

1. Introduction

Soient k un corps et p un nombre premier. Rappelons la définition de la p -dimension de k ([Ser94], [Kat82]).

Si $p \neq \text{car. } k$, on appelle p -dimension de k et l'on note $\text{cd}_p(k)$, la p -dimension cohomologique du groupe profini $G_k := \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$, où k^{sep} est une clôture séparable de k (cf. [Ser94]). C'est le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que pour tout G_k -module discret M de p -torsion et tout $n > d$, les groupes $H^n(G_k, M)$ soient nuls.

Si $p = \text{car. } k$, la définition fait intervenir des invariants différentiels. Pour tout schéma X et tout entier $i \in \mathbf{N}$, notons $\underline{\Omega}_X^i := \bigwedge^i \underline{\Omega}_{X/\mathbf{Z}}^1$ le $\mathcal{O}_X$ -module des i -formes différentielles absolues et $\underline{\Omega}_{X, \log}^i$ le sous-faisceau étale abélien des formes différentielles *logarithmiques*, c'est-à-dire localement engendré par les sections de la forme $d\log(x_1) \wedge \cdots \wedge d\log(x_i)$, pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^\times$. On pose alors $H_p^i(k) := H_{\text{ét}}^i(k, \underline{\Omega}_{k, \log}^{i-1}[-(i-1)]) = H_{\text{ét}}^1(k, \underline{\Omega}_{k, \log}^{i-1})$; c'est un analogue du groupe de cohomologie $H_{\text{ét}}^i(k, \mu_p^{\otimes i-1})$ en caractéristique différente de p . Dans cet article, Ω_k^i désigne le *groupe* des sections globales sur k du *faisceau* $\underline{\Omega}_k^i$. Rappelons que le rang du k -module Ω_k^1 est égal au p -rang de k , c'est-à-dire au cardinal d'une p -base (absolue) de k (cf. [ÉGA 0_{IV} §21.1]); s'il est fini c'est également l'entier naturel r pour lequel $[k : k^p] = p^r$.

Définition 1.1 (Kazuya Katô, [Kat82], §0). — La p -dimension d'un corps k de caractéristique $p > 0$ est le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que $\Omega_k^{d+1} = 0$ et $H_p^{d+1}(k') = 0$ pour toute extension finie k'/k . On la note $\dim_p(k)$.

Notons que l'on a les deux inégalités suivantes dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$:

$$(\text{triv.}) \quad p\text{-rang}(k) \leq \dim_p(k) \leq p\text{-rang}(k) + 1.$$

(Dans cette formule, $p\text{-rang}(k)$ est remplacé par le symbole $+\infty$ si le p -rang est un cardinal infini.)

L'objet de cet article est de démontrer le résultat suivant, conjecturé par K. Katô :

Théorème 1.2. — Soit A un anneau local hensélien excellent, intègre de dimension d . Soient k son corps résiduel, de caractéristique $p > 0$, et K son corps des fractions. Alors, on a l'égalité

$$\dim_p(K) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

Dans *op. cit.*, ce théorème est démontré par K. Katô dans le cas particulier essentiel où A est un anneau de valuation discrète complet (cf. 2.3.1). Son théorème est une généralisation d'un théorème de S. Lang ([Ser94], chap. II, §3.3 et §4.3) au cas d'un corps résiduel non algébriquement clos. La nécessité de prendre en compte le p -rang dans le cas d'un corps résiduel non nécessairement parfait avait été conjecturée par M. Artin dans [SGA 4 x 2.2]. La démonstration de K. Katô utilise la K -théorie de Milnor, qui permet en caractéristique mixte, par l'intermédiaire des symboles cohomologiques, différentiels, et du théorème de Bass-Tate ([BT73], I 4.3), de faire le pont entre la cohomologie galoisienne du corps des fractions et les formes différentielles absolue sur le corps résiduel.

Le cas de la dimension deux est également établi par K. Katô, en caractéristique mixte (et dans le cas d'un corps résiduel algébriquement clos), dans [Sai86], §5. Sa démonstration, K -théorique, repose sur le théorème de Merkurjev-Suslin ainsi que sur la résolution des singularités des surfaces.

Notons que si A est un anneau strictement local excellent, intègre, de corps des fractions K , et ℓ un nombre premier *inversible* dans A , on a

$$\dim_\ell K = \dim A,$$

comme conjecturé par M. Artin dans [SGA 4 X 3.1]. On a en effet $\dim_\ell K \geq \dim A$ ([SGA 4 X 2.4]); par ailleurs, le premier auteur a récemment démontré que pour tout $f \in A$, on a $\text{cd}_\ell(\text{Spec}(A[f^{-1}])) \leq \dim A$ ([Gab05b], §8) et donc $\dim_\ell K \leq \dim A$ par passage à la limite.

Donnons brièvement quelques indications sur la méthode utilisée ici, qui suit de près la technique d'algébrisation introduite par le premier auteur dans [Gab05a] et *op. cit.* (voir également [Mat02], théorème 2.2). Utilisant le théorème d'approximation de Popescu, on se ramène au cas d'un anneau local complet noethérien. En égale caractéristique, on utilise alors le théorème de Cohen-Gabber ([Gab05a], 8.1), dont la démonstration est rappelée en appendice (cf. 7.1), qui précise le théorème de structure de Cohen et permet, grâce au théorème d'algébrisation d'Elkik, de faire de cet anneau le complété d'un anneau local hensélien essentiellement de type fini et de dimension relative un sur un anneau local complet de dimension un de moins. Les prémices d'une telle idée se trouvent déjà dans l'exposé de M. Artin [SGA 4 XIX §1 & §6]. En caractéristique mixte, dans le cas où p est ramifié dans A , on utilise le théorème de Epp, ainsi que le théorème 1.2 ci-dessus en égale caractéristique, pour pouvoir algébriser nos données. Dans les deux cas, on procède par récurrence sur la dimension de l'anneau, en utilisant le théorème de Katô (dimension un) et, en caractéristique mixte, un théorème de comparaison hensélien/formel dû à K. Fujiwara et au premier auteur.

Le plan de l'article est le suivant : après quelques rappels et compléments sur la p -dimension (§2), on commence par minorer la p -dimension du corps des fractions (§3). La démonstration est très semblable à celle de K. Katô en dimension deux. Majorer la p -dimension est plus difficile. On commence par le cas d'égale caractéristique (§4), qui nous permet de traiter ensuite le cas d'inégale caractéristique (§5). En inégale caractéristique, le théorème principal est généralisé (§6) au cas d'un ouvert affine de $\text{Spec}(A[p^{-1}])$. Enfin, dans un appendice (§7), on rappelle la démonstration du théorème de Cohen-Gabber mentionné ci-dessus.

Le second auteur souhaite remercier chaleureusement Luc Illusie pour ses nombreuses remarques, ainsi que Takeshi Saitô et l'université de Tôkyô pour leur chaleureux accueil durant le premier semestre 2006-2007. Les auteurs sont également grandement reconnaissants envers le rapporteur pour ses questions et commentaires.

2. p -dimension : rappels et compléments

Dans cette section on réunit divers lemmes (dont certains ne sont mis que pour mémoire) qui seront utiles aux cours des déviassages qui vont suivre (réduction au cas normal, resp. complet) ainsi que l'énoncé du théorème de Katô et d'un corollaire important.

2.1. p -rang. —

Lemme 2.1.1. — *Soit k'/k une extension finie de corps de caractéristique $p > 0$. Alors, le p -rang de k est égal au p -rang de k' .*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la suite exacte [ÉGA 0_{IV} 20.6.1.1]

$$0 \rightarrow \Upsilon_{k'/k} \rightarrow \Omega_k^1 \otimes_k k' \rightarrow \Omega_{k'}^1 \rightarrow \Omega_{k'/k}^1 \rightarrow 0,$$

où les termes extrêmes sont de *dimension finie* sur k' et satisfont à l'égalité de Cartier [ÉGA 0_{IV} 21.7.1]

$$\text{rang}_{k'} \Omega_{k'/k}^1 - \text{rang}_{k'} \Upsilon_{k'/k} = \deg. \text{tr}_k k' = 0.$$

□

Lemme 2.1.2. — *Soit K un corps valué de caractéristique $p > 0$, de complété $\widehat{K}$. Si $[K : K^p]$ est fini, on a l'inégalité :*

$$[K : K^p] \geq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

Démonstration. Soient v' la valuation de K , v sa restriction à K^p et notons $\widehat{K}_{v'} = \widehat{K}$ (resp. $\widehat{K}_{v'}^p = \widehat{K}^p$) le complété de K (resp. K^p). Le morphisme canonique $\widehat{K}^p \rightarrow \widehat{K}$ induit un isomorphisme

$\widehat{K^p} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}^p$. Puisque l'on peut supposer la valuation v' non triviale, il résulte de [Bourbaki, A.C., VI, §8, N°2 prop. 2] b) que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \widehat{K} \\ \text{Frob} \uparrow & & \uparrow \text{Frob} \\ K & \longrightarrow & \widehat{K} \end{array}$$

induit une *surjection* $\widehat{K} \otimes_{K, \text{Frob}} K \rightarrow \widehat{K}$. Le résultat se déduit immédiatement. $\square$

Remarque 2.1.3. — Il se peut par contre que le p -rang de K soit dénombrable et celui de $\widehat{K}$ indénombrable (cf. [Bas78], §3 pour un exemple où K est muni d'une valuation discrète de rang 1).

Réciproquement,

Lemme 2.1.4. — Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K . Soient $\widehat{A}$ le complété de A et $\widehat{K}$ son corps des fractions. Alors,

$$[K : K^p] \leq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

De plus, si $[K : K^p]$ est fini, c'est une égalité.

Rappelons que $\widehat{A}$ est intègre ([ÉGA IV₂ déf. 7.8.2] et [ÉGA IV₄ 18.9.2]).

Démonstration. — L'extension $\widehat{K}/K$ est séparable de sorte que le morphisme canonique $\widehat{K} \otimes_K \Omega_K^1 \rightarrow \Omega_{\widehat{K}}^1$ est une injection ([ÉGA 0_{IV} 20.6.3]). Vérifions la seconde assertion. Sous les hypothèses faites, la normalisation de A dans $K^{1/p}$ est finie sur A , de sorte que $\text{Frob} : A \rightarrow A$ est fini et que le morphisme $\widehat{A} \otimes_{A, \text{Frob}} A \rightarrow \widehat{A}$ est un isomorphisme (cf. p. ex. [ÉGA 0_I 7.3.3]; rappelons à cette occasion qu'un anneau excellent est noethérien). On en tire immédiatement que $\Omega_A^1 \otimes_A \widehat{A} \rightarrow \Omega_{\widehat{A}}^1$ est un isomorphisme. (Cela résulte du fait que $\Omega_A^1 = \Omega_{\text{Frob}: A \rightarrow A}^1$ et de même pour $\widehat{A}$.) $\square$

Lemme 2.1.5. — Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$ possédant une p -base finie $\{b_i\}_{i \in I}$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\{b_i\}_{i \in I} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ constitue une p -base de l'anneau $A[[x_1, \dots, x_n]]$.

(Pour la définition de la notion de p -base dans un anneau, cf. [ÉGA 0_{IV} 21.1.9].)

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où $n = 1$. Pour $\vartheta : I \rightarrow [0, p-1]$, posons $b^\vartheta = \prod_{i \in I} b_i^{\vartheta(i)}$. La conclusion résulte des décompositions :

$$A[[X]] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} A[[X^p]]X^i,$$

$$A = \bigoplus_{\vartheta \in [0, p-1]^I} A^p b^\vartheta,$$

et de la finitude de l'ensemble I . $\square$

Enfin, signalons le lemme suivant.

Lemme 2.1.6. — Soit A un anneau intègre ayant une p -base $\{b_i\}_{i \in I}$. Alors, les éléments b_i forment une p -base de $\text{Frac } A$.

Démonstration. — C'est immédiat en chassant les dénominateurs par une puissance p -ième. $\square$

2.2. Les groupes $H_p^i(k)$. —

Proposition 2.2.1. — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$ et i un entier naturel. Le groupe $H_p^{i+1}(k) := H_{\text{ét}}^1(k, \underline{\Omega}_{k, \log}^i)$ est isomorphe au conoyau du morphisme

$$\wp = 1 - \gamma : \Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i / d\Omega_k^{i-1}$$

où 1 est la projection canonique $\Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i / d\Omega_k^{i-1}$ et γ est l'unique application additive p -linéaire $\Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i / d\Omega_k^{i-1}$ telle que

$$\gamma(\omega = d\log(y_1) \wedge \cdots \wedge d\log(y_i)) = [\omega].$$

Démonstration. Cela résulte de l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents et de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de *faisceaux* étales en groupes abéliens sur $\text{Spec}(k)$ suivante :

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_{k, \log}^i \rightarrow \underline{\Omega}_k^i \xrightarrow{1-\gamma} \underline{\Omega}_k^i / d\underline{\Omega}_k^{i-1} \rightarrow 0.$$

L'exactitude à droite est évidente ; l'exactitude à gauche résulte (cf. p. ex. [CT99], §1.4) de la suite exacte

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_{k, \log}^i \rightarrow \underline{\Omega}_{k, d=0}^i \xrightarrow{C-1} \underline{\Omega}_k^i \rightarrow 0,$$

où C est l'opérateur de Cartier sur les formes fermées (cf. [Ill79] chap. 0, §2.4 et [Tsu96], 6.1.1.), et du morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & d\underline{\Omega}_k^{i-1} & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{k, d=0}^i & \xrightarrow{C} & \underline{\Omega}_k^i \longrightarrow 0 \\ & & \text{Id} \downarrow & & C-1 \downarrow & & \downarrow 1-\gamma \\ 0 & \longrightarrow & d\underline{\Omega}_k^{i-1} & \longrightarrow & \underline{\Omega}_k^i & \xrightarrow{\text{can}} & \underline{\Omega}_k^i / d\underline{\Omega}_k^{i-1} \longrightarrow 0. \end{array}$$

□

2.2.2. Exemples. — Pour tout corps k de caractéristique $p > 0$, on a $H_p^1(k) = k/\wp(k)$, où $\wp$ est le morphisme d'Artin-Schreier usuel. En particulier, ce groupe est trivial si k est un corps séparablement clos. Si k est parfait (de façon équivalente : de p -rang nul), le quotient $H_p^2(k)$ de Ω_k^1 est donc nul. Il est élémentaire de vérifier dans ce cas que la p -torsion $\text{Br}(k)[p]$ du groupe de Brauer de k est également nulle. Plus généralement, on peut montrer que $H_p^2(k)$ s'identifie à $\text{Br}(k)[p]$ par l'intermédiaire de l'application envoyant la classe d'une forme différentielle $\omega = x d\log(y)$ ($x \in k$, $y \in k^\times$), sur la classe de l'algèbre centrale simple de rang p^2 définie par des générateurs X, Y liés par les relations $X^p - X = x$, $Y^p = y$ et $YXY^{-1} = X + 1$ (cf. p. ex. [GS06], prop. 9.2.5).

