Université Paris 6
MAîTRISE
Premier semestre 2003/2004

**ALGÈBRE COMMUTATIVE
ET HOMOLOGIQUE**

Table des matières

3 Anneaux locaux, localisation **1**
- 3.1 Anneaux locaux 1
- 3.2 Localisation d'un anneau 2
- 3.3 Localisation d'un module 11

4 Modules et anneaux noetheriens **12**
- 4.1 Généralités 12
- 4.2 Anneaux gradués 18

3 Anneaux locaux, localisation

3.1 Anneaux locaux

Exercice 69. — *Montrer qu'un anneau est local si et seulement si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal.*

Solution. — Soit A un anneau local et notons $\mathfrak{m}$ son unique idéal maximal. Montrons que $x \in A$ est inversible si et seulement si $x \notin \mathfrak{m}$. En effet, si x est inversible, il ne peut appartenir à $\mathfrak{m}$ (sinon $\mathfrak{m} = A$). Réciproquement, si $x \in A$ n'est pas inversible, alors il appartient à un idéal maximal (lemme de Zorn) et donc à $\mathfrak{m}$.

Soit maintenant A un anneau tel que l'ensemble des éléments non inversibles est un idéal que nous notons $\mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m} \subsetneq A$. Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal, les éléments de $\mathfrak{m}'$ ne sont pas inversibles donc $\mathfrak{m}' \in \mathfrak{m}$ et par maximalité $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$.

Exercice 70. — *Soit A un anneau local et notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal.*

(i) *Soient $f_1, \cdots, f_n \in A$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Montrer que l'un des f_i et inversible.*

Soient I et J deux idéaux de A et $a \in A$ un élément non diviseur de 0 tel que $IJ = (a)$.

(ii) *Monter qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tel que $xy = a$. Justifier que x et y ne sont pas diviseurs de 0.*

(iii) *En déduire que $I = (x)$ et $J = (y)$.*

Solution. — (i) Supposons qu'aucun des f_i ne soit inversible, alors d'après l'exercice précédent, on a $f_i \in \mathfrak{m}$ pour tout i donc $1 \in \mathfrak{m}$ ce qui est absurde.

(ii) A priori, a s'écrit $a = \sum_i x_i y_i$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in J$. Mais $x_i y_i \in IJ = (a)$ donc $x_i y_i = a f_i$ avec $f_i \in A$. On a donc $a = \sum_i a f_i$ et comme a est non diviseur de 0, on a $1 = \sum f_i$. D'après (i), l'un des f_i (disons f_1) est inversible donc $a = f_1^{-1} x_1 y_1$ et en posant $x = f_1^{-1} x_1 \in I$ et $y = y_1$, on a fini.

Soit $b \in A$ tel que $bx = 0$ (resp. $by = 0$), alors $ba = bxy = 0$ donc $b = 0$ car a n'est pas diviseur de 0.

(iii) Soit $z \in I$, alors $zy \in IJ = (a)$ donc $zy = ba = bxy$ et comme y n'est pas diviseur de 0, on a $z = bx \in (x)$. Ainsi $I \subset (x)$, la réciproque est évidente. De manière symétrique on montre le résultat sur J.

3.2 Localisation d'un anneau

Exercice 71. — (i) *Montrer que les localisés $S^{-1}A$ d'un anneau A ont une structure d'anneau, montrer qu'on a alors un morphisme d'anneaux $\pi : A \to S^{-1}A$.*

(ii) *Montrer que $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $0 \in S$. Montrer en particulier que $A_{(f)}$ est non nul si et seulement si f n'est pas nilpotent.*

(iii) *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ne rencontrant pas S, montrer que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\pi(\mathfrak{p})$ et qu'il est premier. Montrer que $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$.*

(iv) *Montrer que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ s'identifient aux idéaux premiers de A ne rencontrant pas S.*

(v) *Montrer que tout idéal I de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}J$ pour J un idéal de A.*

Solution. — (i) La structure d'anneau est donnée par $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$ et $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$. On vérifie aisément les axiomes d'un anneau.

L'application

$$\begin{aligned} \pi : A &\to S^{-1}A \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux. En effet on a $\pi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \pi(a) + \pi(b)$ et on a $\pi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \pi(a)\pi(b)$.

(ii) Supposons que $0 \in S$, alors tout élément de $S^{-1}A$ s'écrit $\frac{a}{s} = \frac{a \cdot 0}{s \cdot 0} = \frac{0}{0}$. Ainsi $S^{-1}A$ est réduit à l'élément $\frac{0}{0}$.

Réciproquement, si $S^{-1}A$ est nul, alors l'image de $1 \in A$ dans $S^{-1}A$ est nulle donc il existe $s \in S$ tel que $s \cdot 1 = 0$ donc $s = 0$ et $0 \in S$.

L'anneau $A_{(f)}$ est $S^{-1}A$ avec $S = \{1, f, \cdots, f^n, \cdots\}$. On a vu que $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $0 \in S$ donc $A_{(f)}$ est nul si et seulement s'il existe $n \in N$ tel que $f^n = 0$ donc si et seulement si f est nilpotent.

(iii) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ne rencontrant pas S. Le localisé $S^{-1}\mathfrak{p}$ est l'ensemble des $\frac{a}{s}$ avec $a \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$. Montrons que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal de $S^{-1}A$: soient $\frac{a}{s}$ et $\frac{a'}{s'}$ dans $S^{-1}\mathfrak{p}$ (ici a et a' sont dans $\mathfrak{p}$), alors on a $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ car $as' + a's \in \mathfrak{p}$. De même, si $\frac{a''}{s''} \in S^{-1}A$, alors $\frac{a''}{s''} \cdot \frac{a}{s} = \frac{aa''}{ss''} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ car $aa'' \in \mathfrak{p}$. Ainsi $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal.

Par ailleurs, il est clair que $\pi(\mathfrak{p}) \subset S^{-1}\mathfrak{p}$ donc $S^{-1}\mathfrak{p}$ contient l'idéal engendré par $\pi(\mathfrak{p})$. Réciproquement si $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ avec $a \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$, alors on a $\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1}$ qui est dans l'idéal engendré par $\pi(\mathfrak{p})$ car $\frac{a}{1} \in \pi(\mathfrak{p})$.

Montrons que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est premier : supposons que $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$, alors il existe $s'' \in S$ tel que $s''aa' \in \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est premier et S ne rencontre pas $\mathfrak{p}$, alors $aa' \in \mathfrak{p}$ donc $a \in \mathfrak{p}$ ou $a' \in \mathfrak{p}$. Ainsi on a $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ ou $\frac{a'}{s'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. L'idéal $S^{-1}\mathfrak{p}$ est donc premier.

Montrons enfin que $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$. En effet, comme $S^{-1}\mathfrak{p} \supset \pi(\mathfrak{p})$, on a bien $\mathfrak{p} \subset \pi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$. Par ailleurs si $a \in \pi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$, alors $\frac{a}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ donc il existe $x \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$ tels que $\frac{a}{1} = \frac{x}{s}$. Il existe alors $s' \in S$ tel que $s'(as - x) = 0 \in \mathfrak{p}$. Comme $s' \notin \mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{p}$ est premier, on a $as - x \in \mathfrak{p}$ et comme $x \in \mathfrak{p}$, on a $as \in \mathfrak{p}$. Encore une fois, comme $s \notin \mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{p}$ est premier, on a $a \in \mathfrak{p}$.

(iv) On a donc une application

$$\{\mathfrak{p} \ / \ \mathfrak{p} \text{ idéal premier de } A \text{ tel que } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \longrightarrow \{I \ / \ I \text{ idéal premier de } S^{-1}A\},$$

donnée par $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$. Montrons que l'application $I \mapsto \pi^{-1}(I)$ est sa bijection réciproque.

Soit I un idéal premier de $S^{-1}A$ et soit $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(I)$. Comme π est un morphisme d'anneaux et que I est un idéal premier, on sait que $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(I)$ est un idéal premier. Montrons que $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas S et que $S^{-1}\mathfrak{p} = I$.

Soit $a \in \mathfrak{p} \cap S$, alors $\frac{a}{1} \in I$. Comme $a \in S$, l'élément $\frac{1}{a}$ existe et est l'inverse de $\frac{a}{1}$. Mais alors I contient un élément inversible donc $I = S^{-1}A$ ce qui est absurde car I est premier. Ainsi $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas S.

On a $\pi(\mathfrak{p}) \subset I$ donc $S^{-1}\mathfrak{p} \subset I$ car d'après (iii) $S^{-1}\mathfrak{p}$ est l'idéal engendré par $\pi(\mathfrak{p})$. Soit maintenant $\frac{a}{s} \in I$, on a alors $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in I$ donc $\pi(a) \in I$. On a donc $a \in \mathfrak{p}$ et $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$.

