

Feuille d'exercices 5

Soient k un corps parfait et Ω une clôture algébrique de k . Soit $K \subset \Omega$ une extension de k . On rappelle que K/k est dite *galoisienne* si pour chaque $x \in K$, tous les k -conjugués de x dans Ω appartiennent à K . D'après un résultat du cours, il est équivalent de demander que l'inclusion naturelle $\text{Hom}_k(K, K) \subset \text{Hom}_k(K, \Omega)$ soit une égalité. Par exemple, si $P \in k[X]$ (non nécessairement irréductible) et si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines de P dans Ω , alors $k(x_1, \dots, x_n) \subset \Omega$ est une extension galoisienne de k .

Exercice 1. (i) Montrer qu'une extension de degré 2 d'un corps de caractéristique 0 est galoisienne.

(ii) Donner un exemple d'une extension de $\mathbf{Q}$ de degré 3 qui ne soit pas galoisienne.

Exercice 2. Soit $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 4$.

(ii) Montrer que $\mathbf{Q}(x)/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisienne, bien que $\mathbf{Q}(x)/\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}$ le sont. (Pour le premier point, on pourra remarquer que $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}}$ est un conjugué de x sur $\mathbf{Q}$.) Vérifier que $\mathbf{Q}(x, i)$ est galoisienne sur $\mathbf{Q}$ de degré 8.¹

(iii) Montrer qu'en revanche, $\mathbf{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ est galoisienne sur $\mathbf{Q}$, de degré 4.

Exercice 3. (Une preuve par la théorie de Galois du théorème de d'Alembert-Gauss) Soit K une extension finie de $\mathbf{R}$, on veut montrer que $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

(i) Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré 2, alors $K \simeq \mathbf{C}$.

(ii) Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré impair, alors $K = \mathbf{R}$.

(iii) Montrer que $\mathbf{C}$ n'admet pas d'extension de degré 2.

(iv) Supposons $K/\mathbf{R}$ galoisienne finie. Montrer l'existence d'une tour d'extensions

$$\mathbf{R} \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K$$

telle que $[K_1 : \mathbf{R}]$ est impair et, pour $i = 1, \dots, n-1$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$. (On pourra utiliser le théorème de Sylow, ainsi que le résultat de l'exercice suivant (ii).)

(v) Conclure.

Exercice 4. Soit p un nombre premier. On rappelle qu'un p -groupe est un groupe fini de cardinal une puissance de p . Cet exercice utilise des notations et des idées de l'exercice 6 du TD précédent.

(i) (*Le centre d'un p -groupe est non trivial*) Montrer que si G est un groupe fini alors

$$|G| = |Z| + \sum_{i=1}^r |\text{conj}(x_i)|$$

pour certains éléments $x_1, \dots, x_r \in G \setminus Z$ bien choisis. En déduire que le centre d'un p -groupe est non trivial, puis qu'il contient un élément d'ordre p .

¹On pourrait montrer que $\text{Gal}(\mathbf{Q}(x, i)/\mathbf{Q})$ est isomorphe au groupe des isométries d'un carré.

(ii) Montrer que si $|G| = p^n$, alors il existe une suite de sous-groupes $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n$, avec $|G_i| = p^i$ et G_i distingué dans G . (On pourra d'abord montrer l'existence de G_1 puis procéder par dévissage.)

Exercice 5. * En utilisant la correspondance de Galois et l'exercice précédent (ii), montrer qu'un nombre algébrique $x \in \mathbf{C}$ est constructible à la règle et au compas si, et seulement si l'extension engendrée par x et ses conjugués est de degré une puissance de 2.

Exercice 6. Soit G le sous-groupe de $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(T))$ engendré par les automorphismes $F(T) \mapsto F(T^{-1})$ et $F(T) \mapsto F(jT)$ (où $j = e^{2i\pi/3}$).

(i) Vérifier que $|G| = 6$ (en fait, $G \simeq \mathfrak{S}_3$).

(ii) En déduire que $\mathbf{C}(T)^G = \mathbf{C}(T^3 + T^{-3})$. (On pourra commencer par remarquer que T est de degré au plus 6 sur $\mathbf{C}(T^3 + T^{-3})$.)