

Yves Laszlo

**COURS DE M2
INTRODUCTION À LA
GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE 2004-2005**

Yves Laszlo

École Polytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau, France.

E-mail : laszlo@math.polytechnique.fr

COURS DE M2
INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE 2004-2005

Yves Laszlo

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	9
2. Motivations géométriques	11
2.1. Fonctions continues sur les compacts	11
2.2. Fonctions algébriques sur l'espace affine	13
2.3. Le théorème des zéros de Hilbert et ses variantes	13
2.4. Variétés algébriques affines sur un corps	15
2.5. Spectres finis	16
3. La notion de schéma	19
3.1. Spectre d'anneau : espace topologique sous-jacent	19
3.2. Irréductibilité	20
3.3. Spectre d'anneau : faisceau structural	21
3.4. Morphismes d'espaces localement annelés	24
3.5. Schémas affines : morphismes	25
3.6. Annelé ou localement annelé	26
3.7. La notion de schéma	27
3.8. Le morphismes de Frobenius absolu	28
4. Faisceaux-quasi cohérents, sous-schémas	31
4.1. Faisceaux quasi-cohérents	31
4.2. Opérations sur les faisceaux quasi-cohérents	32
4.3. La notion de sous-schéma	34
4.4. Points d'un S-schéma	36
5. Construction de schémas	39
5.1. Foncteurs représentables	39
5.2. L'exemple de la droite affine	40
5.3. L'exemple du recollement	41
5.4. Recollement généraux	43
5.5. Produit	45
5.6. Le morphisme de Frobenius relatif	46
5.7. Fibres	47
5.8. Projectif et recollement	48
5.9. La construction Proj	50
5.10. Coordonnées homogènes	53
5.11. Foncteurs des points du projectif	54
5.12. La terminologie des systèmes linéaires	57
5.13. Faisceaux quasi-cohérents sur le projectif	58

5.14. Idéal homogène d'un fermé de \mathbf{P}^n	58
6. Conditions de finitude	61
6.1. Schémas noethériens	61
6.2. Points génériques des schémas noethériens	62
6.3. Faisceaux cohérents	63
6.4. Points associés d'un schéma noethérien	64
6.5. Propreté de \mathbf{P}_A^n	67
6.6. Séparation	68
6.7. Morphismes de type fini, propres, finis	69
6.8. Morphismes quasi-finis	71
6.9. Image schématique	72
6.10. Points des variétés	73
6.11. Variétés complètes	75
6.12. Le théorème de Chevalley	75
7. Hypersurfaces sur les schémas normaux	79
7.1. Notion de diviseur de Cartier effectif	79
7.2. Notion de diviseur de Cartier	79
7.3. Groupe de Picard et diviseurs de Cartier	80
7.4. Schémas normaux	81
7.5. Rappels sur la définition de la dimension	82
7.6. Diviseurs de Cartier sur les variétés normales	82
7.7. L'équation $ax = by$	84
7.8. Diviseurs de Weil	84
7.9. Groupe de Chow	85
7.10. Groupe de Picard et groupe de Chow	86
7.11. Application au projectif	86
7.12. Appendice : le lemme d'Artin-Rees	88
8. Platitude	91
8.1. Platitude, fidèle platitude	91
8.2. Ouverture et platitude	92
9. Dimension et platitude	95
9.1. Rappels sur la dimension des anneaux locaux noethériens : rappels bis	95
9.2. Équidimensionalité	96
9.3. Rappels sur les morphismes entiers	97
9.4. Intersections dans l'espace affine, projectif	98
9.5. Platitude générique : application à la dimension des fibres	100
10. Appendice : le critère local de platitude	103
10.1. Le cas nilpotent	103
10.2. Le cas général	104
10.3. Critère de platitude par fibres	105
11. Parenthèse sur les anneaux caténaux	107
11.1. Schémas caténaux	107
12. Modules de Cohen-Macaulay	111
12.1. Profondeur	111
12.2. Modules de Cohen-Macaulay	112
12.3. Schémas de Cohen-Macaulay, intersections complètes	113

12.4. Les anneaux de Cohen-Macaulay sont universellement caténares; application aux schémas arithmétiques	114
13. Appendice : complexe de Koszul	117
13.1. Rappels d'algèbre linéaire	117
13.2. Définition du complexe de Koszul	118
13.3. Acyclicité de $K_0(\phi, \mathcal{F})$	119
13.4. Intersections complètes dans \mathbf{P}_k^n	121
14. Lissité	123
14.1. Notion d'anneau régulier	123
14.2. Notion de morphisme lisse	124
14.3. Platitude des morphismes lisses	125
14.4. Morphismes plats à fibres lisses	126
14.5. Le théorème de Bertini	127
14.6. le théorème de Bertini pour les systèmes linéaires en caractéristique nulle	128
15. Appendice : localisation des anneaux réguliers	129
16. Cohomologie des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma noethérien	131
16.1. Définition de la cohomologie	131
16.2. Nullité de la cohomologie dans le cas affine	132
16.3. Calcul de la cohomologie à la Čech d'un schéma séparé	133
16.4. Appendice : comparaison avec la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens	136
16.5. Cohomologie de $\mathcal{O}(l)$ sur \mathbf{P}^n	137
16.6. Applications à Bézout, Noether AF+BG	138
16.7. Applications aux faisceaux cohérents sur \mathbf{P}_A^n	139
16.8. Cohomologie et dimension	140
16.9. Un critère pour les immersions fermées	141
16.10. Application aux systèmes linéaires	142
17. Degré des variétés projectives	145
17.1. Degré des faisceaux cohérents	145
17.2. Degré et cycle	146
17.3. Intersection avec une hypersurface générale	147
17.4. Sections hyperplanes générales : le théorème de Bertini	148
17.5. le théorème de Bertini pour les systèmes linéaires en caractéristique nulle	148
18. Degré et projections linéaires	151
18.1. Quelques remarques sur les projections linéaires	151
Bibliographie	155

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'objet de ce cours est de donner une introduction à la géométrie algébrique, du point de vue de la théorie des schémas de Grothendieck. Classiquement, il s'agit d'étudier les propriétés des espaces définis par des équations polynomiales. La théorie des schémas permet, dans une certaine mesure, d'étendre les méthodes géométriques à des situations arithmétiques, comme par exemple l'étude des anneaux d'entiers de corps de nombres.

Grosso modo, la remarque fondamentale est la suivante. Le théorème des zéros de Hilbert -cf. cours accéléré- affirme que l'ensemble Z_m des solutions complexes des équations polynomiales

$$P_1(x_0, \dots, x_n) = P_m(x_0, \dots, x_n) = 0$$

s'identifie avec l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau quotient $A = \mathbf{C}(x_0, \dots, x_n)/I$ où I est l'idéal de $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ engendré par les P_i . La valeur d'un polynôme P en un zéro x des P_i s'identifie alors en son image dans l'anneau quotient $k(x) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ où \mathfrak{p} est l'idéal des polynômes nuls en x . En fait, Z_m est muni d'une topologie (de Zariski), dont les fermés sont les sous-ensembles définis par des équations polynomiales. On définit alors les fonctions algébriques sur un ouvert de Zariski U : les fractions rationnelles sans pôle sur U . Ces fonctions définies localement s'organisent en un *faisceau* d'anneaux \mathcal{O} sur Z_m .

Grothendieck associe de même à tout anneau A un ensemble $Z = \text{Spec}(A)$ de points, l'ensemble de tous ses idéaux premiers (pas seulement maximaux) : c'est le spectre de A . Une « fonction » sur Z est alors naturellement un élément de A , sa valeur en $\mathfrak{p} \in Z$ étant par définition son image dans le corps résiduel $k(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Les sous-ensembles de $\text{Spec}(A)$ qui annulent une famille de « fonctions » ie d'éléments de A , sont les fermés d'une topologie sur Z , dite topologie de Zariski. De même, les quotients a/a' (dans un localisé convenable) définissent des fonctions sur l'ouvert $a' \neq 0$ et Z est ainsi muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} . Par exemple, si $A = \mathbf{Z}$, la valeur de la fonction définie par un entier en l'idéal premier $p\mathbf{Z}$ est son image dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Mais pourquoi diable ne pas considérer uniquement des idéaux maximaux après tout ? C'est simplement qu'on veut des morphismes raisonnables. Expliquons nous. Dans le cas polynomial, un morphisme $X \rightarrow Y$ de variétés algébriques (définies par des lieux de zéros par des polynômes $P_i(x), Q_j(y)$) sera simplement une application polynomiale $(x) \mapsto (y) = (f(x))$. Dit autrement, à un morphisme d'anneaux $A(Y) \rightarrow A(X)$ doit correspondre un morphisme de variétés algébriques. Considérons alors l'inclusion

$$\mathbf{C}[[t]] \hookrightarrow \mathbf{C}((t)).$$

L'anneau $\mathbf{C}[[t]]$ n'a que deux idéaux premiers, $s = t\mathbf{C}[[t]]$ et $\eta = 0$. Seul s est maximal, mais le morphisme correspondant $\text{Spec}(\mathbf{C}((t))) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{C}[[t]])$ envoie l'unique point de $\text{Spec}(\mathbf{C}((t)))$ sur η , qui n'est pas maximal (ce qui revient au même, pas fermé pour la topologie de Zariski -ici η est même ouvert et dense-). A partir de là, on voit l'utilité des idéaux non maximaux mais seulement premiers. Dans le cas polynomial, si on réfléchit un peu, on y reviendra, le théorème des zéros de Hilbert dit qu'on pourrait éventuellement se passer des idéaux non maximaux (car un morphisme

polynomial envoie alors point fermé sur point fermé). Mais même dans ce cas, la considération de points non fermés est très utile.

C'est le début de l'histoire...

D'un point de vue bibliographique, de multiples livres couvrent de multiples points de vue. Beaucoup de livres donnent une approche très efficace de la théorie des variétés sur un corps, mais gomment la considération de points non fermés, ce qui est dommage bien entendu lorsqu'on a en tête des énoncés plus arithmétiques, mais aussi dans le cas géométrique. On citera dans cette optique par exemple les jolis ouvrages [13] et [3]. Pour l'aspect purement complexe, on ne saurait trop conseiller la lecture de [5]. Bien entendu, le traité de référence de la théorie des schémas est la série des EGA de Grothendieck [6], mais qui est difficile d'abord, avec ses compléments moins « lissés », les SGA, qui, mis à part [8], sont très difficiles. On peut et on doit citer le célèbre livre de Harthorne [9], qui a le grand mérite d'aller rapidement vers des théorèmes non triviaux, mais laisse hélas les résultats d'algèbre indispensables en références dans les livres d'algèbre commutative. Le livre de Mumford [11], moins complet toutefois, est magnifique.

On suppose que le lecteur a déjà rencontré la notion de faisceaux, et, plus tard, de cohomologie des faisceaux (cf. cours accélérés). On rappellera les énoncés fondamentaux de cohomologie. Comme le lecteur le verra, on n'a pas besoin au moins dans un premier temps, comme souvent, de vraiment savoir comment est construite cette cohomologie, mais simplement de connaître ses propriétés. D'un point de vue d'algèbre, on suppose le lecteur familier avec les notions de localisation, de produit tensoriel, et d'anneau noethérien.

On a essayé de trouver un équilibre entre un traitement exhaustif des notions, dans leur plus grande généralité, ce qui aurait abouti à ne faire que du formalisme et l'étude des seules variétés sur les corps algébriquement clos, ce qui aurait conduit à perdre les idées profondes de comparaison arithmétique-géométrie. Aussi, on s'est directement intéressé aux schémas, même si comme on le verra rapidement, le cas des schémas sur les corps joue, même dans les situations arithmétiques, un rôle crucial. On a préféré donner des énoncés locaux assez fins sur les schémas au détriment de l'étude des diviseurs qui a été menée en exercices en travaux dirigés (cf. les feuilles). On n'a pas eu le temps de parler du faisceau cotangent et de ses variantes et on a dû se contenter des espaces cotangents de Zariski (cf. [11]).

Quelques remords parmi tant d'autres. On n'a pas eu le temps de parler du théorème de Riemann-Roch sur les courbes, de la dualité de Serre (cf. [9]) : c'est bien dommage. Ces thèmes font l'objet d'un exposé d'étudiant du mini-séminaire organisé en février. Il est alors facile de donner les rudiments de théorie d'intersection sur les surfaces qui permettent par exemple de comprendre la preuve de Weil des conjectures de... Weil sur les courbes. Ceci a donné lieu à un autre exposé (disponible en ligne). Les théorèmes de changement de base étaient à portée de main : ils font l'objet d'un exposé au mini-séminaire (cf. [10]) et sont rédigés dans les deux chapitres sur les familles de syzygies. La théorie du degré eut alors pu se transformer en une introduction à la théorie des intersections (cf. [4]).

Tous les anneaux considérés sont commutatifs, unitaires. Lorsque la lettre k désigne un anneau, il est sous-entendu que c'est un corps : on le précisera parfois, mais pas toujours.

Ce texte n'est qu'une version à peine mise en forme de notes privées. Il n'a aucune prétention à être exhaustif, exempt d'erreurs (de détail) ou de donner « L'approche » des questions abordées, mais plutôt une façon possible de voir les choses. Toutes les remarques des lecteurs sont bienvenues, notamment dans le cas, fort peu probable, où je me déciderais à transformer ce premier jet en un texte construit...

CHAPITRE 2

MOTIVATIONS GÉOMÉTRIQUES

On va d'abord expliquer comment comprendre la catégories \mathcal{E} des espaces métriques compacts en termes algébriques. Ceci motivera l'approche schématique et tout le formalisme qui suit.

2.1. Fonctions continues sur les compacts

Dans cette section, le mot espace signifie donc espace topologique compact. Notons que n'importe quel compact à bas dénombrable, comme par exemple une variété, un CW-complexe compact, sont métrisables ([2], proposition 2.9.16).

Soit X un espace. Notons $C(X)$ la \mathbf{R} -algèbre des fonctions continues sur X à valeurs réelles. En particulier, si X est réduit à un point, on a $C(X) = \mathbf{R}$. Bien entendu, toute application continue $f : X \rightarrow Y$ est une application au dessus du point (le point est un objet final de \mathcal{E}), de sorte que l'image inverse des fonctions définit un morphisme d'algèbres

$$f^* : C(Y) \rightarrow C(X).$$

On définit donc un foncteur C

$$\mathcal{E}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{R}\text{-algèbres.}$$

On va voir qu'il est pleinement fidèle. Pour cela, il faut comprendre comment récupérer X grâce à $C(X)$. Pour tout x de X , on note \mathfrak{m}_x l'idéal de $C(X)$ des fonctions nulle en x . C'est le noyau du morphisme surjectif d'évaluation

$$\text{ev}_x : C(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

de sorte que \mathfrak{m}_x est maximal. Inversement, on a

Lemme 2.1.1. — *Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de $C(X)$. Alors, il existe un unique point x tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.*

Preuve : prouvons l'unicité. Il suffit de prouver que l'intersection des supports des fonctions de \mathfrak{m}_x est réduit à x . Or, la fonction $y \mapsto d(y, x)$ est continue car lipschitzienne et de support x exactement. Passons à l'existence.

Soit donc maintenant \mathfrak{m} maximal. Supposons que pour tout x , il existe $f_x \in \mathfrak{m}$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Par compacité de X et continuité de X , on déduit l'existence d'un recouvrement fini de X par des ouverts U_i , des fonctions $f_i \in \mathfrak{m}$ qui sont partout non nulles sur U_i . Mais alors, $f = \sum f_i^2$ est > 0 sur X , donc inversible dans $C(X)$, et dans \mathfrak{m} . Une contradiction. ■

Exercice 2.1.2. — *En fait, le résultat précédent reste vrai pour tout espace compact (utiliser qu'un espace compact est normal, cf. [2], proposition 4.1.2). En revanche, il tombe en défaut en général sans hypothèse de compacité (considérer l'idéal des fonctions à support compact).*

La formule

$$(f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$$

assure que l'application

$$(2.1.a) \quad \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(C(Y), C(X))$$

est injective.

Proposition 2.1.3. — *Le foncteur C est pleinement fidèle.*

Preuve : il s'agit de montrer que l'application de functorialité (2.1.a) est surjective. Si X ou Y est vide, $C(Y)$ ou $C(X)$ est nul et c'est terminé. Supposons donc X, Y non vides.

Soit donc $\Phi \in \text{Hom}(C(Y), C(X))$ et $x \in \mathfrak{m}_x$. Le composé

$$\chi : C(Y) \xrightarrow{\Phi} C(X) \xrightarrow{\text{ev}_x} \mathbf{R}$$

est un morphisme d'algèbres unitaires non nulles, donc est surjectif, comme toute forme linéaire non nulle. Le noyau $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ de χ est donc un idéal maximal, qui s'écrit de manière unique $\mathfrak{m}_y, y \in Y$. On définit ainsi une application $f : X \rightarrow Y$ telle que

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}.$$

Vérifions qu'elle est continue. Soit F un fermé de Y et $g : Y \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction (continue) $y \mapsto d(y, F)$. On a

$$F = \{y \in Y \text{ tels que } g \in \mathfrak{m}_y\}$$

de sorte que

$$f^{-1}(F) = \{x \in X \text{ tels que } \Phi(g)(x) \in \mathfrak{m}_x\}$$

et donc est fermé, comme ensemble des zéros de $\Phi(g) \in C(X)$. ■

Remarque 2.1.4. — *La propriété clef est qu'un fermé d'un métrique compact est définie par une équation continue. Sans l'hypothèse d'existence de base dénombrable, ie de métrisabilité, c'est faux. Par exemple, montrer que si X est le complété d'Alexandrov d'un espace discret non dénombrable, il existe un fermé qui n'est pas de ce type (par définition, on rajoute un point à l'infini à notre espace discret, les voisinages ouverts de ce point étant les complémentaires de ce point; on vérifiera d'abord que X est compact).*

Si on y réfléchit plus avant, on s'aperçoit que $C(X)$ définit un espace topologique $\text{Specmax}(X)$ constitué par les idéaux maximaux de $C(X)$, les fermés étant les ensembles

$$D(f) = \{\mathfrak{m} \in \text{Specmax}(X) \text{ tels que } f \in \mathfrak{m}\} \text{ pour } f \in C(X).$$

On vérifie alors que l'application $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ définit un homéomorphisme de X sur $D(C(X))$. C'est une autre manière de voir la preuve précédente. Ainsi, l'espace topologique X est caractérisé par son algèbre de fonctions $C(X)$. Il est à noter que même l'évaluation $\text{ev}_x : C(X) \rightarrow \mathbf{R}$ est « codé » par $C(X)$, car elle peut-être vue comme l'application quotient

$$C(X) \rightarrow C(X)/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$$

le dernier isomorphisme étant l'unique isomorphisme d'algèbres entre les deux membres.

Le miracle est que l'image inverse d'un idéal maximal de $C(X)$ est non seulement premier, mais *maximal* ce qui vient du fait que le corps résiduel de cet idéal est toujours \mathbf{R} , jamais plus gros.

En général, l'image inverse d'un idéal maximal par un morphisme d'anneaux est seulement un idéal premier, ce qui sera la source de pas mal de difficultés par la suite (penser à l'exemple de \mathbf{Z} contenu dans \mathbf{Q} par exemple).

Avant de passer à la définition des schémas affine, regardons ce qui se passe dans l'espace affine k^n où suivant la tradition, k désigne un corps.

2.2. Fonctions algébriques sur l'espace affine

L'exemple topologique précédent nous apprend que l'important est de définir l'algèbre des « fonctions algébriques » sur k^n (sauf mention expresse, $n > 0$). Exceptionnellement, on supposera ici k infini ce qui nous permet d'identifier un polynôme à la fonction sur k^n qu'il définit.

Bien entendu, on prendra ici $C(k^n) = k[X_1, \dots, X_n]$ (la notation ne prêtant pas je crois à ambiguïté). Si, comme la terminologie usuelle le laisse entendre, un morphisme algébrique f entre k^n et k^m est de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (P_1(x), \dots, P_m(x))$$

avec $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ (comme plus haut, le point k^0 a pour algèbres de fonctions k et est un objet final en un sens adéquat). On a bien encore une application (d'image inverse des fonctions), clairement injective

$$C : \text{Hom}(k^n, k^m) \rightarrow \text{Hom}(C(k^m), C(k^n))$$

qui envoie f sur le morphisme d'algèbre défini par $y_i \mapsto P_i(x)$.

Bien entendu, l'idéal \mathfrak{m}_x des polynômes s'annulant en $x \in k^n$ est maximal et l'application

$$\mu : \begin{cases} k^n & \rightarrow \text{Specmax}(C(X)) \\ x & \mapsto \mathfrak{m}_x \end{cases}$$

ainsi définie est injective. Hélas, elle n'est pas bijective comme en 2.1.1. Notons que, comme dans le cas topologique, l'évaluation des polynômes en x s'identifie à l'application quotient $C(X) \rightarrow k$.

2.3. Le théorème des zéros de Hilbert et ses variantes

On a montré en cours accéléré (par récurrence sur n) l'énoncé suivant

Théorème 2.3.1 (Hilbert). — *Si k est algébriquement clos, μ est bijective.*

On ne peut espérer mieux. Par exemple, $(x_1^2 + 1)$ est maximal dans $\mathbf{R}[x_1]$ et pas de la forme précédente!!! Toutefois, c'est l'ensemble des polynômes nuls en $i = \sqrt{-1}$ ou $-i$ comme on préfère. Précisons ce point de vue.

Lemme 2.3.2. — *Supposons k quelconque. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de $C(k^n)$.*

- *Il existe $x \in \bar{k}^n$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.*
- *Le corps résiduel $k(x) = C(k^n)/\mathfrak{m}_x$ de x s'identifie au sous-corps de \bar{k} engendré par les x_i . En particulier, il est de dimension finie sur k .*
- *Si $x, y \in \bar{k}^n$ vérifient $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y$, alors il existe $\rho \in \text{Aut}_k(\bar{k})$ tel que $x_i = \rho(y_i)$, $i = 1 \dots, n$.*

Preuve : La projection

$$k[X_1, \dots, X_n] = C(X) \twoheadrightarrow C(X)/\mathfrak{m} = K$$

est définie par $x_i \in K^n$. Choisissons un plongement $r : K = C(X)/\mathfrak{m} \hookrightarrow \bar{K}$ dans une clôture algébrique de K prolongeant $k \hookrightarrow \bar{k}$. On a alors un unique morphisme d'algèbres

$$\text{ev}_x : \bar{k}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K(x)$$

qui envoie X_i sur x_i où $\bar{k}(x)$ est le corps engendré par \bar{k} et x_i dans \bar{K} . Par construction, ce morphisme est surjectif. D'après le théorème des zéros, son noyau provient d'un point de \bar{k}^n et le corps résiduel $\bar{k}(x)$ est donc de dimension un sur \bar{k} . Mais ce corps est $\bar{k}(x)$ et donc $x_i \in \bar{k}$, ce qu'on voulait. L'assertion sur le corps résiduel est claire. On conclut alors en observant qu'on alors $\bar{K} \xrightarrow{\sim} \bar{k}$ ce qui donne l'existence de ρ du troisième point (correspondant au choix de r). ■

Dans l'exemple précédent, on a bien deux choix possibles, i et $-i$, correspondant aux deux plongements distincts de \mathbf{R} dans \mathbf{C} . Notons que dans cette exemple, l'évaluation d'un polynôme réel en $x = \pm i$ est à valeurs complexes.

C'est un phénomène général : l'évaluation de $P \in C(k^n)$ en $\mathfrak{m} \in \text{Specmax}(C(k^n))$ est à valeurs dans $k(\mathfrak{m}) = C(X)/\mathfrak{m}$ qui n'est égal à k que lorsque $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ avec $x \in k^n$ (on dit que x est un point rationnel).

Rappel 2.3.3. — : si \mathfrak{p} est un idéal premier, le localisé $A_{\mathfrak{p}} = (A - \mathfrak{p})^{-1}A$ est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. On **note alors** $k(\mathfrak{p})$ le corps résiduel $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. On observera que c'est par définition le corps des fractions de A/\mathfrak{p} . L'évaluation $a(\mathfrak{p})$ de $a \in A$ en \mathfrak{p} est l'image de A dans $k(\mathfrak{p})$ par le morphisme canonique. Il est fondamental d'observer (exercice)

$$(2.3.a) \quad a(\mathfrak{p}) = 0 \text{ si et seulement si } a \in \mathfrak{p}.$$

Attention : dire que $a \in A$ est nulle en \mathfrak{p} ne signifie pas que son image dans le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ est nulle. Par exemple, si $P \in A = k[x]$, dire que P est nul en $\mathfrak{p} = xk[x]$ c'est dire $P(0) = 0$ alors que dire que P est nul dans $A_{\mathfrak{p}}$ c'est dire $P = 0$.

Avant de passer à la forme suivante du théorème des zéros, faisons l'exercice suivant, très facile, mais très utile, qui justifie d'ailleurs le vocabulaire précédent (corps résiduel).

Exercice 2.3.4. — Montrer que A est réduit (sans nilpotent) si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ est réduit pour tout premier \mathfrak{p} .

Lemme 2.3.5. — Soit \mathfrak{p} premier dans A . Le morphisme de localisation $A/\mathfrak{p} \rightarrow k(\mathfrak{p})$ est injectif. Il est bijectif si et seulement si \mathfrak{p} est maximal.

Preuve : l'injectivité est exactement contenue dans 2.3.a. Si maintenant l'évaluation est bijective, A/\mathfrak{p} est un corps donc \mathfrak{p} maximal. Inversement, tout élément α de $k(\mathfrak{p})$ est la classe de a/b , $b(\mathfrak{p}) \neq 0$ dans $A_{\mathfrak{p}}$. Mais alors b inversible dans le quotient et α est l'image de $a/b \in A/\mathfrak{p}$, d'où la surjectivité. Une autre manière de dire est que l'injection d'un anneau intègre dans son corps des fractions est surjective si et seulement si cet anneau est un corps. ■

La forme suivante du théorème des zéros n'en est qu'un corollaire, mais est extrêmement utile.

Théorème 2.3.6. — (Hilbert) Soit A une k -algèbre de type fini. Alors, un idéal premier \mathfrak{p} de A est maximal si et seulement si le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ est de dimension finie sur k .

Preuve : si $k(\mathfrak{p})$ est de dimension finie, il en est de même de A/\mathfrak{p} d'après le lemme. Mais une k -algèbre intègre de dimension finie est un corps (exercice) et donc \mathfrak{p} maximal. Inversement, supposons \mathfrak{p} maximal. Par hypothèse A est un quotient

$$k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$$

d'une algèbre de polynômes d'où une surjection

$$\chi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k(\mathfrak{p}).$$

On en déduit un isomorphisme du corps résiduel de l'idéal maximal $\ker(\chi)$ avec $k(\mathfrak{p})$ qui est donc de dimension finie d'après 2.3.2. ■

Comme dans le cas topologique, on déduit

Corollaire 2.3.7. — L'image réciproque d'un idéal maximal par un morphisme de k -algèbres de type fini est un idéal maximal.

Comme dans le cas topologique, ceci permet de généraliser largement les notions de morphismes algébriques.

2.4. Variétés algébriques affines sur un corps

Avant d'aller plus loin, on a maintenant les outils pour généraliser la notion d'espaces affines. En effet, si A est une algèbre de type finie, on associe son spectre maximal $\text{Specmax}(A)$, ensemble des idéaux maximaux de A . L'application « image inverse » Φ^{-1} d'un morphisme Φ définit une application (fonctorielle)

$$\text{Hom}_k(A, B) \rightarrow \text{Hom}(\text{Specmax}(B), \text{Specmax}(A))$$

car l'image inverse d'un idéal maximal est maximal d'après le théorème des zéros. Par analogie avec le cas topologique, on dit qu'une partie F est fermée si il existe une partie I de A telle que

$$F = V(I) = \{\mathfrak{m} \in A \text{ tels que } a(\mathfrak{m}) = 0 \text{ pour tout } a \in I\}.$$

Notons que F ne dépend que de l'idéal engendré par I . On vérifie (exercice) que ceci définit une topologie, dite de Zariski, sur $\text{Specmax}(A)$ et que Φ^{-1} est continue.

On a donc un foncteur de la catégorie des k -algèbres de type finie dans celle des espaces topologiques, qui n'a aucune chance d'être ne serait-ce que fidèle. Par exemple, l'image de la projection

$$k[t]/(t^2) \rightarrow k$$

est un isomorphisme de deux espaces ponctuels, sans être elle-même un isomorphisme.

Exercice 2.4.1. — Soit I un idéal nilpotent de A . Montrer que $\text{Specmax}(A/I) \rightarrow \text{Specmax}(A)$ est un homéomorphisme.

On remédiera à ce défaut en introduisant le faisceau des faisceau algébriques.

Pour le moment, notons que A joue le rôle d'ensemble des fonctions algébriques sur $\text{Specmax}(A)$. L'évaluation $a(\mathfrak{m})$ d'une fonction $a \in A$ en \mathfrak{m} est définie par l'image de a dans $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$.

Si on écrit A comme un quotient $k[x_1, \dots, x_n]/I$, alors $\text{Specmax}(A)$ s'identifie à l'ensemble

$$V(I) = \{\mathfrak{m} \in \text{Specmax}(k[x_1, \dots, x_n]) \text{ tels que } i(\mathfrak{m}) = 0 \text{ pour tout } i \in I\}.$$

muni de la topologie de Zariski. Rappelons que si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x, x \in \bar{k}^n$, l'évaluation $i(\mathfrak{m}_x)$ s'identifie à l'évaluation de i en x (qui vit dans $k(x) \hookrightarrow \bar{k}$). Autrement dit $\text{Specmax}(A)$ s'identifie au fermé défini par I . Inversement, $\text{Specmax}(A)$ permet « presque » de retrouver A , mais ce « presque » est un des piments de l'histoire. Commençons par un **rappel**, sous forme d'exercice.

Exercice 2.4.2. — Soit S contenu dans un anneau A stable par produits. Montrer que l'application image inverse identifie les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A ne rencontrant pas S . Vérifier que le morphisme de localisation identifie les corps résiduels correspondants. En considérant $A[1/a]$, montrer que l'idéal des nilpotents de A (le radical nilpotent) est l'intersection des idéaux premiers.

Dans le cas des algèbres de type fini, on n'a besoin que des idéaux maximaux pour calculer le radical nilpotent :

Lemme 2.4.3. — Soit a un élément de A , algèbre de type fini sur un corps. Alors, a est nulle sur $\text{Specmax}(A)$ si et seulement si a est nilpotente.