(v) Soit I un idéal de $S^{-1}A$, définissons l'ensemble J de A suivant :

$$J = \{a \in A \ / \ \exists\ s \in S,\ a/s \in I\}.$$

Il est clair que $I = S^{-1}J$. Montrons que J est un idéal de A. Si a et b sont dans J, alors il existe s et t dans S tels que a/s et b/t soient dans I. Mais alors $(a+b)/st = 1/t \cdot a/s + 1/s \cdot b/t \in I$ donc $a + b \in J$. Si de plus $c \in A$, alors $ca/s = c/1 \cdot a/s \in I$ donc $ca \in J$ et J est un idéal.

Exercice 72. — (i) *Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-module et soit S une partie multiplicative de A. Montrer qu'il existe un unique morphisme $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ de $S^{-1}A$-modules tel que $S^{-1}f(\frac{m}{1}) = \frac{f(m)}{1}$.*

(ii) *Montrer que cette opération préserve l'exactitude des suites.*

Solution. — (i) Définissons $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$. Montrons que c'est bien défini, en effet si $\frac{m'}{s'} = \frac{m}{s}$, alors il existe $s'' \in S$ tel que $s''(s'm - sm') = 0$. Mais alors $S^{-1}f(\frac{m'}{s'}) = \frac{f(m')}{s'} = \frac{f(m)}{s}$ car $s''(s'f(m) - sf(m')) = f(s''(s'm - sm')) = f(0) = 0$.

On a bien $S^{-1}f(\frac{m}{1}) = \frac{f(m)}{1}$. C'est un morphisme de $S^{-1}A$-modules : en effet soient $\frac{m}{s}$ et $\frac{m'}{s'}$ dans $S^{-1}M$ et $\frac{a}{s''} \in S^{-1}A$, on a

$$S^{-1}(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}) = S^{-1}f(\frac{s'm + sm'}{ss'}) = \frac{f(s'm + sm')}{ss'}$$

$$= \frac{s'f(m) + sf(m')}{ss'} = \frac{f(m)}{s} + \frac{f(m')}{s'} = S^{-1}f(\frac{m}{s}) + S^{-1}f(\frac{m'}{s'})$$

et

$$S^{-1}(\frac{a}{s''} \cdot \frac{m}{s}) = S^{-1}f(\frac{am}{ss''}) = \frac{f(am)}{ss''} = \frac{af(m)}{ss''} = \frac{a}{s''} \cdot \frac{f(m)}{s} = \frac{a}{s''} \cdot S^{-1}f(\frac{m}{s}).$$

Montrons enfin que ce morphisme est unique. En effet, si on a $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$, alors on a $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = S^{-1}f(\frac{1}{s} \cdot \frac{m}{1}) = \frac{1}{s} \cdot S^{-1}f(\frac{m}{1})$ car $S^{-1}f$ est un morphisme de $S^{-1}A$-modules et $\frac{1}{s} \cdot S^{-1}f(\frac{m}{1}) = \frac{1}{s} \cdot \frac{f(m)}{1} = \frac{f(m)}{s}$ par hypothèse. Donc nécessairement on a $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$.

Remarquons que grâce au morphisme $\pi : A \to S^{-1}A$ défini par $\pi(a) = \frac{a}{1}$, on peut voir $S^{-1}M$ et $S^{-1}N$ comme des A-modules et que $S^{-1}f$ est un morphisme de A-modules.

(ii) Soit

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$

une suite exacte de A-module , montrons que la suite

$$S^{-1}0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\pi} M'' \longrightarrow S^{-1}0$$

est encore exacte. Remarquons tout de suite que $S^{-1}0 = 0$.

Soit $\frac{m'}{s} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}i)$, alors on a $S^{-1}i(\frac{m'}{s}) = 0$ donc $\frac{i(m')}{s} = 0$ donc il existe $s' \in S$ tel que $s'i(m) = 0$ ou encore $i(s'm) = 0$. Comme i est injective, on a $s'm = 0$ donc $\frac{m}{s} = 0$ dans $S^{-1}M'$. Ainsi $S^{-1}i$ est injective.

Soit $\frac{m''}{s} \in S^{-1}M''$ avec $m'' \in M''$, comme π est surjective, il existe alors $m \in M$ tel que $\pi(m) = m''$, mais alors $S^{-1}\pi(\frac{m}{s}) = \frac{\pi(m)}{s} = \frac{m''}{s}$ donc $\frac{m''}{s} \in S^{-1}\pi(S^{-1}M)$ et $S^{-1}\pi$ est surjective.

Il reste à montrer que $\mathrm{Im}S^{-1}i = \mathrm{Ker}S^{-1}\pi$. Soit $S^{-1}i(\frac{m'}{s}) \in \mathrm{Im}S^{-1}i$, on a alors

$$S^{-1}\pi(S^{-1}i(\frac{m'}{s})) = S^{-1}\pi(\frac{i(m')}{s}) = \frac{\pi(i(m'))}{s} = \frac{0}{s} = 0$$

donc $\mathrm{Im}S^{-1}i \subset \mathrm{Ker}S^{-1}\pi$. Soit maintenant $\frac{m}{s} \in \mathrm{Ker}S^{-1}\pi$, on a a donc $S^{-1}\pi(\frac{m}{s}) = \frac{\pi(m)}{s} = 0$ donc il existe $s' \in S$ tel que $s'\pi(m) = 0$ donc $\pi(s'm) = 0$. Mais alors comme $\mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Im}i$, il existe $m' \in M'$ tel que $i(m') = s'm$. On a donc

$$S^{-1}i(\frac{m'}{ss'}) = \frac{i(m')}{ss'} = \frac{s'm}{ss'} = \frac{m}{s}$$

donc on a l'inclusion inverse.

Exercice 73. — *Soit A un anneau non nul et $\mathfrak{p}$ un idéal premier.*

(i) *Montrer que $S = A - \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative.*

(ii) *Montrer que $S^{-1}A$ est un anneau local.*

Solution. — (i) On a bien $1 \in S$. Soient s et r des éléments de S, alors si $rs \notin S$, on a $rs \in \mathfrak{p}$ ce qui signifie $r \in \mathfrak{p}$ ou $s \in \mathfrak{p}$ c'est-à-dire $s \notin S$ ou $r \notin S$, c'est impossible donc $rs \in S$.

(ii) Notons $S^{-1}\mathfrak{p}$ le localisé de $\mathfrak{p}$ en tant que A-module. On a un morphisme naturel

$$S^{-1}\mathfrak{p} \to S^{-1}A$$

qui est injectif. En effet, tout élément de $S^{-1}\mathfrak{p}$ s'écrit $\frac{a}{s}$ avec $a \in \mathfrak{p}$ et $s \in S$ et on peut l'envoyer sur $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$. Si $\frac{a}{s}$ est nul dans $S^{-1}A$, alors il existe $s' \in S$ tel que $s'a = 0$ dans A, c'est encore vrai dans $\mathfrak{p}$ et on a donc $\frac{a}{s} = 0$ dans $S^{-1}\mathfrak{p}$.

Montrons que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal de $S^{-1}A$ et que c'est l'ensemble des éléments non inversibles. Soient $\frac{a}{s}$ et $\frac{a'}{s'}$ dans $S^{-1}\mathfrak{p}$ (ici a et a' sont dans $\mathfrak{p}$), alors on a $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as'+a's}{ss'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ car $as' + a's \in \mathfrak{p}$. De même, si $\frac{a''}{s''} \in S^{-1}A$, alors $\frac{a''}{s''} \cdot \frac{a}{s} = \frac{aa''}{ss''} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ car $aa'' \in \mathfrak{p}$.

Soit maintenant $\frac{a}{s} \notin S^{-1}\mathfrak{p}$, ce qui signifie que pour tout $s'' \in S$, on a $as'' \notin \mathfrak{p}$. Mais alors $a \notin \mathfrak{p}$ donc $\frac{s}{a}$ existe dans $S^{-1}A$ et $\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = 1$, c'est-à-dire $\frac{a}{s}$ est inversible.

Réciproquement, si $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ est inversible, alors il existe $\frac{a'}{s'}$ dans $S^{-1}A$ tel que $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = 1$, c'est-à-dire $\frac{aa'}{ss'} = 1$. Il existe donc $s'' \in S$ tel que $s''(aa' - ss') = 0 \in \mathfrak{p}$. Come $s'' \in S$, on a $s'' \notin \mathfrak{p}$ donc comme $\mathfrak{p}$ est premier on a $aa' - ss' \in \mathfrak{p}$. Si $\frac{a}{s}$ appartenait à $S^{-1}\mathfrak{p}$, alors on aurait $a \in \mathfrak{p}$ donc $aa' \in \mathfrak{p}$ puis $ss' \in \mathfrak{p}$. Or $ss' \in S$, c'est absurde donc $\frac{a}{s} \notin S^{-1}\mathfrak{p}$.

