École Polytechnique 2009-2010

Théorie de Galois

Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ du polynôme

$$X^4 + 4X^3 + 12X^2 + 24X + 24.$$

On pourra commencer par étudier sa réduction modulo 5 et en déduire qu'il est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Donnée : son discriminant est $2^{12}3^4$.

Exercice 2. Soient p un nombre premier impair et $K = \mathbf{Q}[e^{2i\pi/p}] \subset \mathbf{C}$.

(i) Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe a $\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$.

(ii) En deduire que $L = \mathbf{Q}[\cos(2\pi/p)]$ est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de groupe de Galois cyclique d'ordre $(p-1)/2$.

(iii) Soit $n \geq 1$ un entier et soit $x \in \mathbf{C}$ tel que $x^n \in \mathbf{Q}$. Montrer que si x est dans L, alors $x^2 \in \mathbf{Q}$.

(iv) En deduire que si $p \equiv 3 \bmod 4$, l'extension L n'est pas radicale, bien qu'elle soit résoluble par radicaux.

Sous-groupes transitifs de $\mathfrak{A}_5$*.* Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{A}_5$ agissant transitivement sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. On montrera dans l'ex. 5 que G est l'un des groupes suivants :

- le groupe cyclique engendré par un 5-cycle,

- le normalisateur dans $\mathfrak{A}_5$ du sous-groupe engendré par un 5-cycle[1],

- $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 3. (i) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ du polynôme $X^5-5X+12$. On pourra utiliser la classification ci-dessus et les renseignements suivants (les x_i sont les racines complexes de ce polynôme) :

- $X^5 + 2X - 2$ est irréductible dans $\mathbf{F}_7[X]$,

- le discriminant de $X^5 - 5X + 12$ vaut $2^{12}5^6$,

- $\prod_{1\leq i<j\leq 5}(X - (x_i + x_j)) = (X^5 - 5X^3 - 10X^2 + 30X - 36)(X^5 + 5X^3 + 10X^2 + 10X + 4)$.

(ii) Montrer que les racines de $X^5 - 5X + 12$ s'expriment comme sommes de radicaux emboîtés.

(iii) Expliquer brièvement comment vous feriez pour vérifier chacune des informations données du (i).

Exercice 4. On se propose de démontrer la classification énoncée plus haut des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{A}_5$.

[1]C'est-à-dire que si c est le 5-cycle en question, $G = \{g \in \mathfrak{A}_5,\ gcg^{-1} \in \langle c\rangle\}$. En fait, on verra qu'il existe une double-transposition $\tau \in G$ telle que $\tau c\tau^{-1} = c^{-1}$ et $G = \langle \tau, c\rangle$.

(i) Montrer que si $d \leq 4$, un morphisme de groupes $\mathfrak{A}_5 \to \mathfrak{S}_d$ est nécessairement trivial.

(ii) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'indice ≤ 4. (Considérer l'action par translations à gauche de G sur G/H.)

(iii) Montrer que si $G \subset \mathfrak{A}_5$ est un sous-groupe transitif, alors soit $G = \mathfrak{A}_5$, soit G est engendré par un 5-cycle, soit $|G| = 10$.

On suppose désormais que $|G| = 10$.

(iv) Montrer que G contient un 5-cycle c et une double-transposition τ.

(v) Montrer que $\langle c \rangle$ est d'indice 2 dans G, en déduire que c'est un sous-groupe distingué de G.

(vi) Montrer que $\tau c \tau^{-1} = c^{-1}$.

(vii) Conclure.