = 0$ над полем $\mathbb{C}(z)$, которое является полем $C_1$. Следовательно, коника $C$ имеет рациональную точку и расширение $k(\sqrt{a})/\mathbb{C}(z)$ является чисто трансцендентным. Получаем, что расширение $k(q)(\sqrt{a})/\mathbb{C}$ чисто трансцендентно, следовательно, многообразие $X$ является унирациональным. $\square$

В оставшейся части этого параграфа мы построим $a, b_1, b_2$, такие, что условие (6) выполняется.

Пусть $v$ – дискретное нормирование на $F$ и пусть $A_v$ – кольцо нормирования $v$. Так как $X$ – проективное многообразие, то вложение общей точки $\operatorname{Spec} F \to X$ индуцирует отображение $i_v : \operatorname{Spec} A_v \to X$. Положим $x_v = i_v(\operatorname{Spec} k_v)$. Мы будем называть $\phi(x_v)$ центром нормирования $v$ в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

**Упражнение 9.** Кольца дискретного нормирования могут иметь довольно сложную структуру. Пусть $A = k[x, y, z]$, $K = k(x, y, z)$ и $R = \bigcup_{n \geq 1} k[[x^{1/2^n}, y, z]]$. Пусть $f = z - \sum_{n \geq 1} x^{1/2^n} y^n$, $f \in R$. Обозначим $\bar{R} = R/f$ и $L = \mathrm{Frac}\bar{R}$.

1. Покажите, что $A \subset \bar{R}$.
2. Пусть $\mu$ – дискретное нормирование на $L$, заданное элементом $y \in L$. Пусть $v$ – ограничение $\mu$ на $A$ и пусть $k(v)$ – поле вычетов $v$. Найдите $v(y), v(x), v(z)$.
3. Пусть $\bar{k} = \cup_{n \geq 1} k((x^{1/2^n}))$. Покажите, что $\bar{k} \subset k(v)$. Как следствие, покажите, что расширение $k(v)/k$ имеет степень трансцендентности 1, но не является расширением конечного типа.

Построим $a, b_1, b_2$ как произведение линейных факторов. Положим $b_1 = l_1 l_2 m_1 m_2$, $b_2 = l_3 l_4 m_3 m_4$ и $a = xy$ (см. рисунок). Пусть $v$ – дискретное нормирование на $F$ и пусть $P$ – центр $v$ в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Покажем, что условие (6) выполняется. Мы разберём два случая, когда $P \in \mathbb{P}^{2\,(1)}_{\mathbb{C}}$ и $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Остальные случаи мы оставляем как упражнение.

1. Если $P$ соответствует прямой $L_1$, то образ $\bar{a}$ элемента $a$ в $k_v = \mathbb{C}(L_1)$ имеет нули $p_1$ и $q_1$ кратности 1 и особенность кратности 2 на бесконечности. Следовательно, $\bar{a}$ не является квадратом и $\partial_v(\alpha_1) \neq 0$. С другой стороны, $a, b_2 \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},P}$, откуда $\partial_v(\alpha_2) = 0$.

2. Предположим, что $P$ – замкнутая точка, например $p_1$. Тогда функция $f = b_1/l_1^2$ является обратимой в точке $p_1$, откуда получаем, что $\partial_v(\alpha_1)$ индуцируется классом $f(p_1) \in \mathbb{C}$, что является квадратом, откуда $\partial_v(\alpha_1) = 0$.

# 4 Примеры нерациональных многообразий Фано

В этом параграфе мы построим примеры нерациональных многообразий Фано размерности $d$, для любого $d \geq 3$ (см. определение в §4.1).

План построения.

1. В части 4.1 мы установим следующее препятствие к рациональности, основанное на свойствах дифференциальных форм:

   *Пусть $X$ – гладкое, проективное многообразие над полем $k$. Предположим, что существует большой обратимый пучок $L$ на $X$, такой, что $L \subset \bigwedge^i \Omega_X$ для некоторого $i > 0$. Тогда $X$ не может быть сепарабельно унилинейчатым многообразием.*

   Мы будем использовать это утверждение в случае положительной характеристики. Если же $k$ – поле характиристики нуль и $L \subset \bigwedge^i \Omega_X$ – большой обратимый пучок, то $i$ может быть только $i = \dim X$ (Богомолов, Sommese, см. [EV] p.58), и, в таком случае, мы требуем, чтобы $\omega_X$ было большим, что никогда не выполняется для многообразий Фано.