2.2.3. Trace. — Rappelons maintenant brièvement que l'on peut définir une trace dans le présent contexte. La fonctorialité *covariante* en le corps est quant à elle élémentaire : pour tout morphisme $k \rightarrow k'$ de corps de caractéristique $p > 0$, et tout entier $n \geq 0$, il résulte immédiatement des définitions que l'on a un morphisme fonctoriel $H_p^n(k) \rightarrow H_p^n(k')$, déduit du morphisme naturel $\Omega_k^\bullet \rightarrow \Omega_{k'}^\bullet$ par passage au quotient.

Si k'/k est une extension finie étale de corps de caractéristique $p > 0$, la trace $\text{Tr}_{k'/k}^{i, \Omega} : \Omega_{k'}^i \rightarrow \Omega_k^i$ (déduite du morphisme $\text{Tr}_{k'/k} : k' \rightarrow k$ grâce à l'isomorphisme $k' \otimes_k \Omega_k^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{k'}^i$) envoie $d\Omega_{k'}^{i-1}$ dans $d\Omega_k^{i-1}$ et induit un morphisme, noté $\text{Tr}_{k'/k}^{i, H}$, de $H_p^{i+1}(k')$ dans $H_p^{i+1}(k)$.

Si k'/k est finie non nécessairement étale, de caractéristique $p > 0$, une trace sur les modules de différentielles est construite par K. Katô à partir de la norme $N_{k'/k}^K$ en K -théorie de Milnor (cf. [BK86], p. 126 ; voir également [Fuk01], §2). Cette trace est caractérisée par les propriétés suivantes :

- i. pour $i = 0$, c'est la trace usuelle ;

ii. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_i^M(k') & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega_{k'}^i \\ \downarrow N_{k'/k}^{i,K} & & \downarrow \text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \\ K_i^M(k) & \xrightarrow{\text{dlog}} & \Omega_k^i \end{array}$$

(pour $i = 0$, $K_0 = \mathbf{Z}$ et la flèche verticale de gauche est la multiplication par le degré de l'extension) ;

- iii. compatibilité avec d : $d(\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}(\omega)) = \text{Tr}_{k'/k}^{i+1,\Omega}(d\omega)$ (pour $\omega \in \Omega_{k'}^i$) ;
- iv. formule de projection : $\text{Tr}^{i+j,\Omega}(\omega \wedge \omega') = \text{Tr}^{i,\Omega}(\omega) \wedge \omega'$ si $\omega \in \Omega_{k'}^i$ et $\omega' \in \Omega_{k'}^j$;
- v. compatibilité aux extensions de corps : $\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \circ \text{Tr}_{k''/k'}^{i,\Omega} = \text{Tr}_{k''/k}^{i,\Omega}$ (pour $k \subset k' \subset k''$).

Si $k' = k(a)$, où $a^p = b \in k$, est une extension radicielle de k de degré p , il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus que l'on a $\text{Tr}_{k'/k}^{1,\Omega}(\text{dlog}(a)) = \text{dlog}(b)$, et de la formule de projection que l'on a, pour tout entier $i \geq 1$:

$$\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \left(\left(\sum_{j=0}^{p-1} c_j a^j \right) \text{dlog}(a) \wedge \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}) \right) = c_0 \text{dlog}(b) \wedge \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}),$$

où les c_j appartiennent à k et les b_j à $k^\times$.

On déduit de cette formule que la trace commute au morphisme $C^{-1} : \Omega^i \rightarrow \Omega^i/d\Omega^{i-1}$. Dans le cas radiciel de degré p cela résulte, par un simple calcul, du fait que pour chaque $0 < j < p$ et tous $c \in k$, $b, b'_1, \dots, b'_{i-1} \in k^\times$, on a $c^p b^{j-1} db \wedge \text{dlog}(b') = d(\frac{c^p}{j} b^j \text{dlog}(b')) \in d\Omega_k^{i-1}$, où l'on pose $\text{dlog}(b') := \text{dlog}(b'_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b'_{i-1})$. Dans le cas étale, cela résulte de ce que $\text{Tr}(a)^p = \text{Tr}(a^p)$. Ainsi, la trace $\text{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}$ induit par passage au quotient un morphisme trace $\text{Tr}_{k'/k}^{i,H}$ sur les H_p^{i+1} . De plus, on constate que le morphisme induit est une *surjection* pour i égal au p -rang r de k .

Remarque 2.2.4. — Dans le cas d'une extension finie purement inséparable k'/k , le morphisme $\text{Tr}_{k'/k}^{r,H}$, où r est le p -rang de k , est un *isomorphisme*. On se ramène par transitivité de la trace au cas où $k' = k^{1/p}$, auquel cas la trace coïncide avec l'opérateur de Cartier sur les formes de degré maximal. On peut également montrer que la trace $\Omega_{k',\log}^r \rightarrow \Omega_{k,\log}^r$ et la norme $K_r^M(k') \rightarrow K_r^M(k)$ sont des isomorphismes.

Le lemme immédiat suivant rend plus explicite la structure de $H_p^{r+1}(k)$, où r est le p -rang d'un corps k , comme quotient de $\Omega_k^r \simeq k$.

Lemme 2.2.5. — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $r \geq 1$ un entier et $b_1, \dots, b_r$ une p -base. Pour toute fonction $\vartheta : [1, r] \rightarrow [0, \dots, p-1]$, posons $b^\vartheta := b_1^{\vartheta(1)} \cdots b_r^{\vartheta(r)}$ et notons $k_{>0}$ le sous- k^p -espace vectoriel $\oplus_{\vartheta \neq 0} k^p b^\vartheta$ de k . L'isomorphisme $k \rightarrow \Omega_k^r$, défini par $\lambda \mapsto \lambda \text{dlog}(b) := \lambda \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_r)$ induit par passage au quotient un isomorphisme de $\mathbf{F}_p$ -espaces vectoriels

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \xrightarrow{\sim} H_p^{r+1}(k).$$

Démonstration. — Calculons l'image $d\Omega_k^{r-1} \subset \Omega_k^r = k \cdot \text{dlog}(b) = \oplus_{\vartheta} (k^p \cdot b^\vartheta \text{dlog}(b))$. Pour chaque ϑ, i , considérons l'élément

$$\omega_{\vartheta,i} := b^\vartheta \text{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_{i-1}) \wedge \text{dlog}(b_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(b_r)$$

de Ω_k^{r-1} . Ces formes engendrent Ω_k^{r-1} comme k^p -espace vectoriel. On a

$$d\omega_{\vartheta,i} = (-1)^{i+1} \vartheta(i) b^\vartheta \text{dlog}(b) = ((-1)^{i+1} \vartheta(i))^p b^\vartheta \text{dlog}(b).$$

Ainsi, faisant varier ϑ et i , on en déduit que

$$d\Omega_k^{r-1} = k_{>0} \cdot \text{dlog}(b).$$

Le quotient $\Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$ s'identifie donc à $k/k_{>0}$ par l'application $\lambda \bmod k_{>0} \mapsto \lambda \log(b) \bmod d\Omega_k^{r-1}$, et le morphisme $\wp : \Omega_k^r \rightarrow \Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$ à $\lambda \mapsto \lambda - \lambda^p \bmod k_{>0}$. Ainsi, $H_p^{r+1}(k)$ est isomorphe à

$$k/(k_{>0} + \wp(k)).$$

□

Voici maintenant un analogue du lemme 2.1.1.

Lemme 2.2.6. — *Soit K un corps muni d'une valuation discrète de rang 1, de caractéristique $p > 0$, de p -rang fini r . L'application canonique*

$$H_p^{r+1}(K) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{K})$$

est une surjection. En particulier, si $H_p^{r+1}(K)$ est nul, il en est de même de $H_p^{r+1}(\widehat{K})$.

Démonstration. — Rappelons que le p -rang de $\widehat{K}$ est inférieur ou égal à r (2.1.2). Si l'inégalité est stricte, $H_p^{r+1}(\widehat{K})$ est nul et il n'y a rien à démontrer. Supposons le donc égal à r . Le morphisme déduit de la fonctorialité covariante en le corps correspond, d'après le lemme 2.2.5 et sa démonstration, au morphisme canonique

$$K/(\wp(K) + K_{>0}) \rightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0}),$$

où les choix de $K_{>0}$ et $\widehat{K}_{>0}$ se font relativement à une p -base commune. Il nous suffit donc de montrer que le morphisme composé

$$K \hookrightarrow \widehat{K} \twoheadrightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0})$$

est une surjection. On va montrer plus précisément que le morphisme canonique $K \rightarrow \widehat{K}/\wp(\widehat{K})$ est une surjection. Soit $\lambda \in \widehat{K}$ et considérons $\lambda_0 \in K$ tel que $v(\lambda - \lambda_0) > 0$. D'après le lemme ci-dessous, il existe $\alpha \in \widehat{K}$ tel que $\lambda - \lambda_0 = \wp(\alpha)$. Ainsi, $\lambda \equiv \lambda_0$ modulo $\wp(\widehat{K})$. □

Lemme 2.2.7. — *Pour tout anneau local A , complet de caractéristique $p > 0$, le morphisme $\wp : A \rightarrow A$, $a \mapsto a - a^p$, induit une surjection $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_A$.*

Démonstration. — Soit $a \in A$; l'identité $a = \wp(a) + a^p$ entraîne par récurrence l'égalité

$$a = \wp(a + a^p + \cdots + a^{p^n}) + a^{p^{n+1}}$$

pour tout $n \geq 0$. Pour $a \in \mathfrak{m}_A$, la suite $(a + a^p + \cdots + a^{p^n})_{n \geq 0}$ converge dans A vers un élément $b \in \mathfrak{m}_A$; d'après l'égalité ci-dessus on a alors $a = \wp(b)$. □

Remarque 2.2.8. — La conclusion du lemme 2.2.6 est vraie pour tous les groupes H_p^{i+1} et pas seulement pour $i = r$. Il suffit pour cela de montrer que $\Omega_{\widehat{K}}^i$ est engendré comme groupe abélien par Ω_K^i et les formes $\alpha \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_i}{b_i}$, où $\alpha \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$ (l'idéal maximal de l'anneau des entiers) et les b_j sont dans $\widehat{K}^\times$. Étant donné une forme $\beta \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_i}{x_i}$, $\beta, x_j \in \widehat{K}^\times$, on peut trouver des $y_j \in K$ tels que $v(x_j - y_j) > v(x_j)$ et $v(x_j - y_j) + v(\beta) > v(x_j)$. Posons $\alpha_j := \frac{x_j}{y_j} - 1$, de sorte que $x_j = y_j(\alpha_j + 1)$ et donc (pour chaque j)

$$\frac{dx_j}{x_j} = \frac{dy_j}{y_j} + \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1} \frac{d\alpha_j}{\alpha_j}.$$

L'hypothèse sur les valuations signifie que $\frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$ et $\beta \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$ appartiennent à $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$. Cela nous permet de remplacer les x_j par les y_j ; on conclut en approchant β comme ci-dessus.

(Cette démonstration ne fait pas usage du lemme 2.2.5.)

En toute dimension, on a le résultat d'*injectivité* suivant.

Proposition 2.2.9. — Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions K . Soient $\hat{A}$ son complété et $\hat{K}$ le corps des fractions de $\hat{A}$. Supposons les p -rangs de K et $\hat{K}$ égaux à un entier r . Le morphisme canonique

$$H_p^{r+1}(K) \rightarrow H_p^{r+1}(\hat{K})$$

est une injection.

La démonstration fait usage de la généralisation suivante du théorème d'approximation d'Artin (voir aussi [Swa98]).

Théorème 2.2.10 (Dorin Popescu, [Pop86], théorème 1.3). — Soit A un anneau local excellent hensélien. Pour tout système fini d'équations polynomiales à coefficients dans A , l'ensemble des A -points est dense, pour la topologie $\mathfrak{m}_A$ -adique, dans l'ensemble des $\hat{A}$ -points.

Démonstration de la proposition 2.2.9. — Soit $\{b_1, \dots, b_r\}$ une p -base de K ; c'est également une p -base de $\hat{K}$ (2.1.4). Quitte à les multiplier par une puissance p -ième convenable, on peut supposer les b_i dans A . Soient $K_{>0}$ et $\hat{K}_{>0}$ comme en 2.2.5, relativement à cette p -base commune. Il nous faut montrer que si un élément $\lambda \in K$ appartient à $\wp(\hat{K}) + \hat{K}_{>0}$, il appartient également à $\wp(K) + K_{>0}$. Écrivons

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} - \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)^p \right) + \sum_{\vartheta \neq 0} \left(\frac{\alpha_\vartheta}{\beta_\vartheta} \right)^p b^\vartheta,$$

où les α sont dans $\hat{A}$, les β dans $\hat{A} - \{0\}$, et ϑ est comme dans *loc. cit.* De façon équivalente, l'équation à coefficients dans A

$$\left(\prod_{\vartheta} Y_\vartheta \right)^p \lambda = \left(\prod_{\vartheta \neq 0} Y_\vartheta \right)^p \cdot (Y_0^{p-1} X_0 - X_0^p) + \sum_{\vartheta \neq 0} X_\vartheta^p \left(\prod_{\vartheta' \neq \vartheta} Y_{\vartheta'}^p \right) b^\vartheta$$

a pour solution

$$X_\vartheta = \alpha_\vartheta, Y_\vartheta = \beta_\vartheta,$$

où l'indice 0 correspond à l'application nulle $[1, r] \rightarrow [0, p-1]$.