Preuve : le sens réciproque est clair. Inversement, si a n'est pas nilpotente, l'anneau de fractions $A[1/a]$ est non nul, et de type fini sur k . L'image inverse \mathfrak{m} d'un idéal maximal \mathfrak{m}' de l'anneau non nul $A[1/a]$ dans A est premier, et a pour corps résiduel celui de \mathfrak{m}' . D'après le théorème des zéros, ce dernier est de dimension fini et donc \mathfrak{m} maximal. Or $a(\mathfrak{p}) \neq 0$ par construction. ■

Rappelons la définition suivante :

Définition 2.4.4. — La racine \sqrt{I} d'un idéal I de A est l'idéal

$$\sqrt{I} = \{f \in A \text{ tels que } \exists n \in \mathbf{N} | f^n \in I\}.$$

Par exemple, $\sqrt{0}$ est l'ensemble des nilpotents et $A_{\text{réd}} = A/\sqrt{0}$ est l'anneau réduit de A , plus grand quotient sans nilpotent (on dit réduit) de A .

On a alors la dernière version du théorème des zéros de Hilbert, on a par exemple

Corollaire 2.4.5. — (Hilbert) Soit I idéal de $B = k[x_1, \dots, x_n]$, alors

$$\sqrt{I} = \{P \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ tels que } P(\mathfrak{m}) = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{m} \in V(I)\}.$$

Preuve : appliquer le lemme à $A = B/I$. ■

Remarque 2.4.6. — L'application $A \rightarrow A[1/a]$ du lemme induit le plongement de l'ouvert $D(a) = \{\mathfrak{m} \text{ tels que } a(\mathfrak{m}) \neq 0\}$ dans $\text{Specmax}(A)$. On a utilisé que $D(a)$ est le spectre maximal d'une algèbre de type fini, à savoir $A[1/a]$ et que l'image d'un point (fermé) de l'ouvert est un point (fermé) dans l'espace ambiant, grâce au théorème des zéros, précisément qu'on a bien fonctorialité.

Mais attention, les localisés d'une algèbre de type fini sur k en ses idéaux premiers ne sont essentiellement jamais de type fini sur k .

Exercice 2.4.7. — Soit \mathfrak{p} maximal dans A intègre disons, de type fini sur k . Montrer que si $A_{\mathfrak{p}}$ est de type fini sur k , alors A est un corps (cf. 2.5).

2.5. Spectres finis

On part d'une k -algèbre de type fini.

-Si elle était de plus de dimension finie sur k , tous les idéaux seraient maximaux, car on a déjà observé qu'une k -algèbre intègre de dimension finie est un corps, et le nombre des idéaux serait fini : si I_1, \dots, I_n sont des idéaux maximaux distincts, on a certainement $I_l + I_m = A$ si $n \neq m$ et le lemme chinois assure que $\prod_{i=1}^n A/I_i$ est un quotient de A ce qui assure que n est plus petit que la dimension de A .

Inversement, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5.1. — Soit A une k -algèbre de type fini. On suppose que $\text{Specmax}(A)$ est fini. Alors, A est de dimension finie sur k , tous les idéaux premiers de A sont maximaux. De plus, A est produit de ses localisés aux idéaux maximaux et donc est un produit de corps si A est de plus réduit. EN général, il existe n tel que $A = \prod A/\mathfrak{m}^n$ où \mathfrak{m} décrit $\text{Spec}(A)$.

Preuve : Observons que tous les idéaux premiers \mathfrak{p} sont maximaux. En effet, comme A/\mathfrak{p} est de type fini, son radical nilpotent, qui est nul puisque A/\mathfrak{p} est intègre, est l'intersection de ses idéaux maximaux. On en déduit qu'on a une écriture

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$$

avec $\mathfrak{m}_i \in \text{Specmax}(A)$. Un lemme d'évitement assure alors que l'un des \mathfrak{m}_i est contenu, donc égal à \mathfrak{p} (sinon, prendre $a_i \in \mathfrak{m}_i - \mathfrak{p}$ et considérer $\prod a_i$), ce qu'on voulait.

Le lecteur savant observera alors que A est noethérien de dimension zéro donc artinien et invoquera le théorème de structure des anneaux artiniens. Montrons le à la main. La flèche de localisation

$$A \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$$

est injective. En effet, dire que a est nul dans $A_{\mathfrak{m}}$, c'est dire que son annulateur n'est pas contenu dans \mathfrak{m} . Donc l'annulateur de a dans le noyau n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc est A tout entier et donc a est nul.

Maintenant, comme $\text{Spec}(A_{\mathfrak{m}})$ est réduit à $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ car tous les idéaux de A sont maximaux, l'intersection des premiers de $A_{\mathfrak{m}}$ est $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ qui est donc nilpotent (tous ses éléments sont nilpotents et

\mathfrak{m} de type fini). En regardant la suite, nulle pour $i \gg 0$ des $\mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}}$ et en observant qu'on a un isomorphisme

$$\mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^{i+1} A_{\mathfrak{m}},$$

on déduit que la dimension de $A_{\mathfrak{m}}$ est au plus

$$\sum_i \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} \dim_k k(\mathfrak{m})$$

et donc est finie (théorème des zéros).

Notons aussi qu'on a clairement $(k(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m}'} = 0$ si $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$.

Les espaces vectoriels $\mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{m})^{n_i}$ ont donc un localisé en $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$ qui est nul et donc $(A_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}'} = 0$ dans ce cas.

On déduit de ceci que $Q = \text{Coker}(A \rightarrow \prod A_{\mathfrak{m}})$ est de type fini et que tous ses localisés $Q_{\mathfrak{m}} = \text{Coker}(A_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\text{Id}} A_{\mathfrak{m}})$ sont nuls. On déduit alors $\text{Ann}(Q) \not\subset \mathfrak{m}$ pour tout \mathfrak{m} car \mathfrak{m} de type fini et donc $Q = 0$.

Si A est réduit, les $A_{\mathfrak{m}}$ sont réduits, et $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, qui est nilpotent, est nul. On a alors $A \xrightarrow{\sim} \prod k(\mathfrak{m})$ dans ce cas.

Sinon, choisissons $n \gg 0$ tel que $(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n = 0$ pour tout n . On a $A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} / (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n = A / \mathfrak{m}^n$ par l'argument de filtration précédent par exemple. On a donc $A \xrightarrow{\sim} \prod A / \mathfrak{m}^n$. ■

Mais attention, l'exemple de $A = k[[t]]$ prouve qu'on ne peut remplacer l'hypothèse « de type fini » par « noethérien ».

Remarque 2.5.2. — *Le lecteur reprendra cette preuve et la simplifiera notablement après l'étude de 3.3.5. En effet, en anticipant un peu, une fois qu'on a prouvé que les idéaux premiers sont maximaux, on utilise simplement que \mathfrak{m} est ouvert dans $\text{Spec}(A)$, comme complémentaire d'un nombre fini de points fermé. Comme la réunion de ces ouvert est disjointe, on a alors $H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) = \prod H^0(\{\mathfrak{m}\}, \mathcal{O}) = \prod A_{\mathfrak{m}}$ et on conclut comme dans la preuve précédente.*

Exercice 2.5.3. — *Soit A un anneau artinien. Montrer que $\text{Specmax}(A)$ est un ensemble fini. Reprendre la preuve précédente en utilisant la notion de longueur à la place de dimension et montrer que A est produit de ses localisés. Montrer que A est réduit si et seulement si tous ses localisés sont des corps. On rappelle que dire qu'un anneau est artinien c'est dire qu'il est noethérien et que ses idéaux premiers sont maximaux, ou bien, ce qui revient au même, que sa longueur, comme A -module, est finie.*

CHAPITRE 3

LA NOTION DE SCHÉMA

Le but est d'associer à tout anneau un espace topologique qui fasse de A sons « espace de fonctions ». On ne peut se satisfaire de $\text{Specmax } A$ comme précédemment. En effet, on veut comme plus haut une construction fonctorielle en A . Mais on a déjà observé que l'image inverse d'un idéal maximal n'est en général pas maximal (penser à l'inclusion de \mathbf{Z} dans \mathbf{Q} par exemple). Le remède est de considérer non seulement les idéaux maximaux mais tous les idéaux premiers. On va gagner la fonctorialité. Le prix à payer est que beaucoup de points sont non fermés (la topologie correspondante sera non séparée). Mais on va gagner des merveilleux points, les points génériques (qui peu ou prou seront... denses).

3.1. Spectre d'anneau : espace topologique sous-jacent

À tout anneau A on associe un espace topologique noté $\text{Spec}(A)$, dit *spectre de A* , défini comme suit :

-l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des idéaux premiers de A .

-les fermés sont les

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \text{ tels que } a \in \mathfrak{p} \text{ pour tout } a \in I\}$$

avec I partie de A .

Comme plus haut $V(I)$ ne dépend que de l'idéal engendré par I . Si \mathcal{I} est un ensemble d'idéaux de A

$$(3.1.a) \quad \bigcap_{I \in \mathcal{I}} V(I) = V(\Sigma \mathcal{I}) \text{ et } V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$$

pour $I, J \in \mathcal{I}$, de sorte qu'on a bien une topologie, dite de Zariski, la dernière égalité venant des inclusions

$$(I \cap J)^2 \subset IJ \subset I \cap J.$$

C'est l'exact analogue à la topologie de Zariski considérée plus haut.

Cette correspondance est contravariante, un morphisme $A \rightarrow B$ induisant (image réciproque des idéaux) une application continue $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Mais attention, une application continue $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ n'est pas toujours induite par un morphisme d'anneaux (cf. 3.6). Il faut pour réparer ce défaut ajouter une donnée supplémentaire, le faisceau des fonctions régulières \mathcal{O} .

Définition 3.1.1. — *Un espace topologique est quasi-compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini. Une application continue est quasi-compacte si l'image réciproque de tout ouvert quasi-compact est encore quasi-compact.*

Exercice 3.1.2. — *Montrer que le spectre d'un anneau est quasi-compact.*

Exercice 3.1.3. — *Montrer que la projection $A \twoheadrightarrow A/I$ définit un homéomorphisme de $\text{Spec}(A/I)$ sur $V(I)$ et qu'on a l'égalité $\text{Spec}(A_{\text{réd}}) \xrightarrow{\sim} V(\sqrt{0}) = \text{Spec}(A)$. Plus généralement, montrer qu'on a $V(I) \subset V(J)$ si et seulement si $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ [Utiliser l'exercice 2.4.2].*

L'exercice précédent illustre que, du point de vue topologique, on ne distingue pas A et $A_{\text{réd}}$. Généralement, les propriétés algébriques de A induisent des propriétés géométriques de $\text{Spec}(A)$, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 3.1.4. — Montrer que l'adhérence d'une partie X de $\text{Spec}(A)$ est le fermé $V(I)$ où I est l'ensemble des $f \in A$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$. En déduire que $\{\mathfrak{p}\}$ est fermé dans $\text{Spec}(A)$ si et seulement si \mathfrak{p} est maximal. Montrer que si A est de type fini sur un corps k , l'ensemble des points fermés est dense [Utiliser le théorème des zéros]. Montrer que c'est faux en général (observer que $\text{Spec}(k[[t]])$ a deux points, dont l'un est fermé et l'autre ouvert et dense par exemple).

3.2. Irréductibilité

Afin de déjà montrer l'aspect étrange, quoique séduisant, de la topologie de Zariski, introduisons la notion suivante.

Définition 3.2.1. — Un espace topologique X est dit
 – irréductible s'il est non vide et n'est pas réunion de fermés stricts ;
 – noethérien si toute suite décroissante de fermés stationne.

Comme pour les familles d'idéaux d'anneaux noethériens, toute famille non vide de fermés d'un espace noethérien admet un élément minimal.

Exercice 3.2.2. — Montrer que si A est noethérien alors $\text{Spec}(A)$ est un espace topologique noethérien. Montrer que la réciproque est fautive (considérer $\mathbf{R}[x_i, i \geq 0]/(x_i^2)$).

Exercice 3.2.3. — Montrer que $\text{Spec}(A)$ est irréductible et A réduit si et seulement si A est intègre.

Un espace irréductible est connexe, mais la réciproque est fautive. Comme pour la connexité, on a le résultat, facile, mais fort utile :

Lemme 3.2.4. — L'image d'un irréductible par une application continue est irréductible. Si X irréductible est dense dans Y , alors Y est irréductible.

Preuve : soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Supposons que $f(Y)$ s'écrive $F_1 \cup F_2$ (pour la topologie induite). Alors, $X = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$ est une écriture de X en réunion de deux fermés. On a donc $f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$. Comme f est surjective sur son image, on en déduit $F_1 \subset F_2$ en appliquant f . Pour le second, on écrit $Y = F_1 \cup F_2$. On en déduit que par exemple $X \cap F_1 \subset X \cap F_2$. Si $Y - F_2$ est non vide, il rencontre X en $x \notin F_2$. Nécessairement, $x \in X \cap F_1$, une contradiction. Ainsi $Y = F_2$, ce qu'on voulait. ■

Ce lemme est la clef de beaucoup de résultats d'irréductibilité. En particulier, si on montre que $\text{Specmax}(A)$ est irréductible, A k -algèbre de type fini, alors on aura $\text{Spec}(A)$ irréductible.

Exercice 3.2.5. — Montrer que si X est séparé et irréductible, alors X est réduit à un point. Montrer que dans un espace irréductible, les ouverts non vides sont denses (et en particulier se coupent). On rappelle 3.1.4 que les points fermés sont denses dans un schéma de type fini sur un corps. Soit $P, Q, R \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ avec P irréductible et Q non multiple de P . On suppose que pour tout $x \in \mathbf{C}^n$ tel que $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$, alors $R(x) = 0$. Montrer que P divise R . Donner également une démonstration élémentaire de ce dernier point.

Exercice 3.2.6. — Montrer que l'ensemble des matrices carrées complexes de rang r donné est irréductible dans $\text{Spec}(A)$ où $A = \mathbf{C}[x_{i,j}], 1 \leq i, j \leq n$ (on identifie $\text{Specmax}(A)$ avec $\mathbf{C}^{n^2} = M_n(\mathbf{C})$ comme précédemment. Quelle est son adhérence ?

Exercice 3.2.7. — On note $M_{n,k}$ le spectre de $k[x_{i,j}]$, $1 \leq i, j \leq n$. On observera qu'un point x de $M_{n,k}$ est défini par une matrice carrée de taille n à coefficients dans $k(x)$. On note $X = (x_{i,j})$ la matrice générique. On note $\mathbf{GL}_{n,k}$ l'ouvert $\det(X) \neq 0$. Montrer que $\mathbf{GL}_{n,k}$ est irréductible. Soit $P_{n,k}$ le fermé d'équations $X^2 - X = 0$ (l'espace des projecteurs). Montrer que $P_{n,k}$ a $n + 1$ composantes irréductibles qui sont aussi ses composantes connexes.

Proposition 3.2.8. — Soit X un espace topologique non vide noethérien. Alors, X est réunion finie de fermés irréductibles X_i . L'ensemble des X_i est bien déterminé par X si on impose $X_i \not\subset X_j$ pour tout $i \neq j$: c'est l'ensemble des fermés irréductibles maximaux de X , appelés composantes irréductibles.

Preuve : Prouvons l'existence de la décomposition. Soit alors \mathcal{E} l'ensemble des fermés non vides de X n'admettant pas de telle décomposition. Si \mathcal{E} est non vide, choisissons $F \in \mathcal{E}$ minimal. Mais F n'est pas irréductible, donc s'écrit $F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 non vides. Par minimalité, F_1 et F_2 ne sont pas dans \mathcal{E} , donc ont une décomposition en composantes irréductibles. La réunion de ces décompositions fournit une décomposition de F , une contradiction. D'où l'existence de la décomposition.

Dès qu'on a dans une décomposition en fermés irréductibles $X = \cup X_i$, on peut supprimer les X_i tels qu'il existe $j \neq i$ avec $X_i \subset X_j$ (on parle parfois de décomposition irrédundante). Prouvons l'unicité de telles décompositions.

Dans une telle décomposition, chaque X_j est maximal (pour l'inclusion). En effet, supposons que X_j soit contenu dans F fermé irréductible. On a

$$F = \cup(F \cap X_i)$$

de sorte que pour un certain i , on a $F \cap X_i = F$ et donc $F \subset X_i$. Mais alors, on a $X_j \subset F \subset X_i$, et donc $i = j$ (décomposition irrédundante), d'où l'on déduit $F = X_j$, ce qu'on voulait.

Inversement, si F fermé irréductible, le même argument prouve que pour un certain i , on a $F \cap X_i = F$ et donc $F \subset X_i$ ce qui assure $F = X_i$ si on suppose de plus F maximal. Donc cette décomposition est simplement la réunion de tous les fermés irréductibles maximaux. ■

Exercice 3.2.9. — Montrer que les composantes connexes d'un espace topologique noethérien sont ouvertes et fermées.

L'exercice montre le caractère local de cette décomposition.

Exercice 3.2.10. — Avec les notations de la proposition, soit U un ouvert non vide et J l'ensemble des i tels que $X_i \cap U$ non vide. Montrer que $U = \cup_{j \in J} (U \cap X_j)$ est la décomposition en facteurs irréductibles de U .

Par exemple, si $X = \text{Spec}(k[x]/(\prod P_i^{n_i}))$ avec P_i irréductible, alors les composantes irréductibles de X sont les $V(P_i)$ (exercice).

3.3. Spectre d'anneau : faisceau structural

Si $f \in A$, on note $D(f)$ -parfois aussi ($f \neq 0$)- l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tels que $f(\mathfrak{p}) \neq 0$. C'est l'ouvert complémentaire de $V(f)$.

Lemme 3.3.1. — *i) Les ouverts $D(f)$ forment une base de la topologie de $\text{Spec}(A)$.*

– *On a $D(fg) = D(f) \cap D(g)$.*

ii) Les $D(f_i)$ recouvrent $\text{Spec}(A)$ si et seulement si $1 \in (f_i)$.

iii) $D(f)$ est canoniquement homéomorphe à $\text{Spec}(A[1/f])$.

Preuve : un ouvert U contenant \mathfrak{p} est le complémentaire d'un fermé $V(I)$ qui ne le contient pas. Autrement dit, il existe $f \in I$ tel que $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ et donc $\mathfrak{p} \in D(f)$. En outre, $D(f) \subset U$ pour la même raison, ce qui prouve *i*). *ii*) découle immédiatement de ce que $k(\mathfrak{p})$ est un corps, donc intègre. Pour le dernier point, l'application d'image inverse des idéaux identifie (2.4.2) les idéaux premiers de $A[1/f]$ avec les ceux de A ne rencontrant pas $\{f^n, n > 0\}$. On vérifie sans peine que cette bijection est bicontinue. ■

Remarque 3.3.2. — *De façon un peu impropre comme il apparaîtra plus bas, on dira que $V(f)$ est l'hypersurface définie par f . Cette terminologie serait sans doute plus correcte si on supposait f non diviseur de zéro.*

Si M est un A -module, on associe le préfaisceau de groupes abéliens \tilde{M} sur $\text{Spec}(A)$ dont les sections sur un ouvert U sont les familles

$$s = (s_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$$

telles que pour tout $\mathfrak{p} \in U$ il existe une fonction $f \in A$ et $m \in M$ tels que

$$f(\mathfrak{p}) \neq 0 \text{ et } s_{\mathfrak{q}} = m/f \in M_{\mathfrak{q}} \text{ si } f(\mathfrak{q}) \neq 0.$$

Vérifions que c'est un faisceau.

Lemme 3.3.3. — *Le préfaisceau \tilde{M} est un faisceau.*

Preuve : Soit U_i un recouvrement ouvert d'un ouvert U et $s = (s_{\mathfrak{p}}), \mathfrak{p} \in U$ une section de s sur U dont la restriction à chaque U_i est nulle. Ceci signifie que $(s_{\mathfrak{p}}), \mathfrak{p} \in U_i$ est nulle, et donc s est nulle puisque les U_i recouvrent U , d'où le premier axiome. Le second axiome est aussi simple à vérifier. On se donne des sections s_i sur U_i coïncidant sur les intersections $U_i \cap U_j$. Soit $\mathfrak{p} \in U$. Les $s_{i,\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \in U_i$ ne dépendent que de \mathfrak{p} et pas de i (puisque les s_i coïncident sur les intersections) : on note cette valeur $s_{\mathfrak{m}} \in M_{\mathfrak{p}}$. Choissant i tel que $i \in U_i$, on sait qu'il existe m, f tel que $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ et $s_{i,\mathfrak{q}} = m/f$ dans $M_{\mathfrak{q}}$ pour \mathfrak{q} dans un voisinage de \mathfrak{p} dans U_i , ce qui signifie qu'on a aussi $s_{\mathfrak{q}} = m/f$ dans $M_{\mathfrak{q}}$ dans ce voisinage. ■

C'est la généralisation de la notion de fonction sans pôle sur U (ici, s s'écrit m/f sur l'ouvert $U = D(f)$, la condition $\mathfrak{q} \in D(f)$ signifiant que m/f est sans pôle sur U). Bien entendu, cette correspondance $M \mapsto \tilde{M}$ est fonctorielle.

Définition 3.3.4. — *Le faisceau d'anneaux \tilde{A} est noté \mathcal{O} (ou $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$) : on l'appelle le faisceau structural de $X = \text{Spec}(A)$. Une section de \mathcal{O} sur un ouvert U de X est aussi appelée une fonction régulière sur U .*

Chaque faisceau \tilde{M} est bien entendu un \mathcal{O} -module.

Proposition 3.3.5. — *On conserve les notations précédentes.*

i) La tige de \tilde{M} en \mathfrak{p} est $M_{\mathfrak{p}}$;

ii) Pour tout $f \in A$, le morphisme canonique

$$M[1/f] \rightarrow H^0(D(f), \tilde{M})$$

est un isomorphisme (fonctoriel).

iii) Toutes les sections de \mathcal{O} sur un ouvert U sont nulles si et seulement si U est vide.

Preuve : Les point *i*) et *iii*) sont faciles. Montrons le point *ii*).

-Injectivité. Supposons que l'image de $m/f^n \in M[1/f]$ soit nulle dans $H^0(D(f), \mathcal{O})$. Alors, pour tout $\mathfrak{p} \in D(f)$, on a m nul dans $M_{\mathfrak{p}}$ puisque f est inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$. L'idéal annulateur I de m n'est donc pas contenu dans \mathfrak{p} , ie $\mathfrak{p} \notin V(I)$. Autrement dit, $\mathfrak{p} \in V(I)$ entraîne $\mathfrak{p} \in V(f)$, ie $\sqrt{Af} \subset \sqrt{I}$. Donc $f^N \in I$ pour $N \gg 0$ donc $f^N m = 0$, ce qui prouve l'injectivité.

-Surjectivité. La restriction de \tilde{M} à $D(f) = \text{Spec}(A[1/f])$ s'identifie à $\widetilde{M[1/f]}$. Quitte à changer A en $A[1/f]$ et M en $M[1/f]$, on peut donc supposer $f = 1$. Soit donc s une section. Pour tout point $x \in \text{Spec}(A)$, il existe un ouvert $D(g_x)$ telle que sur $D(g_x)$, la section s provienne de $s_x/(g_x)^{N_x}$ avec $s_x \in M$. Par quasi-compacité, on peut extraire un recouvrement fini des $D(g_x)$ quand x parcourt $\text{Spec}(A)$. On a donc un nombre fini de g_i tels que

$$\cup_i D(g_i) = \text{Spec}(A) \text{ et } s = s_i/g_i$$

sur $D(g_i)$. On aimerait recoller les s_i/g_i : on va utiliser un procédé de partition de l'unité courant en topologie. Comme s_i/g_i et s_j/g_j coïncident sur $D(g_i g_j)$, il existe $n_{i,j} \in \mathbf{N}$ tel que

$$(g_i g_j)^{n_{i,j}} (g_j s_i - g_i s_j) = 0.$$

On peut supposer si on veut $n_{i,j} = N$ constant car on a un nombre fini d'indices i, j . On a alors

$$g_j^{N+1} g_i^N s_i = g_i^{N+1} g_j^N s_j \text{ pour tout } i, j.$$

Comme les $D(g_i) = D(g_i^{N+1})$ recouvrent $\text{Spec}(A)$, l'idéal engendré par les g_i^{N+1} est tout l'anneau. On peut donc écrire 1 sous la forme

$$1 = \sum_i a_i g_i^{N+1}$$

(somme finie) ; posons alors

$$\sigma = \ll \sum_i a_i g_i^{N+1} s_i/g_i \gg = \sum_i a_i g_i^N s_i \in M.$$

On a

$$g_j^{N+1} \sigma = \sum_i a_i g_j^{N+1} g_i^N s_i = \sum_i a_i g_i^{N+1} g_j^N s_j = g_j^N s_j$$

de sorte que s_j/g_j provient de σ dans $D(g_j)$, ce qu'on voulait. ■

Ce lemme justifie la terminologie de fonction régulière. Par exemple, sur l'espace affine $\mathbf{A}_k^n = \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$, une fonction régulière est bien un polynôme à n variables.

Corollaire 3.3.6. — *L'espace $X = \text{Spec}(A)$ est disconnexe si et seulement si A n'est pas un produit.*

Preuve : Seule la partie directe n'est pas claire. On va construire les idempotents correspondants. Soit U, V une partition ouverte non triviale de X . Les unités des anneaux non nuls $H^0(U, \mathcal{O})$ et $H^0(V, \mathcal{O})$ se recollent en des sections e_U, e_V de $H^0(X, \mathcal{O}) = A$ puisque l'intersection $U \cap V$ est vide. Mais on a (tester sur U et V) les formules

$$e_U + e_V = 1, e_U e_V = 0 \text{ et } e_U \neq 0, e_V \neq 0.$$

On a alors $A \xrightarrow{\sim} e_U A \times e_V A$. ■

En particulier, A est un produit si et seulement si $A_{\text{réd}}$ l'est (c'est un bon exercice que de prouver ça à la main) puisque leurs spectres sont homéomorphes. Le lecteur précisera alors le résultat de l'exercice 2.5.1.

Remarque 3.3.7. — *Comme on le verra, la topologie de Zariski n'est quasiment jamais séparée au sens de la séparation des espaces topologiques. Par exemple, on sait que dans un espace séparé, tous les points sont fermés et on invoque alors 3.1.4 pour donner un premier exemple. Plus généralement, si A est intègre mais n'est pas un corps, l'idéal premier nul est un point qui n'est pas fermé, car n'importe quel idéal maximal de A est dans son adhérence (en fait ce point est dense, c'est le point générique, cf. infra). Dans le cadre des schémas, la notion de séparation est plus subtile comme on le verra.*

Exercice 3.3.8. — On reprend les notations de l'exercice 3.2.7. Montrer qu'il existe $r + 1$ idempotents non nuls orthogonaux sur $P_{n,k}$. Peut-on en trouver plus ? Calculer les e_i explicitement (calculer $E(a)E(b)$ avec $E(a) = \det((a - 1)X + 1)$ et $X^2 = X$).

3.4. Morphismes d'espaces localement annelés

On a donc associé à tout anneau A un faisceau d'anneaux $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ sur un espace topologique $X = \text{Spec}(A)$. D'après 3.3.5, les tiges de \mathcal{O}_x de \mathcal{O} en tout point x de X sont des anneaux locaux : on dit dans ce cas que (X, \mathcal{O}_X) est un **espace localement annelé**.

Définition 3.4.1. — Une espace localement annelé est un couple (X, \mathcal{O}_X) où X est un espace topologique et \mathcal{O}_X un faisceau dont les tiges sont des anneaux locaux.

On notera le plus souvent, abusivement, le couple (X, \mathcal{O}_X) par X .

Remarque 3.4.2. — Si $X = (X, \mathcal{O})$ est un espace localement annelé et si U est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent X , le couple $(U, \mathcal{O}|_U)$ est encore un espace localement annelé, encore noté U . Cette remarque permettra de parler de propriétés locales d'espace annelés. Cette remarque ne s'applique pas aux fermés, car, a priori, il n'y a pas de manière canonique de fabriquer un faisceau localement annelé par restriction dans ce cas. On retrouvera ce phénomène lorsqu'on parlera de sous-schémas fermés.

Soient X, Y deux espaces localement annelés. Soit $m : X \rightarrow Y$ une application continue entre les espaces topologiques sous-jacents. Notons que pour tout $x \in X$, on a une flèche canonique

$$\gamma_x : (m_*\mathcal{O}_X)_{m(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

(simplement car si $m(x) \in U$, alors $x \in m^{-1}(U)$ et donc qu'une section de $m_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(m^{-1}(U))$ a une tige (un germe suivant la terminologie) en x).

Rappel 3.4.3. — soit $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux (unitaires). Supposons de plus A, B locaux. L'image réciproque $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B)$ est un idéal strict de A de sorte qu'elle est contenue dans \mathfrak{m}_A . En général, elle n'est pas égale (penser à l'inclusion d'un anneau local dans son corps des fractions par exemple). On dit que le morphisme est local si on a $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$. Il est utile d'observer que ϕ est local si et seulement si on a diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{m}_A) & \dashrightarrow & k(\mathfrak{m}_B) \end{array}$$

On pose alors la définition suivante :

Définition 3.4.4. — Un morphisme $m : X \rightarrow Y$ d'espaces localement annelés est un couple abusivement noté (m, m^\sharp) où m est une application continue de X dans Y et m^\sharp un morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow m_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout x de X , le morphisme composé

$$m_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,m(x)} \xrightarrow{m_x^\sharp} (m_*\mathcal{O}_X)_{m(x)} \xrightarrow{\gamma_x} \mathcal{O}_{X,x}$$

soit un morphisme d'anneaux locaux, ie $(m_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_{m(x)}) = \mathfrak{m}_x$.

Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{m(x)} & \rightarrow & \mathcal{O}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(m(x)) & \dashrightarrow & k(x) \end{array}$$

3.5. Schémas affines : morphismes

Soit alors $\mu : B \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux. On a déjà vu que l'application

$$m : \begin{cases} X = \text{Spec}(A) & \rightarrow & \text{Spec}(B) = Y \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mu^{-1}(\mathfrak{p}) \end{cases}$$

est continue. On va associer à μ un morphisme d'espaces localement annelés

$$(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Calculons d'abord $m_*\mathcal{O}_X$.

Lemme 3.5.1. — Soit M un A -module. Alors $m_*\tilde{M}$ s'identifie à \tilde{M}_B où M_B est M , vu comme B -module.