L'anneau est donc local d'idéal maximal $S^{-1}\mathfrak{p}$.

EXERCICE 74. — (I) *Soit n un entier, calculer les localisés $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ est un idéal premier.*

(II) *En déduire que l'application*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$$

est un isomorphisme de groupes.

SOLUTION. — (I) Supposons que p ne divise pas n, alors $n \notin \mathfrak{p}$ donc $\frac{1}{n}$ existe et est l'inverse de $\frac{n}{1}$ dans $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$. Mais alors on a $\frac{\overline{1}}{1} = (\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1}) \cdot \frac{\overline{1}}{1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\overline{n}}{1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\overline{0}}{1} = 0$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} = 0$.

Supposons maintenant que p divise n et écrivons $n = p^{\alpha}m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et p ne divisant pas m. Montrons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$. Considérons le morphisme

$$\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$$

défini par $x \mapsto \overline{x} \mapsto \frac{\overline{x}}{1}$. Commençons par montrer qu'il est surjectif. Soit $\frac{\overline{y}}{s} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$ avec $s \notin \mathfrak{p}$ et $y \in \mathbb{Z}$. Comme $s \notin \mathfrak{p}$, alors s et p^{α} sont premiers entre-eux donc il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $us + vp^{\alpha} = 1$. Soit alors $x = uy$, on a $m(sx - y) = m(suy - y) = mp^{\alpha}vy = nvy$. Ainsi $m(s\overline{x} - \overline{y}) = 0$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $m \notin \mathfrak{p}$ donc $\frac{\overline{x}}{1} = \frac{\overline{y}}{s}$ et $\pi(x) = \frac{\overline{y}}{s}$.

Déterminons le noyau de π : calculons $\pi(p^{\alpha}) = \frac{\overline{p^{\alpha}}}{1} = \frac{\overline{mp^{\alpha}}}{m} = \frac{\overline{n}}{m} = 0$ donc $\mathfrak{p}^{\alpha}\mathbb{Z} \subset \mathrm{Ker}\pi$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\pi$, alors $\frac{\overline{x}}{1} = 0$ donc il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $\overline{sx} = 0$ ou encore tel que n divise sx. Mais alors p^{α} divise sx et comme s et p sont premiers entre eux, on a p^{α} divise x et $x \in p^{\alpha}\mathbb{Z}$.

Ainsi on a un isomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$.

(III) Écrivons la décomposition de n est facteurs premiers. On a

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$

Mais alors on a

$$\bigoplus_{\mathfrak{p}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{(p_i\mathbb{Z})} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z}.$$

Le lemme chinois nous dit alors que comme les $(p_i^{\alpha_i})$ sont premiers entre eux on a

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z}.$$

EXERCICE 75. — *Soit A un anneau et S une partie multiplicativement stable de Ane contenant pas* 0*. Prouver les implications suivantes :*

(I) *A intègre $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ intègre.*

(II) *A principal $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ principal.*

(III) *A factoriel $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ factoriel.*

(IV) *A réduit $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ réduit (Montrer que* $\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = \mathrm{Nil}(A) \cdot S^{-1}A$*.)*

SOLUTION. — Rappelons que si $0 \in S$ alors $S^{-1}A$ est l'anneau nul (qui n'est pas très intéressant) et qui est par convention non intègre.

(I) Soit a/s et b/t deux élément de $S^{-1}A$ tels que $a/s \cdot b/t = 0$. Alors ceci signifie qu'il existe $u \in S$ tel que $uab = 0$. Comme A est intègre et $0 \notin S$, on a $a = 0$ ou $b = 0$, donc $a/s = 0$ ou $b/t = 0$ c'est-à-dire $S^{-1}A$ est intègre.

(II) Soit I un idéal de $S^{-1}A$. Il est de la forme $S^{-1}J$ pour J un idéal de A. Mais comme A est principal, on a $J = (a)$ donc $I = S^{-1}(a) = (a/1)$.

(III) Commençons par montrer que les inversibles de $S^{-1}A$ sont les a/s avec a divisant un élément de S : si a/s est inversible, alors il existe b/t tel que $a/s \cdot b/t = 1$ donc il existe $u \in S$ tel que $u(ab - st) = 0$ comme $0 \notin S$ et A intègre (car factoriel), on a $ab = st$ donc a divise un élément de S. Réciproquement, si a divise $u \in S$ alors $u = ab$ et $a/s \cdot bs/u = abs/su = us/us = 1$ donc a/s est inversible dans $S^{-1}A$.

Soit $p \in A$ un élément irréductible. On se demande si $p/1$ est encore irréductible. Si p divise un élément S, alors $p/1$ est inversible donc on irréductible. Si par contre p ne divise aucun élément de S, alors $p/1$ n'est pas inversible, montrons qu'il est irréductible : si on a $p/1 = a/s \cdot b/t$ alors il existe $s' \in S$ tel que $s'(stp - ab) = 0$ donc $stp = ab$. Comme p est irréductible, il divise a ou b. Disons qu'il divise a. Alors $a = a'p$. Mais alors $a'b = st$ donc $a'/s \cdot b/t = 1$ donc a'/s et b/t sont inversibles dans $S^{-1}A$ ce qui montre que $p/1$ est irréductible.

Il y a donc deux sortes d'irréductibles dans A : les irréductibles p ne divisant aucun élément de S, on note I cet ensemble et les irréductibles p divisant un élément de S, on note J cet ensemble.

Déterminons les irréductibles de $S^{-1}A$ et montrons que l'ensemble des irréductibles de $S^{-1}A$ est formé des éléments de la forme a/s tel que $a/s \diamond p/1$ avec $p \in I$ (a/s est associé à $p/1$ ou encore ils ne diffèrent que d'un inversible). Nous avons déjà vu qu'un tel élément est irréductible.

Montrons la réciproque. Soit donc a/s un irréductible de $S^{-1}A$. Nous décomposons a en produit d'irréductibles dans A :

$$a = \prod_{p_i \in I} p_i^{v(p_i)} \cdot \prod_{q_j \in J} q_j^{v(q_i)}.$$

Dans $S^{-1}A$ on a q_i/s inversible car q_i divise un élément de S et p_i/s irréductible. Comme a/s est irréductible, il existe un unique p_i tel que $v(p_i) \neq 0$ et pour ce p_i, on a $v(p_i) = 1$. Alors on voit que

$$a = p_i \cdot \prod_{q_j \in J} q_j^{v(q_i)}.$$

De plus $u = \prod_{q_j \in J} q_j^{v(q_i)}$ divise un élément de S et est donc inversible dans $S^{-1}A$. Ainsi $a = p_i u$ et $a/s \diamond p_i/1$.

Nous pouvons maintenant prouver l'assertion (III). Pour l'existence de la décomposition : soit $a/s \in S^{-1}A$, nous décomposons a en facteurs irréductibles dans A :

$$a = x \prod_{p_i \in I} p_i^{v(p_i)} \cdot \prod_{q_j \in J} q_j^{v(q_i)}$$

avec x inversible dans A donc $x/1$ sera inversible dans $S^{-1}A$. L'élément $u = \prod_{q_j \in J} q_j^{v(q_i)}$ est inversible dans $S^{-1}A$, on a donc

$$a/s \diamond \prod_{p_i \in I} (p_i/1)^{v(p_i)}$$

qui est une décomposition en irréductibles dans $S^{-1}A$.

Supposons maintenant que l'on a deux décompositions de a/s :

$$a/s \diamond \prod_{p_i \in I} p_i^{v_i} \quad \text{et} \quad a/s \diamond \prod_{q_j \in I} q_j^{w_j}.$$

Il existe alors u/t inversible dans $S^{-1}A$ (c'est-à-dire u divisant un élément de S) tel que

$$\prod_{p_i \in I} p_i^{v_i} = u/t \cdot \prod_{q_j \in I} q_j^{w_j}.$$

Il existe donc $s' \in S$ tel que

$$s'(t \prod_{p_i \in I} p_i^{v_i} - u \prod_{q_j \in I} q_j^{w_j}) = 0,$$

ce qui donne

$$t \prod_{p_i \in I} p_i^{v_i} = u \prod_{q_j \in I} q_j^{w_j}.$$

Comme t et u divise des éléments de S, aucun des p_i respectivement des q_j ne peut diviser u respectivement t. On a donc

$$\prod_{p_i \in I} p_i^{v_i} = \prod_{q_j \in I} q_j^{w_j}$$

et par factorialité de A, les deux décompositions sont identiques à permutation près.