D'après le théorème d'approximation ci-dessus, cette équation a également une solution dans A , dont les coordonnées Y peuvent être choisies non nulles par densité, de sorte que λ appartient bien à $\wp(K) + K_{>0}$. $\square$

Remarque 2.2.11. — Du fait que l'on peut définir un opérateur de Cartier inverse $C^{-1} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^i / d\Omega_A^{i-1}$ pour tout anneau A de caractéristique $p > 0$, on peut également déduire le résultat précédent (en tout degré) de l'énoncé 5.2.2 ci-dessous. Dans la démonstration de [Kat70], théorème 7.2, est en effet construit un morphisme de l'algèbre (strictement graduée commutative) des formes différentielles sur l'anneau A vers l'algèbre de cohomologie de de Rham de l'anneau A , caractérisée par la propriété d'envoyer $a \in A$ sur a^p et $d(a)$ sur la classe de $a^{p-1}d(a)$.

Corollaire 2.2.12. — Sous les hypothèses de 2.1.4, on a l'inégalité

$$\dim_p(K) \leq \dim_p(\hat{K}),$$

où p est la caractéristique du corps K .

Démonstration. — Si $[K : K^p] < [\hat{K} : \hat{K}^p]$, il n'y a rien à démontrer d'après l'encadrement (triv.). On peut donc supposer les p -rangs finis, égaux à un entier r . Il faut montrer que si $H_p^{r+1}(K') \neq 0$ pour une extension finie K' de K , il existe une extension finie $L/\hat{K}$ telle que $H_p^{r+1}(L) \neq 0$. D'après la proposition précédente, il suffit de considérer le corps des fractions du complété du normalisé de A dans K' . $\square$

(D'après le théorème 1.2, cette inégalité est en fait une égalité.)

Terminons par une propriété d'invariance, élémentaire mais cruciale, de la p -dimension.

Lemme 2.2.13. — Soient k un corps, k'/k une extension finie et p un nombre premier. Si $\dim_p(k)$ est fini, on a l'égalité

$$\dim_p(k) = \dim_p(k').$$

Démonstration. — Si p est inversible sur k , c'est [Ser94], chap. II, §4.1, prop. 10. Si $p = \text{car. } k$, on sait déjà (2.1.1) que les p -rangs sont égaux. Il en résulte que l'on a une inégalité : $\dim_p(k) \geq \dim_p(k')$. Supposons $r = p\text{-rang}(k)$ fini. Quitte à remplacer k par une extension finie et k' par une extension composée, on est ramené à montrer que si $H_p^{r+1}(k') = 0$, on a également $H_p^{r+1}(k) = 0$. Cela résulte de la surjectivité de la trace (2.2.3). $\square$

Remarque 2.2.14. — Observons que l'on peut se contenter de la construction de la trace dans le cas particulièrement simple des extensions finies étales pour démontrer ce lemme. Cela résulte comme précédemment de la surjectivité de la trace en degré maximal pour une extension finie étale et du fait élémentaire que pour toute extension finie k'/k de corps de p -rangs finis, et toute extension finie K de k , il existe une extension finie étale K'/K , où K' est isomorphe en tant que corps à une extension finie de k' . (On se ramène au cas où k'/k est $k(a^{1/p})/k$ et où $K = k$. Le Frobenius $k' \rightarrow k$ fait de k une extension finie de k' , de sorte que $K' = K = k$ convient.)

2.3. Le théorème de Katô. —

Théorème 2.3.1 (Kazuya Katô, [Kat82]). — Soit A un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K . On a l'égalité

$$\dim_p(K) = 1 + \dim_p(k).$$

Rappelons que l'hypothèse d'excellence signifie ici que l'extension $\text{Frac } \hat{A}/\text{Frac } A$ est séparable. Dans [Kat82], le théorème est démontré dans le cas particulier où A est complet. Le passage du cas complet au cas hensélien excellent se trouve dans [KK86], §3, théorème 1 (4). (Voir également §3.2, 5.2 ci-dessous.)

Le lecteur pourra également consulter avec profit l'exposé de J.-L. Colliot-Thélène [CT99] pour une démonstration du théorème ci-dessus dans le cas le plus difficile de la caractéristique mixte.

Voici maintenant un corollaire du théorème précédent, qui est l'analogue du (corollaire au) théorème de Tsen ([Ser94], chapitre II, §3.3 et §4.2).

Corollaire 2.3.2 (Kazuya Katô et Takako Kuzumaki, [KK86])

Soient K/k une extension de degré de transcendance N , et p un nombre premier. On a l'inégalité

$$\dim_p(K) \leq N + \dim_p(k).$$

(La démonstration du corollaire se fait par réduction au cas bien connu de la caractéristique nulle.)

Remarque 2.3.3. — Cette même méthode permet de déduire l'invariance de la p -dimension par extension finie du théorème de Katô.

Terminons cette section par une variante élémentaire mais explicite du théorème 2.3.1.

Proposition 2.3.4. — Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et de p -rang fini r . Le morphisme

$$H_p^{r+1}(k) \rightarrow H_p^{r+2}(k((t)))$$

envoyant la classe de ω sur la classe de $\omega \wedge \text{dlog}(t)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $\{b_1, \dots, b_r\}$ une p -base du corps k ; il résulte de 2.1.5 et 2.1.6 que $\{b_1, \dots, b_r, t\}$ est une p -base de $k((t))$. Considérons $k_{>0}$ et $k((t))_{>0}$ comme en 2.2.5 relativement à ces p -bases et rappelons que $k((t))_{>0}$ est un sous $k((t))^p$ -espace vectoriel de $k((t))$. Le morphisme $\omega \mapsto \omega \wedge \text{dlog}(t)$ de l'énoncé correspond au morphisme canonique

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \xrightarrow{(\star)} k((t))/(\wp(k((t))) + k((t))_{>0})$$

(où $\wp$ est le morphisme d'Artin-Schreier usuel) déduit de l'inclusion $k \hookrightarrow k((t))$ par passage au quotient.

Vérifions que $(\star)$ est une surjection. Puisque tout élément de $k((t))$ de valuation strictement positive est dans l'image de $\wp$ (cf. lemme 2.2.7 ci-dessus), il suffit de montrer que tout élément $a_{-n}t^{-n} + \dots + a_{-1}t^{-1} + a_0$ est congru modulo $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ à un élément de $k \subset k((t))$. On

peut supposer $a_0 = 0$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour chaque $a \in k$, l'élément at^{-n} appartient à $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$. Par construction, pour tout $a \in k$, tout $r \in \mathbf{Z}$ et tout $i \in [1, p-1]$, l'élément $(at^{pr}) \cdot t^i$ appartient à $k((t))_{>0}$ de sorte que le résultat est acquis pour n premier à p . Considérons maintenant le cas où n est un multiple de p , $n = rp$. Écrivons $a = a_0^p + a_{>0}$ où $a_0 \in k$ et $a_{>0} \in k_{>0}$. On peut alors décomposer at^{-rp} en :

$$\frac{a}{t^{rp}} = \left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p + \frac{a_{>0}}{t^{rp}}.$$

Le second terme, $\frac{a_{>0}}{t^{rp}}$, appartient à $k((t))_{>0}$; le premier terme est égal à $\frac{a_0}{t^r} - \wp\left(\frac{a_0}{t^r}\right)$. L'entier r étant strictement inférieur à rp , on peut déduire de l'hypothèse de récurrence que $\left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p$ appartient à $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$.

Vérifions maintenant que $(\star)$ est une injection. Soit $a \in k$ tel que $a \in \wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ et montrons qu'il appartient à $\wp(k) + k_{>0}$. Écrivons $a = \wp(b^- + b_0 + b^+) + b_{>0}$, où $b_0 \in k$, b^- (resp. b^+) est un polynôme en t^{-1} (resp. une série en t) sans terme constant, et $b_{>0} \in k((t))_{>0}$. Puisque $\wp(b^-)$ (resp. $\wp(b^+)$) est également un polynôme en t^{-1} (resp. une série en t), sans terme constant, et que $\wp(b_0)$ appartient à $\wp(k)$, il suffit de vérifier que le terme constant de $b_{>0}$ appartient à $k_{>0}$. Rappelons à cette fin que l'on a la décomposition

$$k((t))_{>0} = \left(\bigoplus_{i \in [1, p-1], \vartheta} k((t))^p b^\vartheta t^i \right) \oplus \left(\bigoplus_{\vartheta \neq 0} k((t))^p b^\vartheta \right),$$

où ϑ parcourt l'ensemble des fonctions $[1, r] \rightarrow [0, p-1]$. La première somme directe ne contribue pas au terme constant donc il suffit de vérifier que le terme constant d'un élément de $\bigoplus_{\vartheta \neq 0} k((t))^p b^\vartheta$ appartient à $k_{>0}$. C'est clair. □

3. Minoration de $\dim_p(K)$

Dans cette section, on démontre l'inégalité suivante, où A , K et k sont comme dans l'énoncé du théorème 1.2 :

$$(3.a) \quad \dim_p(K) \geq \dim(A) + \dim_p(k).$$

3.1. — Soit A^ν le normalisé de A dans son corps des fractions. L'anneau A étant excellent, il est également universellement japonais ([ÉGA 0_{IV} 23.1.1]), de sorte que A^ν est fini sur A . Ce dernier étant hensélien et A^ν étant intègre, l'anneau A^ν est local. Il est également hensélien et excellent.

Soit k^ν le corps résiduel de A^ν ; c'est une extension finie de k de sorte que d'après 2.2.13, il suffit de démontrer 3.a dans le cas particulier où A est *normal*.

Nous allons démontrer 3.a en procédant par récurrence sur la dimension de l'anneau A . Le cas de la dimension un est connu (2.3.1). Considérons donc A comme ci-dessus, normal excellent de dimension ≥ 2 et supposons 3.a démontré pour les anneaux de dimension moindre.

Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur un tel que $p \in \mathfrak{p}$, B le localisé $A_{\mathfrak{p}}$, de corps des fractions K , $\widehat{B}$ son complété et L le corps des fractions de $\widehat{B}$.

Deux cas se présentent.

3.2. Le cas d'inégale caractéristique (cf. [Sai86], §5). — Supposons K de caractéristique nulle. Puisque toute L -algèbre étale est induite par une K -algèbre étale ([SGA 4 x 2.2.1]), le morphisme $G_L \rightarrow G_K$ est une *injection*. Compte tenu de la décroissance de la dimension cohomologique par passage à un sous-groupe fermé ([Ser94], chap. I, §3.3, prop. 14), on a donc :

$$(\star\star) \quad \dim_p(K) = \mathrm{cd}_p(K) \geq \mathrm{cd}_p(L) = \dim_p(L).$$

Le corps L étant le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet (donc hensélien, excellent), on a de plus l'égalité

$$\mathrm{cd}_p(L) = \dim_p(L) = 1 + \dim_p(\kappa(B)),$$

où $\kappa(B)$ est le corps résiduel de B . Cela résulte du théorème **2.3.1** (dans le cas particulier d'un anneau de valuation discrète complet). On achève la démonstration, par récurrence, en remarquant que $\kappa(B)$ est le corps des fractions de l'anneau local intègre hensélien excellent $A/\mathfrak{p}$, de dimension $\dim(A) - 1$.

Remarque 3.2.1. — L'égalité $\mathrm{cd}_p(L) = 1 + \mathrm{cd}_p(\kappa(B))$ est également valable si $p \neq \mathrm{car.}(\kappa(B))$. Cela résulte de [Ser94], chap. II, §4.3, prop. 12, jointe à l'exercice 3 si $\mathrm{cd}_p(G_{\kappa(B)}) = +\infty$.

3.3. Le cas d'égale caractéristique. — Procédant comme ci-dessus, il nous faut démontrer l'analogie de $(\star\star)$ pour la p -dimension.

