Equations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$: existence et comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie

Pierre Germain
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique
U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
91128 Palaiseau Cedex

Résumé

Nous montrons tout d'abord dans cet article que les équations de Navier-Stokes en deux dimensions sont globalement bien posées si la donnée initiale u_0 appartient à l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO. Nous prouvons ensuite des résultats de convergence asymptotique vers 0 de la solution u de (NS) pour une donnée initiale u_0 dans des espaces de Besov $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$.

Abstract

We prove first in this article that the two dimensional Navier-Stokes equations are globally well-posed if the initial data u_0 belongs to the closure of the Schwartz class in ∂BMO. We show then the asymptotic convergence to zero of the solution u of (NS) for an initial data u_0 in some Besov space $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$.

1 Introduction et énoncé des résultats

1.1 Les équations de Navier-Stokes

Nous nous intéresserons dans cet article aux solutions du problème de Cauchy associé aux équations de Navier Stokes posées dans l'espace entier. Ces équations régissent le mouvement d'un fluide visqueux, décrit par les variables $u(x,t)$ et $p(x,t)$ qui donnent, en un point x de l'espace et au temps t, respectivement la vitesse et la pression du fluide. Nous considérons le cas d'un fluide incompressible (ce qui entraîne la condition $\operatorname{div} u = 0$), et de viscosité $\nu = 1$. Les équations de Navier-Stokes prennent alors la forme suivante :

$$(NS)\left\{\begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{array}\right.$$

Sauf mention contraire, nous nous placerons toujours **en deux dimensions d'espace**.

La formulation intégrale des équations de Navier-Stokes (NS) s'écrit :

$$(1) \qquad u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla \cdot (u(s) \otimes u(s))ds = e^{t\Delta}u_0 - B(u,u) \ ,$$

où B est défini de manière évidente, et où l'on note $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Les solutions de (1) ne sont pas a priori des solutions du système (NS) présenté en tête de cet article, voir [20] pour une discussion à ce sujet. Par contre, pour ce qui est des solutions que nous considérerons, l'équation intégrale est équivalente à l'équation projetée :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

1.2 Solutions de (NS)

1.2.1 Solutions globales d'énergie finie

La théorie des équations de Navier-Stokes a été initiée par Jean Leray ; il s'est intéressé aux solutions d'énergie finie de (NS) issues de $u_0 \in L^2$.
L'espace L^2 est l'espace d'énergie pour les conditions initiales ; l'espace d'énergie associé aux solutions de l'équation de Navier-Stokes est défini par

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{déf}}{=} L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1) \ ,$$

où $\dot{H}^1$ est l'espace de Sobolev homogène, soit l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $\widehat{f} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \ < \ \infty \ .$$

La norme de $\mathcal{L}$ s'écrit :

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1)}.$$

Le célèbre résultat de Leray [21] affirme que, si $v_0 \in L^2$, il existe une unique solution globale $v \ \in \ \mathcal{L}$ de (NS) issue de v_0.

1.2.2 Espaces critiques et solutions locales d'énergie infinie

La définition des espaces critiques repose sur les propriétés d'invariance par dilatation et translation des solutions de (NS). Soyons plus explicites : soit u une solution de (NS) associée à la condition initiale u_0. Alors, si $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u(\lambda(x - x_0), \lambda^2 t)$ sera associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$. Un espace de Banach $X \hookrightarrow \mathcal{S}'$ sera dit critique (sous-entendu : pour les conditions initiales de (NS)) si sa norme vérifie

$$(2) \qquad \forall \lambda > 0 \, , \, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \ \|u\|_X = \lambda \|u(\lambda(\cdot - x_0))\|_X \ .$$

On voit facilement que, en dimension deux d'espace, L^2, les espaces de Besov $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ (avec $1 \leq p, q \leq \infty$) et ∂BMO (se reporter à l'appendice pour une définition de ces espaces) sont des espaces critiques.

Il est intéressant de noter ([8]) que tout espace critique X vérifie

$$X \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \, .$$

D'autre part ([8], [19]), on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$(3) \qquad L^2 \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{\widetilde{p}}-1}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \hookrightarrow \partial BMO \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$$

où $2 \leq p \leq \widetilde{p} < \infty$ et $2 \leq q \leq \widetilde{q} \leq \infty$.

En dimension d'espace quelconque, des théorèmes garantissent l'existence d'une solution locale $u^\star$ pour (NS) si u_0 est de norme quelconque dans un espace critique X : voir [5] pour $\dot{B}_{p,q}^{\frac{2}{p}-1}$ avec $q < \infty$ et [8], [19] pour $\partial BMO^{(0)}$ (on note $\partial BMO^{(0)}$ pour l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO).
Notons que $\partial BMO^{(0)}$ est le plus gros espace critique X, dans la chaîne d'inclusions ci-dessus (qui se généralise à $\mathbb{R}^n$), qui vérifie la propriété précédente : existence de solutions locales pour des données initiales de norme quelconque. En fait, on peut formaliser cette observation, et donner un sens précis à l'idée que ∂BMO est optimal pour la résolution de (NS) : voir [1].

La question qui se pose maintenant de manière naturelle est : peut-on rendre globales les solutions locales d'énergie infinie que nous venons de mentionner ? Comme nous allons le voir, on sait que la réponse est oui si la donnée initiale est choisie dans une classe assez large d'espaces critiques. C'est une spécificité du cas $d = 2$; en dimension d'espace supérieure, on ignore la réponse, sauf si la donnée initiale est de norme petite.
L'argument qui va nous permettre d'étendre ces solutions locales à $\mathbb{R}^+$ est, bien sûr, une estimation a priori. En fait, nous disposons de deux voies possibles ; aucune des deux ne permet de retrouver tous les résultats donnés par l'autre. La première (que nous allons brièvement exposer en section 1.2.3) consiste à utiliser l'équation de la vorticité, alors que, dans la seconde (qui est l'objet de la section 1.2.4), on travaille sur le champ de vitesse.

1.2.3 Solutions d'énergie infinie rendues globales grâce au contrôle de la vorticité

La vorticité est définie par

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \ .$$

Elle satisfait l'équation suivante

$$(NSV) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \Delta \omega \\ \omega_{|t=0} = \omega_0 \ , \end{array} \right.$$

où on a naturellement posé $\omega_0 = \partial_1 (u_0)_2 - \partial_2 (u_0)_1$.

Le *scaling* propre à (NSV) est différent de celui de (NS) : en effet, la vorticité associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$ est $\lambda^2 \omega_0(\lambda(x - x_0))$. Nous dirons donc qu'un espace est critique pour la vorticité si sa norme vérifie

$$\forall \lambda > 0 \, , \, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \ \|\omega(x)\|_X = \lambda^2 \|\omega(\lambda(x - x_0))\|_X \ .$$

Comme pour la vitesse u, nous nous restreindrons dans notre étude de ω à des espaces critiques. On vérifie par exemple aisément que L^1 et $\mathcal{M}$ (l'espace des mesures de Radon de masse totale finie) sont critiques. Rappelons que $\mathcal{M}$ est défini par

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\phi \in \mathcal{C}_0, \|\phi\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi \, d\mu$$

(si $p \in [1, \infty]$, on note $\| \cdot \|_p$ pour la norme de l'espace de Lebesgue L^p).

Le fait que cette équation ne comporte pas de terme du type $\omega\cdot\nabla u$ est encore une spécificité de la dimension 2. De ce fait, (NSV) est une simple équation de transport-diffusion, aussi peut-on facilement contrôler ω grâce à elle ; ceci permet en retour de contrôler u, qui s'obtient par la loi de Biot et Savart

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(y,t)dy \ ,$$

où l'on note $x^\perp = (x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$. On dispose alors d'une estimation a priori sur u.

En utilisant cette méthode, Cottet [7], puis, indépendamment, Giga, Miyakawa et O-sada [18] ont obtenu un résultat d'existence globale pour une donnée initiale ω_0 dans $\mathcal{M}$.
L'unicité pour une donnée initiale quelconque dans $\mathcal{M}$ a été obtenue par Gallagher et Gallay [10] : ils ont prouvé que si $\omega_0 \in \mathcal{M}$, il existe une unique solution

$$\omega \in \mathcal{C}(]0,\infty[, L^1 \cap L^\infty)$$

telle que $\|\omega(t,\cdot)\|_1 \leq \|\omega_0\|_{\mathcal{M}}$ pour tout $t > 0$.
Gallagher et Gallay [10] montrent aussi la dépendance continue par rapport aux conditions initiales de cette solution, concluant la preuve du caractère bien posé de (NS) pour u_0 dans $\mathcal{M}$.

1.2.4 Solutions d'énergie infinie rendues globales par la méthode de Calderón

En dimension 2 d'espace, nous avons vu que l'espace d'énergie L^2 est lui-même un espace critique. En utilisant cette propriété, I. Gallagher et F. Planchon [13], reprenant une idée de Calderón [2], ont pu montrer que, pour une donnée initiale grande dans $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$, la solution locale en temps $u^\star$ se prolonge à $\mathbb{R}^+$, et obtenir ainsi une solution unique, globale en temps.

