École Polytechnique 2009-2010

Théorie de Galois

Corrigé de la Feuille d'exercices 5

Exercice 1.

(i) Si H est distingué dans G, alors

$$(gH)(g'H) = g(Hg')H = (gg')HH = (gg')H$$

pour tous $g, g' \in G$.

Réciproquement, avec $g = e$, on obtient $Hg'H = g'H$. Or $e \in H$, donc $Hg' \subset g'H$. De même, $H(g')^{-1} \subset (g')^{-1}H$, et donc $g'H \subset Hg'$. D'où l'égalité.

(ii) La loi est bien définie car

$$(gg'H) = (gH)(g'H)$$

ne dépend pas de g, g', mais seulement de gH, $g'H$. La loi est clairement associative, avec $(gH) = g^{-1}H$ et H le neutre. On obtient bien un groupe.

La définition du produit implique que π est un morphisme de groupes, qui est surjectif par définition de G/H. Si $gH = H$, alors $g \in H$. D'où $\mathrm{Ker}(\pi) = H$.

(iii) Appelons Ψ cette application. D'abord, comme X contient le neutre de G/H, on a bien $H \subset \Psi(X)$ et Ψ est bien définie. On a une application réciproque Ψ^{-1} qui à H' sous-groupe de G contenant H associe $\pi(H')$.

Supposons que G est fini. $\pi^{-1}(X)$ est l'ensemble des classes gH telles que $\pi(g) \in X$. Il y a $|X|$ telles classes, chacune de cardinal $|H|$, d'où l'égalité.

(iv) Si H est distingué dans G, il suffit de considérer $G' = G/H$ et $\pi = \phi$.

Réciproquement, pour $g \in G$ on a

$$\phi(gHg^{-1}) = \phi(g)\phi(H)\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e,$$

donc

$$gHg^{-1} \subset H = \mathrm{Ker}(\phi).$$

De même, $g^{-1}Hg \subset H$. Donc $gH = Hg$ et H est distingué dans G.

Exercice 2.

(i) On compare l'action de ces deux permutations sur $\{1, \cdots, n\}$. Elles agissent trivialement sur $\{1, \cdots, n\} \setminus \{\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k)\}$. Ensuite

$$(\sigma(i_1, \cdots, i_k)\sigma^{-1})(\sigma(i_j)) = (\sigma(i_1, \cdots, i_k))(i_j) = \sigma(i_{j+1})$$

avec la convention $i_{k+1} = i_1$. Donc les permutations coincident.

(ii) Il suffit de comparer les actions de $\sigma\sigma'$ et de $\sigma'\sigma$ sur $\{1, \cdots, n\}$: soit I le support de σ et J le support de σ'. Alors $\sigma\sigma'$ et $\sigma\sigma'$ agissent comme σ sur I et comme σ' sur J, car I et J n'ont pas d'élément commun. Elles agissent trivialement ailleurs.

(iii) L'ordre est le plus petit commun multiple des ordres des cycles.

(iv) Par exemple

$$(1, 2, 3, 4)^2 = (1, 3)(2, 4)$$

dans $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 3

(i) Il suffit de montrer qu'elles engendrent les cycles. Mais

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k) = (i_1, i_2) \cdots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k),$$

pour $i_1, \cdots, i_k$ distincts dans $\{1, \cdots, n\}$.

(ii) Comme les transpositions engendrent le groupe, il suffit déterminer l'image d'un tel morphisme sur les transpositions. Comme $\mathbf{C}^*$ est commutatif et que les transpositions sont conjuguées entre elles, elles ont toutes la même image. Cette image est d'ordre 2 car les transpositions sont d'ordre 2, c'est sont 1 ou -1 (qui sont les deux seuls complexes d'ordre 2 dans $\mathbf{C}^*$). On obtient donc deux morphismes, le morphisme constant et la signature.

(iii) On obtient un sous-groupe distingué comme noyau d'un morphisme de groupes.

L'image de la signature est

$$\{1, -1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

On obtient donc une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{S}_n \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0.$$