2. Мы построим конечное накрытие $\pi : Z \to \mathbb{P}^n$, заданное в аффинной карте $x_0 \neq 0$ условием
$$y^p - f(\frac{x_1}{x_0}, \dots \frac{x_n}{x_0}) = 0,$$
   где $f$ – многочлен степени $mp$ и числа $m, n, p$ удовлетворяют условиям:
$$n + 1 < mp < n + 1 + \frac{n+1}{p-1}. \tag{7}$$
   Для достаточно общего выбора коэффициентов многочлена $f$, многообразие $Z$ является нормальным и имеет только изолированные сингулярные точки.

После последовательного раздутия этих точек, мы получим многообразие $q : Z' \to Z$, которое является гладким (см. упражнение 11, где рассматривается конкретный пример). Условие $mp < n+1+\frac{n+1}{p-1}$ гарантирует, что многообразие $Z$ является многообразием Фано.

3. Если $k$ – поле характеристики $p$, мы построим $L \subset \bigwedge^{n-1}\Omega_X$ – большой обратимый пучок: $L := q^*\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$.

4. Чтобы перейти к случаю нулевой характеристики, мы будем использовать следующий результат (Matsusaka):

   *Пусть $A$ – кольцо дискретного нормирования с полем частных $K$ и полем вычетов $k$. Пусть $X$ – нормальная неприводимая схема, проективная над $S = \operatorname{Spec} A$. Предположим, что многообразие $X_{\bar{K}}$ является рациональным и многообразие $X_{\bar{k}}$ является приведённым. Тогда каждая неприводимая компонента многообразия $X_{\bar{k}}$ является линейчатым многообразием.*

Для достаточно общего выбора коэффициентов (и в конкретном случае упражнения 11), построенное накрытие $Z \to \mathbb{P}^n$ можно реализовать как общий слой $Z = X_{\bar{K}}$ накрытия $X \to \mathbb{P}^n_A$, где $A$ – некоторое кольцо дискретного нормирования. Специальный слой $X_{\bar{k}} \to \mathbb{P}^n_{\bar{k}}$, $\operatorname{car.k} > 0$, не может быть линейчатым многообразием (из пунктов 1–3). Получаем, что многообразие $Z$ не может быть рациональным.

## 4.1 Введение

Напомним вкратце некоторые факты и понятия, которые мы будем использовать в этой части.

**Дивизоры, большие дивизоры** (см. [Deb], [Har]).

1. Пусть $X$ – целая схема. Пусть $K(X)$ – поле функций $X$. Напомним, что дивизор Картье $(U_i, f_i)_i$ на $X$ задаётся следующими данными: $X = \cup U_i$ открытое покрытие $X$, $f_i \in K(U_i)^*(= K(X)^*)$, такие, что $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*_X(U_i \cap U_j)$. Дивизор Картье называется главным если $f_i = f$ для $f \in K(X)$. Существует изоморфизм между группой классов дивизоров Картье (по модулю главных дивизоров) и группой Пикара $\operatorname{Pic} X$ (классы изоморфизмов обратимых пучков на $X$), дивизору $(U_i, f_i)_i$ соответствует пучок, порождённый элементом $\frac{1}{f_i}$ на $U_i$. Если $g : Y \to X$ – доминантный морфизм целых схем и $D = (U_i, f_i)_i$ – дивизор Картье на $X$, то можно определить дивизор Картье $g^*D$ на $Y$: $(g^{-1}(U_i), f_i \circ g)$. Обратимый пучок $L$ (и соответствующий дивизор Картье) называется *обильным* если для любого когерентного