Remarque 1.1 *Nous avons déjà énoncé, en section 1.2.3, un théorème d'existence globale de solutions de (NS), dû à Cottet, Giga, Miyakawa et Osada, valable dès que le rotationnel de u_0 appartient à $\mathcal{M}$. Quant au résultat que nous venons de citer, il s'applique pour des données initiales dans $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$, avec $1 < p, q < \infty$. Quel est le rapport entre ces deux espaces de données initiales ? Cette question est résolue par le corollaire 4.4, où il est prouvé que si $\operatorname{rot} u_0$ appartient à $\mathcal{M}$, alors u_0 appartient à $\dot{B}^1_{1,\infty}$, ce qui implique que u_0 est plus régulier qu'une fonction de $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ si $p > 1$. En revanche, si $q < \infty$, $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ ne contient pas de distributions homogènes de degré -1, alors que le tourbillon d'Oseen (voir la section 1.3) est une distribution homogène de degré -1 dont le rotationnel est une mesure finie.*

Nous nous proposons d'appliquer la méthode utilisée par Gallagher et Planchon à ∂BMO, afin d'établir que (NS) est bien posé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ (on note $\partial BMO^{(0)}$ pour l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO). Avant d'énoncer un résultat précis, il nous faut introduire les normes

$$\|u\|_{\mathcal{C},T} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0<R<\sqrt{T}} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |u(y,t)|^2 dy\, dt \right)^{1/2}$$

(où l'on note pour la moyenne de f sur la boule $B(x,R)$: $\displaystyle ⨍_{B(x,R)} f = \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} f$)
et

$$
(4) \qquad \|w\|_{X_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{\mathcal{C},T} + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \; .
$$

L'expression définissant $\|u\|_{\mathcal{C},T}$ a pour origine le fait que la norme ∂BMO d'une fonction f est donnée par (voir l'appendice)

$$
\sup_{R>0}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^{R^2} ⨍_{B(x,R)} |e^{t\Delta}f(x)|^2 dxdt\right)^{1/2} .
$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1 *(NS) est globalement bien posé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$. Plus précisément,*

- *Si $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ est de divergence nulle, il existe une solution globale u de (NS) issue de u_0.*
- *Cette solution est unique dans $\mathcal{E}$ défini par*

$$
(5) \qquad u \in \mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (i) \;\; u \in \mathcal{C}([0,\infty[,\partial BMO) \\ (ii) \forall T>0\,, \quad \lim_{\delta\to 0} \|u(T+\cdot)\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta} \,, \end{cases}
$$

  où η est la constante strictement positive intervenant dans la proposition 2.1 (voir ci-après).

- *Le flot de (NS), c'est à dire l'application*

$$
\phi \stackrel{\text{déf}}{:} \begin{array}{l} (u_0,t) \;\mapsto\; u(t) \\ \partial BMO^{(0)} \times \mathbb{R} \longrightarrow \partial BMO \,, \end{array}
$$

  est localement lipschitzien par rapport à la première variable.

- *Enfin, u est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$, et, pour tout $\delta > 0$ et pour une constante $C(\delta)$ dépendant de u_0 et de δ, on dispose de l'estimation suivante*

$$
\forall t > 0 \;\; \|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1+t^\delta) \, .
$$

Remarque 1.2 *Notre méthode permet aussi de traiter, en n'effectuant que des changements mineurs dans la preuve du théorème 1, le cas où une force extérieure f appartenant à $L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1})$ est appliquée. On a alors affaire au système*

$$
(NSF) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \;. \end{cases}
$$

On a alors, comme c'est le cas si $f = 0$ (théorème 1), l'existence d'une solution globale croissant à l'infini plus lentement que t^δ, pour toute puissance δ strictement positive.

Il est intéressant de comparer le théorème qui vient d'être énoncé avec des résultats déjà connus.

- La partie existence du théorème ci-dessus (premier point) peut être obtenue en combinant des résultats prouvés par Koch et Tataru [19], et par Giga, Matsui et Sawada [17]. En effet, dans [17], les auteurs prouvent par des méthodes d'analyse harmonique l'existence, pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, d'une solution globale de (NS) dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,\infty[,L^\infty)$. Or Koch et Tataru [19] démontrent (c'est le théorème 4 du présent article), pour une condition initiale dans $\partial BMO^{(0)}$, l'existence locale d'une solution de (NS) de norme L^∞ finie dès que $t>0$. Ces deux éléments permettent de déduire, pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$, l'existence d'une solution globale de (NS).

  Grâce à la méthode que nous employons ici, nous sommes en mesure d'obtenir des informations supplémentaires sur cette solution : toutes les assertions du théorème sauf la première sont nouvelles. D'autre part, comme indiqué dans la remarque 1.2, notre méthode permet d'étudier presque sans changement le cas où une force extérieure est appliquée au système.

- Même s'il est similaire, le critère d'unicité qui apparaît dans le théorème semble ne pas être impliqué par le résultat de Miura [23] : Miura montre en effet qu'en dimension d'espace quelconque, une solution de (NS) est unique dans la classe

  $$\mathcal{C}([0,T],bmo^{-1}) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,T[,L^\infty)\ ,$$

  où bmo^{-1} est la version non homogène de BMO^{-1}, voir [23]. A priori, pour $T=\infty$, cette classe d'unicité ne contient pas $\mathcal{E}$, puisqu'on ne demande pas à une fonction f de $\mathcal{E}$ d'appartenir à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,\infty[,L^\infty)$.

  Notons en outre que la classe d'unicité $\mathcal{E}$ définie plus haut englobe les solutions construites dans [13] [17] [19] : nous reviendrons sur ce point en section 2.3.

Pour finir, le théorème 1 est énoncé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$, mais la preuve donnée dans la suite en dit un peu plus. Elle repose en effet sur un découpage de la condition initiale en une partie régulière et une partie dans ∂BMO de norme $<\epsilon$. On en déduit facilement qu'il existe ϵ tel que la même méthode s'applique pour $u_0 \in \partial BMO$ tel que :

$$d(u_0,\mathcal{S}) = \inf_{f\in\mathcal{S}} \|f-u_0\|_{\partial BMO} < \epsilon\,.$$

Pour ϵ assez petit, les conclusions du théorème 1 restent donc inchangées, à ceci près que la solution construite n'est plus à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$.

1.3 Asymptotique en temps grand des solutions

Dans la section précédente, nous avons vu que l'existence globale d'une solution de (NS) est assurée à condition de choisir $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$, ou de vorticité appartenant à $\mathcal{M}$.
Se pose maintenant la question du comportement en temps grand de ces solutions globales. Commençons par quelques éléments heuristiques. Etant donné les propriétés d'invariance de (NS) rappelées en section 1.2.2, on peut escompter (nous allons voir que c'est effectivement le cas) pour une solution u de (NS) un comportement asymptotique du type

$$u(x,t) \sim F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\ ,$$

où le sens de $\sim$ reste à préciser. On observe au passage que $F(x,0)$ est une fonction homogène de degré -1.

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats importants ayant trait à l'asymptotique en temps grand des équations de Navier-Stokes.

- Pour une donnée initiale $u_0 \in L^2$, et en dimension d'espace quelconque, Wiegner [27] a prouvé la décroissance en norme L^2 de toute solution d'énergie finie (c'est à dire appartenant à $\mathcal{L}$) de (NS).

- Planchon [24] s'est intéressé au cas d'une donnée initiale petite dans $\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty}$, avec $p \in]d,\infty[$; autrement dit, u_0 est choisie petite, mais d'énergie infinie. Il a pu montrer que ce sont alors les basses fréquences de u_0 qui déterminent le comportement asymptotique de u solution de (NS).

  Soyons plus précis : soit $u_0 \in \dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty}$ de norme assez petite. Alors la solution u de (NS) issue de u_0 est asymptotiquement auto-similaire au sens qu'il existe une fonction $V \in L^p$ telle que
$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|u - \frac{1}{\sqrt{t}}V(\frac{x}{\sqrt{t}})\|_p \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
  si et seulement si il existe une distribution $v_0 \in \dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty}$ homogène de degré -1 telle que
$$2^{j(\frac{d}{p}-1)}\|\Delta_j(u_0 - v_0)\|_p \overset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$
  De plus, $v(x,t) = V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ est dans ce cas la solution de (NS) associée à v_0.

- Gallagher, Iftimie et Planchon [12] se sont intéressés au cas où, en dimension 3 d'espace, $u_0 \in \dot{B}^{-1+3/p}_{p,q}$, avec $p \in]3,\infty[$ et $q \in [1,\infty[$, et où une solution globale u existe (on ignore si c'est le cas en général). Gallagher, Iftimie et Planchon ont alors montré que
$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+3/p}_{p,q}} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$
  Ce résultat a été étendu par Auscher, Dubois et Tchamitchian [1] au cas où $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$; c'est alors bien sûr la norme ∂BMO de la solution qui tend vers 0.

- Enfin, Gallay et Wayne [14] (voir aussi Gallagher et Gallay [10]) ont étudié le cas d'une donnée initiale u_0 dont la vorticité ω_0 est une mesure de Radon finie. Il apparaît alors que toutes les solutions convergent à l'infini vers un multiple de
$$v^G(x,t) = \frac{x^\perp}{|x|^2}\left(1 - e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) \ ;$$
  notons au passage que cette fonction est la solution de (NS) associée à la donnée initiale
$$v^G(x) = \frac{x^\perp}{|x|^2} \ .$$
  Si ω est la vorticité de la solution u de (NS) correspondant à la donnée initiale u_0, et si l'on note $G(x,t) = \dfrac{1}{4\pi t}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$ le rotationnel de v^G, alors
$$t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega(x,t) - \alpha G(x,t)\|_p \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \int \omega_0(x)\,dx \ ,$$

où ω_0 est la vorticité de u_0. Il est intéressant de constater que, comme c'est le cas dans le résultat de Planchon mentionné plus haut, ce sont ici les basses fréquences de u_0 qui déterminent le comportement asymptotique de u.

D'autre part, ce résultat est le seul exemple d'équivalent asymptotique pour une classe de données initiales pouvant contenir des fonctions homogènes de degré -1 et de taille quelconque.

Des résultats décrivant plus finement qu'au premier ordre le comportement asymptotique des solutions de (NS), en dimension 2 ou supérieure, existent : on se reportera à [15] et à [20], Chapitre 26.

Si l'on considère maintenant une donnée initiale u_0

1. de taille quelconque,
2. d'énergie infinie
3. et peu régulière (c'est à dire appartenant à l'un des espaces de Besov $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, pour $p > 1$, de telle sorte qu'alors les fonctions de $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ dont le rotationnel est une mesure finie forment un sous-espace strict de cet espace, voir corollaire 4.4),

que sait-on du comportement asymptotique de la solution u associée ?
Il est prouvé dans l'article de Gallagher et Planchon [13] que la solution u correspondante vérifie : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq C(1 + t^{\delta}) \ .$$

De même, nous avons vu que la solution u construite dans le théorème 1 pour une donnée initiale $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ vérifie : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$\|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(1 + t^{\delta}) \ .$$

Le théorème suivant améliore ces résultats puisqu'il donne, quand il s'applique, la convergence vers 0 de u.

Théorème 2 *Soit u_0 dans $\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q}$, avec $p, q \in [1, \infty[$, et u la solution de (NS) construite par Gallagher et Planchon [13] qui lui est associée. Alors*

$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée
(i) $\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{q} > 1$.
(ii) $u \in L^r(\mathbb{R}^+, \dot{B}^{-1+\frac{2}{r}}_{\infty,\infty})$ *pour un* $r \in]2, \infty[$.