(iv) Montrons l'indication de l'énoncé à savoir que $\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = \mathrm{Nil}(A) \cdot S^{-1}A$. Soit donc $a/s \in \mathrm{Nil}(S^{-1}A)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a/s)^n = 0$. Il existe donc $s' \in S$ tel que $s'a^n = 0$ donc $a^n = 0$. Ainsi $a \in \mathrm{Nil}(A)$ et $a/s = a \cdot 1/s \in \mathrm{Nil}(A) \cdot S^{-1}A$. Réciproquement, si $a/s \in \mathrm{Nil}(A) \cdot S^{-1}A$, alors $a/s = b \cdot c/u$ avec $b \in \mathrm{Nil}(A)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = 0$ mais alors $(a/s)^n = (bc/u)^n = b^n c^n/u^n = 0$ donc $a/s \in \mathrm{Nil}(S^{-1}A)$.

Montrons maintenant l'implication. Supposons que A est réduit et montrons que $S^{-1}A$ l'est. Il suffit de montrer que $\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = 0$ mais $\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = \mathrm{Nil}(A) \cdot S^{-1}A$ et $\mathrm{Nil}(A) = 0$ car A est réduit.

Exercice 76. — (i) *Soit A un anneau, $a \in A$ et $S = \{a^n,\ n \geq 0\}$. Montrer que les anneaux $A[X]/(aX-1)$ et $S^{-1}A$ sont isomorphes.*

(ii) *En déduire à l'aide de l'exercice précédent que $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est principal.*

Solution. — (i) Première solution : vérification de la propriété universelle.

Comme l'homomorphisme $A \to S^{-1}A$ est solution d'un problème universel, il suffit de vérifier que $f : A \to A[X]/(aX-1)$ l'est aussi. Soit donc $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi(S) \subset B^\times$ (l'ensemble des éléments invesibles), montrons qu'il existe un unique morphisme de A-algèbres $g : A[X]/(aX-1) \to B$ tel que $\varphi = g \circ f$.

Se donner un tel g équivaut à se donner un morphisme de A-algèbres $A[X] \to B$ tel que $aX - 1 \mapsto 0$, ce qui correspond à se donner $x \in B$ (l'image de X) tel que $\varphi(a)x = 1$. Comme $\varphi(a) \in B^\times$, un tel x existe et est unique : c'est l'inverse de $\varphi(a)$.

Deuxième solution : construction d'un isomorphisme.

Si $a = 0$, c'est évident, on suppose donc $a \neq 0$. Soit $\varphi : A[X] \to S^{-1}A$ défini par $P \mapsto P(1/a)$. Il est surjectif par définition de $S^{-1}A$ et contient $aX-1$ dans son noyau. Soit maintenant P de degré n dans le noyau de φ. On ne peut faire la division euclidienne de P par $aX-1$ mais on peut faire celle de a^nP par $aX-1$. On a alors

$$a^nP(X) = (aX-1)Q(X) + R(X)$$

avec $R(X) = r \in A$. Mais alors $0 = \varphi(a^nP(X)) = \varphi(R(X)) = r/1 \in S^{-1}A$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $a^m r = 0$. On a donc $a^{m-1}r(aX-1) = a^{m-1}r$. Ainsi on voit que

$$a^{n+m-1}P(X) = a^{m-1}(aX-1)Q(X) + a^{m-1}r(aX-1)$$

donc $a^{n+m-1}P(X)$ est divisible par $aX-1$. Il reste à montrer que P est divisible par $aX-1$. Par récurrence il suffit de montrer que si aP est divisible par $aX-1$ alors P l'est.

Écrivons $P = \sum b_k X^k$ et suposons que $aX-1$ divise aP, c'est-à-dire

$$aP = \sum ab_k X^k = (aX-1)\sum c_k X^k.$$

On en déduit les relations $ab_0 = c_0$, $ab_1 = ac_0 - c_1$, $\cdots$ $ab_{n-1} = ac_{n-2} - c_{n-1}$ et $ab_n = ac_{n-1}$. On voit alors que c_0 puis c_1, etc. jusqu'à c_{n-1} sont divisibles par a. On écrit $c_k = ad_k$. On a alors

$$aP = (aX-1)a\sum d_k X^k = a(aX-1)Q.$$

Comme on ne sait pas que a n'est pas diviseur de 0, on ne peut encore conclure. Posons $P_1 = P - (aX-1)Q$, on a $aP_1 = 0$ donc $(aX-1)P_1 = -P_1$. Ainsi on a

$$P = (aX-1)Q - (aX-1)P_1.$$

Le polynôme P est donc dans $(aX-1)$ et $\mathrm{Ker}\varphi = (aX-1)$. On a l'isomorphisme recherché.

(II) D'après le (I), l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est le localisé de $\mathbb{C}[X]$ en la partie multiplicative $S = \{1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots\}$. Il est donc principal comme localisé d'un anneau principal (exercice précédent).

Exercice 77. — *Soit $A = A_1 \times A_2$ un produit d'anneaux. On a vu que les idéaux premiers de A sont de la forme $\mathfrak{p}_1 \times A_2$ ou $A_1 \times \mathfrak{p}_2$ pour $\mathfrak{p}_i$ un idéal premier de A_i. Montrer que l'on a des isomorphismes :*

$$A_{(\mathfrak{p}_1 \times A_2)} \simeq A_{1(\mathfrak{p}_1)} \quad \text{et} \quad A_{(A_1 \times \mathfrak{p}_2)} \simeq A_{2(\mathfrak{p}_2)}.$$

Solution. — On montre le premier isomorphisme l'autre est obtenu par symétrie. Tout élément de $A_{(\mathfrak{p}_1 \times A_2)}$ peut s'écrire sous la forme $(a_1,a_2)/(s_1,s_2)$ où $(a_1,a_2) \in A$ et $(s_1,s_2) \notin \mathfrak{p}_1 \times A_2$ c'est-à-dire $a_1 \notin \mathfrak{p}_1$. On peut alors considérer le morphisme $A_{(\mathfrak{p}_1 \times A_2)} \to A_{1(\mathfrak{p}_1)}$ qui à $(a_1,a_2)/(s_1,s_2)$ associe a_1/s_1. Ce morphisme est bien défini car si $(a_1,a_2)(s'_1,s'_2)/(s_1,s_2)(s'_1,s'_2)$ est un autre représentant de $(a_1,a_2)/(s_1,s_2)$ dans $A_{(\mathfrak{p}_1 \times A_2)}$ son image est $a_1s'_1/s_1s'_1 = a_1/s_1$.

Ceci définit un morphisme d'anneau. Il est évidement surjectif car si $a_1/s_1 \in A_{1(\mathfrak{p}_1)}$, alors $(a_1, 1_{A_2})/(s_1, 1_{A_2})$ est un antécédent. Soit $(a_1,a_2)/(s_1,s_2)$ dans son noyau. Alors $a_1/s_1 = 0$ dans $A_{1(\mathfrak{p}_1)}$. Il existe donc $s \notin \mathfrak{p}_1$ tel que $s(a_1 - s_1) = 0$. Mais alors $(s, 0_{A_2}) \notin \mathfrak{p}_1 \times A_2$ et $(s, 0_{A_2})((a_1,a_2)-(s_1,s_2)) = s(a_1-s_1) = 0$. Ceci signifie que $(a_1,a_2)/(s_1,s_2) = 0$ dans $A_{(\mathfrak{p}_1 \times A_2)}$. Le morphisme est injectif, c'est donc un isomorphisme.

Exercice 78. — *Soit A un anneau. Prouver ou donner des contre-exemples aux implications suivantes :*

(I) $\big(\forall\ \mathfrak{m}$ *maximal,* $A_\mathfrak{m}$ *est intègre*$\big) \Rightarrow \big(A$ *est intègre*$\big)$

(II) $\big(\forall\ \mathfrak{m}$ *maximal,* $A_\mathfrak{m}$ *est principal*$\big) \Rightarrow \big(A$ *est principal*$\big)$

(III) $\big(\forall\ \mathfrak{m}$ *maximal,* $A_\mathfrak{m}$ *est factoriel*$\big) \Rightarrow \big(A$ *est factoriel*$\big)$

(IV) $\big(\forall\ \mathfrak{m}$ *maximal,* $A_\mathfrak{m}$ *est réduit*$\big) \Rightarrow \big(A$ *est réduit*$\big)$

Pour (I), (II) *et* (III) *utiliser un produit d'anneaux.* (IV) *est vrai, pour montrer que $x \in \mathrm{Nil}(A)$ est nécessairement nul, montrer que $(0 : x) = A$).*

Solution. — (I) C'est faux. Nous construisons un contre-exemple :

Soit $A = A_1 \times A_2$ le produit de deux anneaux intègres. Les idéaux maximaux de A sont de la forme $\mathfrak{m}_1 \times A_2$ ou $A_1 \times \mathfrak{m}_2$ avec $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ des idéaux maximaux de A_1 et A_2 respectivement.