Preuve :

Observons d'abord l'égalité

$$(3.5.a) \quad m^{-1}D(g) = D(\mu(g)).$$

En effet, dire $\mathfrak{p} \in m^{-1}D(g)$, c'est dire $m(\mathfrak{p}) = \mu^{-1}(\mathfrak{p}) \in D(g)$, ou encore $g \in \mu^{-1}(\mathfrak{p})$. Mais cette relation signifie exactement $\mu(g) \in \mathfrak{p}$, ie $\mathfrak{p} \in D(\mu(g))$. Une section de $m_*\tilde{M}$ sur $D(g)$, $g \in B$ est donc une section de \tilde{M} sur $D(\mu(g))$. D'après 3.3.5, elle s'écrit $m/\mu(g)^N$ pour $m \in M, N \in \mathbf{N}$. Mais $m/\mu(g)^N$ s'écrit aussi m/g^N où on voit m comme élément de M_B . Comme les $D(g)$ forment une base de la topologie de Y , le lemme suit. ■

Ceci prouve qu'on a une identification

$$m_*\mathcal{O}_X = \tilde{A}$$

où A est considéré comme un B -module. Mais μ induit (par localisation) pour tout $g \in B$ un morphisme

$$H^0(D(g), \mathcal{O}_Y) = B[1/g] \rightarrow A[1/\mu(g)] = H^0(m^{-1}D(g), \mathcal{O}_X)$$

qui se recolle en un morphisme de faisceaux

$$(3.5.b) \quad m^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow m_*\mathcal{O}_X$$

Remarque 3.5.2. — Dans le cas où A et B sont des quotients d'algèbres de polynômes, le lecteur se convaincra que $m^\#$ s'identifie à la flèche d'image inverse des fonctions. Dans le cas général, c'est encore vrai si on voit les éléments de A comme des fonctions à valeurs dans le corps résiduels. Le défaut de ce point de vue est par exemple qu'on ne distingue pas un élément nilpotent de zéro.

Proposition 3.5.3. — Le morphisme $(m, m^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces localement annelés.

Preuve : D'après le calcul précédent, le morphisme canonique $m_{\mathfrak{p}}^\#, \mathfrak{p} \in X$ est simplement la flèche de localisation $B_{\mathfrak{q}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ avec $\mathfrak{q} = m(\mathfrak{p}) = \mu^{-1}(\mathfrak{p})$. Comme tel, ce morphisme est local (l'image inverse de l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est l'idéal maximal $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ de $A_{\mathfrak{q}}$). ■

La construction qui à un anneau associe son spectre définit donc un *foncteur* de la catégorie des anneaux dans la catégorie des espaces localement annelés.

Définition 3.5.4. — Un schéma affine est un espace localement annelé isomorphe au spectre

$$\text{Spec}(A) = (\text{Spec}(A), \mathcal{O})$$

d'un anneau A . Un morphisme de schémas affines est un morphisme d'espaces localement annelés.

On dit encore (abusivement) que cet espace localement annelé est le spectre de A .

Exemple 3.5.5. — On note \mathbf{A}_R^n le spectre de $R[X_1, \dots, X_n]$. C'est l'espace affine standard de dimension n sur R .

3.6. Annelé ou localement annelé

Rappelons que le schéma affine $Y = \text{Spec}(k[[t]])$ a deux points, $s = tk[[t]]$ qui est fermé et $\eta = (0)$ qui est dense et ouvert. Soit X le schéma affine $\text{Spec}(k((t)))$, topologiquement réduit à un point $*$. On définit un morphisme ϕ d'espaces annelés de la manière suivante :

- topologiquement $X \rightarrow Y$ en envoye $*$ sur s ;
- le morphisme

$$\mu^\sharp : \mathcal{O}_Y = \widehat{k[[t]]} \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_X = \widehat{k((t))}$$

est induit par l'inclusion $\iota : k[[t]] \hookrightarrow k((t))$.

Ce morphisme n'est pas un morphisme d'espaces localement annelés. On constate d'ailleurs que $H^0(\mu)$, l'inclusion ι , induit un morphisme $X \rightarrow Y$ d'espaces localement annelés qui envoye $*$ sur η et donc est différent de μ . Ce phénomène illustre que la bonne notion est bien celle d'espace **localement** annelé, comme le confirme l'énoncé fondamental suivant.

Théorème 3.6.1. — *Le foncteur spectre est une équivalence entre la catégorie des anneaux et celle des schémas affines.*

Preuve : Par définition, le foncteur spectre est essentiellement surjectif. Il s'agit de se convaincre que le foncteur est pleinement fidèle, *ie* que, pour tout anneau A, B , l'application

$$\text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B))$$

est bijective (le membre de droites l'ensemble des morphismes d'espaces localement annelés).

-Injectivité. Soit $\mu \in \text{Hom}(B, A)$ donnant lieu à $m \in \text{Hom}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B)) = \text{Hom}(X, Y)$. D'après 3.3.5, $H^0(m^\sharp)$ s'identifie à μ , ce qui prouve l'injectivité.

-Surjectivité. Tout morphisme de faisceaux $m^\sharp \in \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, m_* \mathcal{O}_X)$ se localise en $y = m(x), x \in X$ pour donner un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(m^\sharp) & & \\ & & \curvearrowright & & \\ H^0(Y, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & H^0(Y, m_* \mathcal{O}_X) & \xlongequal{\quad} & H^0(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\quad} & (m_* \mathcal{O}_X)_y & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_{X,x} \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & m_x^\sharp & & \end{array}$$

Si on suppose de plus m_x^\sharp local, il induit par projection sur les corps résiduels un diagramme commutatif

$$(3.6.a) \quad \begin{array}{ccc} H^0(Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{H^0(m^\sharp)} & H^0(X, \mathcal{O}_X) , \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(y) & \xrightarrow{m^\sharp(x)} & k(x) \end{array}$$

la flèche $m^\sharp(x)$ étant injective comme tout morphisme de corps.

Soit alors $m = (m, m^\sharp) \in \text{Hom}(X, Y)$ un morphisme de schémas affines, *ie* m^\sharp induit des morphismes locaux entre les tiges, et posons $\mu = H^0(m^\sharp) \in \text{Hom}(B, A)$. On a donc à disposition un second morphisme de schéma

$$M = \text{Spec}(\mu) : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B).$$

On doit vérifier qu'on a $M = m$. Mais on a

$$x = \{f \in A \text{ tels que } f(x) = 0 \text{ dans } k(x)\}$$

de sorte que le diagramme précédent et l'injectivité de $m^\sharp(x)$ assure qu'on a

$$M(x) = \mu^{-1}(x) = \{f \in B \text{ tels que } f(y) = 0 \text{ dans } k(y)\},$$

c'est-à-dire $M(x) = y = m(x)$. Ainsi, au niveau ensembliste, on a $M = m$. Par ailleurs,

$$m^{-1}(D(g)) = M^{-1}(D(g)) = D(\mu(g)) \text{ pour tout } g \in B$$

d'après 3.5.a. Par construction, m^\sharp et M^\sharp coïncident sur l'ouvert $Y = \text{Spec}(B)$. Sur $D(g)$, une section s de \mathcal{O} s'écrit b/g^n . L'image de $g^n s$ dans $M_*\mathcal{O}(D(g) = \mathcal{O}(D(\mu(g))))$ est

$$g^n M^\sharp(b) = g^n \mu(b) = g^n m^\sharp(b),$$

image vue dans $A_{\mu(g)}$ de sorte que $m^\sharp = M^\sharp$ sur $D(g)$ donc partout. ■

Exercice 3.6.2. — *comme dans le cas des spectres maximaux de k -algèbres de type fini, on sera le plus souvent intéressé par une situation relative $X \rightarrow S = \text{Spec}(R)$ où R est un anneau de base, jouant le rôle des fonctions sur l'espace ponctuel. Montrer que l'énoncé précédent se transpose en disant que la catégorie des S -schémas affines est équivalente à celle des R -algèbres.*

3.7. La notion de schéma

De même qu'on définit une variété comme étant un espace topologique (séparé, dénombrable à l'infini) localement isomorphe à un espace numérique standard, on va définir un schéma à l'aide de cartes standards, les schémas affines. La remarque 3.4.2 permet de poser la définition suivante

Définition 3.7.1. — *Un schéma est un espace localement annelé localement isomorphe à un schéma affine. Un morphisme de schémas est un morphisme d'espaces localement annelés.*

On dit souvent qu'une section globale f de \mathcal{O} est une *fonction régulière* de \mathcal{O} . Comme dans le cas affine, son image par le morphisme canonique

$$H^0(X, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k(x)$$

est la valeur de f en $x \in X$.

Exercice 3.7.2. — *Montrer que la flèche précédente est induite par des morphismes*

$$\text{Spec}(k(x)) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$$

qui envoie l'unique point de $\text{Spec}(k(x))$ sur x . Montrer que ce morphisme se factorise à travers tout ouvert contenant x .

La catégorie des schémas sera notée **Sch**. Le plus souvent, on aura un schéma de base S et on considérera la catégorie **Sch_S** des S -schémas (qu'on notera **Sch_A** si $S = \text{Spec}(A)$ -on parle alors de A -schéma-) dont les objets sont les morphismes, dits structuraux, $X \rightarrow S$ et les flèches sont les morphismes de schémas, dits de S -schémas, compatibles aux morphismes structuraux. Les sections globales d'un A -schéma dans l'image de la flèche

$$A = H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O})$$

sont souvent appelées fonctions constantes. Expliquons pourquoi. Par construction, pour tout $x \in X$, on a une flèche $A \rightarrow k(x)$. La valeur d'une fonction régulière $f \in H^0(X, \mathcal{O})$ en x est son image dans $k(x)$, un corps qui en général varie avec x . Mais A lui ne dépend pas de x , d'où la terminologie. Dans le cas d'un k -schéma $\text{Spec}(k[x_i]/I)$, les constantes au sens précédents s'identifient aux polynômes constants, ce qui est conforme à l'intuition.

Exercice 3.7.3. — Soit X un schéma. Montrer qu'il existe un unique morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$. En déduire une équivalence $\mathbf{Sch}_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sch}$.

Faisons une petite remarque, importante, de topologie. Si X est simplement un espace topologique, recouvert par des ouverts U_i . Alors, une partie P de X est ouverte si et seulement si chaque trace $P \cap U_i$ est ouverte dans U_i (donc dans X , car U_i ouvert de X) simplement car $P = \cup_i (P \cap U_i)$. Mais il est encore vrai que P est fermé si et seulement si chaque trace $P \cap U_i$ est fermé (dans U_i), simplement car $X \setminus P = \cup_i U_i \setminus P$ et $U_i \setminus P = U_i \setminus (P \cap U_i)$ qui est ouvert dans U_i , donc dans X . Ainsi, ces propriétés de X se testent localement.

Exercice 3.7.4. — Montrer qu'un schéma X est de Kolmogorov : si x, y sont deux points distincts de X , il existe un ouvert de X contenant l'un des deux points mais pas les deux.

Exercice 3.7.5. — Soit $f \in A$. Montrer que l'espace localement annelé $(D(f), \mathcal{O}_{|D(f)})$ s'identifie au schéma affine $\text{Spec}(A[1/f])$.

D'après l'exercice précédent, si U est un ouvert d'un schéma, l'espace localement annelé (U, \mathcal{O}_U) est un schéma : on munira toujours U de cette structure de schéma. Mais attention, un sous schéma ouvert d'un schéma affine n'est en général pas un schéma affine.

Exercice 3.7.6. — Soit $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n] = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$ l'espace affine et U le complémentaire de l'origine $o = (x_1, \dots, x_n)$. Montrer que si $n > 1$, la flèche de restriction $H^0(\mathbf{A}^n, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O})$ est un isomorphisme. En déduire que U n'est pas affine dans ce cas. Qu'en est-il si $n = 1$?

On a déjà observé signalé qu'un fermé d'un schéma ne définissait pas naturellement un schéma, car il n'est pas clair comment restreindre le faisceau structural au fermé. Dans le cas affine $X = \text{Spec}(A)$, un fermé est défini par un idéal I de A (les fermés pour la topologie de Zariski sont de la forme $V(I) = \{x \in X \text{ tels que } f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$). On a vu que $V(I)$ s'identifie à $\text{Spec}(A/I)$. Mais si on prend un idéal J qui a même racine que I , on a $V(I) = V(J)$ (cf. 3.1.3). Par exemple, les idéaux I, J de $k[x]$ engendrés par x ou x^2 définissent le même fermé de la droite affine $\mathbf{A}[x]$, à savoir l'origine, mais les schémas affines d'anneaux $k[x]/(x)$ et $k[x]/(x^2)$ ne sont pas isomorphes, les anneaux ne l'étant pas (l'un est un corps, l'autre pas). Aussi, on a de multiples structures de schémas sur le même fermé. On a besoin donc de plus que l'espace topologique sous-jacent : l'idéal de ses équations. On va définir la notion de faisceau quasi-cohérent d'idéaux qui permet de définir la notion de sous-schéma fermé.

3.8. Le morphismes de Frobenius absolu

Soit S un schéma et p un nombre premier. On suppose que p est nul sur S , ie que la multiplication par p sur \mathcal{O}_S est nulle (on dit que S est de « caractéristique p »). Rappelons que les coefficients binomiaux $\binom{p}{n}$ sont nuls modulo p si $0 < n < p$. La formule de Newton assure alors que l'application d'élévation à la puissance p sur \mathcal{O}_S est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

Lemme 3.8.1. — Si $S = \text{Spec}(A)$, le morphisme $F_a \in \text{Hom}(S, S)$ induit par $f \mapsto f^p$ est l'identité sur l'ensemble sous-jacent à S .

Preuve : Soit $\mathfrak{p} \in S$. Dire que $f \in F_a^{-1}(\mathfrak{p})$, c'est dire $f^p \in \mathfrak{p}$, mais, comme \mathfrak{p} est un idéal premier, on $f \in \mathfrak{p}$ et donc $F_a(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. ■

Définition 3.8.2. — Soit p premier et S un schéma de caractéristique $p > 0$. Le morphisme $F_a : S \rightarrow S$ de Frobenius absolu est

- l'identité sur l'espace topologique ;
- le morphisme $F_a^\sharp : \mathcal{O}_S \rightarrow F_{a*}\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_S$ est l'élévation à la puissance p .

Observons en particulier que F_a est injectif (même bijectif) et que les inclusions $k(F_a(s)) = k(s) \hookrightarrow k(s)$ sont purement inséparables.

Définition 3.8.3. — *Un morphisme de schémas qui est injectif et telles que les extensions résiduelles sont purement inséparables est dit radiciel.*

Exercice 3.8.4. — *On note k le corps premier \mathbf{F}_p . Montrer que le Frobenius F de $X = \mathbf{A}_k^n = \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$ est le k -morphisme défini par $X_i \mapsto X_i^p$. Montrer que c'est faux si on remplace \mathbf{F}_p par \mathbf{F}_{p^2} . Montrer que les points de \mathbf{A}_k^n fixent par F s'identifient à k^n . Généraliser au cas de $X = V(I)$ avec $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$.*

CHAPITRE 4

FAISCEAUX-QUASI COHÉRENTS, SOUS-SCHÉMAS

4.1. Faisceaux quasi-cohérents

On a vu que tout A -module M définit un faisceau \tilde{M} sur le schéma affine $X = \text{Spec}(A)$.

Définition 4.1.1. — Un faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -modules sur un schéma X est dit quasi-cohérent s'il existe un recouvrement X par des ouverts affines $U_i \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(A_i)$ tel la restriction de \mathcal{F} à U_i soit de la forme \tilde{M}_i pour un A_i -module M_i convenable.

Observons qu'on a nécessairement alors $M_i \xrightarrow{\sim} H^0(U_i, \mathcal{F})$ et $A_i = H^0(U_i, \mathcal{O})$ dans ce cas d'après 3.3.5. Bien entendu, cette notion est stable par les opérations usuelles : noyau, quotient, somme directe, produit...

Proposition 4.1.2. — Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur $X = \text{Spec}(A)$ et $f \in A$.

- Si $s \in H^0(D(f), \mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n s$ se prolonge en une section de \mathcal{F} sur X .
- Le foncteur $M \mapsto \tilde{M}$ est une équivalence entre la catégories des A -modules et celle des faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Spec}(A)$ un quasi-inverse étant $\mathcal{F} \mapsto H^0(X, \mathcal{F})$.

Preuve : La clef est la remarque suivante : si une section $s \in H^0(X, \mathcal{F})$ est nulle sur $D(f)$, alors il existe $n > 0$ tel que $f^n s$ est nulle sur X . En effet, comme X est quasi-compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $D(f_i)$ sur lequel $\mathcal{F} = \tilde{M}_i$ de sorte que s définit un élément $s_i \in M_i$. Mais la restriction de s_i sur $D(f) \cap D(f_i) = D(f f_i)$ est nulle. Donc, l'image de s_i dans le localisé $M_i[1/f]$ est nulle. Comme on a un nombre fini d'indices i , il existe n tel que $f^n s_i = 0$ dans chaque M_i . Comme \mathcal{F} est un faisceau, $f^n s = 0$.

Soit alors $s \in H^0(D(f), \mathcal{F})$. De même, sur $D(f f_i)$, sa restriction s'écrit σ_i / f^n avec $\sigma_i \in M_i = H^0(D(f_i), \mathcal{F})$. Les sections $\sigma_i - \sigma_j$ de \mathcal{F} sur $U = D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$ coïncident sur l'ouvert $D_U(f)$. Il existe donc m (indépendant de i, j si on veut) tel que $f^m \sigma_i = f^m \sigma_j$ sur U d'après ce qui précède. Il existe donc une (unique) section σ de \mathcal{F} sur X de restriction $f^m \sigma_i = f^{n+m} s$ sur U_i . Ainsi, $f^{n+m} s$ est une section globale.

Pour le dernier point, posons $M = H^0(X, \mathcal{F})$. On a bien entendu une flèche $\tilde{M} \rightarrow \mathcal{F}$, qui est bien entendue injective. Le point précédent prouve qu'elle est surjective. Ceci prouve que le composé $\mathcal{F} \rightarrow M = H^0(\mathcal{F}) \rightarrow \tilde{M}$ s'identifie à l'identité. Maintenant, comme $M \rightarrow H^0(\tilde{M})$ est un isomorphisme, le composé $M \rightarrow \tilde{M} \rightarrow H^0(\tilde{M})$ s'identifie aussi à l'identité (c'est ce dernier point qui ne fonctionnera pas dans le cas projectif). ■

Notons que d'après 4.1.2, on peut dans la définition 4.1.1 remplacer « s'il existe un recouvrement X par des ouverts affines » par « pour tout recouvrement X par des ouverts affines ».

Corollaire 4.1.3. — Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Le foncteur section globale de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X dans celles des A -modules est exact.

Preuve : En effet, c'est une équivalence de catégories abéliennes. ■

Exercice 4.1.4. — Montrer que tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur un schéma affine X est engendré par ses sections globales (ie la flèche de localisation $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$ est surjectif, autrement dit \mathcal{F}_x est engendré comme \mathcal{O}_x -modules par les tiges de sections globales). On verra de multiples exemples où cet énoncé tombe en défaut si X n'est pas affine.

Remarque 4.1.5. — Il existe une notion de faisceau quasi-cohérent sur un espace localement annelé X ([7]). Ces faisceaux jouissent des mêmes bonnes propriétés dans le cadre général que dans le cadre des schémas. Précisément, ce sont les \mathcal{O}_X -modules qui sont localement des conoyaux $\mathcal{O}^I \rightarrow \mathcal{O}^J$ où $\mathcal{O}^I, \mathcal{O}^J$ sont les faisceaux libres de base I, J . On montre (exercice) que c'est la même notion que plus haut dans le cas des schémas. Cette définition est intéressante lorsqu'on a à faire à des espaces annelés tels que les variétés analytiques complexes munies de leurs faisceaux de fonctions analytiques (cf. [5]).

4.2. Opérations sur les faisceaux quasi-cohérents

On laisse le soin au lecteur de réfléchir aux versions quasi-cohérentes des notions telles que somme directe, dual, produit tensoriel...

Soit $m : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas.

On sait définir l'image directe $m_*\mathcal{F}$ d'un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur \mathcal{G} , qui est muni d'une structure de \mathcal{O}_Y -modules grâce à $m^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow m_*\mathcal{O}_X$ si \mathcal{F} est quasi-cohérent. Cette opération ne conserve pas en toute généralité la quasi-cohérence, mais, comme le verra, les cas défavorables ne se rencontrent pas en pratique. Regardons d'abord l'image inverse, qui se comporte mieux.

4.2.1. Image inverse de faisceaux de groupes abéliens. — On désigne par m^{-1} l'image inverse des faisceaux de groupes abéliens. Par définition, on a un isomorphisme (bi) fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{G}, m_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(m^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

où \mathcal{F}, \mathcal{G} sont des faisceaux de groupes abéliens sur X, Y respectivement. C'est cette formule d'adjonction qui permet de calculer $m^{-1}\mathcal{F}$. Par exemple, on obtient

Exercice 4.2.1. — Si U est un ouvert de X , montrer que $m^{-1}\mathcal{G}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \varinjlim_{m(U) \subset V} \mathcal{G}(V).$$

Montrer que m^{-1} est exact.

En particulier, la flèche

$$m^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow m_*\mathcal{O}_X$$

donne par adjonction un morphisme (de faisceaux d'anneaux)

$$m^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Lemme 4.2.2. — Soit $i : F \rightarrow X$ l'inclusion d'un fermé de X . Alors, i^{-1} définit une équivalence de catégorie entre les faisceaux (de groupes abéliens) sur X nuls en dehors de F et les faisceaux (de groupes abéliens) sur F . Un quasi-inverse est i_* .

Preuve : Rappelons que dire que \mathcal{G} est nul en dehors de F signifie que ses tiges \mathcal{G}_x sont nulles si $x \notin F$. Comme F est fermé, ceci équivaut à $\mathcal{G}(U) = 0$ si U ne rencontre pas F . On en déduit immédiatement

$$i^{-1}\mathcal{G}(U \cap F) = \mathcal{G}(U)$$

pour tout ouvert U de X .

On doit vérifier que les morphisme d'adjonctions

$$i^{-1}i_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \rightarrow i_*i^{-1}\mathcal{G}$$

sont bijectifs (\mathcal{F} faisceau sur F et \mathcal{G} faisceau sur X). Soit V un ouvert de F : c'est la trace sur F d'un ouvert U de X . Le faisceau $i_*\mathcal{F}$ est nul hors de F , car si U ne rencontre pas F , on a $i^{-1}(U) = U \cap F = \emptyset$. Ainsi, on a

$$i^{-1}i_*\mathcal{F}(U \cap F) = i_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \cap F)$$

pour tout U , prouvant

$$i^{-1}i_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}.$$

De même, on a

$$i_*i^{-1}\mathcal{G}(U) = i^{-1}\mathcal{G}(U \cap F) = \mathcal{G}(U)$$

prouvant

$$i_*i^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}.$$

■

On identifiera toujours les faisceaux supportés sur un fermé et les faisceaux sur le fermé.

4.2.2. Image inverse d'un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules. — On va définir l'image inverse d'un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules \mathcal{G} sur Y , qui ne coïncide en général pas avec l'image inverse des faisceaux de groupes abéliens. Observons que, par functorialité de m^{-1} , le faisceau $m^{-1}\mathcal{G}$ est un $m^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module, ainsi que tout faisceau de \mathcal{O}_X -modules grâce à la flèche $m^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Lemme 4.2.3. — *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(m_*\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de la catégorie (opposée) des \mathcal{O}_X -modules dans celle des groupes abéliens est représentable par le faisceau $m^*\mathcal{G} = \mathcal{O}_X \otimes_{m^{-1}\mathcal{O}_Y} m^{-1}\mathcal{G}$.*

Preuve : Un morphisme ϕ de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(m_*\mathcal{F}, \mathcal{G})$ définit par adjonction un morphisme additif $\psi : m^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$. Par functorialité, la \mathcal{O}_X -linéarité de ϕ entraîne que ψ est $m^{-1}\mathcal{O}_Y$ -linéaire. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, il s'identifie au morphisme \mathcal{O}_X -linéaire

$$\psi \otimes \text{Id} : \mathcal{O}_X \otimes_{m^{-1}\mathcal{O}_Y} m^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}.$$

■

Exemple 4.2.4. — *Si $i : U \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert, $i^{-1}\mathcal{F}$ est simplement la restriction de \mathcal{F} à U et on a $i^*\mathcal{F} = i^{-1}\mathcal{F}$ (cf. 4.2.1).*

Donc, par définition, on a un isomorphisme (bi) fonctoriel dit d'adjonction

$$(4.2.2.a) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, m_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(m^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

où \mathcal{F}, \mathcal{G} sont des faisceaux quasi-cohérents sur X, Y respectivement. Cette flèche d'adjonction se faisceautise en un isomorphisme

$$(4.2.2.b) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, m_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} m_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Exercice 4.2.5. — *Calculer l'image directe, inverse du composé de deux morphismes de schémas. Vérifier que l'image inverse du produit tensoriel de deux faisceaux quasi-cohérent est le produit tensoriel des images inverses.*

Dans le cas X, Y affines d'algèbres B, A et M, N des B, A -modules, on a observé (3.5.1) la formule

$$m_*\tilde{M} = \widetilde{M_A}$$

pour tout B -module M . L'isomorphisme canonique et 4.1.3

$$\text{Hom}_A(N, M_A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_B(B \otimes_A N, M)$$

montrent qu'on a une identification canonique (et fonctorielle)

$$(4.2.2.c) \quad m^* \tilde{N} \xrightarrow{\sim} B \otimes_A N.$$

Ceci permet de calculer l'image inverse des faisceaux quasi-cohérents au voisinage de tout point x de X . En effet, on choisit un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de $m(x)$ dans Y . L'image inverse $m^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de x . On choisit alors un ouvert affine $V = \text{Spec}(B)$ de x dans $m^{-1}(U)$. L'image de V est contenue dans U , ce qui nous ramène au calcul précédent. En particulier, on a :

Corollaire 4.2.6. — *L'image inverse d'un faisceau quasi-cohérent est quasi-cohérent.*

La flèche m^\sharp définit une flèche $m^* \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, qui dans le cadre affine précédent, s'identifie à l'isomorphisme $B \otimes_A A \rightarrow B$, et donc est un isomorphisme. On identifiera toujours $m^* \mathcal{O}_Y$ et \mathcal{O}_X .

Exercice 4.2.7 (Formule de projection). — *Soit $m : X \rightarrow Y$ un morphisme de schéma et \mathcal{F}, \mathcal{G} quasi-cohérents sur X, Y respectivement. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique*

$$m_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} m^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} m_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}.$$

4.2.3. Image directe. — Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur X et $m : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. On va donner un critère simple assurant que l'image directe d'un faisceau quasi-cohérent est quasi-cohérent. Si X, Y sont affines d'algèbres A, B , de sorte que $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}$ avec $M = H^0(X, \mathcal{F})$. Le morphisme m fait de A une B -algèbre. Rappelons (3.5.1) qu'alors le faisceau $m_* \mathcal{F}$ s'identifie à $\widetilde{M_B}$ où M_B désigne M vu comme B -module. On en déduit que l'image directe $m_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent dans ce cas. Dans le cas général, on a le lemme suivant.

Lemme 4.2.8. — *Supposons m quasi-compact et supposons que l'intersection de deux ouverts affines de X est recouverte par un nombre fini d'ouverts affines. Alors, $m_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent.*

Preuve : Il suffit de montrer que si $U = \text{Spec}(A)$ ouvert affine de Y et $a \in A$, on a

$$H^0(m^{-1}U, \mathcal{F})[1/a] \xrightarrow{\sim} H^0(m^{-1}(U \cap D(a)), \mathcal{F}).$$

On peut supposer $Y = U$. Comme U est quasi-compact, $m^{-1}(U)$ aussi et on peut recouvrir $m^{-1}(U)$ par un nombre fini d'ouverts affines V_i . On recouvre ensuite les intersections $V_{i,j} = V_i \cap V_j$ par un nombre fini d'ouverts affines $V_{i,j,k}$. On note les modules correspondants à \mathcal{F} sur V_t simplement M_t où t est un indice à 1, 2 ou 3 entrées. Une section s de $H^0(m^{-1}D(a), \mathcal{F})$ est donnée par une collection s_t/a^{n_t} avec $s_t \in M_t$ et $n_t \in \mathbf{N}$ qui coïncident sur les $V_{i,j,k}$. Comme on a un nombre fini d'indices, la condition de recollement s'écrit : il existe N tel que pour tout i, j, k $a^N(s_i - s_j) = 0$ dans $V_{i,j,k}$. Les sections $a^N s_i$ se recollent en une section globale μ de \mathcal{F} et $s = \mu/a^N$ dans $H^0(m^{-1}U, \mathcal{F})_a$. ■

Anticipant sur le chapitre 4, on obtient

Corollaire 4.2.9. — *Soit $m : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact de schémas. Supposons soit X noethérien soit m séparé. Alors, l'image directe d'un faisceau quasi-cohérent par m est quasi-cohérent.*

4.3. La notion de sous-schéma

Soit X un schéma et \mathcal{I} un faisceau d'idéaux quasi-cohérent. Le **support** $|\mathcal{F}| = V(\mathcal{I})$ de \mathcal{O}/\mathcal{I} , ensemble des x où la tige est non nulle, est un fermé. En effet, sur un ouvert affine U d'anneau A , le faisceau \mathcal{I} est associé à un idéal I de A et le support de A/I est visiblement $V(I)$. On identifie (4.2.2) alors \mathcal{O}/\mathcal{I} à un faisceau \mathcal{O}_F (dépendant de \mathcal{I} , pas seulement de $|\mathcal{F}|$) sur le fermé $|\mathcal{F}| = V(\mathcal{I})$ de X , définissant alors un espace localement annelé

$$F = (|\mathcal{F}|, \mathcal{O}_F = \mathcal{O}/\mathcal{I})$$

dont la restriction à U est isomorphe à $\text{Spec}(A/I)$. C'est donc un schéma, parfois noté $V(\mathcal{I})$, dit associé à \mathcal{I} . Notons i l'application continue d'inclusion

$$i : |F| \rightarrow X.$$

Par construction, on a avec l'identification précédente

$$i_*\mathcal{O}_F = \mathcal{O}/\mathcal{I} \text{ et } i^*\mathcal{O}/\mathcal{I} = \mathcal{O}_F,$$

de sorte qu'on a un morphisme de schémas encore noté

$$i : F \rightarrow X.$$

Notons que \mathcal{I} est bien déterminé par l'immersion fermée $i : F \rightarrow X$ car c'est le noyau du morphisme structural $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_F$: on dit que c'est l'idéal définissant F (ses équations !). Dorénavant, on écrira \mathcal{O}_F pour $i_*\mathcal{O}_F$ de sorte qu'on la suite exacte fondamentale de définition de F

$$(4.3.a) \quad 0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow 0$$

Définition 4.3.1. — Soit X un schéma.