пучка $\mathcal{F}$ на $X$ существует целое число $n_0$, такое, что для любого $n \geq n_0$, пучок $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$ порождается глобальными сечениями. Если схема $X$ является нормальной, то вводится понятие дивизора Вейля: это формальная сумма $D = \sum n_i D_i$, где $D_i \subset X$ – замкнутые подсхемы коразмерности 1 и $n_i \in \mathbb{Z}$, по определению $D \geq 0 \iff n_i \geq 0$. Главный дивизор Вейля: $div(f) = \sum_{V \in X^{(1)}} ord_V(f)V$, где $f \in K(X)$. Каждому дивизору Вейля $D$ можно поставить в соответствие *рефлексивный*(то есть изоморфный пучку, полученному дважды применив операции дуализации) пучок $\mathcal{O}_X(D)$, $\Gamma(V, \mathcal{O}_X(D)) = \{f |\, div(f)|_V + D|V \geq 0\}$. Существует взаимно однозначное соотвествие между классами дивизоров Вейля и классами изоморфизмов рефлексивных пучков ранга 1. Если многообразие $X$ является гладким, то существует взаимно однозначное соответствие между дивизорами Картье и дивизорами Вейля (соотв. главными дивизорами Картье и Вейля). Если $X$ – нормальное многообразие и $U \subset X$ – открытое подмногообразие коразмерности не менее 2, то существует взаимно однозначное соответствие между дивизорами Вейля на $X$ и на $U$. В этой части будут рассматриваться либо дивизоры на гладких многообразиях, либо их обратные образы при помощи доминантных морфизмов.

2. Пусть $X$ – проективное многообразие и пусть $D$ – дивизор Картье на $X$. Следующие свойства эквивалентны:

   (i) $D$ является суммой обильного и эффективного дивизоров;

   (ii) для некоторого $m > 0$, отображение $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, mD)$ индуцирует бирациональный изоморфизм между многообразием $X$ и его образом.

   Дивизор $D$ (а также соответствующий обратимый пучок), удовлетворяющий этим свойствам, называется *большим*.

3. Пусть $f : Y \to X$ конечный морфизм многообразий и пусть $D$ – обильный дивизор Картье на $X$. Тогда $f^*D$ также является обильным.

4. Пусть $f : Y \to X$ морфизм многообразий, конечный в общей точке, и пусть $D$ – большой дивизор Картье на $X$. Тогда $f^*D$ также является большим.

Замечание Утверждение 3 не выполняется для обильных дивизоров. (Пусть $X$ – гладкое проективное многообразие, пусть $D$ – дивизор Картье на $X$. Если $C \subset X$ – некоторая кривая, то можно определить перечение $D \cdot C$, которое удовлетворяет формуле проекции $f^*D \cdot C = D \cdot f_*C$, где $Y$ – проективное многообразие и $f : Y \to X$ – некоторый морфизм. Если $D$ – обильный дивизор, то $D \cdot C > 0$. Таким образом, если $f_*C = 0$, то есть если $\dim f(C) = 0$, то $f^*D$ не может быть обильным. Это произойдёт, например, если $f$ – раздутие и кривая $C$ вложена в исключительный дивизор.)

**Пучки дифференциальных форм.** Для каждого многообразия $X$ над полем $k$ мы обозначаем $\Omega_X$ – пучок дифференциальных форм на $X$.

1. Пусть $X$ – гладкое многообразие. Тогда пучок $\Omega_X$ является локально свободным. *Канонический* пучок определяется как $\omega_X = \bigwedge^{\dim X} \Omega_X$. Дивизор $K_X$, такой, что, $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$, называется *каноническим* дивизором[3]. Если $Z \subset X$ –гладкое подмногообразие $X$, то выполяется *формула присоединения*

$$K_Z \simeq (K_X \otimes \mathcal{O}_X(Z))|_Z.$$

   Если многообразие $Z$ является нормальным, то дивизор $K_Z$, как дивизор Вейля, также определён и формула присоединения остаётся верной (достаточно это показать на гладком открытом подмногообразии $Z^{sm} \subset Z$, коразмерность которого не менее двух, см. [Har] II.6.5).

2. Нормальное проективное многооообразие $X$ называется *многообразием Фано*, если дивизор $K_X$ является дивизором Картье (в более общей форме, $\mathbb{Q}$-Картье) и $-K_X$ является обильным.

**Пучки дифференциальных форм и рациональные многообразия.**

**Теорема 4.1.** *Пусть $X$ – гладкое, проективное многообразие над полем $k$. Предположим, что многообразие $X$ является рациональным. Тогда*

$$\Gamma(X, \Omega_X^{\otimes m}) = 0, \forall m \geq 1.$$

*Доказательство.* Пусть $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ – бирациональное отображение. Мы можем предположить, что $\phi$ определено на открытом подмногообразии $U \subset \mathbb{P}^n$ коразмерности не менее двух (см. упражнение 10).