Les localisés sont donc

$$A_{(\mathfrak{m}_1\times A_2)} \simeq A_{1(\mathfrak{m}_1)} \quad \text{et} \quad A_{(A_1\times\mathfrak{m}_2)} \simeq A_{2(\mathfrak{m}_2)} \quad \text{cf. exercice précédent.}$$

Ainsi les localisés de A par un idéal maximal sont les localisés de A_1 ou de A_2 par un idéal maximal. Ils sont donc intègres. L'hypothèse de l'inplication (ɪ) est vérifiée mais pas la conclusion car $(1_{A_1}, 0_{A_2})$ et $(0_{A_1}, 1_{A_2})$ sont non nuls dans A, alors que leur produit est nul.

(ɪɪ) C'est encore faux, car un anneau principal est intègre. Nous reprenons le même exemple que ci-dessus en suposant A_1 et A_2 principaux.

Les localisés de A en un idéal maximal sont de la forme $A_{1(\mathfrak{m}_1)}$ et $A_{2(\mathfrak{m}_2)}$. Comme A_1 et A_2 sont principaux il est est de même de leurs localisés. Ainsi l'hypothèse de l'implication (ɪɪ) est vérifiée. Par contre A n'est pas intègre (cf. (ɪ)) donc il n'est pas principal.

(ɪɪɪ) C'est encore faux, car un anneau factoriel est intègre. Nous reprenons l'exemple (ɪ) en suposant A_1 et A_2 factoriels.

Remarquons que pour les cas (ɪɪ) et (ɪɪɪ), l'implication est fausse même si l'on suppose A intègre. Ainsi on peut montrer par exemple que l'anneau

$$A = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 + X)$$

est intègre, que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ on a $A_{\mathfrak{m}}$ principal (et donc factoriel) mais que A n'est pas principal ni même factoriel.

(ɪv) Soit a un élément nilpotent de A, il est encore nilpotent dans tout lacalisé de A. Comme $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, alors on a $a/1 = 0$ dans $A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m}$ maximal. Mais alors ceci signifie que pour tout $\mathfrak{m}$, il existe $s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tel que $s_{\mathfrak{m}}a = 0$.

Soit $I = (0 : a)$ l'idéal annulateur de a des $s \in A$ tels que $sa = 0$. On vient de voir que I n'est inclus dans aucun idéal maximal donc $I = A$ et $1 \in I$. Ainsi $1 \cdot a = 0$ donc $a = 0$ et A est réduit.

Exercice 79. — *Soit A un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Montrer que $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.*

Solution. — Soit K le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ et soit φ le morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to K$ défini par $a/s \mapsto Cl(a)/Cl(s)$ ($Cl(x)$ désigne la classe dans $A/\mathfrak{p}$ d'un élément $x \in A$). Ce morphisme est bien défini car si $s \notin \mathfrak{p}$, alors $Cl(s) \neq 0$ dans $A/\mathfrak{p}$ et de plus si $a/s = a'/s' \in A_{\mathfrak{p}}$, alors il existe $t \notin \mathfrak{p}$ tel que $ts'a = tsa'$, donc on a $Cl(t)Cl(s')Cl(a) = Cl(t)Cl(s)Cl(a')$ et donc

$$Cl(a)/Cl(s) = Cl(a')/Cl(s').$$

Ce morphisme est clairement un morphisme d'anneaux. Il est surjectif. En effet, soit $x \in K$, il existe $a \in A$ et $b \in A - \mathfrak{p}$ tels que $x = Cl(a)/Cl(b)$, on a alors $x = \varphi(a/b)$.

Le noyau de φ contient $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Soit a/s dans le noyau, on a alors $Cl(a)/Cl(s) = 0$ donc $Cl(a) = 0$ ce qui signifie $a \in \mathfrak{p}$ et donc $a/s \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. On a donc $\mathrm{Ker}\varphi = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ d'où l'isomorphisme recherché.

3.3 Localisation d'un module

Exercice 80. — *Soit S une partie multiplicative de A et M un A-module de type fini.*

(i) *Montrer que $S^{-1}M = 0$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $s \cdot M = 0$.*

(ii) *Montrer que*

$$S^{-1}\mathrm{Ann}_A(M) = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M).$$

(iii) *Donner des contre-exemples aux questions précédentes lorsque M n'est pas de type fini.*

Solution. — (i) Si $s \cdot M = 0$, alors $s \cdot m = 0$ pour tout $m \in M$ et donc $m/1 = sm/s = 0$ pour tout $m \in M$ et donc $m/t = 0$ pour tout $m \in M$ et $t \in S$. Réciproqiement, si $S^{-1}M = 0$, soient $m_1, \cdot, m_n$ des générateurs de M comme A-module. Comme $m_i/1 = 0$ dans $S^{-1}M$, il existe $s_i \in S$ tel que $s_i m_i = 0$ dans M. Mais alors si on pose $s = s_1 \cdots s_n$ alors $sm_i = 0$ pour tout i donc $sm = 0$ pour tout $m \in M$.

(ii) Soit $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$ et $s \in S$, alors pour tout $m/t \in S^{-1}M$, on a $a/s \cdot m/t = am/st = 0$. Donc $S^{-1}\mathrm{Ann}_A(M) \subset \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Réciproquement soit $a/s \in \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$, alors pour tout $m/t \in S^{-1}M$, on a $a/s \cdot m/t = 0$. On a donc $a/1 \cdot m/t = 1/s \cdot a/s \cdot m/t = 0$ donc $a/1$ annule $S^{-1}M$. Ceci impose que $S^{-1}(aM) = 0$ donc il existe $u \in S$ tel que $u \cdot aM = 0$ c'est-à-dire $ua \in \mathrm{Ann}_A(M)$ et donc $a/s = ua/us \in S^{-1}\mathrm{Ann}_A(M)$.

(iii) Il suffit de poser $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ et

$$M = \bigoplus_{n \geq 1} 2^n\mathbb{Z}.$$

Si $aM = 0$, on a $a \in (2^n)$ pour tout n donc $a = 0$ ce qui signifie $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$. Cependant, on a $S^{-1}M = 0$ car pour tout élément $m \in M$ il existe un entier n tel que $m = (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots)$, donc $2^n m = 0$ et finalement $m/1 = 0$ dans $S^{-1}M$. On a alors $\mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = S^{-1}A$.

Exercice 81. — (i) *Soit I un idéal d'un anneau A, montrer que $1 + I = \{1 + a \ / \ a \in I\}$ est une partie multiplicative. Montrer que $I \cdot S^{-1}A$ est contenu dans le radical de Jacobson de $S^{-1}A$ (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux maximaux).*

(ii) *Montrer que si M est un A-module de type fini tel que $I \cdot M = M$ alors il existe $x \in 1+I$ tel que $x \cdot M = 0$. Conclure que $S^{-1}M = 0$.*

Solution. — (i) Soient $1+a$ et $1+b$ deux élément de S, on a $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab \in S$ car I est un idéal. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $S^{-1}A$, on sait qu'il existe $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ne rencontrant pas S tel que $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{p}$. Un élément de $I \cdot S^{-1}A$ est de la forme a/s où $b \in I$. Supposons que $a/s \notin \mathfrak{m}$, alors comme $\mathfrak{m}$ est maximal, l'idéal $\mathfrak{m} + (a/s)$ est l'anneau $S^{-1}A$ tout entier donc il existe $p \in \mathfrak{p}$ et $b \in A$ tel que $1 = p/t + ab/su$. Il existe alors $s' \in S$ tel que $s'(psu + abt - sut) = 0$. On peut alors écrire $sut = 1 + a_1$, $su = 1 + a_2$, $s' = 1 + a_3$ avec a_1, a_2 et a_3 dans I et $abt = a_4 \in I$. On a alors $(1 + a_3)(p(1 + a_2) + a_4 - 1 - a_1) = 0$ ce qui donne

$$p = 1 + a_1 - pa_2 - a_4 + a_3(1 + a_1 - p - pa_2 - a_4) = 1 + c$$

avec $c \in I$. Ainsi on aurait $p \in S$ ce qui est absurde.

(II) Le lemme de Nakayama permet de dire qu'il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $x = 1 + a \in S$ tel que $xM = 0$. On a donc $S^{-1}M = 0$ d'après l'exercice précédent.