- Un sous-schéma fermé F de X est un schéma isomorphe au schéma $V(\mathcal{I})$ associé à un faisceau d'idéaux quasi-cohérent \mathcal{I} .
- Un morphisme de schémas $X \rightarrow Y$ est une immersion fermée si elle se factorise en $X \rightarrow V(\mathcal{I}) \rightarrow Y$ où \mathcal{I} idéal quasi-cohérent, $V(\mathcal{I}) \rightarrow Y$ est le morphisme canonique et $X \rightarrow V(\mathcal{I})$ est un isomorphisme.
- Un sous-schéma ouvert de X est un schéma isomorphe à un ouvert de X .
- Un morphisme de schémas $m : X \rightarrow Y$ est une immersion ouverte s'il existe un ouvert U de Y et une factorisation de m en $X \rightarrow U \rightarrow Y$ où $U \rightarrow Y$ est le morphisme canonique et $X \rightarrow U$ isomorphisme.
- Un sous-schéma de X est un schéma isomorphe à un sous-schéma fermé d'un ouvert de X .
- Un morphisme de schémas $m : X \rightarrow Y$ est une immersion s'il y a une factorisation de m en $X \rightarrow U \rightarrow Y$ où $U \rightarrow Y$ immersion ouverte et $X \rightarrow U$ immersion fermée.

Par exemple, si X est un schéma, le sous-faisceau $\mathcal{N}il$ des nilpotents de \mathcal{O}_X est quasi-cohérent et $V(\mathcal{N}il) = X_{\text{red}}$ est un sous-schéma fermé, dit sous-schéma réduit de X .

Exemple 4.3.2 (Sous-schémas fermés d'un schéma affine). — Si A est un anneau, les faisceaux quasi-cohérents d'idéaux \mathcal{I} sur $X = \text{Spec}(A)$ s'écrivent de manière unique \tilde{I} où $I = H^0(X, \tilde{I})$ (cf. 4.1.2). Ainsi, le sous schéma fermé défini par I s'identifie au sous-schéma fermé défini par l'immersion (fermée) $\text{Spec}(A/I) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$. Les points x de $\text{Spec}(A/I)$ sont les points de X tels que $i(x) = 0$ dans $k(x)$ pour tout $i \in I$.

Exercice 4.3.3. — Montrer que A est réduit si et seulement si tous les localisés $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in X = \text{Spec}(A)$ sont réduits, ou encore si l'immersion fermée $i : X_{\text{red}} \hookrightarrow X = \text{Spec}(A)$ est un isomorphisme.

Généralement, une propriété d'anneaux (invariante par isomorphismes) -comme la réduction- qui se « lit » sur les localisés comme plus haut donne lieu à une propriété correspondante de schémas. **Mais attention**, un morphisme de schémas dont l'application topologique sous-jacente est un homéomorphisme sur un ouvert n'est pas en général une immersion ouverte. Par exemple, si X non réduit, le morphisme $X_{\text{red}} \rightarrow X$ est une immersion fermée, qui est un homéomorphisme, mais n'est pas une immersion ouverte.

Exercice 4.3.4 (Support schématique). — Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur un schéma X . Soit \mathcal{I} le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_X annulant \mathcal{F} . Montrer que \mathcal{I} est quasi-cohérent et que $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ et \mathcal{F} ont même support. En déduire que le support de \mathcal{F} est fermé et que \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ -module. On dit que $V(\mathcal{I})$ est le support schématique de \mathcal{F} .

Exercice 4.3.5. — Soit C le sous-schéma fermé d'équation $x^2 = y^3$ (ie d'idéal engendré par $x^2 - y^3$) dans $\mathbf{A}_k[x, y]$ et considérons le morphisme $\mathbf{A}_k[t] \rightarrow C$ défini par $x \mapsto t^3$ et $y \mapsto t^2$. Montrer que c'est un homéomorphisme mais pas un isomorphisme, ni même une immersion. De même, étudier le morphisme de $\mathbf{A}_\mathbf{R}[t]$ dans lui-même défini par $t \mapsto t^3$ ou encore celui de $\text{Spec}(\mathbf{C}) = \text{Spec}(\mathbf{R}[t]/(t^2 + 1))$ dans $\text{Spec}(\mathbf{R})$.

L'exercice 4.3.5 montre que la notion d'isomorphisme de schémas, mêmes réduits, ne se confond pas avec celle d'homéomorphisme de l'espace topologique sous-jacent.

4.4. Points d'un S-schéma

On a déjà discuté après 2.3.6 le lien entre les points (fermés) d'un k -schéma affine $X = \text{Spec}(k[x_i]/(P_i))$ et les solutions dans \bar{k} du système d'équations $P_i(x) = 0$. Une telle solution n'est autre qu'un k -morphisme $\text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X$, on dit un point de X à valeurs dans \bar{k} , on encore un \bar{k} -point. Maintenant, d'un point de vue arithmétique, on peut s'intéresser à des K -points pour des extensions diverses de k . Par exemple, si X est le sous schéma-fermé de $\mathbf{A}_\mathbf{Q}[x, y, z]$ d'équation $x^n + y^n = z^n, n \geq 3$, l'ensemble de ses \mathbf{Q} -points a récemment fait couler beaucoup d'encre (théorème de Fermat-Wiles). Ceci motive la définition suivante.

Définition 4.4.1. — Soit X un S-schéma et T un S-schéma. Un S-morphisme $T \rightarrow X$ est appelé un T -point (ou point à valeurs dans T) de X . L'ensemble de ces points est noté $X(T)$. Un k -point d'un k -schéma est dit point rationnel.

Lorsque $T = \text{Spec}(B)$, on parle de B -point et on note $X(B)$ pour $X(T)$ -on omet S en général lorsque le contexte est clair-. Notons que si $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$, on trouve la situation absolue, sans schéma de base d'après 3.7.3.

Exercice 4.4.2. — Soit U un sous-schéma ouvert d'un S-schéma X . Vérifier que $U(T)$ s'identifie aux points de $X(T)$ tels que l'image de tout $t \in T$ est dans U .

Faisons le lien général entre point d'un A-schéma à valeur dans un corps K (au dessus de A) et les points de X . Oublions A dans un premier temps. Le schéma $\text{Spec}(K)$ est réduit à un point, donc l'image de $\text{Spec}(K)$ dans X est un point x , et le morphisme entre faisceaux structuraux induit une inclusion de corps résiduels $k(x) \hookrightarrow K$. Si on rajoute A , cette inclusion est un morphisme de A-algèbres. Ainsi, se donner un point de $X(K)$, c'est se donner 2 choses :

1. Un point x de X ;
2. Un plongement de $k(x)$ dans K au dessus de A .

On a déjà expliqué en détail comment deux K -points pouvaient donner le même point de X . En tout cas, on a donc une application $X(K) \rightarrow X$, en général ni injective ni surjective. Toutefois, quitte à prendre des corps énormes, tous les points proviennent d'un K -point (qui changera avec le point en général).

Exercice 4.4.3. — Décrire les points de la droite affine réelle $\mathbf{A}_\mathbf{R}^1$, du « cercle de rayon $\sqrt{-1}$ » d'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

dans le plan $\mathbf{A}_\mathbf{R}[x, y]$.

Exercice 4.4.4. — Montrer que la droite affine $X = \mathbf{A}_\mathbf{Q}^1$ a un point dense η -le point générique- et une infinité dénombrable de points fermés. Montrer que l'application

$$X(\mathbf{C}) \rightarrow X$$

est surjective, non injective. Quelle est la fibre au dessus de η .

Mais la connaissance des points $X(K)$ pour K un corps, aussi gros soit-il est certainement insuffisante car visiblement l'injection canonique $X_{red}(K) \hookrightarrow X(K)$ est bijective dans ce cas. Il faut absolument regarder tous les anneaux : c'est ce qu'on expliquera plus bas. C'est le point de vue fonctoriel de Grothendieck.

CHAPITRE 5

CONSTRUCTION DE SCHÉMAS

On va donner dans cette section la construction de schémas fondamentaux : produits, espaces projectifs, grassmanniennes. Les points de ces schémas à valeurs dans les anneaux ont tous une interprétation géométrique naturelle qui les caractérise : c'est le point de vue fonctoriel, très simple mais fondamental, que l'on va expliquer d'abord.

5.1. Foncteurs représentables

On a vu qu'à un S -schéma X était naturellement associé le foncteur des points

$$h_X : \begin{cases} \mathbf{Sch}_S^{\text{opp}} & \rightarrow \mathbf{Ens} \\ T & \mapsto X(T) \end{cases}$$

(caractère contravariant en T du foncteur des points). On va voir que h_X détermine X , à isomorphisme unique près : c'est le sens de l'énoncé abstrait 5.1.1. Généralement, à tout objet X d'une catégorie \mathbf{Cat} est associé le foncteur des points

$$h_X : \begin{cases} \mathbf{Cat}^{\text{opp}} & \rightarrow \mathbf{Ens} \\ T & \mapsto \text{Hom}(T, X) \end{cases},$$

qui dépend fonctoriellement de X .

Lemme 5.1.1 (Yoneda). — *Soit X, Y deux objets d'une catégorie \mathbf{Cat} . Alors, l'application*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

est bijective.

Preuve : On a une flèche en sens inverse : si $m : h_X \rightarrow h_Y$ est un morphisme de foncteurs, on a en particulier une application

$$m(X) : \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, X) = h_X(X) \rightarrow h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, Y),$$

et l'image $m(X)(\text{Id}_X) \in \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, Y)$ de l'identité de X est la flèche cherchée. Une chasse au diagramme sans mystère permet de vérifier que ces flèches sont inverses l'une de l'autre. ■

Définition 5.1.2. — *On dit qu'un foncteur $\mathbf{Cat}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable s'il est isomorphe à un foncteur h_X .*

Observons que le lemme de Yoneda assure que X est déterminé à isomorphisme unique près. Le lecteur pourrait à juste titre se demander pourquoi remplacer un objet d'une catégorie par cet horrible foncteur. La suite l'illustrera. Quoi qu'il en soit, on identifiera sans plus de précaution un objet X au foncteur des points correspondant.

Observons que si $\phi : F \rightarrow H, \gamma : G \rightarrow H$ sont deux applications d'ensembles, le produit fibré $F \times_H G$ est défini par

$$F \times_H G = \{(f, g) \in F \times G \text{ tels que } \phi(f) = \gamma(g)\}.$$

On définit alors le produit fibré de foncteur à la Yoneda :

Définition 5.1.3. — *Considérons un diagramme de morphismes de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \downarrow \gamma & \\ F & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

Alors, la correspondance

$$S \mapsto F(S) \times_{H(S)} G(S)$$

est fonctorielle en S et définit un foncteur noté $F \times_H G$.

Exercice 5.1.4. — *Vérifier que $\text{Hom}(h_S, H)$ s'identifie à $H(S)$. Soit $x \in H(S)$ définissant $x : h_S \rightarrow H$. Montrer que le composé du foncteur $h_S \times_H F$ et du foncteur d'oubli $C_{/S}^{\text{opp}} \rightarrow C^{\text{opp}}$ s'identifie au sous-foncteur F_x de F défini par*

$$F_x(S' \rightarrow S) = \{a' \in F(S') \text{ tels que } \phi(S')(a') = G(S' \rightarrow S)(x)\}.$$

Dans l'exercice précédent, il est bon de penser à $G(S' \rightarrow S)(x)$ comme à une image inverse $x_{S'}$ de x sur S . On écrit la condition précédente simplement sous la forme plus parlante

$$F_x(S' \rightarrow S) = \{a' \in F(S') \text{ tels que } \phi(a') = x_{S'}\}.$$

On identifiera toujours F_x à un foncteur $C_{/S}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Définition 5.1.5. — *On dit que $\phi : F \rightarrow H$ est représentables, si pour tous les F_x sont représentables.*

Exercice 5.1.6. — *Supposons H représentable. Vérifier que ψ est représentable si et seulement si F est représentable.*

Mais, on a déjà rencontré ce phénomène bien souvent. Par exemple, prenons pour \mathcal{C} la catégorie (opposée) des A -modules. Considérons alors M_1, M_2 deux A -modules. Le foncteur de \mathcal{C} dans \mathbf{Ens} qui à un A -module N associe l'ensemble des applications A -bilinéaires de $M_1 \times M_2$ dans N est représentable (dans C^{opp}) par... le produit tensoriel $X = M_1 \otimes_A M_2$. Comme le lecteur l'aura remarqué, on étudie ce produit en utilisant le foncteur h_X et pas en utilisant une (horrible) construction permettant de le définir. On pourrait multiplier à l'envi ce genre d'exemples (quotient, limites inductives, projectives, sommes directes...).

5.2. L'exemple de la droite affine

Soit A un anneau. Rappelons qu'on a défini la droite affine de coordonnée X par

$$\mathbf{A}_A^1 = \mathbf{A}_A[X] = \text{Spec}(A[X]).$$

Soit T un A -schéma et $m : T \rightarrow \mathbf{A}_A[X]$ un A -morphisme. L'image inverse $m^\sharp(X)$ de la fonction régulière $X \in H^0(\mathbf{A}_A[X], \mathcal{O}) = A[X]$ est une fonction régulière de $H^0(T, \mathcal{O})$ d'où une application

$$\iota_T : \text{Hom}_A(T, \mathbf{A}_A[X]) \rightarrow H^0(T, \mathcal{O})$$

qui est fonctorielle en T .

Lemme 5.2.1. — *L'application ι_T est bijective, autrement dit, la droite affine représente le foncteur $T \mapsto H^0(T, \mathcal{O})$ de $\text{Sch}_A^{\text{opp}}$ dans \mathbf{Ens} .*

Preuve : Prouvons l'injectivité. Supposons que m et m' aient même image $f \in H^0(T, \mathcal{O})$. Les restrictions de m, m' à un ouvert affine $U = \text{Spec}(B)$ de T sont déterminées par deux morphismes

$$\mu, \mu' : A[X] \rightarrow B$$

de A -algèbres d'après 3.6.1. Par construction, on a $f|_U = \mu(X) = \mu'(X)$ et donc $m = m'$ sur U , donc sur T finalement.

Prouvons la surjectivité. Une fonction globale sur T est déterminée par ses restrictions à un recouvrement affine. Utilisant l'injectivité de ι_T déjà prouvée, on se ramène alors au cas affine, $T = \text{Spec}(B)$. Mais se donner un A -morphisme $T = \text{Spec}(B) \rightarrow \mathbf{A}_A[X]$ c'est se donner un morphisme de A -algèbres $A[X] \rightarrow B$, c'est se donner l'image de X dans $B \in H^0(T, \mathcal{O})$. ■

Dans cette identification, l'image d'un point t de T par le morphisme défini par $f \in H^0(T, \mathcal{O})$ est simplement $f(t) \in k(t)$ -rappelons que c'est l'image de f dans le corps résiduel $k(t)$ de $\mathcal{O}_{T,t}$ vu comme point de $\mathbf{A}_A^1(k(t)) = k(t)$. Autrement dit, f est l'application $t \mapsto f(t)$!!!

En fait, on a ici un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes. On verra un peu plus bas qu'il suit que $\mathbf{A}_A[X]$ est mieux qu'un schéma, à savoir un *schéma en groupes*.

Remarque 5.2.2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de A -schémas et g une fonction régulière sur Y . Le morphisme

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

induit un morphisme $H^0(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O})$ qu'on considère comme espaces de morphismes à valeurs dans \mathbf{A}_A^1 . On se convainc sans peine qu'alors l'image de g est simplement le composé $g \circ f$.

Exercice 5.2.3. — Montrer que l'espace affine $\mathbf{A}_A[X_1, \dots, X_n]$ représente le foncteur $T \mapsto H^0(T, \mathcal{O})^n$ de $\mathbf{Sch}_A^{\text{opp}}$ dans \mathbf{Ens} .

5.3. L'exemple du recollement

On va se restreindre d'abord à recoller deux S -schémas X_1, X_2 munis de deux ouverts U_1, U_2 . On suppose donné un (S -) isomorphisme $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$. Pour tout S -schéma T , on définit $\Xi(T)$ comme le sous-ensemble des morphismes

$$(m_1, m_2) \in \text{Hom}_S(X_1, T) \times \text{Hom}_S(X_2, T)$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_1 \hookrightarrow X_1 & & \\ \downarrow \iota & \searrow m_1 & \\ U_2 \hookrightarrow X_2 & \nearrow m_2 & T \end{array}$$

Si $\mathbf{Cat} = \mathbf{Sch}_S^{\text{opp}}$, la correspondance $T \mapsto \Xi[T]$ définit un foncteur

$$\Xi : \mathbf{Sch}_S = \mathbf{Cat}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}.$$

Proposition 5.3.1. — Le foncteur Ξ est représentable par un S -schéma X appelé recollement de X_1 et X_2 le long de ι .

Preuve : L'espace topologique est simplement l'espace topologique quotient de $X_1 \sqcup X_2$ par la relation d'équivalence obtenue en identifiant les points de U_1 et U_2 grâce à ι . On vérifie que le saturé de tout ouvert est ouvert de sorte que la projection est ouverte. Il s'ensuit que les projections $X_i \rightarrow X$ sont des homéomorphismes sur des ouverts encore notés X_i d'intersection homéomorphe à $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$. Une fonction régulière sur un ouvert V de X est définie comme suit : l'image inverse de V dans $X_1 \sqcup X_2$ est un ouvert $V_1 \sqcup V_2$; une section est un couple (f_1, f_2) de fonctions régulières sur V_1, V_2 compatibles à ι . La restriction de cet espace annelé à l'ouvert X_i est un isomorphe à X_i de sorte que X est bien un schéma. ■

Remarque 5.3.2. — *L'application $\Xi(T) \mapsto \text{Hom}_S(X_1, T)$ est fonctorielle en T et induit (Yoneda dans $\mathbf{Cat} = \mathbf{Sch}_S^{opp}$) un morphisme $X_1 \rightarrow X$ qui est une immersion ouverte. L'immersion $U_1 \hookrightarrow X_1$ identifie alors l'intersection de X_1 et X_2 (vus comme ouverts de X) à U_1 (à U_2 si on utilise $U_2 \hookrightarrow X_2$).*

5.3.1. Un exemple. — Donnons un exemple qui fera ressortir l'importance de ι . On prend $X_1 = X_2 = \mathbf{A}_k[x]$ deux copies de la droite affine. On prend ensuite $U_1 = U_2$ le complémentaire de l'origine, d'équation $x \neq 0$. On a simplement $U_i = \text{Spec}(k[x, x^{-1}])$. Ensemblistement, on a donc les points de U_1 et U_2 qui sont identifiés et deux autres points distincts, classes des origines de X_1, X_2 .

a) . — Définissons ι comme étant associé à l'isomorphisme de A -algèbres défini par $x \mapsto x^{-1}$. Comme on le verra, l'espace obtenu est la droite projective \mathbf{P}_k^1 (exercice pour ceux qui ont suivi ce cours). Il est facile de vérifier que l'immersion ouverte de $U_1 = \text{Spec}(k[x, x^{-1}])$ dans X se prolonge de manière unique en un k -morphisme de $\text{Spec}(k[x])$ dans X , à savoir l'immersion ouverte $X_1 \hookrightarrow X$: l'image de l'origine (équation $x = 0$ est simplement o_1). Topologiquement, pour la topologie usuelle, voici les ouverts saturés correspondant aux voisinages des origines o_1, o_2 : ils ne s'intersectent pas. Le point est que dans une carte centrée en o_1 , le point o_2 part à l'infini.

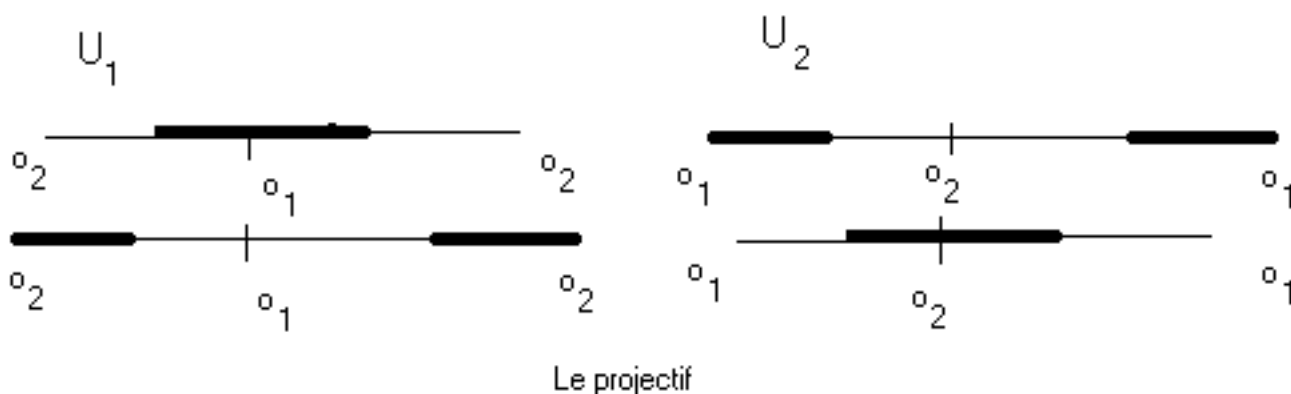


FIG. 1. La droite projective

b) . — Définissons ι comme étant... l'identité. On obtient ce qu'on appelle la droite avec origine dédoublée. L'immersion ouverte de $U_1 = \text{Spec}(k[x, x^{-1}])$ dans X se prolonge de deux manières distinctes, la première en considérant les immersions $U_1 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X$ (l'origine s'envoie sur o_1) la seconde en considérant les immersions $U_1 = U_2 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X$ (l'origine s'envoie sur o_2). Topologiquement, pour la topologie usuelle, voici les ouverts saturés correspondant aux voisinages des origines o_1, o_2 : ils s'intersectent toujours.

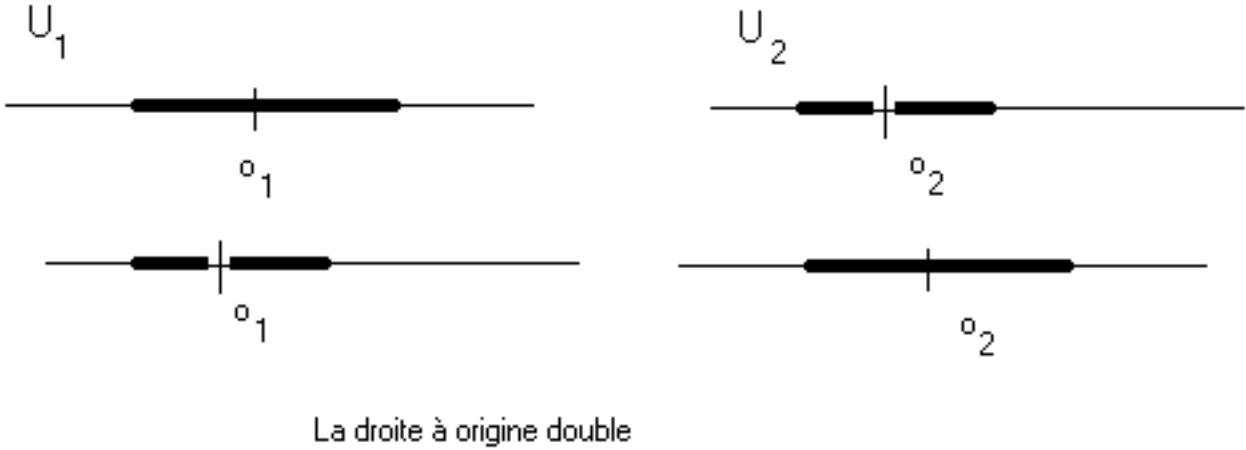


FIG. 2. La droite double

La différence entre a) et b) est que la droite projective est séparée (au sens schématique) mais pas la droite avec origine dédoublée. Ce phénomène se rencontre déjà en topologie d'ailleurs (recoller deux copies de la droite usuelle le long du complémentaire d'un point de deux manières).

Exercice 5.3.3. — *Montrer que la droite avec origine dédoublée n'est pas un schéma affine.*

On peut bien entendu recoller plus de deux schémas. Précisons en quelques mots (ce numéro est ultra formel et trivial; on ne détaille pas les preuves et il est conseillé de le passer en première lecture).

5.4. Recollement généraux

Supposons que X est un espace topologique recouvert par des ouverts U_i . On suppose donné des faisceaux \mathcal{F}_i sur chaque U_i ainsi que des isomorphismes

$$f_{i,j} : \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j},$$

identiques si $i = j$ et tels que sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ on ait la condition de cocycle $f_{i,k} = f_{i,j} f_{j,k}$.

Lemme 5.4.1. — *Sous les conditions précédentes, il existe un faisceau \mathcal{F} sur X et des isomorphismes $\eta_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tels que $f_{i,j} = \eta_i \eta_j^{-1}$. De plus, (\mathcal{F}, η_i) est déterminé à isomorphisme unique près.*

La preuve est laissée au lecteur.

Supposons maintenant donnés des (S-)schémas X_i et des ouverts $X_{i,j}$ de X_i (qui moralement sont les intersections $X_i \cap X_j$). On suppose qu'on a des isomorphismes

$$f_{i,j} : X_{j,i} \rightarrow X_{i,j},$$

identiques si $i = j$.

On suppose, i, j, k étant donnés, que la restriction de $f_{j,i}$ à $T_i = X_{i,j} \cap X_{i,k}$ (moralement, $T_i = T_j = X_i \cap X_j \cap X_k$) est un isomorphisme sur $T_j = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ de sorte qu'on ait la condition de cocycle sur $T_j = X_{j,i} \cap X_{j,k}$

$$f_{i,j} = f_{i,k} f_{k,j}.$$

On a encore un foncteur Ξ analogue : $\Xi(T)$ est l'ensemble des $g_i \in \prod_i \text{Hom}(X_i, T)$ qui sont compatibles avec les $f_{i,j}$. On a encore des morphismes fonctoriels $\phi_i : \Xi(T) \rightarrow \text{Hom}(X_i, T)$.

Lemme 5.4.2. — *Le foncteur Ξ est représentable par un schéma X . Chaque ϕ_i induit une immersion ouverte $X_i \hookrightarrow X$ d'image U_i et on a des isomorphismes canoniques $X_{i,j} \xrightarrow{\sim} U_i \cap U_j$. De plus, les U_i recouvrent X .*

Preuve : On construit l'espace topologique X en recollant les espaces topologiques sous-jacents des X_i . Puis, grâce au lemme de recollement de faisceaux, on recolle les faisceaux $\mathcal{F}_i = \mathcal{O}_{X_i}$. On obtient un espace annelé (X, \mathcal{O}) recouvert par les X_i , et qui donc est un schéma. On vérifie qu'il représente Ξ . ■

5.4.1. Foncteur des points et recollement. — En fait, dans la catégorie des schémas, on peut restreindre h_X aux schémas affines en déterminant encore X de manière unique, ce qui est techniquement bien utile, simplement car un schéma est réunion de schémas affines :

Exercice 5.4.3. — *Soient X, Y deux A -schémas. On note h_X, h_Y les foncteurs de la catégorie des A -algèbres dans celle des ensembles définis par $B \mapsto X(B), Y(B)$ respectivement. Montrer que l'application*

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$$

est bijective.

On utilise sans plus de précaution les techniques introduites en 5.1.1. En fait, le point est que les foncteurs h_X sont de **nature locale** pour la topologie de Zariski, autrement dit sont des faisceaux d'ensemble. Précisons. Pour tout S -schéma T et tout foncteur $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}$, on dispose du préfaisceau F_T sur T défini par $U \mapsto F(U)$ pour U ouvert de T .

Définition 5.4.4. — *On dit que F est un faisceau (ou que F est de nature locale) si tous les F_T sont des faisceaux.*

Il est facile de vérifier qu'un foncteur F représentable est nécessairement un faisceau. Le critère de recollement nécessite une dernière définition.

Définition 5.4.5. — *Soit $\phi : F \rightarrow H$ un morphisme de foncteurs $\mathbf{Sch}_S^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}$. On dit que ϕ est représentable par une immersion ouverte si pour tout S -schéma S' et $x \in F(S')$, le foncteur F_x est représentable par une immersion ouverte $S'_x \hookrightarrow S'$. Une famille $F_i \rightarrow H$ de tels morphismes de foncteurs représentables recouvre H si de plus on a $S' = \cup S'_x$ pour tout $x \in H(S')$.*

L'énoncé suivant est de preuve complètement formelle (utiliser le théorème de recollement) mais est bien utile.

Proposition 5.4.6. — *Soit $\phi_i : F_i \rightarrow F$ une famille de morphismes de foncteurs $\mathbf{Sch}_S^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Supposons que chaque F_i est représenté par un S -schéma X_i . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) F est représentable par un schéma X , les morphismes $X_i \rightarrow X$ sont des immersions ouvertes et la réunion des X_i est X .*
- ii) F est de nature locale et chaque ϕ_i est représentable par une immersion ouverte.*

Notons que sous ces hypothèses, les F_i et F sont caractérisés par leurs restrictions aux S -schémas affines (cf. 5.4.3). Voir les TD pour des développements.

5.5. Produit

Afin de voir comment définir le produit, considérons le cas ensembliste. On se donne deux ensembles E, F et calculons le foncteur $P = h_{E \times F}$ des points du produit. Soit donc T un ensemble. Se donner une application de T dans $E \times F$, c'est se donner deux applications $T \rightarrow E$ et $T \rightarrow F$. Autrement dit, on

$$P(T) = h_E(T) \times h_F(T),$$

ici dans la catégorie **Ens**. Ceci nous amène à définir le foncteur produit de deux schémas comme suit.

Soient X, Y deux S -schémas. On définit de même le foncteur produit dans $\mathbf{Cat} = \mathbf{Sch}_S^{\text{opp}}$ par la formule

$$\Pi(T) = \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y).$$

Proposition 5.5.1. — *Le foncteur Π est représentable. On note $X \times_S Y$ un S -schéma qui le représente.*

Notons que par le lemme de Yoneda, si le produit existe, on a deux projections p_X, p_Y , dites canoniques, $X \times_S Y \rightarrow X$ et $X \times_S Y \rightarrow Y$. D'un point de vue de diagramme, un point de $P(T)$ est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

et la proposition affirme qu'il se complète de manière unique en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow & & & \\ & X \times_S Y & \xrightarrow{p_Y} & Y & \\ & \downarrow p_X & & \downarrow & \\ & X & \longrightarrow & S & \end{array}$$

Preuve : Réductions. Observons que Π est de nature locale. On va se ramener au cas où X, Y et S sont affines.

5.5.1. — Réduction à S affine. Supposons que la proposition est prouvée si S est affine. Recouvrons alors S par des ouverts affines S_i . On note X_i, Y_i les ouverts de X, Y images inverses de S_i par les morphismes structuraux. On note P_i le foncteur $X_i \times_{S_i} Y_i$. Le morphisme de foncteurs $\Pi_i \rightarrow \Pi$ est visiblement représentable par des immersions ouvertes recouvrant Π . La représentabilité des Π équivaut donc à celle de Π d'après 5.4.6 : on peut supposer S affine.

On suppose désormais $S = \text{Spec}(A)$ affine.

5.5.2. — Réduction au cas X, Y affine. On recouvre X et Y par des ouverts affines X_i, Y_j . On invoque de même 5.4.6 avec les sous-foncteurs $\Pi_{i,j} = X_i \times_S Y_j$ de Π (recouvrant Π par des ouverts).