Получаем вложение $\phi^* \Omega_X^{\otimes m} \hookrightarrow \Omega_U^{\otimes m}$. Следовательно,

$$\Gamma(X, \Omega_X^{\otimes m}) \subset \Gamma(U, \Omega_U^{\otimes m}) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^{\otimes m}),$$

где последнее равенство следует из того, что коразмерность $U$ не менее двух. Таким образом, достаточно показать, что $\Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^{\otimes m}) = 0$. Существует точная последовательность

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0.$$

Значит, $(\Omega_{\mathbb{P}^n})^{\otimes m} \subset (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))^{\oplus(n+1)^m}$, откуда получаем требуемое утверждение, так как $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) = 0, m > 0$.

$\square$

[3]дивизор $K_X$ определён с точностью до линейной эквивалетности

**Упражнение 10.** Пусть $X$ – нормальное многообразие и пусть $Y$ – собственное многообразие. Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – рациональное отображение. Докажите, что $f$ индуцирует отображение $f : U \to Y$, где $U \subset X$ имеет коразмерность не менее двух.

Замечание.
Предположим, что поле $k$ является несчётным. Напомним, что многообразие $X$ называется *рационально связным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X(\bar{k})$ существует рациональная кривая $f : \mathbb{P}^1_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$, проходящая через $x_1$ и $x_2$: $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1_{\bar{k}})$. Заметим, что рациональные и унирациональные многообразия являются рационально связными. Если $k$ – поле характеристики нуль, то гладкие многообразия Фано также являются рационально связными (Kollár-Miyaoka-Mori, Campana).
Предыдущая теорема выпоняется для рационально связных многообразий над полем $k$ нулевой характеристики. Обратное утверждение, то есть, если $\Gamma(X, \Omega_X^{\otimes m}) = 0, \forall m \geq 1$, то $X$ – рационально связное, является гипотезой Мамфорда.

Нам понадобится более тонкий критерий.

**Определение 4.2.** Многообразие $X$ называется *линейчатым*, если существует многообразие $Y$ и бирациональное отображение $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. Многообразие $X$ называется *унилинейчатым* (соотв. *сепарабельно унилинейчатым*), если существует многообразие $Y$ и доминантное отображение $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$, конечное в общей точке (соотв. конечное и сепарабельное в общей точке).

**Теорема 4.3.** *Пусть $X$ – гладкое, проективное многообразие над полем $k$. Предположим, что существует большой обратимый пучок $L$ на $X$, такой, что $L \subset \bigwedge^i \Omega_X$ для некоторого $i > 0$. Тогда $X$ не может быть сепарабельно унилинейчатым многообразием.*

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть $\phi : Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ – доминантное отображение, конечное и сепарабельное в общей точке. Не нарушая общности, мы может предположить, что $\phi$ является морфизмом[4]. Так как $\phi$ является конечным и сепарабельным морфизмом в общей точке, то существует непустое открытое подмногообразие $U \subset Y \times \mathbb{P}^1$, на котором $\phi$ яляется гладким отображением. Таким образом, ограничение отображения $\phi^* : \phi^*\Omega_X \to \Omega_{Y\times\mathbb{P}^1}$ на $U$ является изоморфизмом. Следовательно, $\phi^* L \subset \bigwedge^i \Omega_{Y\times\mathbb{P}^1}$. Таким образом,

$$\phi^* L^{\otimes m} \subset (\bigwedge^i \Omega_{Y\times\mathbb{P}^1})^{\otimes m} \simeq [\bigwedge^i (p_1^*\Omega_Y \oplus p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))]^{\otimes m},$$

где $p_1$ и $p_2$ обозначают соответствующие проекции на $Y$ и на $\mathbb{P}^1$. Так как обратимый пучок $L$ является большим и морфизм $\phi$ – конечный в общей точке,

[4] $\phi$ индуцирует морфизм $\mathbb{P}^1_{k(Y)} \to X_{k(Y)}$, а, значит, и отображение $V \times \mathbb{P}^1 \to X$ для некоторого открытого подмногообразия $V \subset Y$.