Remarque 1.3 *D'où vient la condition $u_0 \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, avec $\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{q} > 1$ apparaissant dans le théorème ci-dessus ? Elle permet d'assurer qu'une solution u de $(NS2D)$ issue de u_0 petit en norme dans cet espace vérifie*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla g) h dx dt \leq C \|g\|_{\mathcal{L}} \|h\|_{\mathcal{L}} \ , \tag{6}$$

voir [13] et la preuve du théorème 2. L'inégalité précédente est vraie dans un cadre plus général : il suffit que u appartienne à un espace de Lebesgue en temps à valeurs dans un espace de multiplicateurs, voir [16] pour plus de détails. Ceci correspond à des données initiales dans un espace plus grand qu'un espace de Besov du type $\dot{B}_{p,q}^{-1+2/p}$, *avec* $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}>1$, *et le théorème 2 peut se généraliser à ce nouveau cadre.*

2 Preuve du théorème 1

Nous aurons besoin dans la preuve du théorème 1 d'un résultat fondamental de Koch et Tataru, que nous allons énoncer, ainsi que de certains éléments qui y sont reliés. La section qui suit est donc consacrée à quelques rappels.

2.1 Le théorème de Koch et Tataru

H. Koch et D. Tataru ont, dans [19], obtenu l'existence de solutions globales de (NS), en toute dimension, pour une donnée initiale petite dans ∂BMO. Avant d'énoncer ce résultat plus précisément, il nous faut introduire l'espace $\widetilde{X}_T$, $0<T\leq\infty$; $\widetilde{X}_T$ est l'ensemble des fonctions w pour lesquelles la norme suivante est bien définie et finie :

$$\|w\|_{\widetilde{X}_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|w\|_{X_T} + \sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty ,$$

où la norme X_T est définie en (4).

Théorème 3 (H. Koch, D. Tataru, [19]) *Soit $d\geq 2$. Il existe $\epsilon>0$ tel que, si $w_0\in\partial BMO(\mathbb{R}^d)$ est de divergence nulle et $\|w_0\|_{\partial BMO}<\epsilon$, il existe w une solution globale de (NS) vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|w_0\|_{\partial BMO} , \tag{7}$$

pour une constante C. De plus, si $w_0\in\partial BMO^{(0)}$, alors

$$\|w\|_{\widetilde{X}_t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Idée de la preuve : On considère l'équation intégrale (1), à laquelle on applique le théorème de point fixe 6 énoncé dans l'appendice, en se plaçant dans l'espace $\widetilde{X}_\infty$ défini ci-dessus. On s'assure donc des points suivants :

- $\|e^{t\Delta}w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|w_0\|_{\partial BMO}$
- $B\ :\widetilde{X}_\infty\times\widetilde{X}_\infty\to\widetilde{X}_\infty$ est bicontinue. Ceci est garanti par la première assertion de la proposition qui suit. Les deux autres assertions nous seront utiles par la suite.

Proposition 2.1 ([8]) *Il existe $C>0$ tel que, $\forall T\in]0,+\infty]$,*

$$\|B(u,v)\|_{\widetilde{X}_T} \leq C\|u\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{\widetilde{X}_T} . \tag{8}$$

Il existe $\eta>0$ tel que, $\forall T\in]0,\infty]$,

$$\|B(u,v)\|_{X_T} \leq \eta\|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T} . \tag{9}$$

On dispose aussi de l'estimation, si $0<t<T$, et pour une constante $C>0$:

$$\|B(u,v)(t)\|_{\partial BMO} \leq C\|u\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{\widetilde{X}_T} . \tag{10}$$

Cette proposition permet d'appliquer le théorème 6, et le théorème 3 en découle. ■

Le théorème précédent s'adapte facilement pour fournir l'existence de solutions locales à données grandes ; cependant on doit se restreindre à des données dans $\partial BMO^{(0)}$, pour pouvoir garantir que $\|e^{t\Delta}w_0\|_{\widetilde{X}_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$ et appliquer le théorème de point fixe 6. On obtient alors :

Théorème 4 *Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}(\mathbb{R}^d)$ de divergence nulle. Il existe $T^\star > 0$ et $u \in \widetilde{X}_{T^\star}$ une solution de (NS) sur $[0, T^\star]$ issue de u_0. De plus, $\|u\|_{\widetilde{X}_t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.*

Une question naturelle est maintenant celle de l'unicité des solutions de Koch et Tataru. Soit $\mathcal{E}_T$ l'espace

$$\mathcal{E}_T \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in L^\infty_{\text{loc}}(]0,T], L^\infty) \ , \ \lim_{\delta\to 0} \|f\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta} \right\} . \tag{11}$$

Proposition 2.2 ([8]) *Deux solutions de (NS) appartenant à l'espace $\mathcal{E}_T$ pour un $T > 0$ et issues d'un même $u_0 \in \partial BMO$ sont égales sur $[0, T]$.*

2.2 Construction de la solution

Cette section est consacrée à la construction de la solution qui fait l'objet du théorème 1 ; il s'agit donc de la preuve de la partie "existence" du théorème 1.
La méthode de construction que nous employons va aussi nous permettre de montrer tous les résultats nouveaux : unicité, comportement asymptotique et dépendance continue par rapport aux conditions initiales apparaissant dans le théorème 1.
Notons enfin que cette méthode s'applique aussi au cas où une force extérieure est appliquée au système.

Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$. Nous procédons de la manière suivante :

1. u_0 s'écrit comme somme d'une partie grande et régulière v_0, et d'une partie petite et moins régulière w_0. Le théorème de Koch et Tataru donne l'existence d'une solution w de (NS) issue de w_0 ; on se ramène ainsi à une équation (faisant intervenir w) d'inconnue v, et de donnée initiale v_0.

2. L'utilisation d'un théorème de point fixe permet alors d'obtenir une solution v appartenant à $\widetilde{X}_T$ et locale en temps.

3. Par un argument de propagation de régularité, on montre qu'il existe un temps strictement positif pour lequel $v \in L^2$.

4. Une estimation d'énergie a priori permet de rendre v globale en temps.

C'est la méthode utilisée par I. Gallagher et F. Planchon dans [13] pour des données initiales dans des espaces de Besov. Cette idée a été utilisée pour la première fois dans le cadre des équations de Navier-Stokes par Calderón [2].

Comme nous l'avons vu, la première étape de la démonstration consiste à découper la donnée initiale. Soit donc $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ de divergence nulle. Par définition de cet espace, il existe v_0 et w_0, tous deux de divergence nulle, et tels que :

- $u_0 = v_0 + w_0$

- $v_0 \in \mathcal{S}$
- $w_0 \in \partial BMO$, et $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$ (ϵ est pris assez petit pour que tous les théorèmes dont nous aurons besoin s'appliquent).

Par le théorème 3, il existe w une solution de (NS) issue de w_0 qui vérifie de plus l'estimation (7). Soit v la solution de

$$v(t) = e^{t\Delta}v_0 - B(v,w)(t) - B(w,v)(t) - B(v,v)(t) \tag{12}$$

de telle sorte que $u = v + w$ est solution de (1).
Nous avons maintenant besoin de la définition suivante : soit Y_T l'espace défini par

$$\|f\|_{Y_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|f\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla f(t)\|_{L^2} \ .$$

La proposition suivante va nous donner l'existence d'une solution locale dans $\widetilde{X}_T \cap Y_T$.

Proposition 2.3 *Il existe $T > 0$ tel que (12) admette une solution v sur $[0,T]$ appartenant à $\widetilde{X}_T \cap Y_T$.*

Preuve de la proposition : Nous commençons par construire une solution dans $\widetilde{X}_T$; nous montrerons ensuite que cette solution appartient aussi à Y_T. Il s'agit dans un premier temps de pouvoir appliquer le théorème de point fixe 6 à la résolution dans $\widetilde{X}_T$ de (12), c'est à dire de s'assurer qu'il existe un T tel que le théorème s'applique. Il nous faut vérifier les points suivants :

- $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$; c'est le cas pour $v_0 \in \mathcal{S}$.
- $B \ : \widetilde{X}_T \times \widetilde{X}_T \to \widetilde{X}_T$ est bicontinue et de norme indépendante de T ; c'est vrai d'après (10).
- $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ et $\|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ sont finies et leur somme est strictement inférieure à 1 ; c'est le cas si $\|w\|_{\widetilde{X}_T}$ est assez petit, du fait de (10).

Nous obtenons ainsi $T > 0$ et v solution de (12) sur $[0,T]$. Nous allons maintenant montrer que v appartient aussi à Y_T, en appliquant le lemme de propagation de régularité 4.5 (avec, pour reprendre les notations du lemme, $X = \widetilde{X}_T$ et $Y = Y_T$) à l'équation (12). Il nous faut nous assurer des points suivants :

- $e^{t\Delta}v_0 \in Y_T$; ceci est vérifié dès que $v_0 \in \mathcal{S}$. C'est ici que cette hypothèse intervient.
- $B \ : \widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$ et $B : Y_T \times \widetilde{X}_T \to Y_T$ sont bicontinues et de normes indépendantes de T ; c'est l'objet de la proposition suivante, dont nous renvoyons la démonstration à la fin de cette section.

Proposition 2.4 *L'application B est bicontinue de $\widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$.*

- $B(w,\cdot) \ : Y_T \to Y_T$ et $B(\cdot,w) \ : Y_T \to Y_T$ sont continues et la somme de leurs normes est strictement inférieure à 1. Ceci découle aussi de la proposition 2.4 : $B \ : \widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$ est bicontinue, donc $B(w,\cdot)$ et $B(\cdot,w)$ sont dans $\mathcal{L}(Y_T)$, et $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} + \|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} < 1$ si $\|w\|_{\widetilde{X}_T}$ est assez petite.

Nous disposons maintenant de v solution de (NS) sur $[0,T]$, appartenant à $\widetilde{X}_T \cap Y_T$. ■

En particulier, il existe $\tau > 0$ tel que $v(\tau) \in L^2$ (parler de $v(\tau)$ a un sens, en effet nous verrons dans la suite que v est continue à valeurs dans ∂BMO). Il nous faut maintenant étendre à $\mathbb{R}^+$ notre solution définie pour l'instant localement. C'est l'objet de la proposition suivante, qui porte sur une estimation d'énergie a priori.