Lemme 3.3.1. — Soient K un corps muni d'une valuation discrète de rang 1, de caractéristique $p > 0$, et $\widehat{K}$ son complété. L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\dim_p(K) \geq \dim_p(\widehat{K}).$$

Démonstration. — Si K et $\widehat{K}$ n'ont pas le même p -rang, il n'y a rien à démontrer (cf. **2.1.2** et (triv.)) ; supposons donc qu'ils sont égaux à un entier r et qu'il existe une extension finie $L'/\widehat{K}$ telle que $H_p^{r+1}(L') \neq 0$. Il nous faut alors montrer qu'il existe une extension finie L/K telle que $H_p^{r+1}(L) \neq 0$. Soit k' le corps résiduel de L' ; c'est une extension finie du corps résiduel k des corps discrètement valués K et $\widehat{K}$. Il existe donc une extension finie L/K telle que $\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L = k'$: on se ramène immédiatement au cas où k'/k est monogène, qui est bien connu (cf. p. ex. [Ser68], chap. I, prop. 15 ; voir aussi [ÉGA 0_{III} 10.3.1-2]). En particulier, le complété $\widehat{L}$ de L est (abstraitemment) isomorphe à L' (tous deux isomorphes au corps des séries de Laurent $k'((t))$). D'après le lemme **2.2.6**, pour un tel corps L , le morphisme $H_p^{r+1}(L) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{L}) \simeq H_p^{r+1}(L') \neq 0$ est une surjection. Ainsi, $H_p^{r+1}(L) \neq 0$, comme escompté. $\square$

Remarque 3.4. — Bien que ce résultat ne soit pas utilisé par la suite, signalons que la minoration **3.a** est valable sans supposer que l'anneau local noethérien intègre A soit hensélien ou excellent, ni même que p soit la caractéristique résiduelle, à condition de remplacer $\dim_p$ par la p -dimension virtuelle $\dim_v$ des corps, c'est-à-dire la p -dimension d'extensions finies suffisamment grandes. (Rappelons que l'inégalité $\dim_p \neq \dim_v$ ne peut se produire que pour $p = 2$ et pour des corps formellement réels. De tels corps ne sont jamais isomorphes au corps des fractions d'un anneau intègre hensélien de corps résiduel de caractéristique $q > 0$. En effet, dans un tel anneau (hensélien), si $q \equiv 1 \pmod{4}$ (resp. $q \equiv 3 \pmod{4}$, $q = 2$), -1 est un carré (resp. une somme de deux carrés, de quatre carrés) et, *a fortiori*, dans son corps des fractions. Si $q = 2$, et A de caractéristique mixte, on remarquera en effet que d'une part 7 (comme tout autre entier positif) est une somme de quatre carrés et d'autre part que -7 (comme tout entier congru à 1 modulo 8) est un carré, de sorte que le quotient $-1 = \frac{7}{-7}$ est une somme de quatre carrés.) Esquissons la démonstration de **3.a** dans le cas plus général de cet alinéa. Si $\dim(A) > 0$, même si A n'est pas caténaire, il existe au moins un idéal premier $\wp$ de hauteur un tel que $A/\wp$ soit de dimension $\dim(A) - 1$. Si A est de caractéristique mixte $(0, p)$, on peut supposer que $p \in \wp$ car $\dim(A/\wp) = \dim(A) - 1$. D'après le théorème de Krull-Akizuki [Bourbaki, A.C., VII, §2, N°5] la normalisation de $A_\wp$ est un anneau de Dedekind semilocal dont les corps résiduels sont *finis* sur celui de $A_\wp$. On achève la démonstration comme ci-dessus car **2.3.1** et **3.2.1** sont vrais pour $\dim_v$ et parce que $\dim_v$ est invariant par extension finie. (Comparer avec [SGA 4 X 2.4].)

4. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'égale caractéristique

Dans cette section, on démontre par récurrence sur la dimension de l'anneau A l'inégalité suivante, où A , K et k sont comme dans **1.2**, et où l'on suppose de plus A de caractéristique $p > 0$:

$$(4.a) \quad \dim_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de **3.1** et **2.2.12** que l'on peut supposer A normal complet. (On utilise également le fait que le complété d'un anneau local excellent normal est normal ([ÉGA IV 7.6.1]).)

Notons d la dimension de A , k son corps résiduel, r le p -rang de k , que l'on peut supposer fini, et K le corps des fractions de A . Commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 4.1. — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$p\text{-rang}(K) = d + r.$$

Démonstration. — D'après le théorème de structure de Cohen [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 ii], il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ soit fini. D'après (2.1.1) ceci implique que $p\text{-rang } K = p\text{-rang } \text{Frac}(A_0)$. D'après 2.1.5, le terme de droite est égal à $d + r$. $\square$

Il nous faut donc montrer que si $\dim_p(k) = r$ (c'est-à-dire si $H_p^{r+1}(k') = 0$ pour toute extension finie k'/k), hypothèse que nous allons maintenant supposer satisfaite, on a également $H_p^{d+r+1}(K') = 0$ pour toute extension finie K'/K . Il suffit de montrer que $H_p^{d+r+1}(K) = 0$.

4.2. — Supposons dorénavant $d > 0$ (sans quoi l'énoncé à démontrer est trivial), et posons $n = d + r$. Considérons un élément de Ω_K^n , que l'on écrit $\frac{\omega}{f}$, où $\omega \in \Omega_A^n/\text{torsion}$ et $f \in \mathfrak{m}_A - \{0\}$. D'après le théorème de structure de Cohen-Gabber (7.1), il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[x_1, \dots, x_d]]$ tel que le morphisme $\pi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ soit fini et *génériquement étale*. Soit $f_0 = N_{X/X_0}(f) \in A_0$ la norme de l'élément f (cf. p. ex. [ÉGA II 6.4]). L'élément f divise f_0 : cela résulte par exemple de la formule classique pour la norme [Bourbaki, Algèbre, V, §8, N°3 prop. 4] et du fait que A est normal. On peut donc supposer, et l'on supposera, que l'élément f appartient à A_0 . Considérons le fermé R de $X_0 := \text{Spec}(A_0)$ au-dessus duquel le morphisme π est ramifié. Il existe un élément non nul $a \in A_0$ tel que R soit contenu dans le fermé $V(a)$. Enfin, quitte à remplacer a et f par af , on peut supposer $a = f$.

Rappelons le théorème de préparation, qui nous permettra de rendre le lieu de ramification fini, par projection, sur un schéma de dimension un de moins.

Théorème 4.3 (Théorème de préparation de Weierstraß, [Bourbaki, A.C., VII, §3, N°7-8])

Soient A un anneau local séparé complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et d un entier naturel.

- i. Soit ϱ un entier naturel et $f \in A[[\underline{X}, T]]$ ($\underline{X} = \{X_1, \dots, X_d\}$) une série entière ϱ -régulière relativement à T , c'est-à-dire congrue à $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^\varrho$ modulo $(\mathfrak{m}, \underline{X})$. Pour tout $g \in A[[\underline{X}, T]]$, il existe un unique couple $(q, r) \in A[[\underline{X}, T]] \times A[[\underline{X}]][[T]]$ tel que $g = qf + r$ et $\deg_T(r) < \varrho$.
- ii. Soit ϱ un entier naturel. Si $f \in A[[\underline{X}, T]]$ est ϱ -régulière relativement à T , il existe un unique polynôme $P = T^\varrho + \sum_{i < \varrho} p_i T^i$, où $p_i \in (\mathfrak{m}, \underline{X})A[[\underline{X}]]$, et une unité $u \in A[[\underline{X}, T]]^\times$ tels que $f = uP$.
- iii. Soit $f \in A[[\underline{X}, T]]$ non nulle modulo $\mathfrak{m}$. Il existe un entier naturel ϱ et un automorphisme $A[[T]]$ -linéaire c de $A[[\underline{X}, T]]$, tel que $c(X_i) = X_i + T^{N_i}$ ($N_i > 0$) et $c(f)$ soit ϱ -régulier.

Rappelons que si B est un anneau local complet noethérien, un polynôme $P \in B[X]$ est dit *distingué* s'il est de la forme $X^\varrho + \sum_{i < \varrho} b_i X^i$, où $b_i \in \mathfrak{m}_B$ et $\varrho \geq 0$.

D'après (iii) et (ii) ci-dessus, quitte à changer de coordonnées, on peut supposer f égal à un polynôme *distingué* de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]][[x_d]]$. En particulier il appartient à l'anneau $\widehat{A}_0 := k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$, hensélisé de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$ en l'origine.

Lemme 4.4. — Soient B un anneau local complet noethérien et $P \in B[X]$ un polynôme distingué.

- i. Le complété (P) -adique de $B\{X\}$ s'identifie à $B[[X]]$.
- ii. La paire $(\text{Spec}(B\{X\}), V(P))$ est hensélienne.

Démonstration. — Vérifions (i). Soient N un entier naturel et $Q = P^N$. Il résulte de **4.3** (i), que l'anneau quotient $B[[X]]/(Q)$ est isomorphe comme B -module à $B[X]/(X^{\deg(Q)})$ et en particulier fini sur B . Par fidèle platitude de $B[[X]]$ sur $B\{X\}$, $B\{X\}/(Q)$ est naturellement un *sous-anneau* de $B[[X]]/(Q)$. Il est donc lui-aussi fini sur B , donc complet, et finalement isomorphe à $B[[X]]/(Q)$. Le séparé-complété (P) -adique de $B\{X\}$ est donc isomorphe à celui de $B[[X]]$; ce dernier est isomorphe à $B[[X]]$ puisque $\deg(P) > 0$.

Vérifions (ii). Rappelons ([**Gab92**], déf. p. 59 et [**Cré67**], prop. 1) qu'une paire $(\mathrm{Spec}(C), V(I))$ est dite *hensélienne* si pour tout polynôme $f \in C[T]$, toute racine *simple* de f dans C/I se relève en une racine dans C . (L'idéal I est alors nécessairement contenu dans le radical de Jacobson de C .) On laisse le soin au lecteur de vérifier que pour tout anneau local hensélien C et tout idéal $I \subset \mathfrak{m}_C$, la paire $(\mathrm{Spec}(C), V(I))$ est hensélienne. On applique alors ce résultat à $C = B\{X\}$ et $I = (P)$. $\square$

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation suivant.

Théorème 4.5 (Renée Elkik, [Elk73], théorème 5). — Soient $(X = \mathrm{Spec}(A), Y = V(I))$ une paire hensélienne avec A noethérien, et U le sous-schéma ouvert complémentaire de Y dans X . Notons $X_{\widehat{Y}}$ le complété de X le long de Y , $\widehat{Y}$ le fermé correspondant à Y et $\widehat{U}$ son complémentaire dans $X_{\widehat{Y}}$. Le foncteur $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{Y}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des X -schémas finis, étales sur U , et la catégorie des $X_{\widehat{Y}}$ -schémas finis, étales sur $\widehat{U}$.

Reprenons les notations en vigueur après le théorème **4.3**. Le fermé $V(f)$, contenant le lieu de ramification, étant défini par une équation polynomiale unitaire à coefficients dans $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$, il résulte du lemme **4.4** et du théorème **4.5** que l'on peut algébriser le morphisme $\pi : \mathrm{Spec}(A) \rightarrow \mathrm{Spec}(A_0)$. En d'autres termes, on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X = \mathrm{Spec}(A) & \longrightarrow & \widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}) \\ \downarrow \pi & \square & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0 = \mathrm{Spec}(A_0) & \longrightarrow & \widetilde{X}_0 = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}_0) \end{array}$$

où, rappelons-le, $\widetilde{A}_0$ est $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$.

D'après le lemme **4.4**, appliqué à $B = k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$ et $P = f$, l'anneau complet A , fini sur A_0 , s'identifie au complété (f) -adique de $\widetilde{A}$. On peut donc décomposer $\frac{\omega}{f} \in \Omega_K^n = \Omega_K^{d+r}$ en

$$\frac{\omega}{f} = \frac{\widetilde{\omega}}{f} + \omega'$$

où $\widetilde{\omega} \in \Omega_{\widetilde{A}}^n/\text{torsion}$ et $\omega' \in f\Omega_A^n/\text{torsion} \subset \mathfrak{m}_A\Omega_A^n/\text{torsion}$.

Le corps des fractions $\widetilde{K}$ de $\widetilde{A}$ est de degré de transcendance un sur le corps des fractions L de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$. Par hypothèse de récurrence sur la dimension, et compte tenu du fait que l'on a supposé $\dim_p(k) = p\text{-rang}(k) = r$, on a

$$\dim_p(L) \leq (d-1) + \dim_p(k) = d-1+r.$$

Enfin, d'après le corollaire au théorème de Katô (**2.3.2**), on a

$$\dim_p(\widetilde{K}) \leq \dim_p(L) + 1.$$

Finalement, $\dim_p(\widetilde{K}) \leq d+r$. Ainsi, la classe de $\frac{\widetilde{\omega}}{f}$ dans le quotient (**2.2.1**) $H_p^{d+r+1}(\widetilde{K})$ de Ω_K^{d+r} est nulle. *A fortiori* son image dans $H_p^{d+r+1}(K)$ l'est également.

La forme ω' appartient à $\mathfrak{m}_A\Omega_A^n/\text{torsion} \subset \Omega_K^n$; elle peut donc s'écrire sous la forme $\sum_i f_i \omega_i$, où $f_i \in \mathfrak{m}_A$ et ω_i est une forme différentielle *logarithmique* dans Ω_K^{d+r} . Par définition de l'opérateur de Cartier inverse (**2.2.1**), et du fait que les f_i appartiennent à l'image du morphisme d'Artin-Schreier (**2.2.7**), l'image de ω' dans le quotient $\Omega_K^{d+r}/d\Omega_K^{d+r-1}$ appartient à l'image de $\wp$. La classe de ω' est donc nulle dans $H_p^{d+r+1}(K)$. CQFD.

5. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'inégale caractéristique

5.1. — Dans cette section, on démontre l'inégalité ci-dessous par récurrence sur la dimension de l'anneau A , satisfaisant aux conditions de **1.2** et supposé de caractéristique nulle.

$$(5.a) \quad \mathrm{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de **3.1** que l'on peut supposer A normal.

5.2. Réduction au cas complet. —

Lemme 5.2.1. — *Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions K . Soient $\widehat{A}$ son complété et $\widehat{K}$ son corps des fractions. Il existe un ensemble filtrant de sous- K -algèbres de type fini $(B_i)_{i \in I}$ de $\widehat{K}$ tel que $\widehat{K} = \mathrm{colim} B_i$ et chaque morphisme $\mathrm{Spec}(B_i) \rightarrow \mathrm{Spec}(K)$ ait une section.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que pour toute sous- K -algèbre de type fini B de $\widehat{K}$, le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(K)$ a une section. L'inclusion K -linéaire $B \rightarrow \widehat{K}$ correspond à un $\widehat{K}$ -point d'un système d'équations convenables $f_1, \dots, f_r$ (définissant B sur K) que l'on peut supposer à coefficients dans A . Quitte à chasser comme en **2.2.9** (démonstration) les dénominateurs, on peut appliquer le théorème de Popescu (**2.2.10**) pour obtenir un K -point, c'est-à-dire une section du morphisme $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(K)$. $\square$

Corollaire 5.2.2. — *Soient A comme en 5.2.1 et $F : (A\text{-algèbres}) \rightarrow \mathrm{Ens}$ un foncteur localement de présentation finie (c'est-à-dire commutant aux colimites filtrantes). Le morphisme canonique $F(K) \rightarrow F(\widehat{K})$ est une injection.*

Soient A comme dans **5.1** et M un G_K -module discret de p -torsion. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau étale sur $\mathrm{Spec}(K)$ correspondant. On le prolonge par zéro en un faisceau abélien $\mathcal{G}$ sur $\mathrm{Spec}(A)$. D'après [SGA 4 VII 5.8], pour tout entier i , le foncteur $B \mapsto H^i(\mathrm{Spec}(B)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathcal{G})$ de $(A\text{-algèbres})$ dans Ens est localement de présentation finie. Il résulte donc du lemme précédent que l'on a une injection

$$H^i(G_K, M) = H^i(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathcal{G}) \hookrightarrow H^i(\mathrm{Spec}(\widehat{K})_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathcal{G}) = H^i(G_{\widehat{K}}, M).$$

Ainsi, si $i > \mathrm{cd}_p(\widehat{K})$, $H^i(G_K, M) = 0$; on a donc $\mathrm{cd}_p(K) \leq \mathrm{cd}_p(\widehat{K})$, ce qui nous permet de supposer dorénavant A complet et normal.