5.5.3. — Reste le cas où $X = \text{Spec}(B), Y = \text{Spec}(C)$ avec B, C des A -algèbres. J'affirme que $P = \text{Spec}(B \otimes_A C)$ représente le produit. Les morphismes

$$B \rightarrow B \otimes_A C \text{ et } C \rightarrow B \otimes_A C$$

induisent les morphismes (de projection)

$$\text{Spec}(B \otimes_A C) \rightarrow \text{Spec}(B) \text{ et } \text{Spec}(B \otimes_A C) \rightarrow \text{Spec}(C)$$

d'où un morphisme de foncteurs

$$m : h_P \rightarrow \Pi.$$

La propriété universelle du produit tensoriel prouve que m restreint à la catégorie des S -schémas affines est une équivalence de catégorie. Comme les foncteurs sont de nature locale, le théorème est démontré. ■

Si on réfléchit, on peut être gêné par le fait, qui s'avère anodin, que le produit tensoriel n'est défini à partir des données qu'à isomorphisme unique près. On peut s'affranchir de ce problème en constatant que tout schéma X est la réunion de tous ses ouverts affines -paramétrée donc par un ensemble explicite-. Maintenant, si X est affine, on a un isomorphisme canonique $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(H^0(X, \mathcal{O}))$ ce qui permet d'associer un « vrai » produit. Comme on le verra à l'usage, seule la propriété universelle du produit compte.

Exercice 5.5.2. — *Montrer que le produit des A -schémas affines d'algèbre $A[x_i]/(P_i(x))$ et $A[y_j]/(Q_j(y))$ s'identifie au schéma affine d'algèbre $A[x_i, y_j]/(P_i(x), Q_j(y))$. Montrer qu'en général l'espace topologique sous-jacent au produit de deux schémas n'est pas le produit des espaces topologiques sous-jacents.*

Un exemple intéressant pour comprendre le produit est la notion d'extension des scalaires, *ie* lorsque $Y = \text{Spec}(B)$ est affine (on note alors souvent le produit X_B). Dans l'exemple $X = \text{Spec}(A[x_i]/(P_j(x)))$, on trouve $X_B = \text{Spec}(B[x_i]/(P_j(x)))$: on a fait une extension de l'anneau des coefficients. Lorsqu'on passe d'un S -schéma X au S' -schéma $X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ (avec $S' \rightarrow S$ morphisme), on dit qu'on a fait **un changement de base** de S à S' . Comme il apparaîtra, les propriétés P des morphismes intéressantes sont le plus souvent des propriétés stables par changement de base. On parle alors de propriété universellement P (P comme surjectif, de type fini...). Voir par exemple 5.7.3. Si on note $p : S' \rightarrow S$ le morphisme en question, le produit $X \times_{S'} S$ est parfois noté $p^{-1}(X)$.

L'exemple suivant est fondamental.

5.6. Le morphisme de Frobenius relatif

Soit S un schéma de caractéristique un nombre premier $p > 0$. On a défini le morphisme de Frobenius absolu $F_a : S \rightarrow S$. Soit X un S -schéma. On vérifie immédiatement que les Frobenius absolus de X et de S sont compatibles, au sens que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_{a,X}} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_{a,S}} & S \end{array}$$

commute. En particulier, F_a n'est pas un morphisme de S -schémas, ce qui est fâcheux. Remédions à cela. Notons $X(1)$ le produit fibré

$$X(1) = X \times_S S$$

où la flèche $S \rightarrow S$ est le Frobenius absolu. Alors, on a une factorisation canonique

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{F_{a,X}} & & X \\ & \searrow F & & & \downarrow \\ & & X(1) & \longrightarrow & X \\ & \swarrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & S & \xrightarrow{F_{a,S}} & S \end{array}$$

(le petit carré signifie que le diagramme carré de droite est cartésien, *ie* s'identifie à un produit fibré).

Définition 5.6.1. — *Le S-morphisme $F : X \rightarrow X(1)$ s'appelle le Frobenius relatif de X .*

Regardons ce que cela signifie concrètement dans le cas $S = \text{Spec}(A)$ et X sous-schéma fermé de l'espace affine $\mathbf{A}_A[x_1, \dots, x_n]$ d'équations $P_j = \sum a_{k,j} x^k = 0$ (ici k est un multi-indice). Alors, $X(1)$ est le sous-schéma fermé de l'espace affine $\mathbf{A}_A[x_1, \dots, x_n]$ d'équations $Q_j = \sum a_{k,j}^p x^k = 0$ et F est défini par le morphisme de A -algèbres envoyant x_i sur x_i^p . Notons que l'image de Q_j par ce morphisme est $Q_j(x_i^p) = (P_j(x_i))^p$ de sorte qu'on a bien un morphisme comme il se doit.

5.7. Fibres

L'exemple suivant est crucial. Donnons nous un morphisme de schéma $m : X \rightarrow Y$ et $y \in Y$. Le morphisme canonique d'évaluation $\text{Spec}(k(y)) \rightarrow Y$ permet de considérer le produit

$$X_y = X \times_Y \text{Spec}(k(y)).$$

Tout point x au dessus de y définit comme on l'a vu une inclusion $k(y) \hookrightarrow k(x)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(k(x)) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k(y)) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

et donc fournit un (unique) diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(k(x)) & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & X_y & \longrightarrow & \text{Spec}(k(y)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donnant un morphisme

$$\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X_y.$$

Ceci définit une application ensembliste

$$p : f^{-1}(y) \rightarrow X_y.$$

Lisant la construction à l'envers, on construit un inverse : p est une bijection.

Maintenant, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble de X , donc est muni d'une topologie et X_y est muni de sa topologie de Zariski de schéma.

Exercice 5.7.1. — *Montrer que p est un homéomorphisme (se ramener au cas affine).*

On munira toujours les fibres de la structure schématique de X_y sans plus de précision.

Exemple 5.7.2. — *Si $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(A[x_i]/(P_j(x)))$ la fibre en $y = \mathfrak{p}$ de f est simplement $X_y = \text{Spec}(k(y)[x_i]/(\bar{P}_j(x)))$ avec \bar{P}_j le polynôme dont les coefficients sont les images de ceux de P_j par*

$$A \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = k(y).$$

Un peu de vocabulaire. On dit qu'un morphisme de schémas $X \rightarrow S$ vérifie une propriété P universellement si et seulement si il le vérifie encore après tout changement de base.

Exercice 5.7.3. — *Montrer qu'un morphisme est surjectif si et seulement si il est universellement surjectif. Montrer qu'il est universellement injectif (on dit radiciel) si et seulement si il est injectif et si les extensions résiduelles sont purement inséparables.*

5.8. Projectif et recollement

Rappelons comment on construit le projectif \mathbf{P}_A^n . Soit A un anneau et S l'algèbre graduée

$$S = A[X_0, \dots, X_n].$$

Comme $X_0 \cdots X_n$ ne divise pas 0 dans A , le localisé $S[\frac{1}{X_0 \cdots X_n}]$ est une algèbre de polynômes à $2(n+1)$ variables X_i^{-1}, X_i et la flèche de localisation de S dans $S[\frac{1}{X_0 \cdots X_n}]$ est *injective*. Soit A_i la sous-algèbre

$$A_i = A[X_t/X_i, t = 0, \dots, n]$$

de $S[\frac{1}{X_0 \cdots X_n}]$ et \mathbf{P}_i son spectre. On a un isomorphisme

$$A[T_1 \cdots, T_n] \xrightarrow{\sim} A_i$$

qui envoie T_j sur X_{j-1}/X_i si $j \leq i$ et sur X_j/X_i sinon. Il est plus commode de voir A_i comme une algèbre de polynômes en n variables $X_t/X_i, t \neq i$ (sans renommer les variables) et \mathbf{P}_i est un espace affine \mathbf{A}_A^n .

On définit un isomorphisme entre l'ouvert

$$\mathbf{P}_{j,i} = (X_i/X_j \neq 0) \subset \mathbf{P}_j$$

et l'ouvert

$$\mathbf{P}_{i,j} = (X_j/X_i \neq 0) \subset \mathbf{P}_i$$

en envoyant la coordonnée $X_t/X_i \in A_i, t \neq i$ sur $X_t/X_i = X_j/X_i X_t/X_j \in A_j$. Ces isomorphismes se recollent au sens de 5.4.

Définition 5.8.1. — L'espace projectif \mathbf{P}_A^n est le schéma obtenu par recollement des \mathbf{P}_i le long de $\mathbf{P}_{i,j}$.

Exercice 5.8.2. — Soit B une A -algèbre. Vérifier que $B \otimes_A \mathbf{P}_A^n$ s'identifie à \mathbf{P}_B^n comme B -schéma (on note comme un produit tensoriel le produit par un schéma affine au dessus d'un autre schéma affine).

Soit alors M un S -module gradué.

Rappel 5.8.3. — Si f est homogène non nul, le module $M[1/f]$ est gradué (si $m \in M_d$, on pose $\deg(m/f^n) = \deg(m) - \deg(f^n)$). Si M est un module gradué on note $M[d]$ le module gradué dont le groupe abélien sous-jacent est M mais dont la graduation est définie par $M[d]_i = M[d+i]$.

Notons M_i le A_i -module

$$M_i = \{\mu \in M[1/X_i] \text{ tel que } \deg(\mu) = 0\}.$$

On en déduit un module quasi-cohérent \tilde{M}_i sur \mathbf{P}_i .

La restriction de \tilde{M}_i à \mathbf{P}_i s'identifie au faisceau associé au $A_i[X_i/X_j]$ -module $M_i[1/X_j]_0 = M[1/(X_i X_j)]_0$ (éléments de degré nul du localisé), de sorte que ces faisceaux se recollent.

Définition 5.8.4. — On note \tilde{M} le faisceau quasi-cohérent sur \mathbf{P}_A^n obtenu par recollement des \tilde{M}_i . Lorsque $M = S[d]$, on note $\mathcal{O}(l) = \tilde{M}$ le faisceau ainsi obtenu.

Exercice 5.8.5. — Vérifier que $\mathcal{O}(l)$ s'obtient par recollement des faisceaux associés au sous-module

$$X_i^l A[X_t/X_i] \text{ de } S[\frac{1}{X_0 \cdots X_n}]$$

les recollements étant induits par les localisations ad hoc dans $S[\frac{1}{X_0 \cdots X_n}]$. En particulier, sur \mathbf{P}_i , le morphisme de multiplication par X_i^l induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i}(l)$$

de sorte que $\mathcal{O}(l)$ est un faisceau localement libre de rang 1.

On reverra cet exemple à maintes reprises.

Exercice 5.8.6. — Montrer que $\mathbf{P}_A^0 \rightarrow \text{Spec}(A)$ est un isomorphisme. Si k est un corps, montrer que les fermés non triviaux de \mathbf{P}_k^1 sont les unions finies de points fermés. Montrer que $\mathbf{P}_k^n(k)$ s'identifie à l'espace projectif ensembliste paramétrant les droites (ou les hyperplans ici) de k^{n+1} .

5.8.1. Un calcul de sections globales. — Soit M un S -module gradué. L'application

$$\begin{cases} M_0 & \rightarrow & M[1/X_i]_0 \\ m & \mapsto & m/1 \end{cases}$$

se globalise pour donner un morphisme, en général ni injectif ni surjectif, de A -modules

$$M_0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(l)).$$

Dans le cas $M = S[l]$, ces morphismes s'écrivent

$$\begin{cases} S_l & \rightarrow & X_i^l A[X_t/X_i] \\ P & \mapsto & P = X_i^l P(X_t/X_i) \end{cases}$$

et se globalisent pour donner un morphisme injectif (exercice) de A -modules gradués

$$S \rightarrow \Gamma = \bigoplus_l H^0(\mathcal{O}(l)).$$

Lemme 5.8.7. — Le morphisme $S \rightarrow \Gamma = \bigoplus_l H^0(\mathcal{O}(l))$ est un isomorphisme gradué.

Preuve : Posons $\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{O}(l)$. Comme \mathcal{F} est un faisceau et que les $\mathbf{P}_i = D(X_i)$ recouvrent \mathbf{P}^n , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}) \rightarrow \prod H^0(\mathbf{P}_i, \mathcal{F}) \rightarrow \prod H^0(\mathbf{P}_{i,j}, \mathcal{F})$$

où la dernière flèche associe à (s_i) la famille des restrictions $(s_i - s_j)|_{\mathbf{P}_{i,j}}$. On a

$$H^0(\mathbf{P}_i, \mathcal{F}) = \bigoplus_l X_i^l A[X_t/X_i] = S[1/X_i]$$

d'où on déduit, \mathcal{F} étant quasi-cohérent sur \mathbf{P}_i qui est affine

$$H^0(\mathbf{P}_{i,j}, \mathcal{F}) = S[1/X_i X_j].$$

On réécrit alors

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}) \rightarrow \prod S[1/X_i] \xrightarrow{d} \prod S[1/X_i X_j],$$

la flèche de gauche étant déduite des morphismes de localisation. Comme plus haut, les divers anneaux de fractions sont des sous-modules de $S[1/0 \cdots X_n]$: on travaille systématiquement à l'intérieur de cet anneau, qui est l'anneau des polynômes en les X_i, X_i^{-1} .

Soit alors $(s_0, \dots, s_n) \in \text{Ker}(d) = H^0(\mathcal{F})$ et cherchons un antécédent dans S . On peut trouver $N \in \mathbf{Z}$ tel que

$$s_i = (X_0 \cdots X_n)^N P_i(X_0, \dots, X_n) \in S' = S[1/X_0 \cdots X_n]$$

avec $P \in S$.

Comme $d((s_i)) = 0$, les polynômes P_i sont égaux à un même polynôme P . Traduisons la condition $s_i \in S[1/X_i]$. On écrit

$$\Pi = (X_0 \cdots X_n)^N P = \sum_J a_J X^J$$

avec $a_J \in A$. La condition $\Pi \in S[1/X_i]$ assure qu'on a $a_J = 0$ si $I = (j_0, \dots, j_n)$ et $j_t < 0$ pour un indice $t \neq i$. Variant i , on déduit que les seuls a_J éventuellement non nuls sont les indices $J \in \mathbf{N}^{n+1}$, ie $\Pi \in S$, qui est l'antécédent cherché. ■

Corollaire 5.8.8. — Le schéma \mathbf{P}_A^n n'est pas affine si $n > 0$ (et si A non nul...).

Preuve : En effet, sinon

$$\mathbf{P}_A^n = \text{Spec}(\mathbf{H}^0(\mathcal{O})) = \text{Spec}(A).$$

Or, si $n > 0$, les A -points de l'ouvert $\mathbf{P}_0 = D(X_0) = \mathbf{A}_A^n$ s'identifient à A^n qui est de cardinal ≥ 2 si $n > 0$ (et A non nul). ■

Exercice 5.8.9. — On suppose $n > 0$. Montrer que le morphisme tautologique $\mathcal{O}(a) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{O}(b), \mathcal{O}(a+b))$ est un isomorphisme. En déduire que $\mathcal{O}(a)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}(b)$ si et seulement si $a \leq b$. Montrer que $\mathcal{O}(a)$ est trivial si et seulement si $a = 0$.

Remarque 5.8.10 (Importante). — Supposons que ξ est un k -point de \mathbf{P}_A^n d'image x dans $D(X_i) = \mathbf{P}_i$ par exemple. Les point ξ a donc n coordonnées qu'on peut écrire $\xi_t/\xi_i, t \neq i$ en posant $\xi_i = 1$. Le corps résiduel de x est un sous-corps de k . Le faisceau $\mathcal{O}(l)$ est, on l'a vu, canoniquement isomorphe à \mathcal{O} sur \mathbf{P}_i de sorte que $\mathcal{O}(l) \otimes k(x)$ s'identifie à $k(x)$. Avec ses identifications, l'image de $P \in S_i = \mathbf{H}^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(l))$ dans $\mathcal{O}(l) \otimes k(x) = k(x) \hookrightarrow k$ est simplement $P(\xi_0, \dots, \xi_n)$.

Exemple 5.8.11. — Soit P_i des polynômes homogènes de degré d_i définissant donc -comprendre pourquoi- un morphisme $\oplus \mathcal{O}(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}$ d'image un faisceau quasi-cohérent d'idéaux \mathcal{I} . Si ϕ_0, \dots, ϕ_n est une base de $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}(1)) = A^{n+1}$, le sous-schéma d'équation $\phi_{d+1} = \dots = \phi_n = 0$ est isomorphe à \mathbf{P}^d : ce sont les sous-variété linéaires de \mathbf{P}^n par définition. Le sous-module engendré par les $\phi_i, i \geq d$ ne dépend que de la variété, puisque c'est le module des sections globales de $\mathcal{O}(1)$ qui s'y annule.

■

5.9. La construction Proj

On peut généraliser la construction du projectif au cas d'une algèbre graduée générale. Cette section peut être passée en première lecture. Soit S un anneau gradué en degrés ≥ 0 . Soit S_+ l'idéal des éléments de degré non nul (qui n'est premier que si $S_0 = A$ est intègre).

On définit l'espace topologique $\text{Proj}(S)$ comme suit :

-l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des idéaux premiers **homogènes qui ne contiennent pas** S_+ . Cette condition signifie que dans $\text{Spec}(S)$ on a $V(\mathfrak{p}) \not\subset V(S_+)$, ce dernier étant le sommet 0 du cône $\text{Spec}(S)$. C'est exactement comme dans le cas du projectif.

-les fermés sont les ensembles

$$V_+(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \text{ tels que } f(\mathfrak{p}) = 0 \in k(\mathfrak{p}) \text{ pour tout } f \in I\}$$

avec I idéal homogène de S . Comme $V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(IJ)$, ceci définit bien une topologie comme dans le cas affine.

Si I n'est plus même supposé un idéal, on peut encore définir $V_+(I)$ par la même formule, et on a $V_+(I) = V_+(J)$ avec J idéal homogène engendré par I .

Si \mathfrak{p} est un idéal premier homogène (engendré par des éléments homogènes), l'anneau local $S_{\mathfrak{p}}$ est gradué (le degré de f/g , avec $g(\mathfrak{p}) \neq 0$ est $\deg(f) - \deg(g)$). Les éléments de degré 0 forment un sous-anneau $S_{(\mathfrak{p})}$, dit *localisé homogène*. C'est un anneau local. Notons que l'inclusion naturelle $S_{(\mathfrak{p})} \rightarrow S_{\mathfrak{p}}$ induit un isomorphisme $S_{(\mathfrak{p})}/\mathfrak{p}S_{(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{p})$. La condition $f(\mathfrak{p}) = 0$ est donc la condition habituelle. De même, si f est homogène, $S[1/f]$ est gradué. Sa partie de degré nulle $S[1/f]_0$ est sous-anneau.

-Si M est un S -module **gradué**, on associe un faisceau encore noté \tilde{M} sur $\text{Proj}(S)$, essentiellement comme précédemment, en utilisant toutefois les localisés homogènes. Précisément, les sections de \tilde{M} sur un ouvert U sont les fonctions

$$s = (s_{(\mathfrak{p})}) \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$$

telles que pour tout $\mathfrak{p} \in U$ il existe une fonction homogène $f \in S$ et $m \in M$ (homogène) tels que $\deg(m) = \deg(f)$, $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ et $s_{\mathfrak{q}} = m/f \in A_{(\mathfrak{q})}$ si $f(\mathfrak{q}) \neq 0$.

Il est à noter que si un **morphisme gradué** de modules induit un morphisme entre faisceaux correspondants, il n'en est plus de même si le morphisme est quelconque en général.

Exercice 5.9.1. — Soit M un sous-module gradué d'un S -module gradué M' . On suppose $M_n = M'_n$ si n assez grand. Montrer que la flèche $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'$ est un isomorphisme.

-En particulier, si $M = S$, on récupère un faisceau d'anneaux \mathcal{O} sur $\text{Proj}(S)$.

Définition 5.9.2. — On note $\text{Proj}(S)$ l'espace localement annelé $(\text{Proj}(S), \mathcal{O})$.

Là encore, si $f \in S$ la partie $D_+(f) = \text{Proj}(S) - V_+(f)$ est ouverte. Par ailleurs, si $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$, il existe $f \in S^+$ tel que $f \notin \mathfrak{p}$, ie $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Ainsi, la famille des ouverts $D_+(f)$, $\deg(f) > 0$ recouvre $\text{Proj}(S)$.

Lemme 5.9.3. — Soit $f \in S$ de degré > 0 . Alors, la restriction de l'espace localement annelé $\text{Proj}(S)$ à $D_+(f)$ est isomorphe à $\text{Spec}(S[1/f]_0)$. Ainsi, $\text{Proj}(S)$ est un schéma.

Preuve : Définissons une application continue ϕ de $D_+(f)$ dans $D = \text{Spec}(S[1/f]_0)$ de la manière suivante. À $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, on associe

$$\bar{\mathfrak{p}} = \{a/f^n \in S[1/f]_0 \text{ tels que } a \in \mathfrak{p}\}.$$

C'est bien un idéal premier. Montrons que ϕ est injective. Notons que \mathfrak{p} et \mathfrak{q} jouent des rôles symétriques.

Soit $a \in \mathfrak{p}$ non nul. Comme $\deg(f) > 0$, on a $a^{\deg(f)} \in \mathfrak{p}$ et donc

$$a^{\deg(f)} / f^{\deg(a)} \in \bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{q}}.$$

On déduit qu'il existe m tel que $f^m a^{\deg(f)} \in \mathfrak{q}$. Comme $f(\mathfrak{q}) \neq 0$, on a $a \in \mathfrak{q}$. Par symétrie, on a donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Pour montrer que ϕ est surjective, on part de $\bar{\mathfrak{p}} \in \text{Spec}(S[1/f]_0)$ et on observe que l'idéal homogène \mathfrak{p} de S engendré par les éléments homogènes de degré > 0

$$a \text{ tels que } a^{\deg(f)} / f^{\deg(a)} \in \bar{\mathfrak{p}}$$

est un idéal premier ne contenant pas S^+ (car sinon $1 = f^{\deg(f)} / f^{\deg(f)} \in \bar{\mathfrak{p}}$) qui s'envoie sur $\bar{\mathfrak{p}}$.

L'application ϕ est continue et ouverte car $\phi^{-1}(D(a/1)) = D_+(a)$ (on n'a pas encore utilisé $\deg(f) > 0$).

On définit alors un morphisme $\mathcal{O}_D \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_{D_+(f)}$ comme suit. Soit

$$s = (s_{\bar{\mathfrak{p}}})_{\bar{\mathfrak{p}} \in U}$$

une section de \mathcal{O}_D sur un ouvert U . Par définition, on a $s_{\bar{\mathfrak{p}}} \in (S_f)_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Mais $\bar{\mathfrak{p}} = \phi(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p} \in \phi^{-1}(U)$ uniquement déterminé. Par ailleurs, le localisé $(S_f)_{\bar{\mathfrak{p}}}$ s'identifie bien entendu au localisé homogène $S_{\mathfrak{p}}$ de sorte que s s'identifie à une collection

$$s = (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \phi^{-1}(U)}.$$

On vérifie sans peine que s est bien une section de $\phi_* \mathcal{O}_{D_+(f)}$ et définit un isomorphisme de faisceaux. ■

Notons que $\text{Proj}(S)$ est le recollement des $D_+(f)$ le long des intersections $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$. En particulier, les morphismes canoniques $S_0 \rightarrow S[1/f]_0$ se recollent en un morphisme

$$\text{Proj}(S) \rightarrow \text{Spec}(S_0)$$

qui fait de $\text{Proj}(S)$ un S_0 -schéma. Comme dans le cas affine (3.3.5), on retrouve le calcul de \tilde{M} sur les ouverts $D_+(f)$. On résume dans la proposition suivante (preuve en exercice).

Proposition 5.9.4. — Soit M gradué et f homogène de degré > 0 . L'isomorphisme $D_+(f) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}S[1/f]_0$ de 5.9.3 définit un isomorphisme (fonctoriel)

$$M_{(f)} \xrightarrow{\sim} H^0(D_+(f), \tilde{M}).$$

Si $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, il induit un isomorphisme $M_{(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}_{\mathfrak{p}}$ qui ne dépend pas de f .

Exercice 5.9.5 (Fonctorialité). — Soit $\mu : S \rightarrow T$ un morphisme d'algèbres graduées. Montrer que l'ensemble U des $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(T)$ tels que $\mu(S_+) \not\subset \mathfrak{p}$ est ouvert U . Comment peut-on définir un morphisme de U dans $\text{Proj}(S)$?

Bien entendu, on a encore $H^0(D_+(f), \tilde{M}) = M_{(f)}$, mais le dictionnaire modules-faisceaux est moins agréable comme on l'a vu (5.9.1). Par définition, comme dans le cas affine, les faisceaux \tilde{M} sont quasi-cohérents. Mais on a, dans ce cas gradué, un nouveau moyen de construire des faisceaux quasi-cohérents : le décalage.

Définition 5.9.6. — Si M est (\mathbf{Z}) -gradué, le module décalé $M[n]$ est défini par $M[n]_k = M_{n+k}$. On note $\mathcal{O}(n)$ le faisceau $\widetilde{S[n]}$. Si \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent sur $\text{Proj}(S)$, on note $\mathcal{F}(n)$ le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$

Notons qu'on a $\tilde{M}(n) \xrightarrow{\sim} \widetilde{M[n]}$, ce qui justifie la notation. Les faisceaux $\mathcal{O}(n)$ sont fondamentaux. On recommande fortement de faire les exercices, faciles, suivants.

Exercice 5.9.7. — Soit $f \in S$ de degré 1. Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est libre sur $D_+(f)$. Montrer que si les éléments de degré 1 engendrent S comme S_0 -algèbre, alors $\mathcal{O}(n)$ est localement libre et on a $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(n+m)$ pour tout $n, m \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5.9.8. — Soit A un anneau. Montrer que $\text{Proj}(A[T]) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est un isomorphisme. Plus généralement, montrer que $\text{Proj}(A[T_0, \dots, T_n])$ est isomorphe à \mathbf{P}_A^n , recouvert par les ouverts $D_+(T_j) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_A[T_i/T_j]$.

On a une version sans coordonnée de l'espace projectif.

Soit V un A -module libre de rang fini, ou simplement projectif (localement libre). L'algèbre symétrique $\text{Sym}V$ est graduée. Explicitement, si x_i est une base de V , l'application évidente $A[x_i] \rightarrow \text{Sym}V$ est un isomorphisme gradué.

Définition 5.9.9. — On appelle espace affine sur V le schéma $\text{Spec}(\text{Sym}V)$. On appelle espace projectif sur V le schéma $\mathbf{P}V = \text{Proj}(\text{Sym}V)$.

L'espace affine sur V est parfois noté V^* . Voici pourquoi. Le calcul des points de la droite affine se généralise immédiatement : un B -point de V^* est simplement un morphisme d'algèbre $\text{Sym}V \rightarrow B$ ou encore un morphisme de A -modules $V \rightarrow B$ qui s'identifie, V étant projectif, à un point de $B \otimes_A V^*$, ce qui justifie la notation. Conformément au point de vue fonctoriel de Grothendieck, nous allons identifier le foncteur des points de $\mathbf{P}V$. Dans le cas $V = A^{n+1}$ de base notée X_0, \dots, X_n , on note \mathbf{P}_A^n ce projectif. L'exercice précédent amène à noter \mathbf{P}_S^n le produit $\mathbf{P}_Z^n \times_Z S$ pour tout S -schéma.

Exercice 5.9.10. — Vérifier que pour toute A -algèbre B , le projectif \mathbf{P}_B^n s'identifie à $\text{Spec}(B) \times_A \mathbf{P}_A^n$.

Lorsque qu'aucune confusion n'est à craindre, on omettra l'indice « + » dans les notations précédentes.

5.10. Coordonnées homogènes

Tous les schémas, anneaux, corps sont des A -algèbres : on supprime l'indice A . On notera ici $(X_i \neq 0)$ l'ouvert $D(X_i)$ de \mathbf{A}^{n+1} et $\mathbf{A}^{n+1}-0 = \cup_i (X_i \neq 0)$ l'ouvert complémentaire de l'origine. Un T -point de $\mathbf{A}^{n+1}-0$ est défini par $n+1$ coordonnées $t_l \in H^0(T, \mathcal{O})$ telles que pour tout t il existe l avec $t_l \neq 0$ dans $k(t)$. L'ouvert $D_+(X_i)$ de \mathbf{P}^n s'identifie à $\text{Spec}(A[X_l/X_i])$ de sorte que l'inclusion

$$A[X_l/X_i] \rightarrow A[X_l][1/X_i]$$

définit un morphisme

$$\pi_i : (X_i \neq 0) \rightarrow D_+(X_i) \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n.$$

Vérifions que π_i et π_j coïncident sur l'intersection

$$U_{i,j} = (X_i \neq 0) \cap (X_j \neq 0) = (X_i X_j \neq 0).$$

En effet, l'immersion

$$U_{i,j} \hookrightarrow (X_i \neq 0)$$

est définie par le morphisme

$$A[X_l][1/X_i] \rightarrow A[X_l][1/X_i X_j]$$

et l'immersion

$$D_+(X_i X_j) \hookrightarrow D_+(X_i)$$

est définie par le morphisme

$$A[X_l/X_i] \rightarrow A[X_l/X_i][X_i/X_j].$$

La restriction de π_i à $U_{i,j}$ se factorise à travers le morphisme $U_{i,j} \rightarrow D_+(X_i X_j)$ défini par le morphisme évident

$$A[X_l/X_i][X_i/X_j] = A[X_l X_j/X_j X_i, X_l X_i/X_i X_j] \rightarrow A[X_l][1/X_i X_j].$$

L'expression est symétrique en i, j de sorte que les π_i se recollent pour donner un morphisme

$$\pi : \mathbf{A}^{n+1}-0 \rightarrow \mathbf{P}^n.$$

L'image d'un (B-) point $\beta = (b_0, \dots, b_n)$ par π est souvent notée $(b_0; \dots; b_n)$. Par construction, on a donc

$$(bb_0; \dots; bb_n) = (b_0; \dots; b_n)$$

pour tout $b \in B^*$ (invertible dans B). Les b_i s'appellent des coordonnées homogènes de $\pi(\beta)$.