Proposition 2.5 *Soit $v_\tau \in L^2$, et w comme ci-dessus. On considère v solution de*

$$(13) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=\tau} = v_\tau \end{cases}$$

On dispose alors de l'estimation a priori suivante sur la norme de v

$$(14) \qquad \|v\|_{L^\infty([\tau,t],L^2)\ \cap\ L^2([\tau,t],\dot{H}^1)} \leq C \left(\frac{t}{\tau}\right)^{C\epsilon} \|v_\tau\|_{L^2}\ .$$

Preuve de la proposition :
Dans la première des trois équations de (13) on prend le produit scalaire (spatial) avec v puis on intègre (en temps) et on obtient, en utilisant $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0$:

$$(15) \qquad \|v(t)\|_2^2 + 2\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds - \int_{t_0}^t \langle v \cdot \nabla v\,,\, w\rangle\, ds = \|v_{t_0}\|_2^2\,.$$

L'inégalité de Hölder et le fait que $\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \leq C\epsilon$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_0}^t \langle v \cdot \nabla v\,,\, w\rangle\, ds\right| &\leq \int_{t_0}^t \|v(s)\|_2 \|\nabla v(s)\|_2 \|w(s)\|_\infty ds \\ &\leq C\epsilon \left(\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds + \int_{t_0}^t \frac{\|v(s)\|_2^2}{s} ds\right) \end{aligned}$$

En reportant dans (15), on obtient :

$$\|v(t)\|_2^2 + (2 - C\epsilon)\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2\, ds \quad \leq \quad \|v_{t_0}\|_2^2 + C\epsilon \int_{t_0}^t \frac{\|v(s)\|_2^2}{s} ds\,,$$

et le lemme de Gronwall permet d'obtenir le résultat souhaité. ■

On peut maintenant appliquer le schéma standard : régularisation de l'équation (NS) sur $[\tau, +\infty[$, puis passage à la limite faible en utilisant l'estimation précédente. On en déduit que v se prolonge à $\mathbb{R}^+$ en une solution de (NS) vérifiant (14). En posant $u = v + w$, on obtient une solution globale de (NS) issue de u_0. Comme $L^2 \hookrightarrow \partial BMO$, et du fait des inégalités (7), (10) et (14) on dispose de plus de l'estimation suivante :

$$\|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(1 + t^\delta)\ ,$$

pour $\delta = C\epsilon$. En faisant varier ϵ, et en utilisant l'unicité des solutions, que nous allons prouver dans la prochaine sous-section, on peut obtenir cette inégalité pour tout $\delta > 0$.

Il nous reste à démontrer la proposition 2.4, que nous avons utilisée plus haut :

Preuve de la proposition 2.4: Pour commencer, on peut montrer (voir [20]) que le noyau de $\nabla^k e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ s'écrit :

$$t^{-\frac{3+k}{2}} G_k(\frac{|x|}{\sqrt{t}})$$

avec $G_k \in L^1 \cap L^\infty$. On notera pour plus de simplicité indifféremment G pour tous les G_k. De même, nous considérerons dans ce qui suit pour alléger les écritures que B opère sur des fonctions réelles. Ceci nous conduit aux notations suivantes [3] :

$$\begin{aligned}
B(w,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds \\
\nabla B(w,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds
\end{aligned}$$

Les inégalités de Young et Hölder permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\|B(w,v)(t)\|_2 &= \|\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds\|_2 \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \|G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\|_1 \|w(s)\|_\infty \|v(s)\|_2 ds \\
&\leq \|G\|_1 \left(\sup_{t>0} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{t>0}\|v(t)\|_2\right)\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|B(w,v)(t)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} &= \sup_{0<t<T}\|B(w,v)(t)\|_2 \\
&\leq \|G\|_1 \left(\sup_{0<t<T}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\right)\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\|v(t)\|_2\right) \\
&\leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T}\ ,
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à obtenir une estimation de la norme du gradient de B ; pour ce faire, nous décomposons cette fonctionnelle en une somme de deux termes :

$$\begin{aligned}
B(w,v)(t) &= \int_0^{t/2} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds + \int_{t/2}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds \\
&= B_1(w,v)(t) + B_2(w,v)(t)
\end{aligned}$$

Et nous écrivons $\nabla B(w,v) = \nabla B_1(w,v) + B_2(\nabla w, v) + B_2(w,\nabla v)$. Il vient alors, en utilisant les inégalités de Young et Hölder :

$$\begin{aligned}
\|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 &= \|\int_0^{t/2}\frac{1}{(t-s)^2}G(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}) * (w(s)v(s))ds\|_2 \\
&\leq C\int_0^{t/2}\frac{ds}{(t-s)\sqrt{s}}\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\|v(t)\|_2\right)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 \leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T}\ .$$

En utilisant encore une fois la même majoration, on montre enfin :

$$\begin{aligned}\sup_{0<t<T}\|B_2(\nabla w,v)(t)\|_2 &\le C\sup_{0<t<T}\int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}}\left(\sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\|v(t)\|_2\right)\\ &\le C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T}\\ \sup_{0<t<T}\|B_2(w,\nabla v)(t)\|_2 &\le C\sup_{0<t<T}\int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}}\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|\nabla v(t)\|_2\right)\\ &\le C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T}\ .\end{aligned}$$

Il apparaît maintenant pourquoi nous avons dû décomposer B sous la forme $B = B_1 + B_2$. Les formules ci-dessus comprennent en effet des intégrales (comme $\int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}}$) qui ne convergeraient pas si le domaine d'intégration était $[0,t]$. ■

2.3 Preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$

Cette section est consacrée à la preuve de la partie "unicité" du théorème 1. Avant de commencer la preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$ proprement dite, il est intéressant de noter que cette classe d'unicité englobe des résultats déjà connus sur (NS) en deux dimensions, avec u_0 dans ∂BMO ou un sous-espace de ∂BMO.

- Notre classe d'unicité comprend les solutions de Koch et Tataru (théorèmes 3 et 4) : si u est l'une de ces solutions, elle vérifie la condition (i) définissant $\mathcal{E}$, voir [8]. Elle vérifie d'autre part (ii) en $\tau = 0$; en $\tau > 0$ aussi car u est bornée dans L^∞ sur $[\delta, T[$ pour tout $\delta > 0$, si l'on note T le temps d'existence de la solution.

- Elle comprend aussi, pour les mêmes raisons, les solutions $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^\infty)$ construites dans [18] par Giga, Matsui et Sawada.

- Elle comprend enfin les solutions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}})$, avec $q < \infty$, construites par Gallagher et Planchon [13].

  [En effet, soit u une solution de Gallagher-Planchon. Il est clair que (i) est vérifié. D'autre part, l'hypothèse $q < \infty$ implique que u est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$. On se place maintenant au temps $\tau \ge 0$, puis on résoud l'équation par point fixe, pour T assez petit, dans $\widetilde{X}_T \cap \widetilde{L}^r([0,T], \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}+\frac{2}{r}})$ (voir [12]), et on conclut par unicité de la solution d'un problème de point fixe que $u(\tau + \cdot)$ appartient pour T assez petit à $\widetilde{X}_T$. Ceci implique que (ii) est vérifié.]

Venons-en maintenant à la preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$.
Montrons d'abord que deux solutions dans $\mathcal{E}$ de même condition initiale sont égales. Soient donc u, $\widetilde{u}$ deux solutions de (NS) issues de u_0 et appartenant à $\mathcal{E}$. Soit

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \, , \, u(t) \neq \widetilde{u}(t)\}\ .$$

Supposons par l'absurde $\tau < \infty$. Par continuité de u et $\widetilde{u}$ (hypothèse (i) définissant $\mathcal{E}$),

$$u(\tau) = \widetilde{u}(\tau) \quad \in \partial BMO\ .$$

On en déduit en utilisant la proposition 2.2 (grâce à la condition (ii) définissant $\mathcal{E}$) que $u = \widetilde{u}$ au voisinage de τ ; on contredit ainsi la définition de τ.

Il nous faut maintenant montrer que les solutions que nous construisons sont effectivement dans $\mathcal{E}$. Nous considérons $u = w + v$ une solution construite comme dans la section 2.2. Comme $w_0 \in \partial BMO^{(0)}$, w appartient à $\mathcal{C}([0,\infty[,\partial BMO)$, voir [8]. De même, $v \in \mathcal{C}([0,t_0[,\partial BMO)$. Enfin, on s'assure aisément que $v \in \mathcal{C}([t_0,\infty[,L^2)$. Au total,

$$w + v = u \ \in \mathcal{C}([0,\infty[,\partial BMO) \ ,$$

ce qui est la condition (i) définissant $\mathcal{E}$.

Reste la condition (ii). Elle est clairement vérifiée par w, puisque sa norme dans X_∞ est majorée par $C\epsilon$, et on prend le paramètre ϵ assez petit. Pour montrer que v satisfait aussi cette condition, nous nous plaçons en $\tau \geq t_0$ (le cas $\tau < t_0$ est clair) et nous allons voir que pour un certain $\delta > 0$, $v(\tau + \cdot) \in \mathcal{E}_\delta$. Pour plus de simplicité dans les notations, nous écrirons dans la suite $\tau = 0$. L'équation suivante est satisfaite par v :

$$v = e^{t\Delta}v_0 - B(v,v) - B(w,v) - B(v,w) \ . \tag{16}$$

(noter que v est continue à valeurs dans L^2, donc $v(\tau) = v_0$ est bien définie).
Nous avons maintenant besoin du lemme suivant.

Lemme 2.6 *Pour $T > 0$ les applications suivantes sont continues :*

$$B : L^4([0,T],L^4) \times L^4([0,T],L^4) \longrightarrow L^4([0,T],L^4)$$
$$B : X_T \times L^4([0,T],L^4) \longrightarrow L^4([0,T],L^4) \ .$$

Preuve : Il est bien connu (voir par exemple [9]) que B est bicontinu sur L^pL^q dès que $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1$, ce qui est le cas ici. Il reste donc seulement à prouver la seconde assertion du lemme.

$$\begin{aligned}\|B(u,v)\|_4 &\leq C\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|G\|_1\|u\|_\infty\|v\|_4\,ds \\ &\leq C\|u\|_{X_T}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\|v\|_4 ds \ .\end{aligned}$$

Or si $t \mapsto \|v(t)\|_4 \in L^4$, les lois de produit entre espaces de Lorentz impliquent que

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\|v(s)\|_4 \in L^{4/3,4}$$

puis que $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\|v\|_4\,ds \ \in L^4$. Autrement dit,

$$\|B(u,v)\|_4 \leq C\|v\|_{L^4L^4}\|u\|_{X_T} \ .$$

■

Grâce au lemme précédent, et comme $w \in X_T$, on peut résoudre (16) par point fixe dans $L^4([0,T],L^4)$, X_T, et $L^4([0,T],L^4) \cap X_T$, pour T assez petit. Les trois solutions que nous obtenons dans chacun de ces trois espaces sont en fait égales, par unicité de la solution d'un problème de point fixe à norme petite. Qui plus est, pour cette même raison, elles sont égales à v pour T assez petit puisque

$$v \in L^\infty([0,T],L^2) \cup L^2([0,T],\dot{H}^1) \hookrightarrow L^4([0,T],L^4) \ .$$

On en déduit que

$$\|v\|_{X_T} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{X_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

ce qui conclut la preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$.