то $\phi^* L$ также является большим обратимым пучком. Однако,

$$H^0(Y\times\mathbb{P}^1,\phi^*L^{\otimes m})\subset H^0(Y\times\mathbb{P}^1,[\bigwedge^i(p_1^*\Omega_Y\oplus p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))]^{\otimes m})=H^0(Y\times\mathbb{P}^1,(\bigwedge^i p_1^*\Omega_Y)^{\otimes m}).$$

Таким образом, для любого $s\in H^0(Y\times\mathbb{P}^1,\phi^*L^{\otimes m})$, значение $s(y,t)$ для $(y,t)\in(Y\times\mathbb{P}^1)$, не зависит от $t$. Значит, отображение $Y\times\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(Y\times\mathbb{P}^1,\phi^*L^{\otimes m})$ не может быть изоморфизмом на образе $Y\times\mathbb{P}^1$. Получили противоречие. □

## 4.2 Построение циклического накрытия $Z\to\mathbb{P}^n$

В этом параграфе мы построим нормальное проективное многообразие $Z$, вместе с конечным морфизмом $Z\to\mathbb{P}^n$ степени $p$.

**Упражнение 11.** Пусть $k$ – поле характеристики 2. Рассмотрим гиперповерхность

$$D:\ f(x_1,\dots,x_4)=x_1+x_1^5x_2+x_2^5x_3+x_3^5x_4+x_4^5=0\subset\mathbb{A}_k^4.$$

1. Докажите, что $D$ является гладким многообразием. (Напомним, что $P=(x_1,\dots x_4)\in D$ является сингулярной точкой если $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)=0\ \forall i$.)
2. Точка $P=(x_1,\dots x_4)\in\mathbb{A}_k^4$ называется *критической* точкой $f$, если $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)=0\ \forall i$, и *невырожденной критической* точкой $f$, если к тому же выполняется условие
$$det|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(P)|\neq 0.$$
Покажите, что $f$ имеет критические точки, которые являются невырожденными.
3. Рассмотрим многообразие
$$X:x_5^2-f=0\subset\mathbb{A}_k^5=\operatorname{Spec}k[x_1,\dots x_4,x_5].$$
Покажите, что многообразие $X$ не является гладким и имеет только изолированные сингулярные точки.
4. Покажите, что точка $P_0=(1,\dots 1)$ является сингулярной точкой $X$. Пусть $X'=Bl_{P_0}X\xrightarrow{\pi}X$ – раздутие $X$ в точке $P_0$. Покажите, что многообразие $X'$ является гладким в каждой точке исключительного дивизора $E$. (Напомним, что $X'=Bl_{P_0}X\subset\mathbb{A}_k^5\times\mathbb{P}_k^4$ задано условиями $x_5^2-f=0,(x_i-1)y_j-(x_j-1)y_i=0,\forall i,j$, где $(y_1:\dots:y_5)$ – локальные координаты $\mathbb{P}_k^4$. Заметим, что $X\setminus P_0\simeq\pi^{-1}(X\setminus P_0)$; достаточно положить $y_j=y_i\frac{x_j-1}{x_i-1}$ где $i$ – такой индекс, что $x_i\neq 1$. Исключительный дивизор задаётся условиями $x_i=1\ \forall i$. Например, если $U_5\subset\mathbb{P}_k^4$ открытая карта $y_5\neq 0$, то $X\cap\mathbb{A}_k^5\times U_5$ задаётся условиями $x_5^2-f=0,x_i=1+(x_5-1)\frac{y_i}{y_5}=0,\forall i\leq 4$ и исключительный дивизор задаётся условием $x_5-1=0$.)

Построение.

Пусть $x_0,\dots x_n$ – однородные координаты $\mathbb{P}^n$ и пусть $V_i\subset\mathbb{P}^n$ – открытое подмногообразие, где $x_i\neq 0$. Пусть $U\to\mathbb{P}^n$ – линейное расслоение, такое, что $U = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, $U_i = V_i \times \mathbb{A}^1$, $y_i$ – локальные координаты для $\mathbb{A}^1$, и функции склейки удовлетворяют условиям

$$y_i = (\frac{x_i}{x_j})^{-m} y_j. \tag{8}$$

Пусть $F(x_0, \dots x_m)$ – однородный многочлен степени $mp$

и пусть $Z \subset U$ – замкнутое подмногообразие, заданное условием

$$y_i^p - \frac{F}{x_i^{mp}} = 0 \text{ на } U_i.$$

По построению, имеем конечный морфизм $\pi : Z \to \mathbb{P}^n$ степени $p$. (9)

**Упражнение 12.** Покажите, что многообразие $Z$ имеет только изолированные сингулярные точки для достаточно общего выбора коэффициентов многочлена $F$.