EXERCICE 82. — (I) *Soit S une partie multiplicative stable d'un anneau intègre A. On note $T(M)$ le sous-module des éléments de torsion.*

(I) *Montrer que $T(S^{-1}M) = S^{-1}T(M)$.*

(II) *Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *M est sans torsion,*

(b) *pour tout idéal $\mathfrak{p}$ premier, $M_\mathfrak{p}$ est sans torsion,*

(c) *pour tout idéal $\mathfrak{m}$ maximal, $M_\mathfrak{m}$ est sans torsion.*

SOLUTION. — (I) Si $0 \in S$, alors il y a égalité car les deux modules sont nuls. Suposons donc que $s \notin S$ et soit $m \in T(M)$ et $s \in S$, l'élément m/s est encore de torsion dans $S^{-1}M$. En effet, il existe $a \in A$ non nul tel que $am = 0$, on a donc $a/1 \cdot m/s = 0$ et $a/1 \neq 0$ car A est intègre et $0 \notin S$. On a donc $S^{-1}T(M) \subset T(S^{-1}M)$.

D'autre part, si $m/s \in T(S^{-1}M)$, alors il existe $a/t \in S^{-1}A$ non nul tel que $a/t \cdot m/s = 0$. Il existe donc $s' \in S$ tel que $s'am = 0$ et comme A est intègre et $0 \notin S$, on a $am = 0$. Comme $a \neq 0$, on a $m \in T(M)$ et donc $m/s \in S^{-1}T(M)$.

(II) D'après la question précédente, si $T(M) = 0$, alors $T(M_\mathfrak{p}) = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$. On a donc (a)$\Rightarrow$(b).

Comme tout idéal maximal est premier on a (b)$\Rightarrow$(c).

Supposons enfin que $M_\mathfrak{m}$ est sans torsion pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $m \in T(M)$ et $I = \mathrm{Ann}(m)$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal, l'image de m dans $M_\mathfrak{m}$ est un élément de torsion d'après le (I), mais $M_\mathfrak{m}$ est sans torsion donc $m/1 = 0$ dans $M_\mathfrak{m}$. Il existe donc $s \notin \mathfrak{m}$ tel que $sm = 0$. On a donc $I \not\subset \mathfrak{m}$ ($s \in I$ et $s \notin \mathfrak{m}$).

Ainsi I n'est contenu dans aucun idéal maximal, c'est donc que $I = A$. Mais alors $1 \cdot m = 0$ donc $m = 0$. Le module M est donc sans torsion.

4 Modules et anneaux noetheriens

4.1 Généralités

EXERCICE 83. — *Montrer que si M est un A-module noethérien alors $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien.*

SOLUTION. — Il suffit d'adapter la preuve du théorème de transfert de Hilbert.

Soit N un sous-$A[X]$-module de $M[X]$. Montrons qu'il est engendré par un nombre fini d'éléments. Soit

$$N_n = \{m \in M \ / \ \exists P \in N : \deg(P) = n \text{ et } m \text{ est le coefficient dominant de } P\}.$$

Les N_n sont des A-module et la suite $(N_n)_n$ est croissante. En effet, si m et p sont dans N_n, alors il existe P et Q dans N de degrés n et de coefficients dominant respectifs m et p. Alors $P + Q \in N$ est de degré n et de coefficient dominant $m + p$. De plus si $a \in A$, alors $aP \in N$ de degré n et de coefficient dominant am. N_n est donc un A-module. De plus si $m \in N_n$ et que $P \in N$ de degré n et de coefficient dominant m, alors $XP \in N$ de degré $n + 1$ et de coefficient dominant m, donc $m \in N_{n+1}$ donc la suite des $(N_n)_n$ est croissante.

Comme M est noethérien, la suite des $(N_n)_n$ est stationnaire, disons à partir de n_0 et les modules N_n sont engendrés par un nombre fini d'éléments, les $(b_{n,k})_{1\leq k\leq k_n}$. Pour chaque paire (n, k), notons $P_{n,k} \in N$ un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $b_{n,k}$. Nous allons montrer que N est engendré par les $(P_{n,k})_{1\leq n\leq n_0, 1\leq k\leq k_n}$, soit donc N' le sous-$A[X]$-module de $M[X]$ engendré par ces éléments.

Soit $P \in N$ de degré d. Nous allons montrer par récurrence sur d que $P \in N'$. Notons m le coefficient dominant de P, on a $m \in N_d$. Si $d \leq n_0$, alors $m = \sum_k a_k b_{d,k}$ donc $Q = P - \sum_k a_k P_{d,k} \in N$ est de degré strictement inférieur à d donc $Q \in N'$ par hypothèse de récurrence et donc $P \in N'$. Si $d > n_0$, alors $m \in N_d = N_{n_0}$ donc $m = \sum_k a_k b_{n_0,k}$ et $Q = P - X^{d-n_0} \sum_k a_k P_{n_0,k} \in N$ est encore de degré strictement inférieur à d, on conclue comme précédemment.

Exercice 84. — *Soit A un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, A est-il nécessairement noethérien ?*

Solution. — Oui : on sait que tout quotient d'un module (ou d'un anneau) noethérien est encore noethérien (cours). Or $A = A[X]/(X)$ donc A est noethérien si $A[X]$ l'est.

Exercice 85. — *Soit* $(0) \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow (0)$ *une suite exacte.*

(i) *Soient $E \subset F$ deux sous-module de M, tels que $i^{-1}(E) = i^{-1}(F)$ et $\pi(E) = \pi(F)$. Montrer que $E = F$.*

(ii) *Montrer que M est noethérien si et seulement si M' et M'' sont noethérien. (on pourra utiliser l'exercice 47).*

Solution. — (i) Comme $E \subset F$, il suffit de montrer que pour $f \in F$, on a $f \in E$. On sait que $\pi(f) \in \pi(F) = \pi(E)$ donc il existe $e'' \in E$ tel que $\pi(e'') = \pi(f)$. Mais alors ceci signifie que $f - e'' \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i)$. Il existe donc $e' \in M'$ tel que $i(e') = f - e'' \in F$. Mais alors $i(e') \in \pi^{-1}(F) = \pi^{-1}(E)$. Donc $i(e') \in E$ et $f = e'' + i(e') \in E$.

On peut remarquer que l'hypothèse $E \subset F$ est indispensable : par exemple si $M = k^2$, $M' = k \oplus (0)$, $M'' = k$, $E = k(1, 1)$ et $F = k(0, 1)$, on a alors $i^{-1}(E) = i^{-1}(F) = (0)$ et $\pi(E) = \pi(F) = k$ alors qu'aucune des inclusions $E \subset F$ ou $F \subset E$ n'est vraie.

(ii) Il est clair (cours) que tout sous-module et tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien. Ainsi si M est noethérien, M' et M'' le sont aussi.

Réciproquement, si M' et M'' sont noethérien, soit (M_n) une suite croissante de sous-modules de M. Par hypothèse, les suites $(i^{-1}(M_n))$ et $(\pi(M_n))$ sont stationnaires. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $i^{-1}(M_n) = i^{-1}(M_N)$ et $\pi(M_n) = \pi(M_N)$. D'après ce qui précède, on a alors pour tout $n \geq N$, $M_n = M_N$ et la suite (M_n) est stationnaire.

EXERCICE 86. — *Soient M, M' et M'' trois A-modules et $i : M' \longrightarrow M$ un homomorphisme injectif et $\pi : M \longrightarrow M''$ un homomorphisme surjectif tels que $\pi \circ i = 0$. Montrer que M est noethérien si et seulement si M', M'' et* $\mathrm{Ker}\pi/\mathrm{Im}i$ *sont noethériens.*

SOLUTION. — Si M est noethérien alors tout sous-module (donc en particulier M' et $\mathrm{Ker}\pi$) et tout quotient (en particulier M'') de M sont noethériens. Ensuite tout quotient de $\mathrm{Ker}\pi$ est noethérien (car on vient de voir que $\mathrm{Ker}\pi$ est noethérien) donc $\mathrm{Ker}\pi/\mathrm{Im}i$ est noethérien.

Réciproquement, on a un complexe $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ qui est exact partout sauf au centre (sa cohomologie est $\mathrm{Ker}\pi/\mathrm{Im}i$). On a donc des suites exactes $0 \to \mathrm{Ker}\pi \to M \to M'' \to 0$ et $0 \to \mathrm{Im}i \to \mathrm{Ker}\pi \to \mathrm{Ker}\pi/\mathrm{Im}i \to 0$. De plus comme i est injective, on a un isomorphisme entre M' et son image par i c'est-à-dire $\mathrm{Im}i$. Ainsi $\mathrm{Im}i$ est noethérien et comme $\mathrm{Ker}\pi/\mathrm{Im}i$ l'est aussi, on a (cf. execice précédent et grâce à la seconde suite exacte) $\mathrm{Ker}\pi$ est noethérien. Grâce à la première suite exacte et le fait que M'' est noethérien on en déduit (toujours exercice précédent) que M est noethérien.