On peut maintenant montrer que pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$, la solution u (unique dans $\mathcal{E}$) de (NS) est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$.
Pour ce faire, soient deux suites (w_0^δ) et (v_0^δ) telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_0^\delta\|_{\partial BMO} \leq \delta \\ v_0^\delta \in \mathcal{S} \\ w_0^\delta + v_0^\delta = u_0 \ . \end{array} \right. \tag{17}$$

Il suffit d'appliquer le schéma de construction de solutions du paragraphe précédent à la décomposition $u_0 = w_0^\delta + v_0^\delta$ pour obtenir

$$u = w^\delta + v^\delta$$

où v est localement bornée dans L^2 et $\|w\|_{\partial BMO} \leq C\delta$. On conclut en laissant δ tendre vers 0.

2.4 Dépendance continue par rapport aux données initiales

Nous allons dans cette section nous attacher à prouver la partie "dépendance continue par rapport aux données initiales" du théorème 1.
Rappelons que l'on désigne par ϕ le flot de (NS), c'est à dire l'application

$$\phi \overset{\text{déf}}{:} \begin{array}{l} (u_0, t) \ \mapsto \ u(t) \\ \partial BMO^{(0)} \times \mathbb{R} \longrightarrow \partial BMO \ , \end{array}$$

où u est la solution de (NS) associée à u_0, construite dans la section 2.2 et unique d'après la section 2.3.
Nous allons prouver la proposition suivante

Proposition 2.7 *Le flot ϕ de (NS) est localement lipschitzien.*
Plus précisément, donnons-nous $t > 0$, $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ et $\delta w_0 \in \partial BMO$, qui correspondra à une petite perturbation de u_0. Alors il existe une constante C et $\epsilon > 0$ tels que

$$\|\phi(t, u_0) - \phi(t, u_0 + \delta w_0)\|_{\partial BMO} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}$$

pour $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$. De plus, C et ϵ peuvent être choisis uniformément sur un voisinage de (u_0, t).

Preuve de la proposition : Donnons-nous $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$, $\delta w_0 \in \partial BMO$ et t comme dans l'énoncé du théorème. Nous allons reprendre chacune des étapes de la construction de la solution u (voir la section 2.2) pour nous assurer que la dépendance de $u(t)$ par rapport à u_0 est bien lipschitzienne.

1. Procédant comme dans la section 2.2, nous écrivons $u_0 = v_0 + w_0$, avec $v_0 \in L^2$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$. On prend aussi δw_0 de norme inférieure à ϵ ; ϵ est une constante que

l'on prend assez petite pour que tous les arguments dont nous aurons besoin dans la suite fonctionnent.
En particulier, comme ϵ est assez petit, on peut appliquer le théorème de Koch et Tataru (théorème 3) à w_0 et $w_0 + \delta w_0$, et l'on note (respectivement) w et $w + \delta w$ les solutions globales de (NS) associées à ces deux conditions initiales.
On a alors l'inégalité suivante, pour une constante C :

$$\|\delta w(t)\|_{\partial BMO} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ . \tag{18}$$

En effet, $\delta w(t)$ est donné par la formule

$$\delta w = e^{t\Delta}\delta w_0 - B(\delta w, \delta w) - B(w, \delta w) - B(\delta w, w) \tag{19}$$

et l'on dispose des estimations

$$\begin{cases} \|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\partial BMO} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \\ \|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \\ \|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \\ \|B(v,w)(t)\|_{\partial BMO} \leq C\|v\|_{\widetilde{X}_\infty}\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \end{cases} \tag{20}$$

(la première est une simple conséquence de ce que ∂BMO est un espace de Banach invariant par translation, la seconde résulte de la construction de δw par point fixe, la troisième de la définition même de ∂BMO et de la norme de $\widetilde{X}_\infty$, et la quatrième est prouvée dans [8], et rappelée dans la proposition 2.1). En prenant la norme $\|\cdot\|_{\partial BMO}$ de (19) et en utilisant les quatre estimations précédentes, on obtient

$$\|\delta w(t)\|_{\partial BMO} \leq C\left(\|\delta w_0\|_{\partial BMO} + \|\delta w\|^2_{\widetilde{X}_\infty} + 2\epsilon\|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty}\right) \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

2. Ainsi, en reprenant la méthode de construction que nous avons exposée dans la section 2.2, nous avons montré que la première étape de cette méthode est stable par perturbation ; nous allons voir qu'il en est de même pour la seconde. Pour ce faire, il nous faut tout d'abord nous assurer que certaines quantités décisives (par exemple, le temps d'existence de la solution construite par point fixe) peuvent être choisies uniformes dans un voisinage de w_0. On note v la solution de

$$v = e^{t\Delta}v_0 - B(v,v) - B(w,v) - B(v,w)$$

construite par point fixe dans $\widetilde{X}_\tau$ pour un certain $\tau > 0$. Soit $\tau = \tau(v_0, w)$ le temps maximal sur lequel l'argument de point fixe est valable, c'est à dire le temps maximal sur lequel on peut construire une solution à l'aide du théorème 6. Ce temps $\tau(v_0, w)$ dépend de la décroissance quand T tend vers 0 de $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T}$, $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ et $\|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ (voir théorème 6). Or $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T}$ ne dépend pas de w_0, et d'autre part

$$\max(\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}, \|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}) \leq C\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|w_0\|_{\partial BMO} \ .$$

Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si w_0 et δw_0 sont de norme ∂BMO inférieure à ϵ, $\tau(v_0, w+\delta w)$ admet un minorant strictement positif, $\tau^\star$. En d'autres termes, la solution $\widetilde{v}$ de

$$\widetilde{v} = e^{t\Delta}v_0 - B(\widetilde{v},\widetilde{v}) - B(w+\delta w,\widetilde{v}) - B(\widetilde{v}, w+\delta w) \ , \tag{21}$$

peut être construite par point fixe dans $\widetilde{X}_{\tau^\star}$ dès que $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$. De plus, étant donné $\zeta > 0$ (qui sera fixé par la suite), on choisit $\tau^\star$ assez petit pour que, si $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$, on ait $\|\widetilde{v}\|_{\widetilde{X}_\tau} < \zeta$. C'est possible car, pour une constante C uniforme tant que w_0 et δw_0 restent petits,

$$\|\widetilde{v}\|_{\widetilde{X}_\tau} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_\tau} ,$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand τ tend vers 0.

3. Dans ce qui suit, $\tau^\star$ est fixé ; de plus, on garde les notations v et $\widetilde{v}$ pour les solutions des équations ci-dessus. Comme dans la section 2.2, on montre par propagation de régularité que $v \in Y_{\tau^\star}$.
Puisque nous cherchons un résultat de stabilité, il est naturel d'introduire

$$V = \widetilde{v} - v .$$

En combinant les équations dont v et $\widetilde{v}$ sont solutions, on obtient une équation en V

$$V = -B(V,V) - B(v,V) - B(V,v) - B(w,V) - B(V,w) - B(\delta w,\widetilde{v}) - B(\widetilde{v},\delta w) \tag{22}$$

valable sur $[0,\tau^\star]$. On peut prendre la norme $\|\cdot\|_{Y_{\tau^\star}}$ de chacun des membres de l'équation ci-dessus ; par continuité de B de $\widetilde{X}_{\tau^\star} \times Y_{\tau^\star}$ dans $Y_{\tau^\star}$ (proposition 2.4), on obtient

$$\begin{aligned}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} &\leq C\left(\|V\|_{Y_{\tau^\star}}\|V\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}} + \|v\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + \|w\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + \|\delta w\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|\widetilde{v}\|_{Y_{\tau^\star}}\right) \\ &\leq C(\zeta+\epsilon)\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\|v_0\|_{L^2} ,\end{aligned}$$

où l'on utilise dans la dernière inégalité le lemme 4.5 :

$$\|\widetilde{v}\|_{Y_{\tau^*}} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{Y_{\tau^*}} \leq C\|v_0\|_{L^2} .$$

Si ϵ et ζ sont assez petits pour que $C(\zeta+\epsilon) < 1$, on trouve

$$\|V\|_{Y_{\tau^\star}} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} .$$

En particulier, si $t \in [0,\tau^\star]$,

$$\|V(t)\|_{L^2} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} . \tag{23}$$

Comme $\phi(u_0+\delta w_0,t) - \phi(u_0,t) = \delta w + V$, cette dernière inégalité conjuguée à (18) prouve le théorème dans le cas $t \leq \tau^\star$.