Заметим, что $y_i^p - \frac{F}{x_i^{mp}} = (\frac{x_i}{x_j})^{-mp}[y_j^p - \frac{F}{x_j^{mp}}]$, откуда получаем

$$\mathcal{O}_U(-Z) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-mp), \tag{10}$$

так как функции склейки $(\frac{x_i}{x_j})^{-mp}$ для этих расслоений совпадают.

Пусть $H$ – гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$.

**Утверждение 4.4.** *(i)* $K_Z \simeq (mp - m - n - 1)\pi^* H$.

*(ii) Многообразие $Z$ является многообразием Фано, если $mp - m < n + 1$.*

*Доказательство.* 1. Заметим, что последовательность

$$0 \to \pi^* \Omega_{\mathbb{P}^n} \to \Omega_U \to \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \to 0 \tag{11}$$

является точной: $dy_i = d[(\frac{x_i}{x_j})^{-m} y_j] = (\frac{x_i}{x_j})^{-m} dy_j + d[(\frac{x_i}{x_j})^{-m}] y_j$, где $d[(\frac{x_i}{x_j})^{-m}] \in \pi^* \Omega_{\mathbb{P}^n}$ и $(\frac{x_i}{x_j})^{-m} dy_j \mapsto (\frac{x_i}{x_j})^{-m}$ – локальный параметр $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$.
Таким образом,

$$\omega_U = \bigwedge^{n+1} \Omega_U = (\bigwedge^{n} \pi^* \Omega_{\mathbb{P}^n}) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n - 1 - m).$$

2. По формуле присоединения,

$$K_Z \simeq (K_U \otimes \mathcal{O}_U(Z))|_Z \simeq (-n - 1 - m)\pi^* H \otimes (mp)\pi^* H \simeq (mp - n - 1 - m)\pi^* H.$$

Если $mp - m < n - 1$, то $K_Z$ является обильным, так морфизм $\pi : Z \to \mathbb{P}^n$ является конечным, и, следовательно, $\pi^*$ переводит обильные дивизоры в обильные.

□

## 4.3 Случай положительной характеристики

**Утверждение 4.5.** *Пусть $k$ – поле характеристики $p$. Пусть $\pi : Z \to \mathbb{P}^n$ – конечное накрытие степени $p$, построенное в* (9). *Тогда*

*(i) отображение $d : \mathcal{O}_U(-Z)|_Z \to \Omega_U|_Z$ индуцирует отображение $\mathcal{O}_Z$-модулей*

$$d : \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-mp) \to \pi^*\Omega_{\mathbb{P}^n}.$$

*(ii) Пусть $Q$ – кообраз отображения $d$. Существует точная последовательность*

$$0 \to Q \to \Omega_Z \to \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \to 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что $d(y^p - f(x_1, \dots x_n)) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$, так как $py^{p-1}dy = 0$ **в случае характеристики** $p$. Следовательно, $d(\mathcal{O}_U(-Z)|_Z) \subset \pi^*\Omega_{\mathbb{P}^n}$. Так как $\mathcal{O}_U(-Z) = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-mp)$ (см. (10)), получаем утверждение $(i)$.

Утверждение $(ii)$ следует из следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-mp) \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\Omega_{\mathbb{P}^n} \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] & 0 \\
\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-mp) \arrow[r] & \Omega_U|_Z \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Z \arrow[r] & 0 \\
 & \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), & &
\end{tikzcd}$$

где вторая горизонтальная последовательность получена из последовательности

$$\mathcal{O}_U(-Z)|_Z \xrightarrow{d} \Omega_U|_Z \to \Omega_Z \to 0. \tag{12}$$

(см. [Har] II.8.12.), а средняя вертикальная последовательность – из (11). □

Замечание.
Если бы $Z$ было гладким многообразием, то мы могли бы использовать вложение $\bigwedge^{n-1} Q \subset \bigwedge^{n-1}\Omega_Z$, откуда

$$\bigwedge^{n-1} Q = \bigwedge^{n} \Omega_Z \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \omega_Z \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$$

обильный пучок (и, значит, большой) при $mp > n + 1$.