EXERCICE 87. — *Soient M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-module de M. Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.*

SOLUTION. — Remarquons tout d'abord que la une suite exacte $0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$ nous dit que le module $M_1 \oplus M_2$ est noethérien si et seulement si M_1 et M_2 le sont.

Montrons que la suite $0 \to N_1 \cap N_2 \xrightarrow{i} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\pi} N_1 + N_2 \to 0$ donnée par $i(n) = (n, -n)$ et $\pi(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ est exacte. En effet, i est injective, π surjective et $\mathrm{Im}i \subset \mathrm{Ker}\pi$. Par ailleurs, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Ker}\pi$, alors $n_1 + n_2 = 0$ donc $n = n_1 = -n_2 \in N_1 \cap N_2$, donc $(n_1, n_2) = (n, -n) \in \mathrm{Im}i$.

Si N_1 et N_2 sont noethériens, alors $N_1 \oplus N_2$ l'est et donc $N_1 \cap N_2$ et $N_1 + N_2$ aussi (cf. exercice 83). Réciproquement, si $N_1 + N_2$ est noethérien, alors $N_1 \cap N_2$ l'est comme sous-module et donc (cf. exercice 83) $N_1 \oplus N_2$ l'est. Les deux modules N_1 et N_2 sont alors aussi noethériens.

Pour la seconde question, on remarque que l'on a la suite exacte

$$0 \to M/(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{i} M/N_1 \oplus M/N_2 \xrightarrow{\pi} M/(N_1 + N_2) \to 0$$

où $i(Cl(m)) = (Cl(m), -Cl(m))$ et $\pi((Cl(m_1), Cl(m_2))) = Cl(m_1 + m_2)$. En effet, on a bien π surjective, i injective et $\mathrm{Im}i \subset \mathrm{Ker}\pi$. Par ailleurs si $(Cl(m_1), Cl(m_2)) \in \mathrm{Ker}\pi$, alors $Cl(m_1 + m_2) = 0$ donc $m_1 + m_2 \in N_1 + N_2$ c'est-à-dire $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ avec $n_i \in N_i$. On a donc $m_1 - n_1 = -(m_2 - n_2)$ et $(Cl(m_1), Cl(m_2)) = (Cl(m_1 - n_1), -Cl(m_1 - n_1)) = i(Cl(m_1 - n_1)$ donc $\mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Im}i$.

Une fois que l'on sait que la suite est exacte, si M/N_1 et M/N_2 sont noethériens, alors $M/N_1 \oplus M/N_2$ aussi et donc $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien. Réciproquement, si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien, alors $M/(N_1 + N_2)$ en est un quotient donc noethérien et ainsi $M/N_1 \oplus M/N_2$ est aussi noethérien. On en déduit que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens.

EXERCICE 88. — *Soit M un A-module noethérien et $u \in \mathrm{Hom}(M, M)$. Montrer que u est bijective si et seulement si u est surjective (on pourra utiliser le lemme du serpent).*

SOLUTION. — Supposons que u n'est pas surjective, on va montrer que la suite des $(\mathrm{Ker} u^n)$ est alors non stationnaire (ce qui contredira l'hypothèse M noethérien).

Remarquons tout d'abord que comme u est surjective, c'est aussi le cas de u^n pour tout $n > 0$. On a alors pour tout $n > 0$ les suites exactes $0 \to \mathrm{Ker} u^n \to M \to M \to 0$. On peut donc écrire le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & N \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \mathrm{Ker} u \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} u^n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r, "u^n"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} u^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "u^{n+1}"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Q \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

et le lemme du serpent nous donne la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker} u^n \to \mathrm{Ker} u^{n+1} \to \mathrm{Ker} u \to 0$. Ainsi si u n'est pas injective, on a $\mathrm{Ker} u \neq 0$ et donc l'inclusion $\mathrm{Ker} u^n \subset \mathrm{Ker} u^{n+1}$ est stricte. La suite des $(\mathrm{Ker} u^n)$ n'est donc pas stationnaire, c'est impossible si M est noethérien.

EXERCICE 89. — *Soit M un A-module noethérien et $I = (0 : M)$. Montrer que A/I est un anneau noethérien.*

SOLUTION . — Soient $m_1, \cdots, m_n$ des générateurs de M comme A-module. Consodéros le morphisme $A \to M^n$ défini par $a \mapsto (am_1, \cdots, am_n)$. Son noyau contient I et si a est dans le noyau, alors pour tout $m \in M$, on peut écrire $m = \sum a_i m_i$ donc $am = \sum a_i am_i = 0$. Ainsi I est exactement le noyau. Par le théorème de factorisation, on peut donc voir A/I comme un sous-module de M^n, il est donc noethérien (comme A-module et la structure de A/I-module sur A/I est exatement la même que celle de A-module).

Exercice 90. — *L'anneau $A = k[X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots]$ est-il noethérien ?*

Solution. — On considère la suite croissante d'idéaux $((X_1, \cdots, X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on montre qu'elle n'est pas stationnaire. Si c'était le cas il existerait $n \in N^*$ tel que $X_{n+1} \in (X_1, \cdots, X_n)$. Il existerait alors des polynômes P_i_inA tels que $X_{n+1} = \sum_i X_i P_i$. On peut alors évaluer cette égalité en un point $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m)$ (on peut s'arrêter à m car il n'y a qu'un nombre fini de polynômes P_i qui font chacun intervenir un nombre fini de variables. Si on suppose que $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_{n+1} = 1$, on a alors $1 = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 91. — *Soit A un anneau et $(I_n)_{n>0}$ une suite croissante d'idéaux de type fini. Montrer que $I = \bigcup I_n$ est de type fini si et seulement si la suite est stationnaire.*

Solution. — Si la suite est stationnaire, on a $I = I_n$ pour un certain n donc I est de type fini. Réciproquement si I est de type fini, soient $(a_1, \cdots, a_k)$ des générateurs de I. On a alors l'existence d'un n assez grand tel que pour tout i, on ait $a_i \in I_n$. Mais alors $I = I_n$ et la suite est stationnaire.

Exercice 92. — (i) *Soient A un anneau non noethérien, $a \in A$ et I un idéal de A. Montrer que si les idéaux $I + (a)$ et $(I : a) = \{x \in A \ / \ ax \in I\}$ sont de type fini, alors I l'est.*

(ii) *Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.*

Indication : *Considérer un idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini.*

Solution. — (i) Soient $z_1, \cdots, z_n$ des générateurs de $I+(a)$. Alors on peut écrire $z_i = x_i + a a_i$ avec $x_i \in I$ et $a_i \in A$. On constate alors que l'idéal engendré par a et les x_i est contenu dans $I + (a)$ et contient les z_i, c'est donc $I + (a)$.

Soient $y_1, \cdots, y_m$ des générateurs de $(I : a)$, on a $ay_i \in I$. Montrons que l'on a

$$I = (x_1, \cdots, x_n, ay_1, \cdots, ay_m).$$

L'inclusion $(x_1, \cdots, x_n, ay_1, \cdots, ay_m) \subset I$ est évidente. Soit $u \in I$, on a $u \in I + (a)$ donc $u = \sum u_i x_i + ta$ avec $t \in A$. Mais alors $ta = u - \sum u_i x_i \in I$ donc $t \in (I : a)$. On peut donc écrire $t = \sum t_j y_j$. On a donc

$$u = \sum u_i x_i + \sum t_j (a y_j) \in (x_1, \cdots, x_n, ay_1, \cdots, ay_m).$$

(ii) Si A est noethérien, tous ses idéaux et donc en particulier les idéaux premiers sont de type fini.

Réciproquement, supposons que tous les idéaux premiers soient de type fini et soit E l'ensemble des idéaux de A qui ne sont pas de type fini. On veut montrer que $E = \emptyset$. Supposons que ce n'est pas le cas.

L'ensemble E est ordonné par l'inclusion et est inductif : si (I_n) est une suite croissante d'idéaux qui ne sont pas de type fini, alors $I = \bigcup I_n$ n'est pas de type fini (si c'était le cas on aurait $I = (a_1, \cdots, a_k)$ et il existerait n tel que $a_i \in I_n$ pour tout i donc $I = I_n$ qui serait de type fini, c'est absurde).

D'après le lemme de Zorn, il existe donc un (ou des) élément(s) maximal (maximaux) dans E. Soit I un tel élément maximal, il n'est pas de type fini donc n'est pas premier. Il existe donc a et $b \notin I$ tels que $ab \in I$.