4. Dans le cas $t > \tau^\star$, la conclusion sera donnée, comme nous allons le voir, par une estimation d'énergie. Suivant notre schéma de construction de la solution, on prolonge v et $\widetilde{v}$ pour $t > \tau^\star$ en des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}^+$, d'énergie finie localement en temps. L'équation intégrale (22) dont V était solution peut maintenant s'écrire sous forme différentielle, pour tout $t > \tau^\star$

$$\partial_t V - \Delta V + \mathbb{P}(V\cdot\nabla V + v\cdot\nabla V + V\cdot\nabla v + w\cdot\nabla V + V\cdot\nabla w + \delta w\cdot\nabla\widetilde{v} + \widetilde{v}\cdot\nabla\delta w) = 0$$

En prenant le produit scalaire spatial par V on obtient, en utilisant $\operatorname{div} V = \operatorname{div} w = \operatorname{div} v = 0$,

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \langle V\cdot\nabla v, V\rangle + \langle V\cdot\nabla w, V\rangle + \langle \widetilde{v}\cdot\nabla\delta w + \delta w\cdot\nabla\widetilde{v}, V\rangle = 0 . \tag{24}$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, il nous faut estimer les trois derniers termes. Ainsi

$$
(25)\qquad \begin{aligned}|\langle V\cdot\nabla v,V\rangle| &\le C\|V\|_{\dot H^{1/2}}\|v\|_{\dot H^1}\|V\|_{\dot H^{1/2}}\le C\|v\|_{\dot H^1}\|V\|_{L^2}\|V\|_{\dot H^1}\\ &\le \frac14\|V\|^2_{\dot H^1}+C\|v\|^2_{\dot H^1}\|V\|^2_{L^2}\end{aligned}
$$

du fait des lois de produit et des inégalités d'interpolation classiques entre espaces de Sobolev. D'autre part,

$$
(26)\qquad |\langle V\cdot\nabla w,V\rangle| = |\langle V\cdot\nabla V,w\rangle|\le \frac{\|w\|_{\widetilde X_\infty}}{\sqrt t}\|V\|_2\|V\|_{\dot H^1}\le\frac14\|V\|^2_{\dot H^1}+\frac{C}{t}\|V\|_2^2
$$

car $\sqrt t\|w(t)\|_\infty\le\|w\|_{\widetilde X_\infty}$ pour tout $t>0$. Pour le dernier terme de (24), nous faisons appel à l'estimation dérivée dans la proposition 2.5 :

$$
(27)\qquad \|v(t)\|_{L^\infty([\tau^\star,t],L^2)\,\cap\,L^2([\tau^\star,t],\dot H^1)}\le C\left(\frac{t}{\tau^\star}\right)^{C\epsilon}\|v(\tau^\star)\|_{L^2}\quad ;
$$

cette estimation est aussi valable pour $\widetilde v$, et par conséquent aussi pour V. En l'utilisant, on obtient

$$
(28)\qquad |\langle\widetilde v\cdot\nabla\delta w,V\rangle|\le\frac{\|\delta w\|_{\widetilde X_\infty}}{t}\|\widetilde v\|_{L^2}\|V\|_{L^2}\le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}t^{C\epsilon-1}
$$

puisque $t\|\nabla\delta w(t)\|_\infty\le\|\delta w\|_{\widetilde X_\infty}$. De même, on a

$$
(29)\qquad |\langle\delta w\cdot\nabla\widetilde v,V\rangle|\le\frac{\|\delta w\|_{\widetilde X_\infty}}{\sqrt t}\|V\|_{L^2}\|\widetilde v\|_{\dot H^1}\le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}(t^{C\epsilon-1}+\|\widetilde v\|^2_{\dot H^1})\ .
$$

A l'aide des estimations (25) (26) (28) (29), (24) se réécrit

$$
\partial_t\|V\|_2^2+\|\nabla V\|_2^2\le C\|V\|_2^2\left(\frac1t+\|v\|^2_{\dot H^1}\right)+C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}(t^{C\epsilon-1}+\|\widetilde v\|^2_{\dot H^1})\ .
$$

En intégrant cette inégalité, on trouve, si $t>\tau^\star$,

$$
\begin{aligned}\|V(t)\|_2^2+\int_{\tau^\star}^t\|\nabla V\|_2^2 &\le \|V(\tau^\star)\|_2^2+C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\int_{\tau^\star}^t[s^{C\epsilon-1}+\|\widetilde v(s)\|^2_{\dot H^1}]\,ds\\ &\quad+C\int_{\tau^\star}^t\left(\frac1s+\|v(s)\|^2_{\dot H^1}\right)\|V(s)\|_2^2\,ds\\ &\le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\left[1+t^{C\epsilon}\right]+C\int_{\tau^\star}^t\left(\frac1s+\|v(s)\|^2_{\dot H^1}\right)\|V(s)\|_2^2\,ds\end{aligned}
$$

(en utilisant (23) et (27)) et le lemme de Gronwall donne

$$
\|V(t)\|_2^2+\int_t^{\tau^\star}\|\nabla V\|_2^2\le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\left[1+t^{C\epsilon}\right]t\exp\left(Ct^{C\epsilon}\right)\ .
$$

Cette denière estimation jointe à (18) et au fait que $\phi(u_0+\delta w_0,t)-\phi(u_0,t)=\delta w+V$ achève la preuve du théorème.

3 Preuve du théorème 2

L'idée de la preuve que nous allons donner est de jouer sur la différence d'homogénéité entre un espace dans lequel on réalise une estimation d'énergie, et un espace au scaling de l'équation (NS).
C'est cette idée, introduite par Gallagher, Iftimie et Planchon [11] [12] qui, en dimension d'espace égale à 3, a permis de démontrer la convergence vers 0 à l'infini des solutions globales de (NS) pour la norme d'un espace critique X auquel appartient la donnée initiale. Gallagher, Iftimie et Planchon ont traité les cas $X = \dot{H}^{1/2}$ (dans [11]) et $X = \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ avec $1 < p, q < \infty$ (dans [12]), puis Auscher, Dubois et Tchamitchian [1] le cas $X = \partial BMO^{(0)}$.
Pour expliquer cette idée de manière concrète, nous allons l'employer dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $X = \dot{H}^{1/2}$, en exposant le schéma de la preuve de Gallagher, Iftimie et Planchon [11].

3.1 Le cas $d = 3$, $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$

Plaçons-nous pour la durée de ce paragraphe en dimension 3 d'espace, et donnons-nous $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$ ainsi que $u \in \mathcal{C}([0,\infty[, \dot{H}^{1/2})$ une solution de (NS) pour cette donnée initiale. Comme nous l'avons fait dans la section 2.2, nous scindons u_0 en deux parties,

$$u_0 = v_0 + w_0 \ ,$$

où w_0 est petit en norme dans $\dot{H}^{1/2}$, et $v_0 \in H^1$, l'espace de Sobolev inhomogène. A w_0 on associe, grâce à un résultat classique, une solution w dans $\mathcal{C}([0,\infty[, \dot{H}^{1/2})$ de (NS). On note v la solution (globale) de (NS) perturbé par w

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{cases}$$

On s'assure alors que $v \in \mathcal{C}([0,\infty[, L^2)$. Ceci permet d'estimer l'énergie de v comme dans le lemme 2.5, pour obtenir

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|v(s)\|_{\dot{H}^1}^2\, ds &\leq \|v_0\|_2^2 + 2\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx\, ds\right| \\ &\leq \|v_0\|_2^2 + C\|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \int_0^t \|v(s)\|_{\dot{H}^1}^2\, ds \ , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte d'une loi de produit classique entre espaces de Sobolev. L'estimation ci-dessus permet, si $\|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$ est assez petit, de déduire que l'énergie de v, c'est à dire

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|v(s)\|_{\dot{H}^1}^2\, ds \ ,$$

est uniformément bornée par rapport à t. Ceci implique, par interpolation, que la norme de $v(t)$ dans $\dot{H}^{1/2}$ peut être rendue aussi petite que l'on souhaite, pour un certain t. La norme de w dans $\dot{H}^{1/2}$ reste petite pour tout temps. Il n'est dès lors pas difficile de conclure, par la théorie à données petites, que

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

3.2 Preuve du théorème 2

En dimension 2 d'espace, l'espace d'énergie $\mathcal{L}$ a la même homogénéité que les espaces critiques. Il nous faudra donc créer un décalage artificiel de scaling en faisant une estimation d'énergie dans $\dot{H}^{-\delta}$ au lieu de L^2.

Notons d'autre part que le point (ii) du théorème 2 peut être montré grâce à une méthode perturbative en partant du schéma de la preuve du théorème de Wiegner [27] qui établit la convergence vers 0 (en norme L^2) des solutions de Leray de (NS) issues de $u_0 \in L^2$.

1. Nous commençons comme dans la preuve du théorème 1. On se donne donc $u_0 \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, que l'on décompose en une somme $u_0 = v_0 + w_0$, où $v_0 \in L^2 \cap \dot{H}^{-\delta}$ et $\|w_0\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq \epsilon$, où ϵ est pris assez petit pour que tous les arguments dont nous aurons besoin par la suite s'appliquent. On note w la solution de (NS) pour la donnée initiale w_0, et v la solution de

$$(30) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{cases}$$

La seule estimation sur w dont nous aurons besoin est que

$$(31) \qquad \|w(t)\|_\infty \leq C \frac{\epsilon}{\sqrt{t}} \ .$$

Toute la difficulté est maintenant de contrôler v. Donnons-nous $\delta \in]0,1[$. Rappelons la définition du produit scalaire dans l'espace de Sobolev $\dot{H}^{-\delta}$:

$$\langle f, g \rangle_{\dot{H}^{-\delta}} = \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) |\xi|^{-2\delta} \, d\xi = \langle f, \Lambda^{-2\delta} g \rangle \ ,$$

où Λ est l'opérateur de Calderón $\Lambda = |D|$. En appliquant $\langle \cdot, v \rangle_{\dot{H}^{-\delta}}$ à l'équation (30) vérifiée par v, on obtient formellement

$$(32) \qquad \frac{1}{2} \partial_t \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} + \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + \langle v \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle + \langle w \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle + \langle v \cdot \nabla w, \Lambda^{-2\delta} v \rangle = 0$$

(l'opérateur de Leray $\mathbb{P}$ a disparu puisqu'il commute avec $\Lambda^{-2\delta}$ et que v est de divergence nulle). Pour montrer rigoureusement (32), on peut appliquer le schéma classique de régularisation des solutions puis de passage à la limite. Il nous faut maintenant estimer les 3 derniers termes de (32) afin d'obtenir un contrôle de $\|v\|_{\dot{H}^{-\delta}}$. Les deux derniers termes sont les plus faciles :

$$(33) \qquad \begin{aligned} \left| \langle v \cdot \nabla w, \Lambda^{-2\delta} v \rangle \right| &= \left| \langle v \cdot \nabla \Lambda^{-2\delta} v, w \rangle \right| \leq \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-2\delta}} \|v\|_2 \\ &\leq C \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}} \leq \frac{1}{4} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + C \|w\|^2_\infty \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \ , \end{aligned}$$

où l'on a utilisé une inégalité d'interpolation classique entre espaces de Sobolev ; on montre de même

$$(34) \qquad \left| \langle w \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle \right| \leq C \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}} \leq \frac{1}{4} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + C \|w\|^2_\infty \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \ .$$

Reste à estimer $\langle v \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle$. La démarche à suivre est alors différente suivant que l'on se trouve dans le cas (i) ou (ii) du théorème.