**Утверждение 4.6.** *В условиях предложения 4.5 предположим, что многообразие $Z$ является нормальным и имеет только изолированные сингулярные точки. Пусть $q : Z' \to Z$ – разрешение особенностей $Z$, полученное как последовательное раздутие сингулярных точек $Z$. Положим $L = q^*\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp-n-1)$. Тогда $L$ является большим обратимым пучком и $L \subset \bigwedge^{n-1}\Omega_{Z'}$.*

*Доказательство.* Так как $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp-n-1)$ является обильным и $\pi\circ q$ – морфизм, конечный в общей точке, то обратимый пучок $L$ является большим. Остаётся проверить, что $L \subset \bigwedge^{n-1}\Omega_{Z'}$. Пусть $Z^{sm} \subset Z$ – открытое подмногообразие, где $Z$ является гладким многообразием. По условию, коразмерность $Z^{sm}$ не менее двух. Пусть $Q$ – кообраз отображения $d$, как в утверждении 4.5. Заметим, что $\bigwedge^{n-1} Q \simeq \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp-n-1)$ на $Z^{sm}$ (см. предыдущее замечание).

На открытом подмногообразии, где $\partial f/\partial x_i \neq 0$, $\bigwedge^{n-1} Q$ порождается элементом

$$\eta_i = (-1)^i \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n}{\partial f/\partial x_i}.$$

Так как коразмерность $Z^{sm}$ не менее двух, то можно определить пучок на всём $Z$, который локально порождается элементами $\eta_i$. По определению $L$, получаем, что $q^*\eta_i$ порождают $L$. Так как $L \subset \bigwedge^{n-1}\Omega_{Z'}$ на $q^*Z^{sm}$, то остаётся проверить, что $q^*\eta_i \in \bigwedge^{n-1}\Omega_{Z'}$ в окрестности исключительного дивизора.

Пусть $y, x_1, \ldots x_n$ – локальные координаты $Z$ в окрестности сингулярной точки $P$. Пусть $y, x'_1, \ldots x'_n$ – аффинная карта раздутия $Z'$, $x_i = yx'_i$. Рассмотрим $q^*\eta_n$ для $p = 2$, остальные случаи аналогичны.

Так как $P$ – невырожденная сингулярное точка, то $f$ можно представить в виде $f = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + g$, где порядок $g(y, x_1, \ldots x_n)$ не менее 3-х. Получаем:

$$q^*\eta_n = \frac{d(yx'_1) \wedge \ldots \wedge d(yx'_{n-1})}{\partial(y^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + g)/\partial x_n} = (\text{для некоторого } h')$$

$$= [y^{n-1}(dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} y^{n-2}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dy \wedge \ldots \wedge dx_n)]/[y(x'_{n-1} + yh')] =$$

$$= y^{n-3}\left[[y(dx'_1 \wedge \ldots\ldots \wedge dx'_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dy \wedge \ldots \wedge dx_n)]/[(x'_{n-1} + h')]\right],$$

откуда $q^*\eta_i \in \bigwedge^{n-1}\Omega_{Z'}$ если $n \geq 3$.

□

## 4.4 Свойства рациональности в семействах, переход к нулевой характеристике

Следующий пример показывает, что свойство рациональности не сохраняется в семействах многообразий.

**Пример 4.7.** Рассмотрим гиперповерхность

$$X : x_0^3 - x_1^3 - x_2^3 - px_3^3 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}_{(p)}},\ p \neq 3.$$

Поверхность $X_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ является гладкой кубической поверхностью и, значит, рациональным многообразием. Поверхность $X_{\mathbb{F}_p} : x_0^3 - x_1^3 - x_2^3 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_p}$ является конусом над гладкой кривой $E : x_0^3 - x_1^3 - x_2^3 = 0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}, g(E) = 1$ и, значит, $X$ бирационально поверхности $E \times \mathbb{P}^1$, которая не является рациональной.

