Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques

Feuille 6
Connexions

Master 2 AAG
Géométrie Riemannienne
2012-2013

Exercice 1 – Un exemple de connexion plate sur une variété non simplement connexe.
Dans le plan euclidien, on considère l'ouvert

$$M_1 = \big( ]0,3[\times]0,1[\big) \cup \big( ]0,1[\times]0,3[\big).$$

On note A le carré ouvert $]0,1[\times]2,3[$ et ϕ l'unique composée d'une rotation d'angle π et d'une translation qui envoie A sur le carré $]2,3[\times]0,1[$. On note M le quotient de M_1 par la relation d'équivalence engendrée par $a \sim \phi(a)$ pour a dans A.

1. Construire M en utilisant du papier, des ciseaux et du ruban adhésif (ou de la colle).
2. Montrer que la connexion triviale sur le plan définit une connexion sur M.
3. Décrire le transport parallèle le long des lacets de M.

Exercice 2 – Connexion canonique sur un groupe de Lie.
Soit G un groupe de Lie connexe.

1. Montrer qu'il existe une unique connexion ∇ sur G telle que pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs invariants à gauche, on ait $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.
2. Montrer que la connexion ∇ est sans torsion.
3. Déterminer la courbure de ∇.
4. Déterminer les géodésiques de ∇ et vérifier qu'elles sont toutes complètes.

Exercice 3 – Tores plats et variétés de Hopf.
On munit $\mathbb{R}^n$ de la connexion linéaire plate (on appelle ainsi la connexion triviale sur $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), que l'on note ∇. Soit Λ un sous-groupe de translations de $\mathbb{R}^n$, engendré par n translatons linéairement indépendantes $\tau_1, \ldots, \tau_n$. On appelle M le quotient de $\mathbb{R}^n$ par l'action de Λ. C'est une variété C^∞-difféomorphe au tore $\mathbf{T}^n$, et on note $\pi : \mathbb{R}^n \to M$ la projection canonique.

1. Vérifier que les géodésiques de ∇ sont les droites de $\mathbb{R}^n$ paramétrées affinement.
2. Soit X un champ de vecteurs sur M. On considère le champ de vecteurs $\tilde{X} = \pi^* X$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\tilde{X}$ est invariant par les translations de Λ. Réciproquement, montrer que tout champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $\mathbb{R}^n$ invariant par les translations de Λ permet de définir par projection un champ de vecteurs X sur M, que l'on note $\pi_*(\tilde{X})$.
3. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. On définit $\overline{\nabla}_X Y := \pi_*(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})$. Montrer que $\overline{\nabla}$ est une connexion sur M.
4. Montrer que la courbure de $\overline{\nabla}$ s'annule.
5. Relier les géodésiques de $\overline{\nabla}$ à celles de ∇. Vérifier qu'en particulier, elles sont paramétrées par $\mathbb{R}$ tout entier. On dit qu'elles sont *complètes.*

   On considère à présent h, l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^n$, et Γ le sous-groupe engendré par h.
6. Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est libre et propre, et que la variété quotient N est difféomorphe au produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{n-1}$.
7. Montrer, par un raisonnement analogue à celui mené ci-dessus que ∇ induit une connexion $\overline{\nabla}$ sur N. Montrer que la courbure de $\overline{\nabla}$ est nulle.
8. Montrer que certaines géodésiques de $\overline{\nabla}$ ne sont pas complètes, c'est-à-dire que leur intervalle maximal de paramétrage n'est pas $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Une interprétation de la torsion

Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent d'une variété M.

1. On suppose que, au voisinage de tout point p dans M, il existe une carte locale vérifiant $\nabla_{\partial_i}\partial_j(p) = 0$ pour tous i et j. Montrer que la torsion de ∇ est nulle.

On veut maintenant montrer la réciproque. On suppose donc que la torsion de ∇ est nulle. On se limite à la dimension 2 pour simplifier un peu. Soit (u, v) une base de T_pM. On note $\|$ le transport parallèle le long de la géodésique issue de p ayant comme vitesse initiale u. Pour (x, y) dans un petit ouvert autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\phi(x, y) = \exp(y\|_0^x v).$$

2. Montrer que ϕ définit une carte pour laquelle, au point p, $\nabla_{\partial_x}\partial_x = \nabla_{\partial_y}\partial_y = \nabla_{\partial_x}\partial_y = \nabla_{\partial_y}\partial_x = 0$.

Exercice 5 – Transport parallèle et courbure

Soient M une variété et ∇ une connexion sans torsion sur M. Soient X et Y deux champs de vecteurs qui commutent au voisinage d'un point p de M. On note φ le flot de X et ψ celui de Y. On note $q = q(s, t)$ le point $\varphi_t(\psi_s(p) = \psi_s(\varphi_t(p))$. Le transport parallèle le long de chemins évidents fournit des applications

$$\begin{tikzcd}
T_{\psi_s(p)}M \arrow[r, "\tau_t^4"] & T_qM \\
T_pM \arrow[u, "\tau_s^2"] \arrow[r, "\tau_t^1"] & T_{\varphi_t(p)}M \arrow[u, "\tau_s^3"']
\end{tikzcd}$$

Soit Z un champ de vecteurs défini au voisinage de p.

1. Calculer

$$\lim_{s,t\to 0} \frac{1}{ts}\Big((\tau_s^3\tau_t^1)^{-1} - (\tau_t^4\tau_s^2)^{-1}\Big)Z_q.$$

2. Interpréter l'identité de Bianchi dans cet esprit (on remplacera le carré d'applications ci-dessus par un cube).