5.3. — En plus des hypothèses en vigueur dans **5.1**, on suppose maintenant A complet et normal.

Pour pouvoir exploiter le théorème de structure de Cohen-Gabber (**7.1**), qui s'appuie sur une hypothèse de réduction, il faut préalablement utiliser le théorème suivant.

Théorème 5.3.1 (Helmut Epp, [Epp73], théorème 1.9 et §2)

Soit $T \rightarrow S$ un morphisme local dominant de traits, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons κ_S et κ_T leurs corps résiduels respectifs. Supposons S complet, κ_S parfait et le sous-corps parfait maximal de κ_T algébrique sur κ_S . Il existe une extension finie de traits $S' \rightarrow S$ telle que le produit fibré réduit normalisé

$$T' := (T \times_S S')_{\mathrm{\acute{e}d}}^\nu$$

ait une fibre spéciale réduite au-dessus de S' .

(Rappelons que l'on appelle *trait* le spectre d'un anneau de valuation discrète.)

Remarque 5.3.2. — En caractéristique mixte, on vérifie immédiatement que le produit fibré $T \times_S S'$ est réduit.

5.3.3. — Il est immédiat de vérifier que si $S' \rightarrow S$ est comme dans l'énoncé du théorème, pour tout morphisme dominant de traits $S'' \rightarrow S'$, le schéma $T' \times_{S'} S''$ est une union disjointe de traits, à fibre spéciale sur S'' réduite. Si l'on interprète la conclusion comme la lissité formelle du morphisme $T' \rightarrow S'$ ([ÉGA 0_{IV} 19.3.1 et 19.7.1]), l'observation précédente devient un cas particulier de la stabilité par changement de base de cette notion ([ÉGA 0_{IV} 19.3.5 (iii)]).

5.3.4. — Commençons par vérifier que l'hypothèse sur les corps résiduels est satisfaite dans de nombreux cas. Nous dirons qu'une extension de corps K/k a la *propriété de Epp* si tout élément du sous-corps parfait maximal de K est algébrique séparable sur k . Le sous-corps parfait maximal de K n'est autre que $K^{p^\infty} := \bigcap_{n \geq 0} K^{p^n}$, où p est l'exposant caractéristique de K .

Lemme 5.3.4.1. — *Pour tout corps K de caractéristique $p > 0$, on a, dans une clôture séparable $K^{\text{sép}}$ de K ,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sép}} = (K^{\text{sép}})^{p^\infty}.$$

Démonstration. — L'inclusion $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ est évidente : K^{p^∞} est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$, l'est également. Comme cette dernière est contenue dans $K^{\text{sép}}$, elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$.

Réciproquement, considérons $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$, et notons, pour chaque entier $n \geq 0$, x_n sa racine p^n -ième dans $K^{\text{sép}}$ et f_n son polynôme minimal par rapport à K . Compte tenu d'une part de l'expression de f_n en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de x_n et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élévation à la puissance p^n -ième, on a l'égalité $f_0 = f_n^{(p^n)}$, où $f_n^{(p^n)}$ est le polynôme obtenu à partir de f_n en élevant les coefficients à la puissance p^n -ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal f_0 de x appartiennent à K^{p^∞} . $\square$

Proposition 5.3.4.2 (Cf. [Epp73], §0.4). —

Soit k un corps d'exposant caractéristique p .

- i. *Soient L/K et K/k ayant la propriété de Epp. Alors, L/k a la propriété de Epp.*
- ii. *Toute extension finie de k a la propriété de Epp.*
- iii. *Si $p > 1$, pour tout entier naturel d , l'extension $(\text{Frac } k[[x_1, \dots, x_d]])/k$ a la propriété de Epp.*
- iv. *Si $p > 1$, pour toute inclusion $k \subset A$, où A est un anneau local complet noethérien intègre, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, l'extension $(\text{Frac } A)/k$ a la propriété de Epp.*

Démonstration. — Supposons immédiatement $p > 1$ sans quoi (i) et (ii) sont triviaux.

(i) Par hypothèse on a dans une clôture séparable de L l'inclusion $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$. Comme le corps L^{p^∞} est parfait, on en déduit que $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset k^{\text{sép}}$, où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle K/k . Si elle est de hauteur $\leq r$, on a $K^{p^r} \subset k$ et en particulier $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sép}}$.

(iii) Soit $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$ et K son corps des fractions. Montrons que $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$. Comme K est contenu dans $k((x_1, \dots, x_{d-1}))(x_d)$, on se ramène par récurrence au cas où $d = 1$. Tout élément non nul de $k((t))^{p^\infty}$ a une valuation infiniment p -divisible donc nulle, de sorte que $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$ est contenu dans $k[[t]]^\times$ et finalement dans k^{p^∞} par un calcul immédiat.

(iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen. $\square$

5.3.5. — Soit $k_0 = k^{p^\infty}$ le sous-corps parfait maximal du corps résiduel k de A et notons $W_0 = W(k_0)$ l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen que l'on a un morphisme $X := \text{Spec}(A) \rightarrow S_0 := \text{Spec}(W_0)$ relevant l'inclusion $k_0 \hookrightarrow k$ ([ÉGA 0_{IV} 19.8.6]).

Pour tout point maximal $\mathfrak{p}$ de la fibre spéciale X_p , l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$ a pour corps résiduel $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, où $A/\mathfrak{p}$ est un anneau complet intègre noethérien de corps résiduel k . Par complétude, il existe une section $k \hookrightarrow A/\mathfrak{p}$ à la surjection canonique $A/\mathfrak{p} \twoheadrightarrow k$. D'après 5.3.4.2 (iv), l'extension $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k$ correspondante a la propriété de Epp. Puisqu'il en est de même de k/k_0 , il résulte de 5.3.4.2 (i) que l'extension $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$ a également la propriété de Epp. On peut donc appliquer pour chaque idéal $\mathfrak{p}$ comme ci-dessus le théorème de Epp (5.3.1) à l'extension $A_{\mathfrak{p}}/W_0$: il existe une extension finie de traits $W_{0\mathfrak{p}}/W_0$ telle que $(A_{\mathfrak{p}} \otimes_{W_0} W_{0\mathfrak{p}})^\nu$ soit formellement lisse sur $W_{0\mathfrak{p}}$. Les idéaux $\mathfrak{p}$ étant en nombre fini, il existe une extension finie de traits W'_0/W_0 ,

dominant les $W_{0\mathfrak{p}}$. D'après 5.3.3 et par commutation de la normalisation à la localisation, il existe donc un changement de base fini $S'_0 = \text{Spec}(W'_0) \rightarrow S_0$ tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé $X' := (X \times_{S_0} S'_0)^\nu = \text{Spec}(A')$ soit réduite en les points de X' s'envoyant sur un point $\mathfrak{p}$ de X comme ci-dessus. D'après le théorème de Cohen-Seidenberg, l'ensemble de ces points de X' coïncide avec l'ensemble des points maximaux de la fibre spéciale de $X' \rightarrow S'_0$.

Le lemme suivant nous permet d'en déduire que cette fibre spéciale est réduite.

Lemme 5.3.5.1. — *Soit X un schéma noethérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.*

5.3.6. — Notons k'_0 le corps résiduel de W'_0 , fini sur k_0 , ϖ' une uniformisante de W'_0 , et considérons une composante connexe $X'' = \text{Spec}(A'')$ de X' . Soit k'' son corps résiduel, fini sur k . L'inclusion $k'_0 \hookrightarrow k''$ déduite du morphisme $X'' \rightarrow S'_0$ est formellement lisse, car k'_0 est parfait, donc se relève d'après [ÉGA 0_{IV} 19.7. 1 et 2] en un morphisme *formellement lisse* $W'_0 \rightarrow I''$ où I'' est un anneau de valuation discrète complet. L'anneau A''/ϖ' étant réduit et équidimensionnel de dimension $d-1$ de corps résiduel k'' , il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (7.1), un relèvement k'_0 -linéaire $k'' \hookrightarrow A''/\varpi'$ et des éléments $x_1, \dots, x_{d-1}$ dans l'idéal maximal de A''/ϖ' tels que le morphisme induit $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$, envoyant l'indéterminée t_i sur x_i , soit fini, *génériquement étale* (c'est-à-dire : le morphisme $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$ induit un morphisme étale entre un ouvert dense de $\text{Spec}(A''/\varpi')$ et un ouvert de $\text{Spec}(k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$).

Par lissité formelle de $W'_0 \rightarrow I''$, le morphisme composé $I'' \rightarrow k'' \rightarrow A''/\varpi'$ se relève en un W'_0 -morphisme $I'' \rightarrow A''$. En relevant les x_i dans A'' , cela nous permet de construire un morphisme $A''_0 := I''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''$, fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale.

Notons K'' le corps des fractions de A'' . Par construction, il est fini sur K .

5.4. — Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.4.1. — *Les groupes de cohomologie $H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour tout $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.*

Remarquons que le morphisme $A \rightarrow A''$ étant fini, $\dim(A) = \dim(A'')$ et $\dim_p(k) = \dim_p(k'')$ (2.2.13).

Soit i comme ci-dessus et considérons une classe $c \in H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$. Nous allons commencer par montrer que c s'étend à un grand ouvert.

Lemme 5.4.2. — *Il existe un ouvert $U \subset X''$ contenant les points maximaux de la fibre spéciale et une classe $c_U \in H^i(U_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ s'envoyant sur c par restriction à $\text{Spec}(K'')$.*

Démonstration du lemme. — Soit $\mathfrak{p}$ un point maximal de la fibre spéciale $\text{Spec}(A''/\varpi')$. L'anneau A'' étant normal, le localisé $A''_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. Soit $K''^h_{\mathfrak{p}}$ le corps des fractions de l'hensélisé de $A''_{\mathfrak{p}}$ et $c_{\mathfrak{p}}$ la restriction de c à $\text{Spec}(K''^h_{\mathfrak{p}})$. Il résulte du théorème de Katô (2.3.1) que l'on a $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) = 1 + \dim_p(\text{Frac}(A''/\mathfrak{p}))$. D'après 4.a, appliqué à l'anneau intègre hensélien $A''/\mathfrak{p}$ de corps résiduel k'' , on a donc $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(A'') + \dim_p(k'') < i$, de sorte que $c_{\mathfrak{p}} = 0$. Joint au lemme ci-dessous, cela montre que la classe c appartient à l'image du morphisme de restriction $H^i(\text{Spec}(A''_{\mathfrak{p}})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$. Il existe donc, pour chaque $\mathfrak{p}$ comme ci-dessus, un ouvert $U_{\mathfrak{p}}$ de X'' contenant $\mathfrak{p}$ et une classe $C_{\mathfrak{p}}$ sur $U_{\mathfrak{p}}$ induisant c sur $\text{Spec}(K)$. Quitte à rétrécir ces ouverts, on peut utiliser inductivement la suite exacte de Mayer-Vietoris pour recoller ces $C_{\mathfrak{p}}$ en une classe C_U sur $U = \bigcup U_{\mathfrak{p}}$. □

Lemme 5.4.3. — *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K . Considérons A^h son hensélisé, K^h le corps des fractions de A^h et $c \in H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$, où $(n, i) \in \mathbf{N}^2$. Si l'image de c dans $H^i(\text{Spec}(K^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$ est nulle, la classe c appartient à l'image du morphisme de restriction $H^i(\text{Spec}(A)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$.*

Démonstration. — Le morphisme $\mathrm{Spec}(A^h) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ induisant un isomorphisme sur les localisations strictes et un isomorphisme au-dessus du point fermé s de $\mathrm{Spec}(A)$, on voit facilement d'après [SGA 4 v 6.4 et 6.5] et [SGA 4 VIII 5.2] que le morphisme d'adjonction $\mathrm{R}\Gamma_{\{s\}}(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\{s^h\}}(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n)$ (où s^h est le point fermé de $\mathrm{Spec}(A^h)$) est un isomorphisme. Le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\{s\}}^{i+1}(\mathrm{Spec}(A)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{isom.} \\ \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\{s^h\}}^{i+1}(\mathrm{Spec}(A^h)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

permet alors de conclure. $\square$

Revenons à la démonstration de 5.4.1. On peut supposer $d \geq 2$, sans quoi le résultat est déjà connu (2.3.1, pour $d = 1$). Notons $\pi : X'' = \mathrm{Spec}(A'') \rightarrow X_0'' = \mathrm{Spec}(A_0'')$ le morphisme considéré en 5.3.6. Il est fini et *étale* au-dessus du complémentaire d'un fermé F_π de X_0'' ne contenant pas la fibre spéciale du morphisme $X_0'' \rightarrow S_0' = \mathrm{Spec}(W_0')$. Notons F_c le fermé $\pi(X'' - U) \subset X_0''$, où U est comme en 5.4.2, et posons $F := F_\pi \cup F_c$. Par hypothèse, F est contenu dans le lieu d'annulation d'une fonction non inversible $f \in A_0''$ telle que $f \notin (\varpi')$. Ainsi, d'après 4.3 (ii) et (i) (appliqué à l'anneau de coefficients I'' et $\mathfrak{m} = (\varpi')$), on peut supposer que f appartient à $I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]] [t_{d-1}]$ et est *unitaire* en t_{d-1} , *distingué*.