**Теорема 4.8** (Matsusaka). *Пусть $A$ – кольцо дискретного нормирования с полем частных $K$ и полем вычетов $k$. Пусть $X$ – нормальная неприводимая схема, проективная над $S = \operatorname{Spec} A$. Предположим, что многообразие $X_K$ является рациональным. Тогда каждая неприводимая компонента многообразия $X_k$ является линейчатым многообразием.*

*Доказательство.* Предположим, что многообразие $X_K$ является рациональным. Тогда существует бирациональное отображение $\phi : \mathbb{P}^n_S \dashrightarrow X$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_S \times_S X$ – замыкание графика $\phi$. Пусть $\nu : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ – нормализация многообразия $\Gamma$ : многообразие $\tilde{\Gamma}$ является нормальным и морфизм $\nu$ является конечным и бирациональным. Рассмотрим отображение $p_1 : \tilde{\Gamma} \to \mathbb{P}^n_S$, полученное при композиции $\nu$ с соответствующей проекцией. Отображение $p_1$ является собственным и бирациональным. Пусть $Y \subset \tilde{\Gamma}_k$ неприводимая компонента. Возможны два случая:

1. $p_1(Y) = \mathbb{P}^n_k$. Тогда $Y$ является рациональным многообразием.
2. $\dim(p_1(Y)) < n$. По Лемме Абъянкара (см. ниже), $Y$ является линейчатым многообразием.

Рассмотрим бирациональное отображение $p_2 : \tilde{\Gamma} \to X$. Так как многообразие $\tilde{\Gamma}$ является собственным и $X$ является нормальным, то обратное бирациональное отображение $X \dashrightarrow \tilde{\Gamma}$ определено в коразмерности 1 (см. упражнение 10). Следовательно, если $Y' \subset X_k$ – неприводимая компонента, что существует компонента $Y \subset \tilde{\Gamma}_k$, такая, что $p_2(Y) = Y'$ и $p_2|_Y : Y \to Y'$ является бирациональным отображением. Как показано выше, многообразие $Y$, а, следовательно, и многообразие $Y'$, является линейчатым. □

Следующее утверждение мы используем без доказательства (см. [KM]).

**Теорема 4.9** (Abhyankar). *Пусть $p : V_1 \to V_2$ – собственный бирациональный морфизм неприводимых схем. Предположим, что схема $V_1$ нормальна и $V_2$ – регулярна. Пусть $E_1 \subset V_1$ – неприводимая подсхема коразмерности 1 и пусть $E_2$ – образ $E_1$ в $V_2$. Предположим, что $\dim E_2 < \dim E_1$. Тогда существует бирациональный изоморфизм между $E_1$ и $W \times_{E_2} \mathbb{P}^1_{E_2}$ для некоторой схемы $W$.*

Замечание.

(i) В теореме 4.8 достаточно предположить, что многообразие $X_K$ является линейчатым. Тогда каждая неприводимая компонента многообразия $X_k$ является линейчатым многообразием (Matsusaka).

(ii) Аналогично, выполняется следующее утверждение: если многообразие $X_{\bar{K}}$ является рациональным и многообразие $X_{\bar{k}}$ является приведённым, то каждая неприводимая компонента многообразия $X_{\bar{k}}$ является линейчатым многообразием.

## 4.5 Пример (Rosenberg)

Пусть $f$ – однородный многочлен $f(x_0, x_1, \ldots, x_4) = x_0^5x_1 + x_1^5x_2 + x_2^5x_3 + x_3^5x_4 + x_4^5x_0$ и пусть $G(x_0, \ldots x_4)$ – однородный многочлен степени 6 с целыми коэффициентами. Рассмотрим гиперповерхность

$$D : f + 2G = 0 \ \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Z}_{(2)}}$$

и пусть $Z \to \mathbb{P}^4_{\mathbb{Z}_{(2)}}$ соответствующее двойное накрытие. Многообразие $Z_{\mathbb{Q}}$ является гладким многообразием Фано. Гиперповерность $x_0^5x_1 + x_1^5x_2 + x_2^5x_3 + x_3^5x_4 + x_4^5x_0 = 0 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{F}_2}$ имеет невырожденные критические точки (см. упражнение 11). Следовательно, соответствующее двойное накрытие $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}_2}$ не является линейчатым многообразием. По теореме 4.8, многообразие $Z_{\mathbb{Q}}$ (соотв. $Z_{\overline{\mathbb{Q}}}$) не может быть рациональным.

# Список литературы


[CTOj] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.

[Deb] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[EV] H. Esnault, E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, 20, Birkhauser Verlag, Basel, 1992.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Kol] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 241-–249

[KM] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[KSC] J. Kollár , K. Smith, A. Corti, *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **92**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Lam] T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, **67**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Oj] M. Ojanguren, The Witt group and the problem of Lüroth, ETS Editrice, Pisa, 1990.