Lemme 5.10.1. — *Pour tout corps k , le morphisme π induit une surjection au niveau des k -points. En particulier, π est surjectif. La fibre s'identifie à k^* agissant par homotéthies sur $\mathbf{A}^{n+1}(k)-0 = k^{n+1}-0$.*

Preuve : En effet, soit $m : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbf{P}^n$ un k -point. L'image de l'unique point de $\text{Spec}(k)$ est contenu dans un des ouverts affines $D_+(X_i) = \text{Spec}(A[X_l/X_i])$ de sorte que m est défini par n scalaires $m_l, l \neq i$. Définissons alors $\mu : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbf{A}^{n+1}-0$ par le k -point de coordonnées $\mu_l = m_l$ si $l \neq i$ et $\mu_i = 1$. On a bien $\pi(\mu) = m$. Maintenant, deux points $(\mu_l), (\mu'_l) \in k^{n+1}-0$ on même image si et seulement si $\mu_l/\mu_i = \mu'_l/\mu'_i$ pour tout l ce qui signifie bien l'existence de $\mu = \mu_i/\mu'_i \in k^*$ tel que $\mu' = t\mu$. ■

Ainsi, heureusement, les k -points de \mathbf{P}^n s'identifient bien à $(k^{n+1}-0)/k^*$, l'espace des droites (vectorielles) de k^{n+1} , comme en géométrie projective élémentaire. **Mais attention**, un B-point de \mathbf{P}_A^n ne provient pas en général d'un élément de B^{n+1} (cf. 5.11.5). Il n'est pas vrai que π induit une surjection au niveau des B-points pour B qui n'est pas un corps en général. Pour comprendre le phénomène, détaillons un peu plus ce qu'est un B-point de $\mathbf{A}^{n+1}-0$.

Lemme 5.10.2. — Le point $b = (b_0, \dots, b_n)$ de \mathbf{A}^{n+1} est un point de $\mathbf{A}^{n+1} - 0$ si et seulement si l'idéal engendré par B est B , ou, de façon équivalente, si le morphisme $B^{n+1} \rightarrow B$ défini par b est surjectif, ou, de façon duale, si le quotient B^{n+1}/Bb est libre de rang 1.

Preuve : il suffit d'observer que dire $b(x) \neq 0$ pour $x \in \text{Spec}(B)$ c'est dire $b_i \notin \mathfrak{m}_x$ pour au moins un i . Ainsi, les points cherchés sont les b tel que l'idéal $\langle b_i \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec} B$, autrement dit $\langle b_i \rangle = B$. ■

De même, le morphisme la donnée d'un morphisme $S \rightarrow \mathbf{A}^{n+1} - 0$ équivaut à la donnée de $(s_i) \in H^0(S, \mathcal{O})^{n+1}$ tel que

$$\mathcal{O}_S^{n+1} \xrightarrow{(s_i)} \mathcal{O}_S$$

est surjectif.

Définition 5.10.3. — On appelle coordonnées homogènes, lorsqu'elles existent, d'un point $\beta \in \mathbf{P}^n(B)$ tout point B -point de $\mathbf{A}^{n+1} - 0$, à savoir $b = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in B^{n+1}$ tel que les b_i engendrent B , tel que $\pi(b) = \beta$. On note alors $(b_0 : \dots : b_n)$ l'image $\pi(b)$.

Notons que ces coordonnées sont uniques à l'action de $B^* = \mathbf{G}_m(B)$ près (rappelons que

$$\mathbf{G}_m = \mathbf{GL}_1 = \text{Spec}(A[T, T^{-1}])$$

est le groupe multiplicatif). Le morphisme

$$(\lambda, b) \mapsto \lambda b$$

définit alors une action de \mathbf{G}_m sur $\mathbf{A}_A^{n+1} - 0$ au dessus du projectif : on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m \times_A \mathbf{A}_A^{n+1} - 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}_A^{n+1} - 0 \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & \mathbf{P}_A^n & \end{array}$$

Exercice 5.10.4. — Montrer que le produit tensoriel $A[X_t/X_i] \otimes_A A[X_i, X_i^{-1}]$ s'identifie à $A[X_t][1/X_i]$. Montrer que l'image inverse ensembliste de $D_+(X_i)$ par π est $D(X_i)$. En déduire que la restriction de π à $D_+(X_i)$ s'identifie à la projection $D_+(X_i) \times_A \mathbf{G}_m \rightarrow D_+(X_i)$ où $\mathbf{G}_m = \mathbf{A}_A^1 - 0 = \text{Spec}(A[T, T^{-1}])$.

Exercice 5.10.5. — Montrer que $r \in \mathbf{GL}_n(A)$ induit un unique A -automorphisme ρ de \mathbf{P}_A^n tel que $\rho(\pi(b)) = \pi(r(b))$ pour tout $b \in B^{n+1}$ dont l'idéal des coordonnées engendrent B .

Remarque 5.10.6. — De même qu'il est parfois utile de parler du projectif d'un espace vectoriel sans fixer une base, on peut définir intrinsèquement le projectif $\mathbf{P}V$ associé à un module libre V de rang $n + 1$ sans utiliser la construction Proj (cf 5.9). Le choix d'une base de V définira alors un isomorphisme de \mathbf{P}^n sur $\mathbf{P}V$. Une manière expéditive est de procéder comme suit. Soit $m : \mathbf{A}^{n+1} \rightarrow V$ un isomorphisme et posons $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}_A^n$. On va recoller ces \mathbf{P}_m le long de... \mathbf{P}_m . Précisons. Un autre m' s'écrit $m' \circ r$ avec $r \in \mathbf{GL}_{n+1}(A)$. Le morphisme r définit un automorphisme encore noté r de $\mathbf{P}^n(A)$ (cf. exercice 5.10.5). On recolle les \mathbf{P}_m grâce à ces isomorphismes.

5.11. Foncteurs des points du projectif

Commençons par une remarque générale. Si \mathcal{F} est un faisceau sur X un A -schéma disons, on a un morphisme d'évaluation des sections

$$ev : H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$$

provenant de l'application bilinéaire associant à $(s, f) \in H^0(X, \mathcal{F}) \times H^0(U, \mathcal{O})$ le produit $f s|_U$. Si cette flèche est surjective, on dira que \mathcal{F} est engendré par ses sections globales.

Exemple 5.11.1. — Soit $l, n \geq 0$ des entiers. Alors, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^n}(l)$ est engendré par ses sections globales. En effet, sur l'ouvert $D(X_i)$ cette flèche est définie (cf. 5.8.7) par le morphisme de multiplication

$$S_d \otimes_A A[X_t/X_i] \rightarrow X_i^d A[X_t/X_i]$$

qui est surjectif. Une manière plus géométrique est de dire que la fibre en x de coordonnées homogènes $(x_0 : \cdots : x_i)$, $x_i \in k(x)$ du conoyau de l'évaluation

$$H^0(\mathcal{O}(l)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(l)$$

s'identifie au conoyau de l'évaluation en (x_i)

$$k(x)[X_0, \dots, X_n]_l \rightarrow k(x).$$

Cette fibre est donc nulle. Le conoyau est donc nul (utiliser Nakayama).

Dans le cas de $X = \mathbf{P}_A^n$, on a $H^0(\mathcal{O}(1)) = A^{n+1}$ (de base X_0, \dots, X_n) de sorte qu'on a une surjection

$$(5.11.a) \quad ev : \mathcal{O}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}(1)$$

De façon plus intrinsèque si on préfère, on a donc une surjection

$$ev : V \otimes_A \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)$$

de faisceaux sur $\mathbf{P}V$, induite par le produit

$$V \otimes_A \text{Sym}(V) \rightarrow \text{Sym}(V)[1].$$

Soit alors $m : T \rightarrow \mathbf{P}^{n+1}$ un T -point du A -schéma \mathbf{P}^{n+1} . L'image inverse d'une surjection reste surjective (exercice) de sorte qu'on a une surjection

$$m^*(ev) : (\mathcal{O}_T)^{n+1} \rightarrow L = m^*\mathcal{O}(1)$$

et un isomorphisme (une égalité ici) $\alpha : m^*\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} L$, prouvant au passage que L est localement libre de rang 1 comme $\mathcal{O}(1)$.

Ainsi, notre point m définit un quotient localement libre de rang 1. Notons que deux quotients sont isomorphes si et seulement si ils ont le même noyau, vu comme sous-faisceau de $(\mathcal{O}_T)^{n+1}$. Un peu abusivement, on dira ainsi quotient pour classe d'isomorphisme de quotients. Mais on préfère le point de vue quotient, car c'est sur celui-ci que porte la condition localement libre de rang 1.

Remarque 5.11.2. — Si on veut être intrinsèque, il faudrait remplacer \mathcal{O}^{n+1} par $V \otimes \mathcal{O}_T$.

Proposition 5.11.3. — L'application précédente identifie les T -points de \mathbf{P}^{n+1} aux quotients localement libres de rang 1 de \mathcal{O}_T^{n+1} .

Une autre manière de voir la proposition est la suivante. Si $V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow L$ est un quotient localement libre de rang 1, il existe un unique morphisme $m : T \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ et un unique isomorphisme $m^*\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} L$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & m^*\mathcal{O}(1) \\ & \nearrow & \downarrow \wr \\ \mathcal{O}_T^{n+1} & & L \\ & \searrow & \end{array}$$

commute.

Preuve : Partons donc d'une surjection $\mathcal{O}_T^{n+1} \xrightarrow{(l_i)} L$. Soit U un ouvert sur lequel L est trivial : on peut donc choisir un isomorphisme $\epsilon_U^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} L|_U$ définissant $\lambda_i \in H^0(U, \mathcal{O})$. On a donc une surjection

$$\mathcal{O}_U^{n+1} \xrightarrow{(\lambda_i)} \mathcal{O}_U.$$

Dire que cette flèche est surjective, c'est dire que (λ_i) ne s'annule jamais dans $k(u)^{n+1}$, $u \in U$ définissant ainsi un morphisme

$$\lambda : U \rightarrow \mathbf{A}^{n+1} - 0.$$

Changer de trivialisations, c'est multiplier par une fonction inversible et donc c'est multiplier λ par une fonction inversible ce qui ne change pas

$$\pi \circ \lambda : U \rightarrow \mathbf{P}^n$$

(cf. 5.10).

Ces différents U -points se recollent donc pour donner un T -point de \mathbf{P}^n . Par construction, l'image inverse de $x_i \in H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1))$ sur T est $l_i \in H^0(T, L)$. On vérifie facilement que c'est le foncteur quasi-inverse cherché. ■

Remarque 5.11.4. — On verra en devoir que le foncteur qui associe à T les quotients localement libres de rang r est représentable par un \mathbf{A} -schéma projectif $\mathbf{Gr}(V, r)$: la grassmannienne. On utilisera librement ce résultat.

Exercice 5.11.5. — Vérifier que l'image inverse $\pi^*\mathcal{O}(1)$ est triviale (isomorphe à \mathcal{O}). Montrer que $\pi_*\mathcal{O} = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}(d)$. Montrer qu'un T -point m de \mathbf{P}^n se factorise à travers π , ie a des coordonnées homogènes, si et seulement si $m^*\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_T$. En regardant $T = \text{Spec}(\mathbf{Z}[\sqrt{-5}])$ et l'idéal engendré par 2 et $1 + \sqrt{-5}$ dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, construire un T -point de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ sans coordonnées homogènes.

Exercice 5.11.6. — Montrer que la catégorie des faisceaux de \mathcal{O} -modules localement libres de rang n sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$ est équivalente à la catégorie des A -modules projectifs. Montrer que si A est local, tout faisceau localement libre est libre -on dit parfois trivial-, ie isomorphe à \mathcal{O}^n . Montrer que E quasi-cohérent de type fini sur X est localement libre si tous les localisés E_x sont des \mathcal{O}_x -modules libres. Montrer que si deux faisceaux localement libres E, F vérifient $E \otimes F \simeq \mathcal{O}$, alors E, F sont de rang 1 et F s'identifie au dual $E^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(E, \mathcal{O})$ de E . Inversement, vérifier qu'on a $E \otimes E^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd(E)$ et que dans le cas où E est de rang 1, on a de plus $\mathcal{E}nd(E) = \mathcal{O}$.

Comme le montre l'exercice, même un schéma affine peut posséder des faisceaux localement libres de rang 1 qui ne sont pas libres. Ceci motive la définition suivante (compte tenu de 5.11.6).

Définition 5.11.7. — Le groupe de Picard de X est le groupe (abélien) des classes d'isomorphisme de faisceaux localement libres de rang 1, le produit étant défini par le produit tensoriel, l'inverse étant le dual.

On écrit $\text{Pic}(A)$ pour $\text{Pic}(\text{Spec}(A))$. Par exemple, si A est local, $\text{Pic}(A) = 0$ (exercice). Bien entendu, l'image inverse des faisceaux permet de voir l'association $X \rightarrow \text{Pic}(X)$ comme un foncteur contravariant. Par exemple, on verra rapidement que la flèche $\text{Pic}(A) \rightarrow \text{Pic}(\mathbf{A}_{\mathbf{A}}^n)$ est un isomorphisme alors qu'on a un isomorphisme canonique que la flèche

$$\text{Pic}(A) \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_n(\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^n)$$

qui sur le facteur \mathbf{Z} envoie l sur $\mathcal{O}(l)$. Si A est local donc, on a

$$\text{Pic}(\mathbf{A}_{\mathbf{A}}^n) = 0 \text{ et } \text{Pic}_n(\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^n) = \mathbf{Z}.$$

Remarque 5.11.8. — Notons que d'un point de vue intrinsèque, les k -points de \mathbf{PV} s'identifient aux quotients $\phi : V \otimes k \rightarrow L$ où L espace vectoriel de rang 1, autrement dit à un hyperplan de $V \otimes k$, le noyau de ϕ . Si on voulait l'espace des droites, il aurait fallu prendre le dual de V . Ce point de vue « dual » est en fait meilleur, car on peut refaire ces constructions avec V un faisceau quasi-cohérent arbitraire.

Le morphisme $\pi \mathbf{A}^{n+1} - 0 \rightarrow \mathbf{P}^n$ est en fait un morphisme d'oubli qui a une surjection $s : \mathcal{O}_{\mathbf{T}}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$ associe lui-même, vu comme quotient ! Autrement dit, il identifie s et λs pour $\lambda \in H^0(S, \mathcal{O})$ inversible.

Définition 5.11.9. — L'espace cotangent d'un schéma X en x est le $k(x)$ -espace vectoriel $\mathbf{T}_x^*X = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Le tangent \mathbf{T}_xX est son dual.

Remarque 5.11.10. — Cette dénomination classique n'est peut-être pas idéale. En effet, on définira plus tard le faisceau cotangent $\Omega_{X/k}$ d'un k -schéma X/k et sa fibre $\mathbf{T}_x^*X = \Omega_{X,k} \otimes k(x)$ si elle est égale à \mathbf{T}_x^*X si x est rationnel **en est distincte en général**. On espère que la notation ne prêtera pas à confusion.

Exercice 5.11.11. — Soit D le spectre de $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$. Soit x un point rationnel d'un k -schéma X . Montrer que \mathbf{T}_xX s'identifie aux morphismes de D dans X d'image x . En déduire que $\mathbf{T}_x\mathbf{PV}$ s'identifie à $V^*/k.x$ où on voit x comme une droite de V^* . Retrouver ce résultat par un calcul en coordonnées.

5.12. La terminologie des systèmes linéaires

Soit L un faisceau localement libre de rang 1 sur un k -schéma X (k est ici un corps, bien que cela ne soit pas vraiment indispensable).

Définition 5.12.1. — Un système linéaire V est un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L)$. Si $V = H^0(X, L)$, on dit que le système est complet. S'il est de dimension 2, on dit que c'est un pinceau.

Le morphisme d'évaluation (tordu)

$$V \otimes L^* \rightarrow \mathcal{O}$$

a pour image un faisceau quasi cohérent d'idéaux définissant un sous-schéma fermé B_V . Par construction, dire $x \notin B_V$ c'est dire $V \otimes \mathcal{O} \rightarrow L$ surjectif en x (exactitude à droite du produit tensoriel). La caractérisation des points de \mathbf{PV} nous donne donc un unique morphisme

$$\phi_V : X - B_V \rightarrow \mathbf{PV}$$

et un isomorphisme $\phi_V^*\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} L$. L'image d'un k point x est par définition l'hyperplan de V des sections s'annulant en x .

Prenons un point de vue moins intrinsèque, mais plus parlant. Soit s_0, \dots, s_n une base de V , permettant d'identifier \mathbf{P}^n et \mathbf{PV} . Le schéma B_V est donné par les équations $s_i = 0$ au sens suivant. Localement, on trivialisait L . Les s_i s'identifient alors à des fonctions régulières. L'idéal engendré ne dépend que des s_i et pas de la trivialisaiton.

Soit alors $x \in X$. Le choix d'une base e_x de l'espace vectoriel de dimension 1 $L \otimes k(x)$ identifie $(s_i(x))$ à un point de k_x^{n+1} . Changer e_x change ce point en un multiple non nul, donc pas son image dans $\mathbf{P}_{k(x)}^n$. Or l'image de x s'identifie à un point de $\mathbf{P}^n \otimes k(x) = \mathbf{P}_{k(x)}^n$ et $\phi_V(x) = (s_0(x) : \dots : s_n(x))$ avec les identifications précédentes.

On donnera (16.10.2) des conditions assurant qu'un système linéaire définit une immersion fermée.

Exercice 5.12.2 (Projection). — Soit W un sous-espace de dimension $d+1$ de $V = H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O})$. Vérifier que B_V s'identifie à $\mathbf{P}V/W$, sous-variété linéaire définie par W (d'équations homogènes $w_0 = \dots = w_d$ où w_i base de W) et que le système linéaire ϕ_V s'identifie au morphisme tautologique (qu'on explicitera)

$$\mathbf{P}V \rightarrow \mathbf{P}W.$$

Montrer que si $d+1 = n$, il existe un unique $x \in \mathbf{P}^n(k)$ tel que W soit l'espace des formes de V s'annulant en x et que B_V est réduit à x . Montrer que $\mathbf{P}W$ s'identifie en un sens convenable au schéma des droites projectives passant par x et que la projection envoie $y \neq x$ sur la droite $\langle y, x \rangle$ (précisément, la variété linéaire associée aux formes s'annulant en x et y). Généraliser cette interprétation au cas cas de la dimension quelconque. Si W a pour base (X_0, \dots, X_d) , vérifier que ϕ_V envoie $(x_0 : \dots : x_n)$ sur $(x_0 : \dots : x_d)$.

5.13. Faisceaux quasi-cohérents sur le projectif

On a vu que se donner un faisceau quasi-cohérent sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, c'est se donner un A -module.

Dans le cas projectif, c'est un peu moins simple. Par exemple, le faisceau associé au module concentré en degré 0 $M_0 = S/(X_0, \dots, X_n)$ sur \mathbf{P}_A^n est nul. La raison est que le faisceau correspondant sur \mathbf{A}_A^{n+1} est nul en dehors de l'origine.

Mais c'est le seul défaut de la correspondance modules-faisceaux dans le cas projectif (on donnera un énoncé précis dans un devoir). En tout cas, donnons ce qui fonctionne correctement (les preuves sont à copier sur le modèle de la preuve de 4.1.2). On notera $\Pi\mathcal{F}$ le S -module gradué

$$(*) \quad \Pi\mathcal{F} = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{F}(d))$$

où, rappelons le, $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d)$. Par exemple, on a $\Pi\mathcal{O} = S$ d'après 5.8.7.

On a une flèche canonique

$$\widetilde{\Pi\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$$

qui sur $D(X_i)$ envoie $s/X_i^n, s \in H^0(\mathcal{F}(n))$ sur... elle-même vue comme section globale de \mathcal{F} sur $D(X_i)$ (cf. 5.9.4). Notons que $\Pi\mathcal{F}$ s'identifie (5.11.5) aux sections globales de $\pi_*\pi^*\mathcal{F}$ ce qui explique d'une part la définition de $\Pi\mathcal{F}$ et le résultat suivant, qui est l'analogie projectif de 4.1.2.

Proposition 5.13.1. — Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur \mathbf{P}_A^n et f homogène de degré $d > 0$.

- Si $s \in H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{F})$ est nulle sur $D(f)$, il existe $N > 0$ telle que $f^d s \in H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}(dN))$ est nulle.
- Si $s \in H^0(D(f), \mathcal{F})$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $f^N s$ se prolonge en une section de $\mathcal{F}(dN)$ sur \mathbf{P}^n .
- La flèche de $\widetilde{\Pi\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Notons que, comme dans le cas affine, le premier point donne l'injectivité de (*) tandis que le second donne la surjectivité.

En revanche, on n'a pas $\Pi\tilde{M} = M$ pour M gradué en général. Par exemple, le S -module $M = A = S/S^+$ vérifie $\tilde{M} = 0$ et donc $0 = \Pi\tilde{M} \neq M$. On comprendra mieux ce phénomène avec l'introduction de la cohomologie. Pour une approche directe, voir 5.14.3.

On retiendra que tout faisceau quasi-cohérent s'écrit, non uniquement, sous la forme \tilde{M} avec M gradué.

5.14. Idéal homogène d'un fermé de \mathbf{P}^n

Si J est un idéal homogène de S , la surjection $S = A[X_0, \dots, X_n] \twoheadrightarrow S/J$ est graduée et induit une immersion fermée

$$F = \text{Proj}(S/J) \rightarrow \text{Proj}(S) = \mathbf{P}_A^n.$$

Plus directement, $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$ est un sous-faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{S}}$ qui définit l'immersion fermée précédente (exercice). Sur l'ouvert $U_i = D(X_i)$, elle est définie par l'idéal

$$J_i = \{P(X_t/X_i), P \in J\} = H^0(U_i, \mathcal{I}_F)$$

avec \mathcal{I}_F faisceaux d'idéaux définissant F . Le sous-schéma fermé correspondant est souvent noté $V(J)$ et est dit défini par J . On a déjà remarqué que plusieurs idéaux homogènes peuvent définir le même schéma. Par exemple, l'idéal S^+ et l'idéal 0 définissent le même sous-schéma, ... le vide. Pour simplifier les notations, on notera $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ le faisceau structural de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{A}}$.

Définition 5.14.1. — Soit F un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{A}}$ et \mathcal{I}_F l'idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ qui le définit. On note I_F l'idéal homogène de S

$$I_F = \Pi \mathcal{I}_F = \bigoplus_l H^0(\mathbf{P}^n_{\mathbf{A}}, \mathcal{I}_F(l)).$$

On dit que I_F est l'idéal saturé de F .

Notons que I_F est bien un idéal. En effet, comme $\mathcal{O}(d)$ est localement libre, on peut tensoriser la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow 0$$

pour obtenir une autre suite exacte, ce car $\mathcal{O}(d)$ est localement libre,

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(d) \rightarrow \mathcal{O}(d) \rightarrow \mathcal{O}_F(d) \rightarrow 0$$

de sorte que I_F s'injecte bien dans

$$S = \bigoplus H^0(\mathbf{P}^n_{\mathbf{A}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(l)),$$

et est stable par produit. La proposition 5.13.1 assure qu'on l'égalité

$$\tilde{I}_F = \mathcal{I}_F.$$

Le lemme signifie que le faisceau saturé d'idéaux I_F définit bien le schéma F : par construction, c'est le plus grand idéal homogène définissant X .

Remarque 5.14.2. — Si J est un idéal homogène de S définissant un fermé $V(J)$ du projectif, il définit aussi un sous-schéma fermé VJ (le cône affine sur $V(J)$) de $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{A}} = \text{Spec}(S)$. Par construction, un B -point (B est une A -algèbre)

$$x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{A}} - 0(B) \subset B^{n+1}$$

est dans VJ si le point $\pi(x)$ de coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ est dans $V(J)$. En particulier, dire que $V(J)$ est vide, c'est dire que VJ est contenu dans la section nulle $V(X_i)$ de $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{A}} \rightarrow \text{Spec}(A)$ ie $(X_i) \subset \sqrt{J}$. En d'autres termes, $V(J)$ est vide si et seulement si il existe N tel que $X_i^N \in J$ pour tout i .

Exercice 5.14.3. — On conserve les notations de la remarque précédente. Soit M un S -module gradué de type fini. On note \mathcal{F} le faisceau associé sur $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{A}}$. Vérifier qu'on a $\text{Supp}(\mathcal{F}) = V(\text{Ann}(M))$. En déduire que \tilde{M} est nul (sur \mathbf{P}^n) si et seulement si il existe N tel que $X_i^N M = 0$. Soit $m : M \rightarrow M'$ un morphisme de S -modules gradués de type fini. Montrer que le morphisme $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'$ est un isomorphisme si et seulement si m est un isomorphisme en degré assez grand. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux idéaux homogènes définissent le même sous-schéma fermé de \mathbf{P}^n .

Le lecteur pourra toutefois prouver à la main le résultat suivant.

Exercice 5.14.4. — Soit M un S -module de type fini. Montrer que \tilde{M} est nul si et seulement si une puissance de (X_0, \dots, X_n) annule M .

Exercice 5.14.5. — Montrer que le produit $V(J) \otimes_{\mathbf{A}} B$ s'identifie au sous schéma fermé $V(JS_B)$ de \mathbf{P}^n_B où $JS_B = \text{Ker}(S_B = S \otimes_{\mathbf{A}} B \rightarrow (S/J) \otimes_{\mathbf{A}} B)$ est l'idéal engendré par J dans S_B (cf. 5.9.10).

Exercice 5.14.6. — Montrer que le système linéaire complet $|\mathcal{O}(2)|$ sur \mathbf{P}_k^1 est sans point base. Montrer que c'est une immersion fermée d'image la conique d'équation homogène

$$X_1^2 = X_0X_1.$$

Inversement, soit q une forme quadratique à trois variables non dégénérée, vue comme polynôme homogène. Montrer que si $V(q) \in \mathbf{P}_k^2$ a un point rationnel x , $V(q)$ est isomorphe à \mathbf{P}_k^1 [On pourra soit faire un changement de variables pour se ramener à la forme quadratique précédente, soit couper par des droites passant par x]. Quel est le nombre de points rationnels de $V(q)$ si k est un corps fini ?

CHAPITRE 6

CONDITIONS DE FINITUDE

De même que rapidement pour faire de la topologie, on met des hypothèses de finitude (penser à la définition des variétés), dans la pratique on regarde des schémas « raisonnables ». On a deux types de conditions de finitude, absolues lorsque le schéma ne vient pas naturellement avec une base de référence, relative lorsqu'on travaille avec des schémas sur une base fixée. On sait qu'une bonne classe d'anneaux est la classe des anneaux noethériens. Il en va de même pour les schémas.

6.1. Schémas noethériens

Rappelons qu'un espace topologique est quasi-compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

Définition 6.1.1. — *Un schéma est dit noethérien s'il peut être recouvert par nombre fini d'ouverts affines $U = \text{Spec}(A)$ avec A anneau noethérien.*

Donnons quelques résultats faciles.

Lemme 6.1.2. — *Un schéma noethérien X est un espace topologique noethérien, autrement toute suite décroissante de fermés stationne.*

Preuve : on peut supposer X réduit (la question est topologique). Soit F_i une telle famille. On peut supposer que F_i est défini par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux \mathcal{I}_i tel que $\mathcal{O}/\mathcal{I}_i$ est réduit. On a alors \mathcal{I}_i suite croissante d'idéaux. On recouvre X par un nombre fini d'ouverts affines $U_n = \text{Spec}(A_n)$, $n = 1, \dots, N$ avec A_n noethérien. La restriction de \mathcal{I}_i à U_n est de la forme \tilde{I}_i et la suite des I_i est croissante donc stationne pour $i > i_n$. La suite des \mathcal{I}_i stationne pour $i \geq \sup_{n \leq N} i_n$. ■

Un schéma noethérien est quasi-compact comme l'est toute réunion finie d'ouverts affines.

Lemme 6.1.3. — *Tout sous-schéma d'un schéma noethérien X est noethérien donc quasi-compact.*

Preuve : Dans le cas d'un sous-schéma fermé, c'est clair. Il suffit de voir que tout ouvert U de X est noethérien. On se ramène à $X = \text{Spec}(A)$ avec A noethérien. Le complémentaire $V(I)$ de U est une union finie d'hypersurfaces $V(a_i)$, $i = 0, \dots, n$ car I de type fini. Mais alors, $U = \cup_{i=1}^n D(a_i)$ avec $D(a_i) = \text{Spec}(A[1/a_i])$ noethérien. ■

Notons qu'un schéma noethérien non vide a toujours des points fermés. En effet, soit F un fermé minimal. Si F avait au moins deux points, prenons U un ouvert contenant l'un des deux et pas l'autre (un schéma est de Kolmogorov 3.7.4). Alors, $F \setminus U$ serait un fermé strict, une contradiction.

Exercice 6.1.4. — *Soit X un schéma non vide quasi-compact. Montrer que X a des points fermés (utiliser le lemme de Zorn).*

On peut construire des schémas sans point fermé (cf. le devoir I), mais comme l'illustre ce qui précède, ils sont très pathologiques...

Mais attention, dire que l'espace topologique est noethérien ne signifie pas que le schéma est noethérien (3.2.2).

Le lecteur complétera alors l'exercice 3.2.2 par

Exercice 6.1.5. — *Un schéma affine $\text{Spec}(A)$ est noethérien si et seulement si A est noethérien.*

Nous nous intéresserons désormais essentiellement aux schémas noethériens.

6.2. Points génériques des schémas noethériens

Une propriété remarquable de la topologie d'un schéma est l'existence de points génériques pour les fermés irréductibles.

Lemme 6.2.1. — *Soit X un schéma irréductible. Alors, X a un unique point qui est dense.*

Preuve : Montrons l'unicité. Soit x dense et $y \neq x$. Il existe un ouvert U contenant un des deux points par l'autre. Comme U rencontre $X = \overline{\{x\}}$, on a $x \in U$. Donc, y n'est pas dans U , et donc y n'est pas dense, d'où l'unicité (on n'a pas utilisé l'irréductibilité).

Montrons l'existence. La question est topologique de sorte qu'on peut supposer X réduit. Soit $U \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(A)$ un ouvert affine non vide de X . Alors, U est irréductible (3.2.10). Mais alors A est intègre (3.2.3) et $\eta = (0)$ est dense dans U : dire que $f(\eta) = 0$ c'est dire $f = 0$ dans $k(\eta) = \text{Frac}(A)$, ie $f = 0$, d'où $\bar{\eta} = \text{Spec}(A)$. Mais comme X est irréductible, U est dense dans X et donc η dense dans X . ■

Définition 6.2.2. — *Un schéma X est dit intègre s'il irréductible et réduit. Le corps résiduel du point générique η se note $k(X)$ et est appelé corps de fonctions de X .*

Par exemple, $\text{Spec}(A)$ est intègre si et seulement si A est intègre (3.2.3).

Ainsi l'application qui à x associe son adhérence (qui est irréductible comme adhérence d'un irréductible) est une bijection entre X et l'ensemble des parties irréductibles de X . Son inverse est l'application qui à une partie irréductible associe son point générique.

Rappelons l'espace topologique d'un schéma noethérien est noethérien et qu'à ce titre, il a un nombre fini de composantes irréductibles (3.2.8)

Définition 6.2.3. — *Soit X un schéma noethérien non vide. Les points génériques de X sont les points génériques de ses composantes irréductibles.*

Cette définition semble très globale. En fait, il n'en est rien.