Notons $\widetilde{A}_0'' = I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]] \{t_{d-1}\}$. D'après le lemme 4.4, la paire $(\widetilde{A}_0'', (f))$ est hensélienne et le complété (f) -adique de $\widetilde{A}_0''$ est A_0'' . Le morphisme $\mathrm{Spec}(A'') \rightarrow \mathrm{Spec}(A_0'')$ étant fini, étale au-dessus de $D(f) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_0'')$, il résulte du théorème d'Elkik 4.5 qu'il s'algébrique. En d'autres termes, il existe un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'' = \mathrm{Spec}(A'') & \longrightarrow & \widetilde{X}'' = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}'') \\ \downarrow \pi & \square & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0'' = \mathrm{Spec}(A_0'') & \longrightarrow & \widetilde{X}_0'' = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}_0'') \end{array}$$

La paire $(\widetilde{X}'', V(f))$ est hensélienne, car $(\widetilde{X}_0'', V(f))$ l'est, de sorte qu'il résulte du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([Fuj95], 6.6.4) que le morphisme

$$\mathrm{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(X'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$$

est un *isomorphisme*. Ainsi, la classe $c \in \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$, qui a été préalablement étendue à $X'' - V(f)$, provient, par restriction, d'un élément de $\mathrm{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$. Soient $\widetilde{K}''$ le corps des fonctions rationnelles du schéma intègre $\widetilde{X}''$ et L le corps des fractions de l'anneau $I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$. L'extension $\widetilde{K}''/L$ est de degré de transcendance un de sorte que $\mathrm{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq 1 + \mathrm{cd}_p(L)$ (théorème de Grothendieck, cf. [Ser94], chap. I, §4.2, prop. 11). D'après l'hypothèse de récurrence, on sait d'autre part que $\mathrm{cd}_p(L) \leq (\dim(A'') - 1) + \dim_p(k'')$. Finalement, puisque $\dim(A) = \dim(A'')$ et $\dim_p(k) = \dim_p(k'')$, on a

$$\mathrm{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

La classe de cohomologie c , qui appartient à l'image de $\mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(\widetilde{K}'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K'')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$ est nulle. (Rappelons que $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.)

Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.1.

5.5. — Soient K_0 (resp. K_0') le corps des fonctions de S_0 (resp. S_0'). Le corps K'' du paragraphe précédent étant l'un quelconque des facteurs de la K -algèbre réduite $K \otimes_{K_0} K_0'$, il résulte de 5.4.1 que les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} K_0')_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.

Corollaire 5.5.1. — Soit $\overline{K_0}$ une clôture séparable de K_0 . Les groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} \overline{K_0})_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.

Démonstration. — Soit en effet $\widetilde{W}/W'_0$ une extension finie. Il résulte immédiatement de **5.3.3**, et du lemme **5.3.5.1** et du critère de Serre que la fibre spéciale du morphisme $\mathrm{Spec}(A' \otimes_{W'_0} \widetilde{W}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\widetilde{W})$ est réduite et le schéma $\mathrm{Spec}(A' \otimes_{W'_0} \widetilde{W})$ normal, de corps résiduels en ses point fermés finis sur k . On peut donc procéder comme en **5.3.6** et **5.4** en remplaçant $\mathrm{Spec}(A'')$ par une composante connexe de $\mathrm{Spec}(A' \otimes_{W'_0} \widetilde{W})$. Ainsi, d'après **5.4.1**, on a

$$H^i(\mathrm{Spec}(K \otimes_{K_0} \mathrm{Frac}(\widetilde{W}))_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) = 0$$

pour tout $i > \dim(A) + \dim_p(k)$. On passe alors à la limite. $\square$

Proposition 5.5.2. — Soient A , K , k et p comme dans l'énoncé du théorème **1.2**. Supposons A normal, complet de caractéristique mixte. On a alors l'inégalité :

$$\mathrm{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k) + 2.$$

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

Lemme 5.5.3. — Soient K un corps, N un entier naturel et p un nombre premier. Supposons que pour toute extension finie séparable L de K on ait $H^{N+1}(\mathrm{Spec}(L)_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbf{Z}/p) = 0$. Alors, $\mathrm{cd}_p(K) \leq N$.

Démonstration du lemme. — Soient $\overline{K}$ une clôture séparable de K et H un p -Sylow de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) =: G_K$. On a l'égalité $\mathrm{cd}_p(G_K) = \mathrm{cd}_p(H)$ ([Ser94], chap. I, §3.3, cor. 1). Puisque que H est un p -groupe, on a $\mathrm{cd}_p(H) \leq N$ si et seulement si $H^{N+1}(H, \mathbf{Z}/p) = 0$ (*op. cit.*, §4, prop. 21). Or, le groupe $H^{N+1}(H, \mathbf{Z}/p) = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{N+1}(\overline{K}^H, \mathbf{Z}/p)$ est une colimite de groupes $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{N+1}(L, \mathbf{Z}/p)$ avec L/K finie étale. Sous nos hypothèses, les termes de cette colimite sont tous nuls de sorte que $\mathrm{cd}_p(H) \leq N$ comme escompté. $\square$

Démonstration de la proposition. — Rappelons que le corps K_0 est un corps local à corps résiduel parfait de sorte que $\mathrm{cd}_p(K_0) \leq 2$ (*op. cit.*, chap. II, 4.3). Cette observation, jointe au résultat d'annulation **5.5.1**, permet de déduire de la suite spectrale

$$E_2^{\alpha, \beta} = H^\alpha(G_{K_0}, H_{\mathrm{\acute{e}t}}^\beta(K \otimes_{K_0} \overline{K_0}, \mathbf{Z}/p)) \Rightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{\alpha+\beta}(K, \mathbf{Z}/p)$$

l'annulation des groupes $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(K, \mathbf{Z}/p)$ pour $i > \dim(A) + \dim_p(k) + 2$. Ceci étant également valable pour les extensions finies de K , on peut utiliser le lemme ci-dessus pour conclure. $\square$

5.6. Fin de la démonstration. — Fixons d et r deux entiers naturels et considérons le plus petit entier naturel N tel que pour tout A comme en **5.5.2**, de dimension d et de corps résiduel de p -dimension r , on ait $\mathrm{cd}_p(\mathrm{Frac} A) \leq N$. On a vu ci-dessus qu'un tel entier N existe (et est inférieur ou égal à $d + r + 2$). Si A est un anneau intègre tel que $\mathrm{cd}_p(\mathrm{Frac} A) = N$, il existe d'après le lemme **5.5.3** une extension finie L de $\mathrm{Frac} A$ telle que $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(L, \mathbf{Z}/p) \neq 0$. Quitte à normaliser A dans L , on peut donc supposer qu'il existe un anneau A comme ci-dessus, de corps des fractions K tel que $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathbf{Z}/p) \neq 0$. Supposons par l'absurde $N > d + r$. D'après les résultats des paragraphes **5.3.5**, **5.3.6** et la proposition **5.4.1**, il existe une extension finie L/K telle que $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(L, \mathbf{Z}/p) = 0$. Ce groupe est isomorphe à $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathrm{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p))$. La surjection canonique $\mathrm{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/p$ de modules galoisiens (donnée par la trace) induit ici, puisqu'il n'y a pas de cohomologie en degré $\geq N + 1$, une surjection

$$0 = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(L, \mathbf{Z}/p) \twoheadrightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^N(K, \mathbf{Z}/p)$$

sur les groupes de cohomologie. Contradiction.

6. Le cas d'un ouvert de $A[p^{-1}]$

Dans cette section, on démontre le théorème suivant.

Théorème 6.1. — Soit A un anneau hensélien excellent intègre de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K de caractéristique nulle. Alors, pour tout ouvert non vide affine $U \subset \mathrm{Spec}(A[p^{-1}])$, on a :

$$\dim.\mathrm{coh}_p(U_{\mathrm{\acute{e}t}}) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

Rappelons que pour tout topos T on note $\dim.\text{coh.}_p(T)$ le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que $H^n(T, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau de p -torsion $\mathcal{F}$ et tout entier $n > d$ (cf. [SGA 4 x §1] et [SGA 4 ix 1.1]).

On majore $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$ au paragraphe 6.3 en procédant comme plus haut. Pour minorer $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$, on se ramène au cas où U est le point générique par une astuce de globalisation d'une classe de cohomologie après un revêtement ramifié de degré 2 (cf. 6.2.1).

6.2. Minoration. — Soient A, k et K comme en 6.1 et considérons un entier $r > 0$ inférieur ou égal à $\dim(A) + \dim_p(k) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. On peut supposer A normal car d'une part A est japonais et d'autre part, pour tout morphisme fini $A \rightarrow A'$, si $U' = U \otimes_A A'$, on a $\dim.\text{coh.}_p(U') \leq \dim.\text{coh.}_p(U)$. Soit ξ un point maximal de $V(p) \subset \text{Spec}(A)$. Notons K_ξ^h le corps des fractions de l'hensélisé de l'anneau de valuation discrète A_ξ . D'après le théorème de Katô 2.3.1, $\dim_p(K_\xi^h) = 1 + \dim_p(\kappa(A_\xi))$, où $\kappa(A_\xi)$ est le corps résiduel de l'anneau de valuation discrète. C'est aussi le corps des fractions d'un anneau local hensélien intègre de dimension $\dim(A) - 1$ et de corps résiduel k . Utilisant le théorème 1.2, on en tire $\dim_p(K_\xi^h) = 1 + (\dim(A) - 1 + \dim_p(k)) \geq r$. De l'égalité $\text{cd}_p(K_\xi^h) = \text{cd}_p(K_\xi^h(\mu_p))$ (cf. p. ex. [Ser94], chap. II, §4.1, prop. 10' et 3.4) et du lemme 5.5.3, on déduit l'existence d'une extension finie K'/K_ξ^h telle que $\mu_p \subset K'$ et $H_{\text{ét}}^r(K', \mathbf{Z}/p) \neq 0$. L'extension (séparable) K'/K_ξ^h peut être définie par un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans K_ξ^h . Par unicité de l'extension de la norme de K_ξ^h à sa clôture séparable, le lemme de Krasner est applicable et l'on peut donc approcher les coefficients de ce polynôme par des éléments de K de sorte que l'extension K'/K_ξ^h soit définie sur K . Quitte à remplacer A par sa normalisation dans cette extension, on peut donc supposer que $H_{\text{ét}}^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r}) \neq 0$ et $\mu_p \subset K_\xi^h$. D'après les résultats de K. Katô ([Kat82], th. 1 ou [CT99], §4), ce groupe est engendré par les *symboles* ; en particulier, il existe des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in (K_\xi^h)^\times$ tels que la classe

$$c = \chi_{\varphi_1} \cup \dots \cup \chi_{\varphi_r} \in H_{\text{ét}}^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r})$$

soit non nulle. Ci-dessus, χ_{φ_i} est l'image de φ_i par le composé $(K_\xi^h)^\times \rightarrow (K_\xi^h)^\times / (K_\xi^h)^{\times p} \rightarrow H_{\text{ét}}^1(K_\xi^h, \mu_p)$.

Remarquons que l'anneau A_ξ^h étant hensélien, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$(\star) \quad 1 + \mathfrak{m}_\xi^N \subset (1 + \mathfrak{m}_\xi)^p$$

dans cet anneau. Il en résulte immédiatement que l'on peut approcher les φ_i par des éléments de K sans changer les χ_{φ_i} .

On va montrer dans la proposition suivante qu'il existe une classe de cohomologie dans $H_{\text{ét}}^r(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathbf{Z}/p$ -faisceau convenable, *non nulle en restriction au corps des fractions*. La minoration désirée, pour tout ouvert non vide $U \hookrightarrow \text{Spec}(A[p^{-1}])$ (affine ou non), s'en déduit immédiatement.

Proposition 6.2.1 ([Gab06]). — Soient A, ξ et c comme ci-dessus. Pour tout voisinage ouvert $W \subset \text{Spec}(A)$ de ξ , il existe un morphisme surjectif, fini et plat de rang 2, $\pi : U' \rightarrow U := \text{Spec}(A[p^{-1}])$, étale et décomposé sur $U_\xi^h := \text{Spec}(K_\xi^h)$, satisfaisant la propriété suivante : si l'on note j' l'immersion ouverte $(W \cap U)' := \pi^{-1}(W \cap U) \hookrightarrow U'$, il existe une classe $c' \in H_{\text{ét}}^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r})$ dont la restriction à

$$U' \times_U U_\xi^h \simeq U_\xi^h \coprod U_\xi^h,$$

soit $(c, -c)$.

Rappelons que si $j_{UX} : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, on note $j_{UX!}$ le foncteur « prolongement par zéro » sur les faisceaux étales abéliens. On a un morphisme d'adjonction canonique $j_{UX!} j_{UX}^* \rightarrow \text{Id}$, induisant un isomorphisme en restriction sur U . Il en résulte immédiatement que si $W_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow U$ est une chaîne d'immersions ouvertes, on a un morphisme canonique $j_{W_0 U!} j_{W_0 U}^* \rightarrow j_{W U!} j_{W U}^*$ induisant un isomorphisme sur W_0 . Cela permet d'observer que si la conclusion de la proposition est vraie sur un ouvert W_0 , elle l'est sur tout ouvert W comme dans l'énoncé le contenant.