2. Supposons tout d'abord que nous sommes dans le cas (i), c'est à dire que $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}>1$. On peut alors écrire, d'après les lois de produit classiques dans les espaces de Sobolev,

$$
\begin{aligned}
\left|\langle v\cdot\nabla v,\Lambda^{-2\delta}v\rangle\right| &\leq C\|v\|_{\dot H^{1-2\delta}}\|v\|_{\dot H^1}\|v\|_2 \leq C\|v\|_{\dot H^1}\|v\|_{\dot H^{-\delta}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta}}\\
&\leq \frac{1}{2}\|v\|^2_{\dot H^{1-\delta}}+C\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}\|v\|^2_{\dot H^1}\ .
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Nous pouvons maintenant rassembler les estimations (33), (34) et (35) et les insérer dans (32) pour obtenir

$$
\partial_t\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}+\|v\|^2_{\dot H^{1-\delta}}\leq C\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}\left(\|w\|^2_\infty+\|v\|^2_{\dot H^1}\right)\ .
$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient alors que, pour $T>\tau>0$,

$$
\|v(t)\|^2_{L^\infty([\tau,T],\dot H^{-\delta})\cap L^2([\tau,T],\dot H^{1-\delta})}\leq C\|v(\tau)\|^2_{\dot H^{-\delta}}\exp\left(\int_\tau^T(\|w(s)\|^2_\infty+\|v(s)\|^2_{\dot H^1})\,ds\right)\ .
\tag{36}
$$

Il nous faut ici utiliser un résultat tiré de [13] : du fait de l'hypothèse (i), on a

$$
\int_0^\infty\|v(s)\|^2_{\dot H^1}\,ds\ <\ \infty\ ;
$$

en combinant cette dernière estimation avec (31), on voit que (36) implique que

$$
\|v(t)\|^2_{L^\infty([\tau,T],\dot H^{-\delta})\cap L^2([\tau,T],\dot H^{1-\delta})}\leq C\|v(\tau)\|^2_{\dot H^{-\delta}}\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\epsilon}\ .
$$

3. En interpolant entre $L^\infty([\tau,T],\dot H^{-\delta})$ et $L^2([\tau,T],\dot H^{1-\delta})$, on trouve que

$$
\|v\|_{L^{2/\delta}([\tau,T],L^2)}\leq C\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\epsilon}\ ,
$$

ce qui implique que

$$
\left(\inf_{s\in[\tau,T]}\|v(s)\|_2\right)(T-\tau)^{\delta/2}\leq C\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\epsilon}\ .
$$

Si ϵ est choisi assez petit, ceci implique que pour tout $\eta>0$, il existe un T_η tel que $\|v(T_\eta)\|_2\leq\eta$. D'autre part, comme la norme de w dans $\dot B^{-1+2/p}_{p,q}$ est bornée par $C\epsilon$, on a $\|u(T_{C\epsilon})\|_{\dot B^{-1+2/p}_{p,q}}\leq 2C\epsilon$, pour la même constante C. Si ϵ est assez petit, ceci implique que $\|u(s)\|_{\dot B^{-1+2/p}_{p,q}}$ reste majorée par $C\epsilon$ (pour une nouvelle constante C) pour $s>T_{C\epsilon}$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon>0$ et assez petit, on obtient le résultat souhaité dans le cas (i).

4. Supposons maintenant que l'on se trouve dans le cas (ii). Nous allons montrer qu'on a alors

$$
\left|\langle v\cdot\nabla v,\Lambda^{-2\delta}v\rangle\right|\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/r}_{\infty,\infty}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta-2/r}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta}}
\tag{37}
$$

dès lors que $\delta<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}$. Pour prouver cette estimation, on utilise l'algorithme du para-produit (voir par exemple [13]) qui permet d'écrire (dans les lignes qui suivent, on oublie le caractère vectoriel de v et on le traite comme un scalaire, pour ne pas alourdir les notations)

$$\begin{aligned}
\langle v\nabla v, \Lambda^{-2\delta} v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} v\nabla v \Lambda^{-2\delta} v \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|j-j'|\leq 1} \Delta_j v \Delta_{j'} \nabla v S_j \Lambda^{-2\delta} v + \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|j-j'|\leq 5} \Delta_j v S_j \nabla v \Delta_{j'} \Lambda^{-2\delta} v \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|j-j'|\leq 5} S_j v \Delta_j \nabla v \Delta_{j'} \Lambda^{-2\delta} v \ ,
\end{aligned}$$

où l'on a noté $S_j = \sum_{k\leq j-1} \Delta_j$. A partir de maintenant, pour rendre les calculs plus clairs, nous oublions les décalages d'indice dans les sommations ci-dessus. L'idée que nous allons mettre en oeuvre est d'estimer séparément chacun des trois termes ci-dessus ; nous nous bornerons à écrire les calculs qui correspondent au premier de ces trois termes ; les deux autres s'estiment de manière très similaire.

$$\begin{aligned}
\left| \int \sum_j \Delta_j v \Delta_j \nabla v S_j \Lambda^{-2\delta} v \right| &\leq \sum_j \|S_j \Lambda^{-2\delta} v \Delta_j \nabla v\|_2 \|\Delta_j v\|_2 \\
&\leq \sum_j \sum_{k<j} 2^{-2k\delta} \|\Delta_k v\|_\infty 2^j \|\Delta_j v\|_2^2 \\
&\leq C \|v\|_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} \sum_j 2^j \|\Delta_j v\|_2^2 \sum_{k<j} 2^{k(1-2\delta-2/r)} \ ,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme de Bernstein. Comme de plus $\delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left| \int \sum_j \Delta_j v \Delta_j \nabla v S_j \Lambda^{-2\delta} v \right| &\leq C \|v\|_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} \sum_j 2^{j(2-2\delta-2/r)} \|\Delta_j v\|_2^2 \\
&\leq C \|v\|_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta-2/r}} \ .
\end{aligned}$$

5. En interpolant entre espaces de Sobolev, puis en appliquant l'inégalité de Young, on voit facilement que (37) implique

$$\begin{aligned}
\left| \langle v\cdot\nabla v, \Lambda^{-2\delta} v\rangle \right| &\leq C \|v\|_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}}^{2-2/r} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}}^{2/r} \\
&\leq C \|v\|^r_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} + \frac{1}{2} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} \ .
\end{aligned} \tag{38}$$

Il suffit maintenant de rassembler (33), (34) et (38), et d'insérer ces estimations dans (32) pour obtenir

$$\partial_t \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} + \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} \leq C \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \left(\|v\|^r_{\dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}} + \|w\|^2_\infty \right) \ .$$

Or, puisque nous sommes dans le cas (ii), v appartient à $L^r \dot{B}^{-1+2/r}_{\infty,\infty}$, et on peut procéder comme dans **2.** en appliquant le lemme de Gronwall puis conclure comme dans **3.**. ■

4 Appendice

4.1 Espaces de Besov

Nous voudrions rappeler ici quelques éléments basiques de la théorie des espaces de Besov. On se reportera à [26] pour la preuve des résultats énoncés ci-dessous.

Commençons par définir les multiplicateurs de Fourier Δ_j associés à une décomposition de Littlewood-Paley homogène. Il existe une fonction ψ telle que

$$\begin{gathered} \psi \in \mathcal{S} \\ \operatorname{Supp}(\hat{\psi}) \subset \mathcal{C}(0, 3/4, 8/3) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{si} \quad \xi \neq 0 \ . \end{gathered}$$

Soit alors $\Delta_j = \hat{\psi}(2^{-j}D)$.

Définition 4.1 (Espaces de Besov) *Soient s, d et p trois réels tels que $s < d/p$; on note alors $\dot{B}^s_{p,q}$ l'ensemble des distributions f de $\mathcal{S}'$ telles que*

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p} \right]^q \right)^{1/q} < \infty \tag{39}$$

et

$$f = \sum_j \Delta_j f \ \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

Si $s \in [\frac{d}{p} + n, \frac{d}{p} + n + 1[$, avec $n \in \mathbb{N}$, on remplace la condition ci-dessus par

$$f = \sum_j \Delta_j f \ \text{ dans } \mathcal{S}' \text{ modulo les polynômes d'ordre au plus } n.$$

Lemme 4.2 *La norme donnée par le membre de gauche de (39) fait de $\dot{B}^s_{p,q}$ un espace de Banach.*

4.2 L'espace ∂BMO

Nous présentons brièvement l'espace ∂BMO, qui apparaît fréquemment dans cet article. Nos deux références sont les livres de Stein [25] et de Lemarié [20].
Nous disons que $f \in \mathcal{S}'$ appartient à BMO si

$$\sup_{R>0, x \in \mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |\nabla e^{t\Delta} f(x)|^2 dx dt < \infty.$$

(où l'on note $\displaystyle\fint_{B(x,R)} = \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)}$). Une définition plus classique consiste à demander que

$$\sup_{R>0, x \in \mathbb{R}^2} \fint_{B(x,R)} \left| f(y) - \fint_{B(x,R)} f \right| dy \ < \ +\infty.$$

On peut maintenant définir ∂BMO, l'espace des fonctions dérivées de fonctions de BMO. Plus précisément, on dira que $f \in \partial BMO(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe des fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$ $f_1, \ldots, f_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \, .$$

Au vu de la première définition que nous avons donnée de l'espace BMO, il n'est pas surprenant que f appartienne à ∂BMO si et seulement si

$$\sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dxdt < \infty \, . \tag{40}$$

Cette dernière formule définit une norme sur ∂BMO ; nous la noterons $\|\cdot\|_{\partial BMO}$. Muni de cette norme, ∂BMO est un espace complet.

4.3 Relation entre vitesse et vorticité

Si $u \in \mathcal{S}'$, on note $\operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$.

