Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques

Feuille 3
Lien entre groupes et algèbres de Lie

Master 2 AAG
Géométrie Riemannienne
2012-2013

Exercice 1 – Classer à isomorphisme près tous les groupes de Lie connexes ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$. Même question pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{heis}(3)$, qui est l'algèbre de Lie des matrices réelles 3×3, triangulaires supérieures, avec des zéros sur la diagonale.

Exercice 2 – Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1. Soit H un sous-groupe fermé de G. Montrer que si H n'est pas discret, il contient un sous-groupe à un paramètre non trivial.
2. On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $Z(G)$ les centres respectifs de $\mathfrak{g}$ et de G. Montrer que $Z(G)$ est discret si et seulement si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Donner un exemple où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ mais $Z(G) \neq \{e\}$.

Exercice 3 – Soit G un groupe de Lie. Montrer qu'il existe un voisinage U de l'élément neutre tel que si H est un sous-groupe de G contenu dans U, alors $H = \{e\}$.

Exercice 4 – Soient G et H deux groupes de Lie. On suppose G connexe.

1. On considère φ et ψ deux morphismes de groupes de Lie de G sur H. On suppose qu'il existe $g_0 \in G$ tel que $\varphi(g_0) = \psi(g_0)$ et $T_{g_0}\varphi = T_{g_0}\psi$. Montrer que $T_e\varphi = T_e\psi$, puis que φ et ψ coïncident sur un voisinage de g_0. Conclure finalement que $\varphi = \psi$.
2. Soit φ un difféomorphisme C^∞ de G, tel que pour tout champ de vecteurs invariant à gauche X sur G, on ait $\varphi^*(X) = X$. Montrer qu'il existe $g_0 \in G$ tel que $\varphi = L_{g_0}$ (la translation à gauche par g_0).

Exercice 5 – Sous-groupes à un paramètre et revêtement universel pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que tout sous-groupe à un paramètre $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est conjugué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à l'un des trois types de sous-groupes suivants :
$$s^t = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{-at} \end{pmatrix}_{t\in\mathbb{R}} \qquad u^t = \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{t\in\mathbb{R}} \qquad r^t = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix}_{t\in\mathbb{R}}.$$
Supposons maintenant que a est non nul. On dit que notre groupe à un paramètre est *hyperbolique* dans le premier cas, *parabolique* dans le second, et *elliptique* sinon.
2. Si $g^t = \exp(tZ)$, où $Z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, faire le lien entre le caractère hyperbolique, parabolique, ou elliptique de (g^t), et le signe de $B(Z, Z)$ où B est la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ (où $\mathbb{D}^2$ est le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$). Faire un dessin de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et y indiquer les points qui sont dans l'image de l'application exponentielle.
On appelle $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et $\widetilde{\exp}$ l'application exponentielle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ dans $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.
4. Montrer que si $B(Z, Z) < 0$, alors $t \mapsto \widetilde{\exp}(tZ)$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$, qui rencontre le centre $\mathcal{Z}$ de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ le long d'un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{Z}$. Existe-t-il des sous-groupes compacts connexes autres que $\{e\}$ dans $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$? Faire un dessin de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ et y indiquer l'image de l'exponentielle.