Vérifions maintenant qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas particulier où $r = 1$. Quitte à rétrécir W — ce qui est loisible d'après ce qui précède — on peut supposer les fonctions φ_i inversibles sur $W \cap U$. Supposons la proposition démontrée pour $r = 1$ et appliquons-la à la classe $c_1 = \chi_{\varphi_1}$; on obtient donc une classe c'_1 sur un U' , comme dans l'énoncé. Le produit (cf. p. ex. [SGA 4 $\frac{1}{2}$ CYCLE 1.2.4])

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(U', j'_! \mu_p) \otimes H_{\text{ét}}^1((W \cap U)', \mu_p) \otimes \cdots \otimes H_{\text{ét}}^1((W \cap U)', \mu_p) &\rightarrow H_{\text{ét}}^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r}) \\ c'_1 \otimes \chi_{\varphi_2} \otimes \cdots \otimes \chi_{\varphi_r} &\mapsto c' \end{aligned}$$

fournit une classe c' comme désirée.

Supposons $W = \text{Spec}(A[h^{-1}])$. Quitte à diviser φ par une puissance de h^p , on peut supposer que φ^{-1} s'étend en une fonction ψ sur U , divisible par h^2 . Enfin, quitte à multiplier φ par une puissance convenable de p^p (inversible sur U), on peut également supposer $v_\xi(\varphi) \geq N$.

Considérons le revêtement U'_0 de U défini par l'équation :

$$f(X) := X^2 - (\psi + 2)X + 1 = 0.$$

Observons dès maintenant que la fonction X est inversible sur $\mathcal{O}_{U'_0}$. Le polynôme unitaire $g(X) := \varphi^2 f(\frac{X}{\varphi}) = X^2 - (1 + 2\varphi)X + \varphi^2$ (congru à $X(X-1)$ modulo $\mathfrak{m}_\xi$) satisfait aux conditions $g(1) \in (\varphi)$ (resp. $g(\varphi^2) \in (\varphi^3)$) et $g'(1) \in A_\xi^\times$ (resp. $g'(\varphi^2) \in A_\xi^\times$); le polynôme f possède donc deux racines x et x' dans K_ξ^h telles que $x \equiv \varphi \pmod{(\varphi^2)}$ et $x' \equiv \varphi^{-1} \pmod{(1)}$. Il existe donc $a \in A_\xi^h$ tel que $x = \varphi(1+a\varphi)$; par hypothèse sur φ et N , $(1+a\varphi) \in K_\xi^{h \times p}$, de sorte que $\chi_x = \chi_\varphi$ dans $H_{\text{ét}}^1(K_\xi^h, \mu_p)$. Il en résulte immédiatement que $\chi_{x'} = -\chi_\varphi$. Soit U' le normalisé de U'_0 dans $U'_0[\frac{1}{h}]$; puisque par hypothèse h^2 divise ψ dans $\mathcal{O}_{U'_0}$, ainsi donc que son multiple $(X-1)^2$, on a $h|X-1$ dans $\mathcal{O}_{U'}$. La fonction X est donc une section sur U' du faisceau $\mathbf{G}_{mU', V(h)} := \text{Ker}(\mathbf{G}_{mU'} \rightarrow i_* \mathbf{G}_{mV(h)})$, où l'on note i l'immersion fermée $V(h) \hookrightarrow U'$. Soit j' l'immersion ouverte complémentaire. Puisque p est inversible sur U' , on a une suite exacte

$$1 \rightarrow j'_! \mu_p \rightarrow \mathbf{G}_{mU', V(h)} \xrightarrow{f \mapsto f^p} \mathbf{G}_{mU', V(h)} \rightarrow 1.$$

qui étend la suite exacte usuelle de Kummer sur K_ξ^h . L'image de X par le morphisme cobord est une classe de cohomologie $c'' \in H_{\text{ét}}^1(U', j_! \mu_p)$, induisant $(c, -c)$ en restriction à U_ξ^h . Compte tenu de l'égalité $H_{\text{ét}}^1(U', j_! \mu_p) = H_{\text{ét}}^1(U'_0, j_{0!} \mu_p)$, où j'_0 est l'immersion ouverte $U'_0[\frac{1}{h}] \hookrightarrow U'_0$, la classe de cohomologie c'' se descend en la classe c' sur U'_0 désirée.

6.3. Majoration. — On procède par récurrence sur $\dim(A)$. Le cas de la dimension 1 est dû à K. Katô (théorème 2.3.1). Soient U comme dans l'énoncé, $j : U \hookrightarrow X[p^{-1}]$ l'immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau étale de p -torsion sur U . D'après le théorème de Lefschetz pour les morphismes affines de type fini entre $\mathbf{Q}$ -schémas excellents ([SGA 4 XIX 6.1]), pour tout entier β , et tout point géométrique $\bar{x}$ de $X[p^{-1}]$, on a $(R^\beta j_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = 0$ dès que $\beta > \dim X_{(\bar{x})}$. Il en résulte que pour tout entier α , et pour tout sous-faisceau constructible K_β de $R^\beta j_* \mathcal{F}$, on a $H_{\text{ét}}^\alpha(X[p^{-1}], K_\beta) = H_{\text{ét}}^\alpha(X'[p^{-1}], K'_\beta)$, où X' est un fermé de X , de dimension inférieure ou égale à $\dim(A) - \beta$ et K'_β un faisceau de p -torsion sur celui-ci. Ainsi, si $\beta > 0$, l'hypothèse de récurrence sur la dimension entraîne la nullité de $H_{\text{ét}}^\alpha(X[p^{-1}], R^\beta j_* \mathcal{F})$ pour $\alpha > (\dim(A) - \beta) + \dim_p(k)$. (Bien que cela ne soit pas utile, remarquons que l'on sait (*loc. cit.*, th. 5.1) que les faisceaux $R^\beta j_* \mathcal{F}$ ci-dessus sont constructibles.) La suite spectrale associée à l'isomorphisme $R\Gamma(U, \mathcal{F}) = R\Gamma(X[p^{-1}], Rj_* \mathcal{F})$ nous ramène donc au cas où $U = X[p^{-1}]$. Enfin, la méthode de la trace ([SGA 4 IX 5.6]) nous ramène à montrer l'annulation de $H_{\text{ét}}^n(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathbf{Z}/p)$ pour $n > \dim(A) + \dim_p(k) =: N$, somme que nous supposerons finie sans quoi l'énoncé est trivial. On peut également supposer A normal et complet, ce que nous ferons dorénavant.

Soit k_0 le sous-corps parfait maximal de k . D'après 5.3.5, il existe une extension finie $W'/W(k_0)$ telle que le morphisme $\text{Spec}(A \otimes_{W(k_0)} W')^\nu \rightarrow \text{Spec}(W')$ ait une fibre spéciale réduite. Soit c'' une classe de cohomologie à coefficients constants $\mathbf{Z}/p$ sur $A''[p^{-1}]$, où A'' est une composante connexe de $(A \otimes_{W(k_0)} W')^\nu$.

Comme dans §5.4, il résulte du théorème de Katô (2.3.1) qu'une telle classe s'étend à un ouvert U'' de $\mathrm{Spec}(A'')$ contenant les points maximaux de la fibre spéciale. On peut bien entendu supposer $U'' \neq \mathrm{Spec}(A'')$.

D'après les théorèmes de Cohen-Gabber et Elkik, on peut algébriser comme dans §5.4 l'anneau A'' en un anneau $\widetilde{A}''$ satisfaisant les conditions suivantes :

- i. l'ouvert U'' se descend à un ouvert $\widetilde{U}''$ de $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}'')$;
- ii. le schéma $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}'')$ est l'hensélisé en un point fermé de la fibre spéciale d'une courbe relative sur un schéma local noethérien complet de dimension $\dim(A) - 1$;
- iii. l'anneau A'' s'identifie au complété de $\widetilde{A}''$ le long d'un idéal définissant le complémentaire de $\widetilde{U}''$. (Rappelons que l'on a supposé $U'' \neq \mathrm{Spec}(A'')$.)

D'après le théorème de Fujiwara-Gabber ([Fuj95], 6.6.4), pour tout entier i ,

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\widetilde{U}'', \mathbf{Z}/p) \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(U'', \mathbf{Z}/p).$$

En particulier, la classe de cohomologie c'' provient par image inverse d'une classe de cohomologie sur $\widetilde{U}''$ et finalement d'une classe $\widetilde{c}''$ sur $\widetilde{A}''[p^{-1}]$. Vérifions que $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\widetilde{A}''[p^{-1}], \mathbf{Z}/p) = 0$ pour $i > N$. Par passage à la limite, il suffit de montrer que l'on a $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(B[p^{-1}], \mathbf{Z}/p) = 0$, si $f : \mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(C)$ est une courbe relative, où C est local noethérien complet de dimension $\dim(A) - 1$, et de corps résiduel k .

Il suffit de montrer que pour tout $\beta \geq 0$ et tout $i > N$, on a :

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{i-\beta}(C[p^{-1}], R^\beta f_* \mathbf{Z}/p) = 0.$$

Il résulte du théorème de Lefschetz affine que si $(R^\beta f_* \mathbf{Z}/p)_{(\overline{y})} \neq 0$ on a nécessairement l'inégalité $\beta - 1 \leq \dim \mathrm{Spec}(C)_{(\overline{y})}$. En conséquence, le support du faisceau *constructible* $R^\beta f_* \mathbf{Z}/p$ est contenu dans un fermé de $\mathrm{Spec}(C[p^{-1}])$, induit par un fermé de codimension au moins $\beta - 1$ dans $\mathrm{Spec}(C)$. Comme précédemment (réduction au cas $U = \mathrm{Spec}(A[p^{-1}])$), on en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence sur la dimension que les groupes de cohomologie ci-dessus sont nuls pour $i > N$. (Remarquons que comme ci-dessus, on pourrait s'abstenir d'utiliser le théorème de constructibilité des images directes pour les morphismes de type fini entre $\mathbf{Q}$ -schémas excellents.)

Ainsi la classe de cohomologie c'' est nulle, de même que les groupes de cohomologie $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\mathrm{Spec}(A \otimes_{W(k_0)} W'[p^{-1}]), \mathbf{Z}/p)$ pour $i > N$. Ceci étant vrai pour chaque extension finie de W' , on a donc :

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(A[p^{-1}] \otimes_{K_0} \overline{K_0}, \mathbf{Z}/p) = 0 \quad \forall i > N,$$

où l'on note $K_0 = \mathrm{Frac} W(k_0)$.

Puisque $\mathrm{cd}_p(K_0) \leq 2$, il s'en suit que pour tout $\mathbf{F}_p[G_{K_0}]$ -module V , et tout $i > N + 2$, on a $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(A[p^{-1}], V) = 0$. Comme en §5.6, on observe que pour tout tel V , il existe une surjection $V' \twoheadrightarrow V$ où V' est une somme directe d'induites de représentations triviales de « petits » — c'est-à-dire contenus dans $G_{\mathrm{Frac} W'}$ — sous-groupes ouverts. Pour un tel V' on connaît le résultat d'annulation pour $i > N$. L'annulation du H^i pour V se ramène donc à l'annulation du H^{i+1} pour $\mathrm{Ker}(V' \twoheadrightarrow V)$. On obtient la majoration désirée en procédant ainsi une fois de plus.

7. Appendice : le théorème de structure de Cohen-Gabber

Théorème 7.1 ([Gab05a], lemme 8.1). — *Soit A un anneau local complet noethérien réduit, d'égale caractéristique $p > 0$, équidimensionnel de dimension d et de corps résiduel k . Il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que A soit fini sur A_0 , sans torsion et génériquement étale. De plus, on peut choisir un tel morphisme $A_0 \rightarrow A$ induisant un isomorphisme sur les corps résiduels.*

Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse (dans le cas intègre) dans [ÉGA 0_{IV} 21.9.5].

La démonstration du théorème, qui est une adaptation au cas non irréductible de [Gab05a], occupe le reste de ce paragraphe. Nous supposons dans la suite $d > 0$, sans quoi l'énoncé est évident.

Dans les paragraphes 7.2 à 7.6, nous allons montrer qu'il existe un corps de représentants κ de A tel que le A -module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ soit de rang générique égal à d sur chaque composante irréductible. En (7.7) nous verrons comment en déduire rapidement le théorème.

7.2. — Soit $\{b_i\}_{i \in E}$ une p -base de $k = A/\mathfrak{m}_A$. Choisissons des relèvements arbitraires β_i des b_i dans A . Rappelons qu'il existe un unique corps de représentants $\kappa \subset A$ contenant les β_i et se surjectant sur k (cf. [Bourbaki, A.C., IX, §2, N°2, th. 1 a)). Changer de corps de représentants revient donc à changer les β_i .

Fixons également un système de paramètres $\tau_1, \dots, \tau_d$ de A ; nous ne le changerons qu'à la fin de la démonstration (7.7).

7.3. — Pour toute partie finie $e \subset E$, posons $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa$. Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned} & \text{pour toute partie finie } e \subset E, [\kappa : \kappa_e] < +\infty, \\ & \text{pour toutes parties finies } e, e' \subset E, \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'}, \\ & \bigcap_{e \subset E} \kappa_e = \kappa^p. \end{aligned}$$

7.4. — Soient $\text{Spec}(\overline{A})$ une composante irréductible de $\text{Spec}(A)$, munie de la structure réduite, et $\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d$ les images des τ_i dans $\overline{A}$ par la surjection canonique $A \twoheadrightarrow \overline{A}$.

Considérons le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_e[[\overline{\tau}_1^p, \dots, \overline{\tau}_d^p]] & \longrightarrow & \kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]] & \longrightarrow & \overline{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{\kappa, e} & \longrightarrow & L_\kappa & \longrightarrow & L \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les inclusions dans les corps de fractions respectifs. Les flèches horizontales sont injectives et correspondent à des morphismes finis. Pour la seconde, cela résulte du fait que le module $\overline{A}$ est *quasi-fini* ([ÉGA 0_I 7.4.1]) sur $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$ donc de type fini car l'idéal $(\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d)\overline{A}$ est un idéal de définition ([ÉGA 0_I 7.4.4]). Enfin, les $\overline{\tau}_i$ sont analytiquement indépendants sur κ : le sous-anneau $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$ de $\overline{A}$ est bien un anneau de séries formelles ([ÉGA 0_{IV} 16.3.10]).