Définition 6.2.4. — *Soient x, x' deux points d'un schéma. On dit que x est une spécialisation de x' ou que x' est une généralisation de x , et on note $x' \rightsquigarrow x$, si x est dans l'adhérence de x' . Si $x \neq x'$, on dit que la spécialisation est stricte.*

Géométriquement, ceci signifie que x est un point du fermé irréductible de point générique x' . Ainsi, un fermé est stable par spécialisation et un ouvert est stable par généralisation et un point générique est son unique généralisation. Ainsi, un point générique est point générique de tout ouvert qui le contient.

D'un point de vue calculatoire, imaginons que X intègre est le sous-schéma fermé de \mathbf{A}_k^n défini par un certain idéal I que et X est défini par un certain idéal J contenant I . Chaque coordonnée x_i de \mathbf{A}_k^n définit une fonction rationnelle η_i dans $k(F) = \text{Frac}(k[X])/J = k(X)$. Posant $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in k(X)^n$, on constate que η annule J par construction : c'est le point générique de X et $k(\eta) = k(X)$.

Proposition 6.2.5. — *L'ensemble $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ s'identifie à l'ensemble des générisations de x . Le point x est générique si et seulement si $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est réduit à un point, ou encore si tout élément de \mathfrak{m}_x est nilpotent.*

Preuve : Soit $U = \text{Spec}(A)$ un ouvert affine contenant x . Toute générisation de x reste dans U . Ainsi, l'ensemble des générisations de x et la tige de \mathcal{O} en x sont les mêmes pour U et X , ce qui permet de supposer $X = U$ et $x = \mathfrak{p}$ idéal premier de A . Or, $\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ s'identifie aux idéaux premiers \mathfrak{q} de A contenus dans \mathfrak{p} , autrement dits tels que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q}) = \bar{\mathfrak{q}}$. Mais cette condition signifie bien que \mathfrak{q} est une générisation de \mathfrak{p} . Donc x est générique dans x si et seulement si il l'est dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. ■

Corollaire 6.2.6. — *Si η est générique dans X noethérien, alors $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est artinien.*

Remarque 6.2.7. — *La proposition signifie en particulier que la notion de point générique est locale : si x est générique si et seulement si il est générique dans un ouvert qui le contient, ce qui n'est pas le cas de la notion de point fermé !*

Exercice 6.2.8. — *Soit X un schéma intègre de point générique η , $k(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ le corps des fonctions rationnelles. Montrer que pour tout $x \in X$, le localisé $\mathcal{O}_{X,x}$ se plonge dans $k(X)$. Montrer que x se spécialise sur y si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x}$ contient $\mathcal{O}_{X,y}$.*

Rappelons que les composantes irréductibles de X non vide sont les fermés irréductibles maximaux de X . Si $X = \text{Spec}(A)$, les fermés sont en bijection avec les idéaux saturés (égaux à leurs racines). Mais alors si I est saturé et $V(I)$ irréductible, alors I est premier. Ainsi, les points génériques de $\text{Spec}(A)$ sont les **idéaux premiers minimaux**. Comme l'intersection des idéaux premiers minimaux est l'intersection de tous les idéaux premiers, c'est l'ensemble des nilpotents de A . On déduit alors immédiatement :

Corollaire 6.2.9. — *Une fonction régulière d'un schéma noethérien nulle en tous ses points génériques est nilpotente.*

En fait, on peut enlever l'hypothèse noethérienne (en définissant un point générique comme un point d'adhérence maximale). On n'en aura pas besoin.

En particulier, si X est réduit noethérien disons et x générique $\mathcal{O}_{X,x} = k(x)$ de sorte que dans ce cas le morphisme

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{X,\eta}$$

(somme -finie- sur les points génériques) est injective. C'est hélas faux pour des schémas non réduits en général (prendre le spectre de $k[x, y]/(x^2, xy)$ par exemple) : il faut considérer d'autres points pour réparer, les points associés.

D'une façon géométrique, l'application $x \mapsto \bar{x}$ est une bijection de X dans l'ensemble des parties irréductibles de X d'inverse $F \mapsto \eta_F$ où η_F est le point générique de F . Dire que x est un spécialisation de y est alors dire que y appartient au fermé irréductible \bar{x} .

6.3. Faisceaux cohérents

Définition 6.3.1. — *Un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur un schéma noethérien est dit cohérent si X peut-être recouvert par des ouverts affines $U = \text{Spec}(A)$ tels que la restriction de \mathcal{F} à U est isomorphe à \tilde{M} avec M de type fini.*

En imitant des raisonnements déjà faits, on montre sans peine que le foncteur section globales est une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur un schéma affine noethérien celle des A -modules de type fini.

Cette notion est aussi stable par les opérations usuelles (noyau, quotient, dual, somme finie) que la cohérence. Toutefois, elle n'est la bonne que pour les schémas noethériens (cf. [7]).

Exercice 6.3.2. — Montrer que si \mathcal{F} est cohérent et \mathcal{G} quasi-cohérent, le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est quasi-cohérent de tige en x le module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$.

Remarque 6.3.3. — D'une manière générale, si X n'est pas supposé noethérien, \mathcal{F} quasi-cohérent est dit cohérent s'il est de type fini et si pour tout ouvert U , les sous-faisceaux de type fini de $\mathcal{F}|_U$ sont de présentation finie. Ces faisceaux se comportent alors aussi bien que les modules noethériens par les opérations usuelles ([7]). En particulier, un faisceau cohérent est de présentation finie, la réciproque étant fautive en général (penser à l'exemple d'un anneau non noethérien).

Bien entendu, la restriction de \mathcal{F} à tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ est alors de la forme \tilde{M} avec M de présentation finie sur A .

Proposition 6.3.4. — Soit \mathcal{F} cohérent sur \mathbf{P}_A^n . Alors, il existe l, m tel que $\mathcal{F}(l)$ soit engendré par m sections globales.

Preuve : En effet, recouvrons \mathbf{P}_A^n par les ouverts affines $D(X_i)$. Sur chacun de ses ouverts, on a un nombre fini de sections s qui engendrent. Pour chacune d'elle, on peut trouver l tel que $X_i^l s$ se prolonge en une section σ de $\mathcal{F}(l)$. Comme on a un nombre fini d'ouverts, on a un nombre fini m de sections en jeu, et on peut supposer que l est le même pour toutes ces sections locales. La famille de m sections $\sigma \in H^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{F}(l))$ engendre $\mathcal{F}(l)$. ■

Une autre manière de dire est qu'on a une surjection

$$(\mathcal{O}(-l))^m \twoheadrightarrow \mathcal{F}.$$

Corollaire 6.3.5. — Supposons A noethérien. Un faisceau sur \mathbf{P}_A^n est cohérent si et seulement si $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}$ avec M gradué de type fini.

Preuve : C'est nécessaire. En effet, soit M l'image de $S[-l]^m$ dans $\Gamma = \bigoplus H^0(\mathcal{F}(d))$ déduite de $\mathcal{O}(-l)^m \rightarrow \mathcal{F}$ comme dans 6.3.4. On a certainement $\tilde{M} \subset \tilde{\Gamma} = \mathcal{F}$. Inversement, toute section locale de \mathcal{F} provient d'un élément de M_l par construction, donc d'une section locale de \tilde{M} .

La condition est suffisante dans le cas noethérien : \mathbf{P}_A^n est alors noethérien, ce qui nous ramène aux ouverts $D(X_i) = \mathbf{A}_A^n$ sur lesquels $\tilde{M} = \widetilde{M_{(X_i)}}$ qui est cohérent car $M_{(X_i)}$ de type sur l'anneau (noethérien) $S_{(X_i)} = A[X_t/X_i]$. ■

Exercice 6.3.6. — Si \mathcal{F} est cohérent sur X noethérien, montrer que le support

$$\{x \in X \text{ tels que } \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

est aussi $V(\text{Ann}(\mathcal{F}))$ où $\text{Ann}(\mathcal{F})$ est le faisceau d'idéaux des sections locales f de \mathcal{O}_X annihilant \mathcal{F} . Montrer que c'est aussi $\{x \in X \text{ tels que } \mathcal{F} \otimes k(x) \neq 0\}$.

6.4. Points associés d'un schéma noethérien

On va définir les idéaux associés d'un anneau (noethérien). On montrera que cette notion est locale par localisation pour traiter le cas des schémas. Comme souvent, on va en fait définir les associés de modules en général, nécessaires même si on ne s'intéresse qu'aux anneaux. La théorie ne marche vraiment que pour les modules de type fini sur un anneau noethérien. Soit donc M un module sur A noethérien. On veut étudier les $x \in A$ qui divisent 0 dans M .

Définition 6.4.1. — Un idéal premier \mathfrak{p} de A est dit associé dans M s'il existe $m \in M$ tel que $\text{Ann}(m) = \mathfrak{p}$. L'ensemble des associés de M est noté $\text{Ass}(M)$.

Exemple 6.4.2. — Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, on a $\text{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$. Autrement dit, seul le point générique de $\text{Spec}(A/\mathfrak{p})$ est associé (simplement car A/\mathfrak{p} intègre).

Dans ce cas, la multiplication par m induit une injection $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ qui se localise en une injection de $A_{\mathfrak{p}}$ -modules

$$k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}.$$

Prouvons alors que **la notion de point associé, comme celle de point générique, est locale.**

Lemme 6.4.3. — *L'idéal $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ est associé si et seulement si il existe une injection de $A_{\mathfrak{p}}$ -modules*

$$k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, \mathfrak{p} est associé pour M si et seulement si $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est associé pour $M_{\mathfrak{p}}$.

Preuve : On doit prouver que la condition est suffisante. Par hypothèse, l'image de 1 dans $M_{\mathfrak{p}}$ s'écrit m/f avec $m \in M$ et $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ et son annulateur est $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Notons qu'on peut supposer $f = 1$, car f est inversible dans le localisé. On ne peut pas brutalement prendre l'annulateur de m , car il n'est pas vrai en général que \mathfrak{p} annule m dans M . Toutefois, choisissons un système fini de générateurs a_i de \mathfrak{p} . Comme $a_i m/1$ est nul dans $M_{\mathfrak{p}}$, il existe $f_i \in A$ non nuls en \mathfrak{p} tel que $f_i a_i m_i = 0$ dans M . Soit $m' = (\prod a_i)m$. On a certainement $\mathfrak{p} \subset \text{Ann}(m')$ par construction. Si maintenant $f m' = 0$, l'image de $f(\prod a_i)m$ dans $M_{\mathfrak{p}}$ est nulle, on a alors $f(\prod a_i)/1 \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$; ceci assure $f(\mathfrak{p}) = 0$ dans $k(\mathfrak{p})$ et donc $f \in \mathfrak{p}$. Ainsi, on a $\text{Ann}(\mathfrak{p})$ et

$$k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{m'} M_{\mathfrak{p}}$$

associé. ■

Corollaire 6.4.4. — *Soit $S \subset A$ stable par produit. Montrer que l'application $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ identifie $\text{Ass}(S^{-1}M)$ à*

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \text{ tels que } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

On pose alors la définition

Définition 6.4.5. — *Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur un schéma X . Un point $x \in X$ est dit associé pour \mathcal{F} si \mathfrak{m}_x est un idéal associé de \mathcal{F}_x .*

Dans le cas $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathcal{F} = \tilde{M}$, le lemme 6.4.3 assure que \mathfrak{p} est associé pour M si et seulement si \mathfrak{p} associé de \mathcal{F} . Rappelons que le support de M est l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tels que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, autrement dit c'est $V(\text{Ann}(M)) \subset \text{Spec}(A)$ lorsque M est de type fini. Notons que 6.4.3 assure qu'un associé est un point du support (voir 6.4.12 pour une version plus précise).

Proposition 6.4.6. — *Supposons M non nul. Alors, $\text{Ass}(M)$ est non vide et l'union des idéaux associés est l'ensemble des diviseurs de zéros dans M .*

Preuve : L'ensemble des annulateurs $\text{Ann}(m), m \in M \setminus \{0\}$ est non vide. Choisissons un élément maximal $\text{Ann}(m)$. Soient $a, b \in A$ tels que $a \notin \text{Ann}(m)$ et $ab \in \text{Ann}(m)$. On a donc $am \neq 0$ et $\text{Ann}(m) \subset \text{Ann}(am)$, donc ces deux idéaux sont égaux. Mais $b \in \text{Ann}(am)$, donc $b \in \text{Ann}(m)$ et ainsi $\text{Ann}(m)$ est premier prouvant que $\text{Ass}(M)$ est non vide.

Si $an = 0$ pour n non nul, $a \in \text{Ann}(n)$. Mais, si $\text{Ann}(m)$ est maximal parmi les annulateurs non nuls contenant n , il est aussi maximal parmi les annulateurs non nuls, donc est associé. La réciproque est claire. ■

Corollaire 6.4.7. — *Soit μ un morphisme $\mu : A^n \hookrightarrow A^m$ avec A un anneau non nul. Un morphisme $\mu : A^n \hookrightarrow A^m$ est injectif si et seulement si $n \leq m$ et $\bigwedge^n(\mu)$ est injectif, autrement dit si l'annulateur des l'idéal des mineurs de taille n d'une matrice de μ est nul.*

Preuve : Supposons μ injectif. Soit B le sous-anneau de A engendré par les coefficients de A . C'est un anneau noethérien (il est de type fini sur \mathbf{Z}) et μ induit un morphisme injectif encore noté μ de B^n dans B^m . Soit $\mathfrak{p} = \text{Ann}(b)$ un associé de B (qui est non nul, comme A) de corps résiduel $k = k(\mathfrak{p})$. Montrons que $\mu_k = \mu \otimes 1_k \in \text{Hom}(k^n, k^m)$ (est une injection de k^n dans k^m). On peut supposer $B = B_{\mathfrak{p}}$ local car la localisation est exacte. En effet, si $\mu(v) = 0, v \in B^n$ dans k^m , on a $b\mu(v) = \mu(bv) = 0$ ce qui entraîne (injectivité de μ) la nullité de bv et donc $v \otimes 1 = 0$ dans k^n . On se souvient alors de son cours d'algèbre linéaire (sur k) pour conclure $n \leq m$.

Si jamais tous les mineurs μ_i de μ étaient annulés par $a \in A$ non nul, quitte à changer B en le sous-anneau $B[a]$ de A qui est noethérien car de type fini sur B visiblement, on peut supposer

$$b\mu_i = 0 \text{ avec } b \in B \setminus 0.$$

Considérons alors \mathfrak{p} maximal dans l'ensemble des annulateurs $\text{Ann}(\beta), \beta \in B \setminus 0$ qui contiennent $\text{Ann}(b)$. On a alors $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(B)$ et $\mu_i \in \mathfrak{p}$. Mais alors, tous les mineurs maximaux de $\mu \otimes k$ sont nuls dans $k = k(\mathfrak{p})$, alors que $\mu \otimes k$ est injective, une contradiction.

Inversement, supposons qu' $\bigwedge^n(\mu)$ injectif. Soit v de coordonnées $v_i \in A$ sur la base canonique (e_i) de A^n dans $\text{Ker}(\mu)$. On a

$$0 = \mu(v) \wedge \mu(e_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\mu(e_i)} \wedge \cdots \wedge \mu(e_n) = v_i \bigwedge^n(\mu)(e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n)$$

de sorte que v_i est nul. ■

Par exemple, un endomorphisme de A^n est injectif si et seulement si $\det(A)$ est non diviseur de zéro. On peut prouver ce résultat sans associé, mais c'est un peu pénible (cf. [1]).

Exercice 6.4.8. — Avec les notations précédentes, prouver que μ injectif entraîne $\bigwedge(\mu)$ injectif.

Lemme 6.4.9. — Si on a une suite exacte de A -modules

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3,$$

on a

$$\text{Ass}(M_2) \subset \text{Ass}(M_1) \cup \text{Ass}(M_3).$$

Preuve : Soit $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m_2) \in \text{Ass}(M_2)$. On peut supposer quitte à localiser que A est local d'idéal maximal \mathfrak{p} . Dire que \mathfrak{p} est associé pour M_2 , c'est dire que $k(\mathfrak{p})$ s'injecte dans M_2 . Le noyau de $k(\mathfrak{p}) \rightarrow M_3$ est soit nul, auquel cas $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M_3)$, soit tout, auquel cas $k(\mathfrak{p})$ la flèche se factorise à travers M_1 et donc $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M_1)$. ■

Lemme 6.4.10 (Lemme de dévissage). — Si M est noethérien, il existe une filtration

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

avec $M_i/M_{i+1} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i \in \text{Supp}(M)$.

Preuve : Si $M = 0$, on a $n = 0$ et c'est terminé. Sinon, on choisit $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}(M) = \text{Ann}(m_1)$ et on pose $M_1 = Am_1$. Si $M_1 = M$, on pose $n = 1$, et c'est terminé. On recommence avec $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}(M/M_1)$, d'où $A/\mathfrak{p}_2 \xrightarrow{\sim} \bar{M}_2 \subset M/M_1$ et M_2 l'image inverse de \bar{M}_2 dans M par $M \rightarrow M/M_1$. Bien entendu, \mathfrak{p}_2 est dans le support de M/M_1 , donc dans celui de M . On peut continuer le processus tant que $M \neq M_n$, ce qui donne une suite strictement croissante de sous-modules. Le processus stoppe car M est noethérien. ■

Exercice 6.4.11. — Énoncer et prouver une version graduée du lemme de dévissage.

Proposition 6.4.12. — Soit M de type fini sur A noethérien. Alors, $\text{Ass}(M)$ est fini et ses points minimaux sont les points minimaux du support de M , autrement dit les points génériques de $V(\text{Ann}(M))$.

Preuve : La finitude est une conséquence immédiate des lemmes 6.4.9 et 6.4.10.

Soit \mathfrak{p} minimal dans le support de M . On a donc $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ et $M_{\mathfrak{q}} = 0$ si $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ associé de $M_{\mathfrak{p}}$ (qui est non nul!), autrement dit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ et $M_{\mathfrak{q}} \neq 0$. On a donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, et donc \mathfrak{p} associé (comme $\mathfrak{q} = \dots \mathfrak{p}$!).

Inversement, soit \mathfrak{p} associé minimal. Alors, un point minimal du support de $M_{\mathfrak{p}}$ est minimal dans le support de M , mais est aussi associé par la partie précédente. C'est donc \mathfrak{p} , qui est donc minimal dans le support de M . ■

Corollaire 6.4.13. — *Supposons encore M de type fini. Le morphisme de localisation*

$$M \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} M_{\mathfrak{p}}$$

est injectif.

Preuve : Soit I l'annulateur de m non nul dans le noyau. Par construction, pour tout associé \mathfrak{p} , il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $sm = 0$, ie $s \in I$. Autrement dit, I n'est pas inclus dans \mathfrak{p} . Le lemme d'évitement des idéaux premiers assure, le nombre d'associés étant fini, que I n'est pas contenu dans leur réunion. Comme ce réunion est justement l'ensemble des diviseurs de zéro (6.4.6), on obtient une contradiction. ■

Exercice 6.4.14. — *Montrer que \mathfrak{p} est générique dans le support de M (de type fini) si et seulement si la dimension de $M_{\mathfrak{p}}$ est nulle.*

Géométriquement, le lemme signifie que les points génériques de $V(I)$ (les éléments minimaux du support $V(I)$ du A -module A/I) sont les éléments minimaux de $\text{Ass}(A/I)$. On dit que les points non minimaux de $\text{Ass}(M)$ sont immergés, ou encore que leurs adhérences sont des composantes immergées de $\text{Spec}(A)$. Par exemple, si $A = \mathbf{C}[x, y]$ et $I = (x^2, xy)$, on a $\text{Ass}(A/I) = \{(x), (x, y)\}$ et (x, y) , ie l'origine du plan, est immergée. On si on veut une droite d'équation $x = 0$ avec un point « épais » à l'origine.

Comme le lecteur l'aura constaté, les schémas considérés sont en général munis d'un anneau de base, de sorte que les conditions de finitude pertinentes concernent avant tout les morphismes plutôt que les schémas absolus.

6.5. Propriété de \mathbf{P}_A^n

Rappelons déjà que si B est une A -algèbre, alors $\mathbf{P}_A^n \times_A \text{Spec}(B)$ s'identifie à \mathbf{P}_B^n . Il n'est pas vrai en général que l'image d'un fermé par un morphisme soit encore fermé, comme en topologie d'ailleurs (considérer une hyperbole $xy = 1$ de \mathbf{A}^2 et projeter parallèlement à une asymptote). La proposition suivante est fondamentale.

Proposition 6.5.1. — *Le morphisme structural $p : \mathbf{P}_A^n \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fermé.*

Preuve : On considère un fermé de \mathbf{P}_A^n , qu'on peut supposer provenir d'un sous-schéma fermé F . On note

$$I = (P_i) \subset S = A[x_0, \dots, x_n]$$

un idéal homogène le définissant. Soit $\mathfrak{p} \notin p(F)$ un point de $\text{Spec}(A)$. Autrement dit, on suppose que $p^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$. Il s'agit de prouver que les fibres voisines sont encore vides. On sait que $p^{-1}(\mathfrak{p})$ s'identifie (comme ensemble par exemple) à $F_{\mathfrak{p}} = F \otimes k(\mathfrak{p})$. On a déjà remarqué (5.14.5) que $F \otimes k(\mathfrak{p})$ est le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_{k(\mathfrak{p})}^n$ défini par l'idéal

$$J(\mathfrak{p}) = (\pi_i) \subset S(\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p})[x_0, \dots, x_n]$$

obtenu par évaluation des coefficients de P_i en \mathfrak{p} . Comme cette fibre est vide, il existe (5.14.2) $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$X_j^N \in J(\mathfrak{p}) \text{ pour tout } j$$

de sorte qu'on a

$$(S^N/J^N)_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p}) = S^N/J^N \otimes_A k(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p})^N/J(\mathfrak{p})^N = 0.$$

Mais S^N est (libre) de rang fini sur A et donc S^N/J^N de type fini sur A . Le lemme de Nakayama assure qu'on a $(S^N/J^N)_{\mathfrak{p}} = 0$, d'où l'existence de $f \in A$ non nulle en \mathfrak{p} telle que $fS^N \subset J^N$ ce qui assure la vacuité de $F_{\mathfrak{q}}$ si $\mathfrak{q} \in D(f)$. ■

La remarque précédente prouve alors que p est universellement fermé. Jointes aux propriétés de finitude évidentes de \mathbf{P}^n qu'on verra plus bas, ceci donne le premier exemple non trivial de **morphisme propre**.

Remarque 6.5.2. — *Si on examine la preuve, on s'aperçoit que le point crucial est le caractère gradué de J qui a permis de traduire la vacuité d'une fibre en termes d'un A -module de type fini, ici S^N/J^N . C'est exactement ceci qui ne marche plus si on essaie de remplacer \mathbf{P}_A^n par \mathbf{A}_A^n .*

6.6. Séparation

Dire qu'une espace topologique T est séparé, c'est dire que deux points distincts sont contenus dans des ouverts disjoints. Si on munit $T \times T$ de la topologie, ceci entraîne que la diagonale $\Delta_T = \{(t, t), t \in T\}$ est fermée dans $T \times T$. Inversement, si la diagonale est fermée, l'espace est séparé (si (x, y) est dans le complémentaire, on a un voisinage qui ne rencontre pas la diagonale. Comme les produits d'ouverts forment une base de la topologie, on peut supposer que ce voisinage est un produit d'ouverts, ce qu'on voulait). Hélas, comme on a déjà remarqué, la topologie du produit de deux schémas n'est pas généralement la topologie produit. Toutefois, on prendra la définition de séparation dictée par son interprétation en terme de diagonale.

Définition 6.6.1. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas.*

– *Le morphisme diagonal est le Y -morphisme*

$$\delta : X \rightarrow X \times_Y X$$

qui à tout S -point x (au dessus de Y) associe le S -point (x, x) de $X \times_Y X$.

– *On dit que f est séparé (ou que X est séparé sur S) si δ est une immersion fermée. Si $Y = \text{Spec}(\mathbf{Z})$, on dit alors que X est séparé.*

Remarquons que la propriété de séparation est locale sur Y (exercice) ce qui permet dans la pratique de se ramener au cas où Y est affine. Notons aussi qu'elle est **invariante par changement de base**, car l'image inverse d'une immersion fermée reste une immersion fermée.

Notons que si δ est séparé, pour tout couple de T -points x, x' , l'ensemble des $t \in T$ tels que $x(t) = x'(t)$ est fermé dans T . Cette condition est presque suffisante. Pour la rendre suffisante, on affine la relation d'équivalence en imposant aux deux extensions résiduelles $k(\xi) \hookrightarrow k(t)$ où $\xi = x(t) = x'(t)$ définies par x et x' d'être égales (cf. [12]).

Exercice 6.6.2. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Supposons Y séparé sur S . Montrer que le graphe Γ de f (dont les T -points sont les couples $(x, f(x), x \in X(T))$) est séparé sur S .*

Proposition 6.6.3. — *Tout morphisme affine est séparé.*

Preuve : En effet, on se ramène immédiatement à un but affine, ie à un morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Le morphisme diagonal est induit par le morphisme produit $B \otimes_A B \rightarrow B$ qui est visiblement surjectif, ce qu'on voulait. ■

Exercice 6.6.4. — Montrer qu'une immersion fermée est séparée. Montrer que le composé de deux morphismes séparés est séparé. Soient U, V deux ouverts affines de X un Y -schéma. Montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times_Y V & \rightarrow & X \times_Y X \end{array}$$

est cartésien (cf. 4.4.2). En déduire que si Y affine et $X \rightarrow Y$ séparé, alors que $U \cap V$ est affine.

Notons qu'une immersion fermée est universellement fermée. Un morphisme de schémas est dit projectif, s'il est isomorphe à un morphisme de la forme $X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$, composé d'une immersion fermée et de la projection canonique. Il est universellement fermé.

Lemme 6.6.5. — Le schéma \mathbf{P}_A^n est séparé sur A .

Preuve : Soit donc $\delta : \mathbf{P}_A^n \rightarrow \mathbf{P}_A^n \times_A \mathbf{P}_A^n$ le morphisme diagonal. Il s'agit de vérifier que δ est une immersion fermée après tout changement de base par les immersions ouvertes

$$U_{i,j} = D_+(X_i) \times_A D_+(X_j) \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n \times_A \mathbf{P}_A^n.$$

L'image inverse $\delta^{-1}(U_{i,j})$ est l'ouvert $D_+(X_i) \cap D_+(X_j)$ de \mathbf{P}_A^n et δ est induit par le morphisme d'algèbres

$$A[X_t/X_i, Y_t/Y_j] \mapsto A[X_t/X_i][X_i/X_j]$$

déduit de $X_t \mapsto X_t, Y_t \mapsto X_t$, qui visiblement est surjectif car X_i/X_j est l'image de Y_i/Y_j . ■

6.7. Morphismes de type fini, propres, finis

Définition 6.7.1. — Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de schémas est dit

- de type fini si l'image réciproque de tout ouvert affine $\text{Spec}(A)$ de Y peut être recouverte par un nombre fini d'ouverts affines $\text{Spec}(B)$ de X de la source avec B une A -algèbre de type fini ;
- propre s'il est séparé, de type fini et universellement fermé ;
- fini si l'image réciproque de tout ouvert affine $\text{Spec}(A)$ de Y est un ouvert affine $\text{Spec}(B)$ de X avec B un A -module de type fini.

La notion de **morphisme propre est visiblement stable par changement de base**, composition et locale sur la base (exercice).

Attention à ne pas confondre de type fini et fini. Par exemple, si k est un corps, un k -schéma de type fini est un sous-schéma fermé arbitraire d'un espace affine \mathbf{A}_k^n alors qu'un schéma fini sur k est un schéma ensemblistement fini (cf. 2.5.1).

Exercice 6.7.2. — Montrer que si $g \circ f$ est séparé (propre), alors f est séparé (propre).

Le lemme suivant explique à quel point la propriété est l'analogue de la notion topologique du même nom. Pour comprendre cette notion, on peut réfléchir sur l'exemple suivant.

Exemple 6.7.3. — Le morphisme $\mathbf{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ est certainement fermé (il n'a pas grand mérite vue la topologie du but!). Maintenant, faisons un changement de base par lui-même. On tombe sur la projection linéaire $(x, y) \rightarrow y$ du plan affine sur lui-même. Regardons $G_{m,k} \hookrightarrow \mathbf{A}_k^2$ vu comme sous-schéma d'équation $xy = 1$. L'image dans la droite est le complémentaire de l'origine, qui n'est plus fermée. Le point est que l'hyperbole a envie d'avoir un point à l'infini $(x, 1/x)$ avec $x = 0$.

Lemme 6.7.4. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Si X est propre sur S , alors f est propre.

Preuve : On a un diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \begin{array}{l} \searrow g \\ \searrow f \end{array} & & & & \\
 & X \times_S Y & \xrightarrow{p} & X & \\
 & \downarrow q & \square & \downarrow & \\
 & Y & \longrightarrow & S &
 \end{array}$$

Grâce à 6.7.2, on déduit que g est propre (propreté de l'identité). La propreté étant invariante par changement de base, q est propre. Ainsi, $f = q \circ g$ est propre. ■

Notons qu'un morphisme de type fini est quasi-compact (exercice). Si X est un S -schéma, on dira simplement X de type fini (sur S pour $X \rightarrow S$) de type fini.

Définition 6.7.5. — *Un schéma de type fini sur un corps k est appelé une k -variété (voire une variété). Une sous-variété est alors un sous-schéma fermé.*

Remarquons dans ce cas que si S est un schéma noethérien, X est un schéma noethérien.

Lemme 6.7.6. — *Soit S un schéma noethérien et $\pi : X \rightarrow S$ de type fini. Alors, tout S -morphisme $f : X \rightarrow Y$ est de type fini.*

Preuve : On peut recouvrir S par un nombre fini d'ouverts affines $S_i = \text{Spec}(A_i)$, avec A_i noethérien par conséquent. Soit U un ouvert affine de Y .

On peut supposer que U s'envoie dans un des S_i . En effet, U est la réunion des images inverses U_i des S_i dans U . Chaque U_i est ouvert dans U affine donc est réunion d'ouverts standards $D(f)$. Comme U est affine, donc-quasi-compact, U est réunion finie de tels ouverts standards $D(f)$, qui sont affines, et qui se projettent dans un des S_i .

On suppose donc $S = \text{Spec}(A)$ affine et A noethérien. Recouvrons X par un nombre fini d'ouverts affines $X_i = \text{Spec}(B_i)$ où B_i est une A -algèbre de type finie, donc noethérienne. La trace $f^{-1}(U) \cap X_i$ est ouverte dans X_i qui est noethérien. C'est donc une réunion finie d'ouverts $D(b_{i,j}) \in X_i$ avec $b_{i,j} \in B_i$. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est la réunion finie des ouverts affines

$$D(b_{i,j}) = \text{Spec}(B_i[1/b_{i,j}]).$$

On a $U = \text{Spec}(C)$ avec C une A -algèbre puisque U est affine au dessus de $S = \text{Spec}(A)$. Le fait que $D(b_{i,j})$ s'envoie dans U fait que $B_i[1/b_{i,j}]$ est une C -algèbre (compatible à sa structure de A -algèbre). Comme B_i est de type fini sur A , le localisé $B_i[1/b_{i,j}]$ l'est aussi, *a fortiori* sur C . ■

Le lecteur attentif aura remarqué que la preuve s'adapte à S localement noethérien...