Théorème 5 *Soient $p \in [1, \infty[$ et $q \in [1, \infty]$.*

- *Soit $u \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, alors si $\omega = \operatorname{rot} u$, on a*

$$\|\omega\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \leq C\|u\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \, .$$

- *Inversement, si $\omega \in \dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$, il existe un unique $u \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ tel que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \omega = \operatorname{rot} u \ ; \end{cases}$$

  de plus, u vérifie

$$\|u\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq C\|\omega\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \, .$$

Preuve : **1.** Le premier point du théorème est trivial. Montrons maintenant le second. On note $E(x)$ la solution fondamentale du laplacien en deux dimensions suivante

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log(|x|) \, .$$

Le point crucial, prouvé dans la proposition 4.3, est que l'opérateur de convolution T de noyau $K(x) = \nabla\nabla^{\perp} E(x)$ (où l'on note $\nabla^{\perp} = (-partial_2, \partial_1)$) est un opérateur de Calderón-Zygmund continu sur L^2 dont les deux premiers moments sont nuls. On sait alors (voir [22], chapitre X) que T est continu sur $\dot{B}^{s}_{p,q}$ à condition que $s \in]-2, 2[$.

2. Pour montrer la partie "existence" du second point du théorème, donnons-nous ω dans $\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$. On pose

$$v = \nabla\nabla^{\perp} E * \omega \, .$$

Ainsi, v est une matrice dont les lignes sont de rotationnel nul, donc v s'écrit $\nabla\tilde{u}$, avec $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$. Soit alors

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j \tilde{u}$$

(la convergence de la série ci-dessus est à comprendre au sens de $\mathcal{S}'$). Avec cette définition, u est l'unique fonction de $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ telle que $\nabla u = v$; de plus

$$\|u\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq C\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} = C\|v\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \leq C^2\|\omega\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \ ,$$

où la dernière inégalité provient de la continuité de T sur $\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$.
Pour montrer que $\operatorname{rot} u = \omega$, donnons-nous ω_n une suite de $\mathcal{S} \cap \dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$ telle que

$$\omega_n \rightharpoonup \omega \tag{41}$$

(convergence faible dans $\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$). On note aussi $u_n = \nabla^{\perp}E * \omega_n$. Ceci implique (c'est la loi de Biot et Savart, voir par exemple [4]) que

$$\operatorname{rot} u_n = \omega_n \ . \tag{42}$$

On a d'autre part bien entendu

$$\nabla u_n = T\omega_n \rightharpoonup T\omega = \nabla u,$$

ce qui implique

$$\operatorname{rot} u_n \rightharpoonup \operatorname{rot} u \ . \tag{43}$$

Et en regroupant (41), (42) et (43), on obtient $\operatorname{rot} u = \omega$. On vérifie d'autre part sans peine que $\operatorname{div} u = 0$.

3. Il reste à prouver l'unicité de la solution de $\operatorname{rot} u = \omega$ construite en **2**. Donnons-nous pour ce faire $u \in \mathcal{S}'$ et $\omega \in \dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$ tels que $\omega = \operatorname{rot} u$. Alors, comme $\operatorname{div} u = 0$,

$$\nabla\Delta u = \nabla\nabla^{\perp}\omega \ ;$$

ceci implique que

$$\nabla u = \Delta^{-1}\nabla\nabla^{\perp}\omega = T\omega$$

et prouve le théorème. ■

Proposition 4.3 *Soit E la solution fondamentale du laplacien suivante*

$$E(x) = \frac{1}{2\pi}\log(|x|) \ .$$

Alors l'opérateur de convolution T, de noyau $K = \nabla\nabla^{\perp}E$, est un opérateur de Calderón-Zygmund continu sur L^2. De plus, il a ses deux premiers moments nuls au sens de Meyer [22], chapitre X : si $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_0$, ϕ vaut 1 au voisinage de 0, si l'on pose $\phi_\epsilon = \phi(\epsilon\cdot)$, et si $\psi \in \mathcal{D}$ est de moyenne nulle,

$$\langle K * \phi_\epsilon \, , \, \psi\rangle \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{44}$$

De même, si ψ a deux moments nuls, et si $j \in \{1, 2\}$,

$$\langle K * (\phi_\epsilon x_j) \, , \, \psi\rangle \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{45}$$

Preuve : Le fait que le noyau K ainsi que sa dérivée vérifient les conditions de décroissance qui font de T un opérateur de Calderón-Zygmund est clair. D'autre part, comme E est une solution fondamentale du laplacien, on a

$$\|\Delta E * u\|_2 \leq \|u\|_2 \ ,$$

ce qui entraîne que $\mathcal{F}(\Delta E)$ est borné. Puisque K s'obtient en appliquant des transformations de Riesz à ΔE, il en découle que $\mathcal{F}(K)$ est aussi borné, et donc que T est continu sur L^2.

Montrons maintenant (44). La preuve de (45) est similaire, et nous ne la présenterons pas. On a

$$\langle K * \phi_\epsilon \, , \, \psi\rangle = \langle \phi_\epsilon \, , \, (\nabla\nabla^\perp E) * \psi\rangle = \langle \nabla\phi_\epsilon \, , \, (\nabla^\perp E) * \psi\rangle \ .$$

Or $\nabla\phi_\epsilon$ est nul en dehors d'une couronne

$$\mathcal{C}_\epsilon = \left\{ \frac{A}{\epsilon} \leq |x| \leq \frac{B}{\epsilon} \right\} \ ;$$

et sur $\mathcal{C}_\epsilon$, $\nabla\phi_\epsilon$ a pour ordre de grandeur ϵ. D'autre part, la dérivée de $(\nabla^\perp E)$ a une décroissance à l'infini en $\dfrac{1}{|x|^2}$, et comme ψ a une moyenne nulle, il en découle que $(\nabla^\perp E)*\psi$ a une décroissance à l'infini en $\dfrac{1}{|x|^2}$. Ainsi,

$$\left|\langle \nabla\phi_\epsilon \, , \, (\nabla^\perp E) * \psi\rangle\right| \leq C|\mathcal{C}_\epsilon|\epsilon^3 \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

ce qui prouve la proposition. ■

Corollaire 4.4 *Si $\omega \in \mathcal{M}$, il existe un unique $u \in \dot{B}^1_{1,\infty}$ tel que $\omega = \operatorname{rot} u$. De plus, on a*

$$\|u\|_{\dot{B}^1_{1,\infty}} \leq C\|\omega\|_{\mathcal{M}} \ .$$

Preuve : Ceci découle du théorème précédent et de ce que

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \dot{B}^0_{1,\infty} \ .$$

4.4 Résultats de type point fixe

Nous utilisons dans cet article un théorème de point fixe et un lemme de propagation de régularité. Ils sont rappelés ici (on pourra se reporter à [12]) :

Théorème 6 (Existence et unicité) *Soit X un espace de Banach, L un opérateur linéaire sur X de norme $\lambda < 1$, et B un opérateur bilinéaire tel que :*

$$\|B(x,y)\|_X \leq \gamma\|x\|_X\|y\|_X$$

Alors pour tout $y \in X$ tel que

$$4\gamma\|y\|_X < (1-\lambda)^2$$

la suite définie par :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{n+1} = y + LX_n + B(X_n, X_n) \end{cases}$$

converge dans X vers l'unique solution de

$$x = y + Lx + B(x, x)$$

telle que

$$2\gamma\|x\|_X < (1 - \lambda)$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|x\|_X \leq C\|y\|_X$$

Lemme 4.5 (Propagation de régularité) *Soient x, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et γ comme dans le théorème précédent. On suppose de plus que y est dans un espace de Banach Y, que L est un opérateur linéaire sur Y de norme μ et que*

$$\|B(f, g)\|_Y < \kappa\|f\|_X\|g\|_Y$$
$$\|B(g, f)\|_Y < \kappa\|f\|_X\|g\|_Y.$$

On suppose enfin que $\mu < 1$ et que $\kappa(1 - \lambda) < (1 - \mu)\gamma$. Alors X_n converge vers x dans Y et

$$\|x\|_Y \leq C\|y\|_Y$$

References

[1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space*, Journal de mathématiques pures et appliquées **83**, 673-697 (2004)

[2] C. Calderón, *Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p*, Transactions of the American Mathematical Society **318**, 179-200 (1990)

[3] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduit et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris (1995)

[4] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, Oxford lecture series in mathematics and its applications **14**, Oxford science publications, Oxford (1998)

[5] J.-Y. Chemin, *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, Journal d'analyse mathématique **77**, 27-50 (1999)

[6] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, *Basics of mathematical geophysics*, à paraître

[7] G.-H. Cottet, *Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris série I Mathématiques **303**, 105-108 (1986)

[8] S. Dubois, *Equations de Navier-Stokes dans l'espace : Espaces critiques et solutions d'énergie finie*, Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne (2002)

[9] E. Fabes, B. Jones, N. Riviere, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **45**, 222-240 (1972)

[10] I. Gallagher, T. Gallay, *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes flow with a measure as initial vorticity*, Mathematische Annalen, à paraître

[11] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Non-explosion en temps grand et stabilit de solutions globales des quations de Navier-Stokes* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, Mathématiques, **334** 289-292 (2002)

[12] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Comportement asymptotique et stabilité des solutions globales des équations de Navier-Stokes*, Annales de l'Institut Fourier **53**, 1387-1424 (2003)

[13] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, No.4, 307-337 (2002)

[14] T. Gallay, E. Wayne, *Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on* $\mathbb{R}^3$, Recent developments in the mathematical theory of water waves (Oberwolfach, 2001), The Royal Society of London. Philosophical transactions. Series A. Mathematics, Physics and Engineering Sciences **360**, no. 1799, 2155-2188 (2002)

[15] T. Gallay, E. Wayne, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity equations on* $\mathbb{R}^2$, Archive for Rational and Mechanical Analysis **163**, 209-258 (2002)

[16] P. Germain, *Multipliers, paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations*, en préparation

[17] Y. Giga, T. Miyakawa, H. Osada, *Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity*, Archives of Rational and Mechanical Analysis **104**, 223-250 (1988)

[18] Y. Giga, S. Matsui, O. Sawada, *Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity*, Journal of mathematical fluid mechanics **3**, 302-315 (2001)

[19] H. Koch, D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Advances in Mathematics **157**, 22-35 (2001)

[20] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall, (2003)

[21] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934)

[22] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Hermann, Paris (1990)

[23] H. Miura, *Remark on uniqueness of mild solutions to the Navier-Stokes equations*, Journal of functional analysis **218**, 110-129 (2005)

[24] F. Planchon, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Revista Matematica Iberoamericana **14**, 71-93 (1998)

[25] E. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University press (1993)

[26] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhaüser Verlag (1992)

[27] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on* $\mathbb{R}^N$, Journal of the London Mathematical Society **2**, 303-313 (1987)