Rappelons le lemme suivant.

Lemme 7.4.1 ([Mat89], §30, lemme 6). — Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ et $\{K_\alpha\}$ une famille non vide de sous-corps cofinis (c'est-à-dire tels que les $[K : K_\alpha]$ soit finis) satisfaisant les deux conditions suivantes : $\bigcap K_\alpha = K^p$ et, pour toute paire d'indices α, β , il existe un indice γ tel que $K_\gamma \subset K_\alpha \cap K_\beta$. Alors, pour toute extension finie L/K , il existe un indice $\alpha = \alpha_L$ tel que, pour tout sous-corps cofini $K' \subset K_{\alpha_L}$, on ait

$$\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1.$$

On a observé ci-dessus que la famille des $\kappa_e \subset \kappa$, $e \subset E$, satisfait aux hypothèses du lemme précédent. On vérifie immédiatement qu'il en est de même de la famille des sous-corps $L_{\kappa, e}$ de L_κ ; on a donc l'égalité

$$(7.a) \quad \text{rang}_L \Omega_{L/L_{\kappa, e}}^1 = \text{rang}_{L_\kappa} \Omega_{L_\kappa/L_{\kappa, e}}^1,$$

dès que l'ensemble fini e est suffisamment grand.

Posons $R_\kappa = \kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$ et $R_{\kappa, e} = \kappa_e[[\overline{\tau}_1^p, \dots, \overline{\tau}_d^p]]$. Le terme de gauche de (7.a) est le rang générique du $\overline{A}$ -module $\Omega_{\overline{A}/R_{\kappa, e}}^1$, c'est-à-dire le rang de son tensorisé avec L . Remarquons que d'après [ÉGA 0_{IV} 21.9.4], $\Omega_{\overline{A}/R_{\kappa, e}}^1$ s'identifie au module $\overline{A}$ -module $\widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1$ de formes différentielles complété. Le terme de droite est quant à lui le rang du $R_{\kappa, e}$ -module libre $\Omega_{R_{\kappa, e}/R_\kappa}^1$. Ce dernier

est égal à $d + \text{rang}_{\kappa} \Omega_{\kappa/\kappa_e}^1 = d + |e|$ (où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble), de sorte que la formule 7.a se réécrit :

$$(7.b) \quad \text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|.$$

7.5. — La proposition suivante va nous permettre de modifier le corps des représentants de façon à pouvoir supposer e vide (de façon équivalente : $\kappa_e = \kappa$).

Proposition 7.5.1. — *Il existe une partie finie e de E et des éléments β'_i , pour $i \in e$, relevant les b_i tels que, pour chaque composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de $\text{Spec}(A)$, les conditions suivantes soient vérifiées :*

- i. $\text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|$,
- ii. les images des $d\beta'_i$ dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$, où $L = \text{Frac}(\bar{A})$, sont L -linéairement indépendantes.

L'égalité 7.a (et donc 7.b) étant valable, pour chaque composante irréductible, dès que e est suffisamment grand, on peut choisir un tel ensemble qui convient pour chacune d'entre elles. La propriété (i) en découle.

Pour démontrer la propriété (ii), nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

Lemme 7.5.2. — *Soient $\bar{A}$ et L comme ci-dessus. Pour tout idéal non nul I de $\bar{A}$, l'ensemble des $df \otimes_{\bar{A}} L$, pour $f \in I$, est une famille génératrice du L -espace vectoriel $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.*

Démonstration. Soient $f_0 \in I$ non nul, et $\omega_0 = df_0$. Pour tout $b \in \bar{A}$, $d(bf_0) = b\omega_0 + f_0 db$. La famille des $d(bf_0) \otimes 1$ contient $\omega_0 \otimes 1$; d'après la formule précédente, le L -espace vectoriel qu'elle engendre contient donc les $db \otimes 1$ pour chaque $b \in \bar{A}$. $\square$

Soit $\{\wp_1, \dots, \wp_c\}$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A . Pour chaque $j \in \{1, \dots, c\}$, posons $A_j = A/\wp_j$ et $X_j = \text{Spec}(A_j)$ la composante irréductible intègre de $X = \text{Spec}(A)$ correspondante. Notons pour tous $i \in e$ et $j \in \{1, \dots, c\}$, $\beta_{i,j}$ l'image dans A_j de $\beta_i \in A$. (Rappelons que les β_i font partie d'une p -base de $\kappa \subset A$.) Nous allons démontrer par récurrence sur j ($0 \leq j \leq c$) qu'il existe des éléments $\{m_{i,j}\}$ dans $\mathfrak{m}_A$, pour $i \in e$, tels que les images des éléments $\beta_i + m_{i,j}$ dans chacun des anneaux $A_1, \dots, A_j$ aient des différentielles linéairement indépendantes dans chacun des espaces vectoriels $\Omega_{A_1/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_1} \text{Frac } A_1, \dots, \Omega_{A_j/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$. Pour $j = 0$, cette condition est vide. Supposons l'assertion démontrée pour un $j \leq c - 1$ et montrons la pour $j + 1$. Quitte à remplacer β_i par $\beta_i + m_{i,j}$, on peut supposer que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in e$. L'anneau A étant réduit, les $\wp_\alpha$ forment une décomposition primaire réduite de (0) , de sorte que l'idéal $\mathfrak{q}_j := \wp_1 \cap \dots \cap \wp_j$ ($= \text{Ker}(A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_j)$) n'est pas contenu dans $\wp_{j+1}$. Si $j > 0$, notons I_{j+1} son image dans $\bar{A} = A_{j+1} (= A/\wp_{j+1})$; c'est un idéal non nul. Si $j = 0$, on considère $\mathfrak{m}_{\bar{A}}$. D'après (i), $\text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e| \geq |e|$; d'autre part, la famille $d(I_{j+1})$ est génératrice dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$ (où $L = \text{Frac } \bar{A}$).

Lemme 7.5.3. — *Soient V un espace vectoriel de dimension au moins n , $b_1, \dots, b_n$ des vecteurs de V et W une famille génératrice. Il existe une famille $w_1, \dots, w_n$ d'éléments de $W \cup \{0\}$ tels que les $b_i + w_i$ soient linéairement indépendants.*

Démonstration. — Par récurrence immédiate sur n . $\square$

Il existe donc des éléments $m'_{i,j+1} \in I_{j+1}$, $i \in e$, tels que les différentielles des éléments $d((\beta_i \bmod \wp_{j+1}) + m'_{i,j+1})$, $i \in e$, soient linéairement indépendantes dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.

Relevons les $m'_{i,j+1}$ en des éléments $m_{i,j+1}$ de $\mathfrak{q}_j$ si $j > 0$, ou de $\mathfrak{m}_A$ si $j = 0$. Par construction, ils satisfont la propriété escomptée au cran $j + 1$.

7.6. — Considérons le sous-corps $\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta'_i, i \in e) \subset A$, où les β'_i ($i \in e$) sont comme en **7.5.1**. Il s'envoie isomorphiquement sur $k = A/\mathfrak{m}_A$ par réduction : son image contient k^p et les images des β_i ($i \notin e$), β'_i ($i \in e$), qui constituent une p -base de k . Des égalités **7.b** et de la propriété (ii) de **7.5.1**, on tire :

$$\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa'}^1 = d,$$

pour toute composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de X . Par la suite, nous noterons encore κ ce nouveau corps de représentants.

7.7. — Le A -module $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ étant de rang générique d sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment, qu'il existe des éléments $f_1, \dots, f_d$ de A tels que les $d(f_i \bmod \wp_\alpha) \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ forment une base de $\widehat{\Omega}_{A_j/\kappa}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ pour chaque composante irréductible $\text{Spec}(A_j)$ de X . Quitte à les multiplier individuellement par une puissance p -ième d'un élément appartenant à $\mathfrak{m}_A - \bigcup \wp_j$, on peut les supposer dans $\mathfrak{m}_A$. Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres $\tau_1, \dots, \tau_d$ dans A , de sorte que le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(k[[\tau_1, \dots, \tau_d]])$ soit fini.

Posons, pour $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$t_i := \tau_i^p(1 + f_i).$$

Soient A_0 le sous-anneau $\kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ de A , $X_0 = \text{Spec}(A_0)$. Le morphisme $X \rightarrow X_0$ est fini : cela résulte du fait que les éléments $1 + f_i$ sont des unités de A . Vérifions qu'il est génériquement étale. L'anneau A étant noethérien complet, le A -module de type fini Ω_{A/A_0}^1 est également complet et coïncide donc avec le module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/A_0}^1$. Les anneaux A_0 et A étant métrisables, et tout sous- A -module de $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ étant fermé, la suite

$$\widehat{\Omega}_{A_0/\kappa}^1 \widehat{\otimes}_{A_0} A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/A_0}^1 = \Omega_{A/A_0}^1 \rightarrow 0$$

est *exacte* ([ÉGA 0_{IV} 20.7.17]). Il résulte de l'hypothèse sur les éléments f_i et de la formule

$$d(t_i) = \tau_i^p df_i$$

qu'au-dessus de chaque point maximal de $X = \text{Spec}(A)$, la première flèche est surjective. On en déduit que le A -module Ω_{A/A_0}^1 est génériquement nul, CQFD.

Références

- [Art73a] M. ARTIN – « Cohomologie des préschémas excellents d'égaies caractéristiques », 1973, exposé XIX dans [Gro73].
- [Art73b] ———, « Faisceaux constructibles. Cohomologie d'une courbe algébrique », 1973, exposé IX dans [Gro73].
- [Bas78] G. G. BASTOS – « Some results on the degree of imperfection of complete valued fields », *manuscripta math.* **25** (1978), no. 4, p. 315–322.
- [BK86] S. BLOCH & K. KATÔ – « p -adic étale cohomology », *Publications mathématiques de l'IHÉS* (1986), no. 63, p. 107–152.
- [Bou07] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique*, Springer, 2007, réimpression des dernières éditions Masson.
- [BT73] H. BASS & J. TATE – « The Milnor ring of a global field », *Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic*, Springer, 1973, p. 349–446. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 342.
- [Cré67] E. CRÉPEAUX – « Une caractérisation des couples henséliens », *Enseignement math.* **13** (1967), p. 273–279.
- [CT99] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – « Cohomologie des corps valués henséliens, d'après K. Katô et S. Bloch », *Algebraic K-theory and its applications*, Trieste, 1997 (Notes d'un cours fait à Bordeaux et à Trieste), World Scientific, 1999, p. 120–163.
- [Del77] P. DELIGNE – *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, 1977, Avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 569.

- [Elk73] R. ELKIK – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. sci. École norm. sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603.
- [Epp73] H. EPP – « Eliminating wild ramification », *Invent. math.* **19** (1973), p. 235–249.
- [Fuj95] K. FUJIWARA – « Theory of tubular neighborhood in étale topology », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 1, p. 15–57.
- [Fuk01] T. FUKAYA – « Explicit reciprocity laws for p -divisible groups over higher dimensional local fields », *J. reine angew. Math.* **531** (2001), p. 61–119.
- [Gab92] O. GABBER – « K -theory of Henselian local rings and Henselian pairs », Algebraic K -theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989), *Contemp. Math.*, vol. 126, Amer. Math. Soc., 1992, p. 59–70.
- [Gab05a] ———, « A finiteness theorem for non abelian H^1 of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Luc Illusie, Orsay, juin 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.
- [Gab05b] ———, « Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Pierre Deligne, Princeton, octobre 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.
- [Gab06] ———, Lettre à F. Orgogozo, automne 2006.
- [Gro67] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique », *Publications mathématiques de l'IHÉS* (1960-1967), numéros 4 (I) ; 8 (II) ; 11,17 (III) ; 20, 24 et 28 (IV), rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné.
- [Gro73] A. GROTHENDIECK – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Verlag, 1972-1973, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 269-270 & 305.
- [GS06] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Ill79] L. ILLUSIE – « Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline », *Ann. sci. École norm. sup. (4)* **12** (1979), no. 4, p. 501–661.
- [Kat70] N. M. KATZ – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Publications mathématiques de l'IHÉS* (1970), no. 39, p. 175–232.
- [Kat82] K. KATÔ – « Galois cohomology of complete discrete valuation fields », Algebraic K -theory, Part II (Oberwolfach, 1980), *Lecture Notes in Math.*, vol. 967, Springer, 1982, p. 215–238.
- [KK86] K. KATÔ & T. KUZUMAKI – « The dimension of fields and algebraic K -theory », *J. Number Theory* **24** (1986), no. 2, p. 229–244.
- [Mat89] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [Mat02] K. MATSUMI – « A Hasse principle for three-dimensional complete local rings of positive characteristic », *J. reine angew. Math.* **542** (2002), p. 113–121.
- [Pop86] D. POPESCU – « General Néron desingularization and approximation. », *Nagoya Math. J.* **104** (1986), p. 85–115.
- [Sai86] S. SAITÔ – « Arithmetic on two-dimensional local rings », *Invent. math.* **85** (1986), no. 2, p. 379–414.
- [Ser68] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, deuxième édition, publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne (cinquième édition révisée et complétée)*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Swa98] R. G. SWAN – « Néron-Popescu desingularization », Algebra and geometry (Taipei, 1995), *Lect. Algebra Geom.*, vol. 2, Int. Press, 1998, p. 135–192.
- [Tsu96] T. TSUJI – « Syntomic complexes and p -adic vanishing cycles », *J. reine angew. Math.* **472** (1996), p. 69–138.

OFER GABBER, CNRS et IHÉS, Le Bois-Marie, 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
 Courriel : Gabber@ihes.fr

FABRICE ORGOGOZO, CNRS et Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France • Courriel : Fabrice.Orgogozo@math.polytechnique.fr
 Adresse réticulaire : <http://www.math.polytechnique.fr/~orgogozo/>