Manh Tien NGUYEN

29 janvier 2016

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU TROU SPECTRAL

La démonstration de J.-P.Serre pour le théorème d'Alon et Boppana

Résumés

Alors qu'une famille d'expanseur peut se caractériser par le trou spectral borné uniformément, un théorème d'Alon et Boppana montre que ce trou ne peut pas être très grand.

Théorème 1 (**Alon et Boppana**). *Soit $\{G_n\}$ une famille de graphes connexe, k-réguliers et $|G_n|$ tend vers infini. Alors les deuxièmes valeurs propres $\lambda_1(G_n)$ satisfont*

$$\liminf_{n\to+\infty} \lambda_1(G_n) \geq 2\sqrt{k-1}$$

On va en fait démontrer un résultat plus fort suivant disant qu'il y a une probabilité positive que $\lambda_1(G_n)$ appartienne à $[(2-\varepsilon)\sqrt{k-1}, k]$

Théorème 2. *Étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un constant C dépendant de ε et k tel que pour chaque graphe G connexe, k-régulier et de n sommets, il y a au moins Cn valeurs propres dans $[(2-\varepsilon)\sqrt{k-1}, k]$.*

L'idée géniale de J.-P. Serre est, par quelque techniques combinatoires, de trouver la fonction génératrice de la matrice d'adjacence A, puis arriver à l'égalité fameuse :

$$\sum_{r\leq \frac{m}{2}} A_{m-2r} = (k-1)^{\frac{m}{2}} U_m\left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}}\right)$$

où $(A_r)_{ij}$ signifie le nombre de chemins de longueur r passant du i-ème sommet au j-ème et U_m les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce. En exploitant cette inégalité, on montre que le spectre des G_n, vu comme somme de distributions Dirac réagissant sur U_m est positif. On arrive au résultat attendu après une series d'applications du théorème de Banach-Alaoglu et d'autres outils d'analyse fonctionnelle.

Mots-clés : expanseur, trou spectral, fonction génératrice, polynôme de Chebyshev, topologie faible*.