On a alors $I \subsetneq I + (a)$, donc $I + (a)$ est de type fini. De plus $I \subsetneq (I : a)$ (car il est clair que $I \subset (I : a)$ et $b \in (I : a)$, $b \notin I$) donc $(I : a)$ est de type fini. Le (i) nous dit que I est de type fini, c'est une contradiction donc $E = \emptyset$ et A est noethérien.

Exercice 93. — *Soit A un anneau intègre et noethérien. On suppose que A admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que cet idéal est engendré par un élément non nul a.*

(i) *Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.*

(ii) *Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Solution. — (i) Si u est inversible, alors $(u) = A$ donc $u \notin \mathfrak{m}$. Si par contre u n'est pas inversible, alors $(u) \neq A$ donc il existe un idéal maximal contenant (u). Mais il y a un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ donc $u \in \mathfrak{m}$.

(ii) Soit $x \in A$ non nul. Si $x \notin \mathfrak{m} = (a)$, on a directement l'écriture avec $u = x$ et $n = 0$. Si $x \in (a)$, on écrit $x = ax_1$. L'écriture de x_1 est unique car A est intègre et $a \neq 0$. Si $x_1 \in (a)$, on continue et on écrit $x_1 = ax_2$, etc. On construit ainsi une suite d'éléments x_n tous non nuls (sinon x serait nul).

Si la suite s'arrête, on a écrit $x = a^n x_n$ avec $x_n \notin (a) = \mathfrak{m}$ donc x_n est inversible.

Si elle ne s'arrête pas, on a alors une suite croissante d'idéaux :

$$(x) \subset (x_1) \subset \cdots \subset (x_n) \cdots$$

qui doit être stationnaire car A est noethérien. On a donc $(x_n) = (x_{n+1})$ pour un certain n. Ceci donne $x_{n+1} = ux_n = uax_{n+1}$ et comme $x_{n+1} \neq 0$, on a $ua = 1$ c'est-à-dire a inversible, c'est impossible.

On a donc toujours une écriture $x = ua^n$, il reste à prouver l'unicité. Soient deux écritures $x = ua^n = va^m$ avec u et v inversibles et supposons par exemple que $m \geq n$. On a alors $u = va^{m-n}$ et comme u est inversible, ceci impose $m = n$ puis $u = v$.

Exercice 94. — *Soit A un anneau local dont l'idéal maximal est principal en gendré par a et tel que $\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.*

(i) *Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.*

(ii) *Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Montrer que tout idéal I est de la forme (a^n)*

(iv) *Montrer que A est noethérien.*

Solution. — (i) Si u est inversible, alors $(u) = A$ donc $u \notin \mathfrak{m}$. Si par contre u n'est pas inversible, alors $(u) \neq A$ donc il existe un idéal maximal contenant (u). Mais il y a un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ donc $u \in \mathfrak{m}$.

(ii) Soit $x \in A$ non nul. Par hypothèse on a donc un $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin \mathfrak{m}^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $x \in \mathfrak{m}^n$. On a alors $x = ua^n$ et $u \notin \mathfrak{m}$ (sinon $x \in \mathfrak{m}^{n+1}$). Ainsi u est inversible.

On a donc toujours une écriture $x = ua^n$.

(iii) Soit I un idéal, pour tout $x \in I$, on définit n_x le plus grand entier tel que $x \in \mathfrak{m}^{n_x}$. Soit alors $n_I = \min\{n_x \ / \ x \in I\}$. On a alors $I = (a^{n_I})$. En effet, si $x \in I$, alors $x = ua^{n_x}$ avec u inversible et $n_x \geq n_I$, on a donc $x = ua^{n_x - n_I}a^{n_I}$ donc $x \in (a^{n_I})$. AInsi $I \subset (a^{n_I})$. Par ailleurs, comme $n_I = \min\{n_x \ / \ x \in I\}$, il existe $x \in I$ tel que $n_x = n_I$. Ainsi $x = ua^{n_I}$ avec u inversible. L'idéal I contient donc a^{n_I}.

(iv) On vient de voir que tout idéal de A est principal (donc de type fini), l'anneau A est donc noethérien.

Exercice 95. — *Soit M un A-module noethérien et soit $\varphi : M \to M$ un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe un entier n tel que* $\mathrm{Ker}\varphi^n \cap \mathrm{Im}\varphi^n = 0$.

Solution. — La suite des sous-modules $(\mathrm{Ker}\varphi^n)$ est croissante donc stationnaire car M est noethérien. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n$, on ait $\mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^n$.

Si $x \in \mathrm{Ker}\varphi^n \cap \mathrm{Im}\varphi^n$, alors il existe $y \in M$ tel que $x = \varphi^n(y)$. Mais alors $\varphi^{2n}(y) = \varphi^n(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\varphi^{2n} = \mathrm{Ker}\varphi^n$. On a donc $x = \varphi^n(y) = 0$.

4.2 Anneaux gradués

Exercice 96. — *On dit qu'un anneau R est gradué s'il existe une décomposition $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ où les R_n sont des sous-groupes de $(R, +)$ vérifiant $R_n \cdot R_m \subset R_{n+m}$.*

(i) *Montrer que R_0 est alors un sous-anneau de R. Montrer aussi que $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$ est un idéal de R.*

(ii) *On suppose que R_0 est noethérien et que R est de type fini comme R_0-algèbre. Montrer que R est noethérien.*

(iii) *Réciproquement, on suppose R noethérien, montrer que R_0 est noethérien. Montrer qu'il existe des éléments $x_1, \cdots, x_r \in R$ avec $x_i \in R_{n(i)}$ pour un entier $n(i) \geq 1$ tels que $I = (x_1, \cdots, x_r)$. Montrer alors par récurrence que pour tout n, on a $R_n \subset R_0[x_1, \cdots, x_r]$. En* *déduire que R est une R_0-algèbre de type fini.*

(iv) *On se donne un anneau noethérien A et I un idéal de A. Soit $R(I)$ l'e,semble des polynômes $P \in A[T]$ tels que $P = \sum a_n T^n$ avec $a_n \in I^n$. Montrer que $R(I)$ est noethérien.*

Solution. — (i) Il est clair que R_0 est stable par addition, l'opposé et la multilication. C'est donc un sous-anneau. De même, I est un sous-groupe abélien de R et si $x = \sum x_n \in R$ et $y = \sum y_n \in I$ (donc $y_0 = 0$), alors

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} x_k y_m$$

et la composante de degré 0 est nul car elle fait toujours intervenir y_0. Ainsi $xy \in I$ et I est un idéal de R.

(ii) Toute algèbre de type fini sur un anneau noethérien est est anneau noethérien.

(iii) Comme l'application $R/I \to R_0$ définie par $\sum x_n \to x_0$ est un isomorphisme, R_0 est un quotient d'un anneau noethérien donc est noethérien.

Soient x_i des générateurs (en nombre fini car R est noethérien) de I. Si $x_i = \sum_n x_{i,n}$ avec $x_{i,n} \in R_n$, on a $x_{i,n} \in I$ et la famille $(x_{i,n})$ engendre a fortiori I. Quitte à remplacer les x_i par les $x_{i,n}$ on peut donc supposer que pour tout i, on a $x_i \in R_{n(i)}$.

Montrons par récurrence que $R_n \subset R_0[x_1, \cdots, x_r]$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai pour tout $k \in [0, n-1]$ et soit $y \in R_n$. Comme $y \in I$, il existe des $y_i \in R$ tels que $y = \sum_i y_i x_i$. On écrit $y_i = \sum_m y_{i,m}$ avec $y_{i,m} \in R_m$. En comparant les termes dans R_n on a

$$y = \sum_{i=1}^{r} y_{i,n-n(i)} x_i.$$

Pour tout i, si $n - n(i) < 0$, alors $y_{i,n-n(i)} = 0$ et si $n - n(i) \geq 0$, alors comme $n(i) \geq 1$, on a par hypothèse de récurrence $y_{i,n-n(i)} \in R_0[x_1, \cdots, x_r]$. On voit donc que $y \in R_0[x_1, \cdots, x_r]$ et $R_n \subset R_0[x_1, \cdots, x_r]$.

Il est résulte que $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n \subset R_0[x_1, \cdots, x_r]$. L'autre inclusion étant évidente on a égalité et R est engendrée comme R_0-algèbre par les x_i.

(iv) On a $R(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(I)_n$, avec $R(I)_n = I^n T^n \simeq I^n$. Si I est engendré par $P_1, \cdots, P_r$, on voit que $R(I)$ est engendrée par les $P_i T$ comme $R(I)_0$-algèbre. Par suite, $R(I)$ est un anneau noethérien.