Exercice 6.7.7. — *Montrer qu'un point x d'un schéma X de type fini sur k est fermé si et seulement si $k(x)$ est de dimension finie sur k . En déduire qu'un point fermé d'un ouvert d'un schéma X de type fini sur k est fermé dans X et que l'ensemble des points fermés de X est dense dans X . Montrer qu'un morphisme de schémas de type fini sur un corps k envoie un point fermé sur un point fermé. (comparer avec 2.3.5).*

Dans la pratique, au moins à notre niveau, on ne rencontrera que des morphismes de type fini. Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que le composé de deux morphismes propres est propre.

Exercice 6.7.8. — *Montrer qu'une immersion fermée est propre et finie. Montrer qu'une immersion ouverte $U \rightarrow X$ avec X noethérien est un morphisme de type fini mais en général pas un morphisme fini.*

Exercice 6.7.9. — Soit X un S -schéma propre. Soit A un anneau de valuation au dessus de S , de corps des fractions K . Montrer que la flèche canonique $X(A) \rightarrow X(K)$ est bijective. En déduire que la droite avec origine dédoublée n'est pas séparée (cf. 5.3.1).

Cette propriété des morphismes propres les caractérise en fait dans l'ensemble des morphismes de type fini : c'est ce qu'on appelle le critère valuatif de propreté (cf. [7]). On ne s'en servira pas ici. L'avantage est que cette propriété se lit sur le foncteur des points, et donc est particulièrement commode à étudier lorsque le schéma étudié est défini comme représentant un certain foncteur. On n'aura pas besoin dans un premier temps de ce critère.

Le prototype du morphisme propre est le morphisme projectif. Il n'est pas très aisé de construire des morphismes propres non projectifs d'ailleurs.

Proposition 6.7.10. — Un morphisme fini est projectif et donc propre.

Preuve : La question étant locale sur la base, on se ramène au cas affine. Mais alors, on a à regarder un A -module de type fini $B = A[x_i], i = 1 \dots, n$ avec B algèbre de type finie, donc entière. Chaque x_i vérifie une équation entière du type

$$x_i^{n_i} + \sum_{j < n_i} a_{i,j} x_i^j = 0$$

Soit X le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_A[X_0, \dots, X_i]$ d'équations homogènes

$$X_i^{n_i} + \sum_{j < n_i} a_{i,j} X_i^j X_0^{n_i-j} = 0.$$

L'intersection de X et de l'ouvert $D(X_0)$ est vide par construction de sorte que l'immersion fermée

$$X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n$$

se factorise à travers $D(X_0) = \mathbf{A}_A[X_i/X_0]$.

Mais le morphisme d'algèbres défini par $X_i/X_0 \mapsto x_i$ définit une immersion fermée $\text{Spec}(B) \hookrightarrow D(X_0)$ induisant une immersion fermée $\text{Spec}(B) \hookrightarrow X$, ce qu'on voulait. ■

Exercice 6.7.11. — Soit A un anneau noethérien et B une A -algèbre. Montrer que si B est finie (comme module) alors tout élément de B est entier sur A . Inversement, si B est engendrée comme A -algèbre par un nombre fini d'éléments entiers sur A , alors B est finie sur A .

6.8. Morphismes quasi-finis

Si $X \rightarrow Y$ est un morphisme fini, la fibre schématique X_y est le spectre d'une $k(y)$ -algèbre de dimension finie dont on sait depuis bien longtemps qu'elle est finie. Un morphisme à fibres fini est appelé quasi-fini. Mais bien entendu, il existe des morphismes quasi-finis, non finis, les immersions ouvertes par exemple. Ce qui manque à un morphisme quasi-fini pour être fini est la propreté : c'est une conséquence immédiate du théorème suivant, dit Main theorem de Zariski, que nous admettrons (pour une preuve simple, voir un article ancien de C. Peskine).

Théorème 6.8.1 (Zariski). — Tout morphisme quasi-fini $X \rightarrow Y$ se factorise en $X \rightarrow \bar{X} \rightarrow Y$ où $X \rightarrow \bar{X}$ est une immersion ouverte et $\bar{X} \rightarrow Y$ une immersion fermée.

À titre d'exercice, le lecteur vérifiera à la main qu'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_k^n qui est ensemblistement fini est le spectre d'une k -algèbre de dimension finie.

6.9. Image schématique

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. On voudrait calculer l'image. En général, celle-ci est compliquée. Voyons ce qu'on peut dire.

Lemme 6.9.1. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas.

- Si f quasi-compact et $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ injectif, alors $f(X)$ dense dans Y .
- Si $f(X)$ dense dans Y et Y réduit, alors $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ injectif.

Preuve : Comme la formation de l'image directe commute à la restriction à un ouvert de la base, on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ affine. Observons que dire que $f(X)$ dense c'est dire que l'idéal de $\overline{f(X)}$, ie l'idéal des fonctions nulles sur $f(X)$, est nilpotent (ie tous les éléments sont nilpotents). Supposons $f^\#$ injectif et f quasi-compact. L'application $H^0(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O})$ est injective. Soit $g \in H^0(Y, \mathcal{O})$ nulle sur $f(X)$, ie $g(f(x)) = 0$ dans $k(f(x)) \hookrightarrow k(x)$ pour tout $x \in X$. Ceci assure que l'image $g \circ f$ de g dans $H^0(X, \mathcal{O})$ est nulle pour tout x , ie $g \circ f(x) = 0$ dans $k(x)$. Sa restriction à tout ouvert affine de X est donc dans le radical nilpotent, donc nilpotente. Par quasi-compactité de f , on peut recouvrir X par un nombre fini de tels ouverts. Il existe donc n tel que $(g \circ f)^N = g^N \circ f = 0$. Mais ceci assure qu'on a $g^N = 0$. Ainsi, l'idéal des fonctions nulles sur $f(X)$, à savoir par définition l'idéal de l'adhérence de $f(X)$, est nilpotent et donc cette adhérence est Y ensemblistement.

Inversement, supposons $f(X)$ dense dans Y réduit. Comme Y affine, il suffit de prouver que $H^0(Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O})$ est injectif. Si g est dans le noyau, comme plus haut, $g(y)$ nul dans $k(y)$ pour y dans $f(X)$, et donc g nilpotent car $f(X)$ dense dans Y . Comme Y réduit, $g = 0$. ■

Définition 6.9.2. — Soit f quasi-compact et supposons $f_*\mathcal{O}_X$ quasi-cohérent (par exemple X noethérien ou f séparé). L'image schématique de f est le sous-schéma fermé Y défini par le noyau $\mathcal{I} = \text{Ker}(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$. le faisceau quasi-cohérent noyau de cette flèche définissant un sous-schéma fermé Z . Si $Z = Y$, on dit que f est schématiquement dominant.

Le diagramme fondamental 3.6.a assure que f se factorise en $X \rightarrow Z \hookrightarrow Y$, et, en un sens qu'on laisse préciser au lecteur, que Z est le plus petit sous-schéma fermé de Y vérifiant cette propriété. Notons qu'ensemblément l'image de f est dense dans l'image schématique de f grâce à 6.9.1. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 6.9.3. — Soit X un sous-schéma d'un schéma Y . Supposons que l'immersion $j : X \rightarrow Y$ est quasi-compacte (par exemple c'est le cas si Y est un schéma noethérien). Alors, l'image schématique de j est appelée l'adhérence schématique de X dans Y : c'est le plus petit-sous schéma fermé de Y à travers lequel se factorise j .

Attention, en général, sans autre hypothèse, ce n'est pas l'image de f ensemblistement. Par exemple, l'image schématique de l'immersion ouverte $\mathbf{P}^1 \setminus 0 \hookrightarrow \mathbf{P}^1$ est \mathbf{P}^1 tout entier. En revanche, dans le cas projectif, on a coïncidence.

Exercice 6.9.4. — Soit U un ouvert d'un schéma noethérien X et F un sous-schéma fermé de U . Montrer que la restriction à U de l'adhérence schématique de F dans X est F .

Corollaire 6.9.5. — L'image schématique d'un morphisme propre coïncide (ensemblément) avec l'image

Preuve : En effet, f est séparé et quasi-compact, donc cette image schématique Z existe. Puis, l'image est à la fois dense et fermée dans Z (propreté). ■

La remarque suivante est importante. Elle permet de retrouver le premier de théorème de Cohen-Seidenberg dans le cas fini.

Remarque 6.9.6. — En particulier (6.9.5), l'image schématique d'un morphisme fini $f : X \rightarrow Y$ est définie par le faisceau d'idéaux $\text{Ker}(f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$. En particulier, si $f^\#$ est injectif, f est surjectif et réciproquement si Y est réduit. Bien entendu, c'est très facile à montrer directement (exercice). Montrer dans ce cas que x est fermé si et seulement si $f(x)$ est fermé.

6.10. Points des variétés

Soit X une k -variété et K une extension de k (un corps). Comme on l'a constaté, $X(K)$ s'identifie à $X_K(K)$ qui lui-même s'identifie à l'ensemble des points rationnels de X_K . Comme tel, $X(K)$ est muni de la topologie induite par celle de X_K , dite topologie de Zariski.

Supposons dans ce numéro que k est algébriquement clos considérons l'inclusion continue $i : X(k) \rightarrow X$. Notons que $X(k)$ est dense dans X grâce au théorème des zéros. On note encore \mathcal{O} le faisceau $i^{-1}\mathcal{O}$, qui est un faisceau localement annelé par construction. Le couple $(X(k), \mathcal{O})$ est la variété de Serre associée à X (cf. [14]). Notons qu'une fonction régulière sur X définit une fonction

$$f : X(k) \rightarrow k$$

qui est continue (simplement car si $x \in X(k)$, on a $f(x) \in k(x) = k$). On dira que c'est sa restriction à $X(k)$. On peut montrer sans trop de peine que le foncteur ainsi défini qui à X associe sa variété de Serre est pleinement fidèle. Si on appelle variété de Serre un espace localement annelé localement isomorphe à l'image d'un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_k^n pour n variable, on a une équivalence de catégories entre variétés et variétés de Serre. On n'utilisera pas ce résultat *stricto sensu* mais on aura en tête un meta corollaire que : dans le cas des variétés sur des corps algébriquement clos, la considération des points à valeurs dans k est suffisante pour comprendre la variété.

Donnons une illustration.

Proposition 6.10.1. — Soient X, Y deux variétés sur k un corps algébriquement clos.

- i) X est irréductible si et seulement si $X(k)$ l'est.
- ii) Si X, Y réduits, il en est de même de $X \times_k Y$.
- iii) Si X, Y intègres, il en est de même de $X \times_k Y$.

Preuve : Prouvons i). Supposons X est irréductible. Soit $V_i = U_i \cap X(k)$, $i = 1, 2$ deux ouverts non vides de $X(k)$. Alors U_i sont des ouverts non vide de X irréductible, donc se coupent. Mais, comme $X(k)$ dense dans X , il rencontre $U_1 \cap U_2$, ce qui assure $V_1 \cap V_2$ non vide. Inversement, partant de U_1, U_2 non vides, leurs traces V_i sur $X(k)$ sont ouvertes, non vide car $X(k)$ est dense dans X , et se coupent car $X(k)$ irréductible.

Prouvons ii). Traitons le cas réduit. On peut supposer X, Y non vides affine d'algèbre $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)$. Soit $(f_i), (g_j)$ des bases sur k de $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)$. Supposons qu'une fonction de $\mathcal{O}(X \times_k Y) = \mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y)$ est nilpotente. Alors, sa restriction à

$$(X \times_k Y)(k) = X(k) \times Y(k)$$

est nulle. Cette fonction s'écrit

$$\sum_{i,j} a_{i,j} f_i \otimes g_j$$

et on a donc

$$\sum_{i,j} a_{i,j} f_i(x) g_j(y) = 0 \text{ pour tout } x \in X(k), y \in Y(k).$$

Observons qu'une fonction régulière f de $\mathcal{O}(X)$ dont la restriction à $X(k)$ est nulle est en fait nulle (car sinon f nilpotente d'après 2.4.3 et $f = 0$ car X réduit), et de même sur Y . Soit $x \in X(k)$. La fonction de $\mathcal{O}(Y)$

$$\sum_j \left(\sum_i a_{i,j} f_i(x) \right) g_j$$

est nulle sur $Y(k)$ donc sur Y . Comme les g_j sont libres sur k , on a pour tout j et tout $x \in X(k)$ l'égalité

$$\sum_i a_{i,j} f_i(x) = 0.$$

De même, on déduit

$$\sum_i a_{i,j} f_i = 0.$$

dans $\mathcal{O}(X)$ puis $a_{i,j} = 0$. Ceci prouve bien la réduction du produit.

Prouvons iii). On procède de même dans le cas affine. Supposons donc qu'on a $ab = 0$ dans $\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)$. Supposons b non nulle. Comme le produit est réduit, on peut trouver un k -point (x_0, y_0) tel que $b(x_0, y_0) \neq 0$. Identifiant la fibre X_{y_0} en $y_0 \in Y(k)$ de $X \times Y \rightarrow Y$ à Y et qui est donc intègre, on déduit que la restriction de a à X_{y_0} est nulle, et ceci est vrai en remplaçant y_0 par $y_1 \in Y(k)$ tel que $a(x_0, y_1) \neq 0$. Écrivons alors $a = \sum a_{i,j} f_i \otimes g_j$ comme plus haut. On a donc $\sum a_{i,j} g_j(y_1) = 0$ pour y_1 dans un ouvert de $Y(k)$, qui est dense dans Y (irréductibilité de Y et densité des points fermés). On en déduit que cette somme est nilpotente donc nulle puis que les $a_{i,j}$ sont nuls et $a = 0$ finalement. En général, on recouvre X, Y par un nombre fini d'ouverts affines X_i, Y_j nécessairement intègres. On sait que le produit est recouvert par les ouverts intègres $U_{i,j} = X_i \times Y_j$. Comme deux ouverts d'un irréductibles se coupent, on déduit que les $U_{i,j}$ se coupent et donc que leur unique point générique est le même pour tout i, j , d'où l'irréductibilité du produit. ■

Le lecteur aura constaté que la clef est la densité des k -points (qui signifie qu'une fonction nulle sur les points rationnels est nilpotente), autrement dit le théorème des zéros de Hilbert !

Corollaire 6.10.2. — *Si la variété X est réduite (intègre) sur k algébriquement clos, il en est de même pour X_K pour toute extension de corps K de k .*

Preuve : Supposons X réduit. On peut supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine. Soit donc $f \in A \otimes_k K$ nilpotente. Elle s'écrit

$$f = \sum f_i \otimes \lambda_i \text{ avec } \lambda_i \in K, f_i \in A.$$

Soit $B = k[\lambda_i]$ la sous algèbre de K engendrée par les λ_i . C'est une algèbre de type finie, de sorte que $Y = \text{Spec}(B)$ est une k -variété intègre. Comme n'importe quoi est plat sur un corps, on a une injection

$$A \otimes_k B \rightarrow A \otimes_k K.$$

Comme $X \times_k Y$ est réduit, $A \otimes_k B$ l'est. Mais f provient de $\tilde{f} = A \otimes_k B$, qui est nilpotente comme f (injectivité) de sorte que \tilde{f} puis f est nulle.

Pour l'intégrité dans le cas affine, on procède de même. Ensuite, on recouvre X par des ouverts affines intègres de sorte que X_K est recouvert par des ouverts affines intègres U_K . Les intersections $U_K \cap V_K$ de ces ouverts s'identifient à $(U \cap V)_K$, qui sont donc non vide comme $U \cap V$ grâce au théorème des zéros disons. On conclut comme plus haut que les points génériques des U_K sont tous les mêmes. ■

Remarque 6.10.3. — *On ne peut pas se passer de l'hypothèse k algébriquement clos, même en caractéristique nulle (penser à $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ par exemple). Toutefois, il n'est pas difficile de prouver que si k est parfait alors si X est réduit, $X_{\bar{k}}$ l'est aussi (se ramener à prouver que $K \otimes_k k'$ est réduit avec K corps résiduel d'un point générique et k' extension finie de k puis utiliser le théorème de l'élément primitif).*

6.11. Variétés complètes

La notion de propriété permet de définir l'analogue de la notion de compacité dans le cadre des schémas sur un corps.

Définition 6.11.1. — *Un k -schéma X est dit complet si X est propre sur k .*

L'exemple fondamental de schéma complet est le projectif \mathbf{P}_k^n .

Lemme 6.11.2. — *Tout morphisme de k -schémas $f : X \rightarrow Y$ avec X complet est propre.*

Preuve :

Le lecteur sait sans doute que le principe du maximum assure que toute fonction holomorphe sur une variété holomorphe compacte est constante. Voici l'analogie algébrique.

Proposition 6.11.3. — *Soit X un k -schéma complet, connexe, non vide et réduit. Alors, $H^0(X, \mathcal{O})$ est un corps de dimension finie sur k .*

Preuve : Soit x_0 un point fermé (qui existe d'après le théorème des zéros rappelons le). L'application d'évaluation $f \mapsto f(x_0)$ définit un morphisme de k -algèbres

$$e : H^0(X, \mathcal{O}) \rightarrow k(x_0).$$

Comme $k(x_0)$ est dimension finie sur k et que toute k -algèbre intègre de dimension finie sur k est un corps, il suffit de s'assurer que e est injective. Soit f dans le noyau. On voit f comme un k -morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{A}_k^1$. Plongeons \mathbf{A}_k^1 dans \mathbf{P}_k^1 comme l'ouvert affine standard. Le composé $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est propre (6.7.4). L'image (ensembliste) est fermée et contenue dans \mathbf{A}_k^1 : c'est donc une union finie de points fermés (5.8.6). Comme X est connexe, l'image (ensembliste) de f est réduite à un point. Comme $f(x) = 0$ par hypothèse, ce point est l'origine. Ainsi, pour tout $x \in X$ (fermé ou non), on a $f(x) = 0$ dans $k(x)$, de sorte que f est nilpotente. Comme f est réduit, on a $f = 0$. ■

Corollaire 6.11.4. — *Si de plus k est algébriquement clos, le morphisme canonique $k \rightarrow H^0(X, \mathcal{O})$ est un isomorphisme.*

On peut montrer le résultat suivant, bien plus général dans un sens, qui est fondamental (voir 16.7.1) :

Théorème 6.11.5. — *Soit X propre sur A (noethérien disons) et \mathcal{F} cohérent sur X . Alors, $H^0(X, \mathcal{F})$ est de type fini sur A .*

En fait, on se ramène au cas où X est projectif grâce au lemme de Chow (cf. EGA III.3). Ceci permet de se ramener au cas projectif, puis facilement de \mathbf{P}^n . Le plus simple est alors d'utiliser des méthodes cohomologiques, c'est ce qui sera fait dans 16.7.1).

6.12. Le théorème de Chevalley

Nous avons constaté que l'image d'un fermé de \mathbf{P}_A^n dans $\text{Spec}(A)$ était fermée. Ce n'est pas le cas en générale. Par exemple, la projection du cône hyperbolique d'équation $xy = 1, z = 0$ dans $\mathbf{A}[x, y, z]$ par $(x, y, z) \mapsto x$ n'est ni fermée ni ouverte : c'est l'intersection de l'ouvert $x \neq 0$ et du fermé $z = 0$. C'est le prototype de l'ensemble constructible.

Définition 6.12.1. — *Un sous-ensemble constructible d'un espace topologique noethérien est une réunion finie d'intersections $U \cap F$ avec U ouvert et F fermé.*

Notons tout de suite quelques propriétés plus ou moins immédiates. D'abord, une réunion finie de constructibles est constructible. La formule

$$(\cup U_i \cap F_i) \cap (U \cap F) = \cup (U_i \cap U) \cap (F_i \cap F)$$

prouve qu'une intersection finie de constructibles est constructible. Comme le complémentaire de $U \cap F$ est visiblement constructible, on déduit que la famille des constructibles est stable par passage au complémentaire, réunions et intersections finies. C'est la plus petite classe vérifiant ces propriétés et contenant les ouverts. Bien entendu, une image inverse de constructible par une application continue.

Exercice 6.12.2. — Vérifier qu'un constructible d'un noethérien est ouvert dans son adhérence.

Exemple 6.12.3. — Notons que l'image du morphisme diagonal d'un Y -schéma X est certainement constructible à tout le moins. En effet, on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$. On recouvre alors X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(B_i)$. Le morphisme f fait de B une A -algèbre. Chaque point de l'image de δ tombe dans un des ouverts $V_i = \text{Spec}(B_i \otimes_A B_i)$ du produit $X \times_Y X$. Si δ_i est le morphisme diagonal de U_i , il suit que l'image de δ est contenue dans la réunion des images de δ_i , qui est fermée d'après 6.6.3, et en fait lui est visiblement égale.

Remarque 6.12.4. — Il existe une notion de constructibilité des espaces topologiques non noethériens, pour laquelle la généralisation du théorème de Chevalley (cf. 6.12.8 infra) reste vraie (cf. [7]). On ne l'utilisera pas.

Lemme 6.12.5. — Soit Z constructible dans un schéma noethérien irréductible X . Si Z contient le point générique de X , alors Z contient un ouvert (dense) de X . En particulier, Z ou $X \setminus Z$ contient un ouvert (dense).

Preuve : le point générique η de X appartient par hypothèse à une partie localement fermée $U \cap F$ contenue dans Z où U ouvert et F fermé dans X . Mais F contient η , donc aussi l'adhérence $\bar{\eta} = X$. Ainsi, $U \cap F = U$, ce qu'on voulait. ■

La clef du théorème de Chevalley est le lemme suivant.

Lemme 6.12.6. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini de schémas noethériens et Z une partie constructible de X . Supposons Y irréductible de point générique η .

i) Si $\eta \in f(Z)$, la partie $f(Z)$ contient un ouvert (dense).

ii) Dans le cas contraire, $f(Z)$ est contenu dans un fermé strict.

Preuve : Prouvons i). On peut supposer $Z = U \cap F$ localement fermé. Si Z' est le sous-schéma noethérien réduit correspondant, le morphisme $Z' \rightarrow X$ est de type fini, et donc on peut supposer $X = Z$. On peut bien entendu supposer $Y = \text{Spec}(A)$ avec A intègre et

$$X = \text{Spec}(A[x]/(f_i(x))) \subset \mathbf{A}_A^n[x]$$

(la question est topologique et locale). Si K est le corps des fractions de A , la fibre générique $f^{-1}(\eta)$ s'identifie (ensemblément) à X_K qui est donc non vide par hypothèse. Soit x un point fermé de X_K , qui correspond à un point $\underline{x} = (x_j)$ à coordonnées dans $L = K(x)$ vérifiant $f_i(\underline{x}) = 0$. D'après le théorème des zéros, l'extension L/K est finie. Si on avait $L = K$, ce serait terminé, car alors les x_j s'écriraient a_j/a avec $a_j, a \in A$ ce qui définit une section de f sur $D(a)$; l'image contiendrait alors au moins l'ouvert $D(a)$.

En général, on va devoir faire un changement de base fini pour se ramener à ce cas. Expliquons en détail.

On peut construire B une A_a -algèbre finie de corps des fractions L avec $a \in A \setminus \{0\}$: géométriquement, ceci signifie qu'on construit un morphisme fini $\text{Spec}(B) \rightarrow D(a) = \text{Spec}(A_a)$ qui s'identifie à

$\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(K)$ sur la fibre générique. En effet, les coordonnées x_j de x sont des générateurs de L/K . Le polynôme minimal $P_j \in K[T]$ de x_j s'écrit

$$P_j(T) = T^{N_j} + \frac{1}{d_j} \sum_{l=0}^{N_j-1} a_{l,j} T^l$$

avec $d_j, a_{l,j} \in A$. Si $a = \prod d_j$, chacun des x_j est entier sur A_a . La sous A_a -algèbre B de L engendrée par les x_i est une A_a algèbre entière de type finie, donc est finie.

L'avantage est que x définit un B -point $x_B = (x_i)$ de

$$X_B = X \otimes_A B = \text{Spec}(B[\underline{x}]/(f_i(\underline{x}))).$$

En changeant de base, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_B & \longrightarrow & X_a & \hookrightarrow & X \\ \uparrow f_B & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \text{Spec}(B) & \xrightarrow{p} & \text{Spec}(A_a) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

où f_B est surjective comme morphisme ayant une section et p est fini, donc fermé. L'application $K \rightarrow L$ est injective, comme tout morphisme de corps. Comme B est un sous-anneau de L , l'application $A_a \rightarrow B$ est injective comme et donc p est surjective (6.9.6).

Il suit que $f(X_a)$ se surjecte sur $\text{Spec}(A_a)$.

Prouvons *ii*). Pour le second point, on écrit $Z = \cup_i U_i \cap F_i$ avec U_i ouvert et F_i fermé. Le point générique η_i de F_i est dans U_i car U_i ouvert et donc $f(\eta_i) \neq \eta$. Aucune des adhérences $\overline{f(\eta_i)} = V(f(\eta_i))$ ne contient donc η (car sinon il serait le point générique de ce fermé, et donc égal à $f(\eta_i)$) de sorte que leur réunion un fermé strict de Y . Par continuité de f , on a

$$f(F_i) = f(\overline{\eta_i}) \subset \overline{f(\eta_i)}$$

(si U ouvert contient $f(x)$ avec $x \in \overline{\eta_i}$, l'ouvert $f^{-1}(U)$, contenant x , contient aussi η_i et donc $f(\eta_i) \in U$) et donc

$$f(Z) \subset \cup \overline{f(\eta_i)} \neq Y.$$

■

Remarque 6.12.7. — En particulier, dans ce dernier cas, f est dominant (comparer avec 6.9.1).

On peut maintenant aisément prouver le résultat suivant.

Théorème 6.12.8 (Chevalley). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini de schémas noethériens et Z une partie constructible de X . Alors, $f(Z)$ est constructible.

Preuve : si $f(Z)$ contient un point génériques de Y , il contient un ouvert U_1 de la composante irréductible correspondante, et quitte à lui retirer la trace des autres, on peut supposer qu'il est ouvert dans Y . On écrit alors

$$f(Z) = U_1 \cup f f^{-1}(F_1 \cap Z)$$

où F_1 est le complémentaire de U_1 , un fermé strict. Sinon, $f(Z)$ est contenu dans un fermé strict F_1 , et, posant $U_1 = \emptyset$, on a le même résultat, au moins si Y non vide. Si F_1 est non vide, on recommence en remplaçant X par $X_1 = f^{-1}(F_1)$, Z par $Z \cap X_1$ et Y par F_1 . On écrit alors

$$f(Z_1) = V_2 \cup f f^{-1}(F_2 \cap Z_1)$$

où V_2 est un ouvert de F_1 , qui s'écrit donc $U_2 \cap F_1$ avec U_2 ouvert de Y et F_2 fermé strict de F_1 , donc de Y . En recollant, on a

$$f(Z) = U_1 \cup (U_2 \cap F_1) \cup f f^{-1}(F_2 \cap Z).$$

On recommence tant que F_i est non vide et on construit une suite strictement décroissante de fermés non vides de Y et des constructibles Y_i tels que

$$f(Z) = Z_i \cup ff^{-1}(F_i \cap Z).$$

Comme Y est noethérien, le processus s'arrête : il existe i avec $F_i = \emptyset$, et on a gagné. ■

Exercice 6.12.9. — *Le lecteur pourra remplacer cet argument type récurrence par un argument, en fait équivalent, de récurrence noethérienne. Prouver d'abord l'énoncé suivant, dit principe de récurrence noethérienne. Soit \mathcal{E} un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un élément minimal. Soit \mathcal{F} une partie de \mathcal{E} telle que tout élément a de \mathcal{E} vérifiant*

$$x < a \Rightarrow x \in \mathcal{F}$$

est en fait dans \mathcal{F} . Alors, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. En considérant l'ensemble \mathcal{F} des fermés F de Y tels que $F \cap f(Z)$ constructible, prouver le théorème de Chevalley.

Pour comprendre le sens de ce théorème, examinons le phénomène suivant. Supposons donnés des polynômes P_i à n variables à coefficients finis. Ils définissent un sous-schéma fermé X de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n$, donc de type fini sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$. Supposons que pour une infinité de p premiers, on ait une solution des équations $P_i = 0$ dans un corps de caractéristique p . Autrement dit, supposons que la fibre $X \otimes \mathbf{F}_p$ est non vide. Une autre manière de dire est que l'image de X dans $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ est infinie. Alors, cette image contient nécessairement le point générique η de $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ (simplement car un fermé non trivial de $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ est fini). La fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$ est donc non vide. Le théorème des zéros affirme alors qu'elle a un $\bar{\mathbf{Q}}$ -point x , autrement dit qu'on a une solution à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ des équations $P_i = 0$: l'existence de solutions du système $P_i = 0$ en caractéristique nulle, on est passé à une solution dans $\bar{\mathbf{Q}}$. Bien entendu, savoir si on a une solution dans \mathbf{Q} est une autre paire de manches (penser au théorème de Fermat).

Remarque 6.12.10. — *Si on avait eu une notion de dimension raisonnable, on aurait évidemment fait une récurrence sur la dimension pour démontrer le théorème de Chevalley. Hélas, si comme on l'a vu en cours accéléré, la dimension d'un anneau local noethérien est toujours finie, il n'en va pas de même, hélas, pour un anneau noethérien quelconque comme l'a montré Nagata. Toutefois, tout se passe bien dans le cas des schémas de type fini sur un corps, sur lesquels on focalisera notre attention dans les sections suivantes.*

Exercice 6.12.11. — *Soit x un point de X schéma de type fini sur \mathbf{Z} (on dit parfois que X est un schéma arithmétique). Montrer que x est fermé si et seulement si $k(x)$ est un corps fini. Montrer que l'ensemble des points fermés de X est dense et que l'image d'un point fermé par un morphisme entre schémas de type fini sur \mathbf{Z} est encore fermée. Montrer que tout constructible non vide de X rencontre l'ensemble des points fermés : on dit que l'ensemble des points fermés est très dense. Montrer qu'un énoncé analogue demeure si on remplace \mathbf{Z} par un anneau principal infini mais qu'en revanche il existe des points fermés de schémas de type fini sur un anneau de valuation discrète qui se projettent sur le point générique, qui est... ouvert!*

CHAPITRE 7

HYPERSURFACES SUR LES SCHÉMAS NORMAUX

On ne considère ici que des schémas noethériens.

7.1. Notion de diviseur de Cartier effectif

Commençons par une définition.

Définition 7.1.1. — *Un diviseur de Cartier effectif D dans un schéma noethérien X est un sous-schéma fermé D de X tel que le faisceau d'idéaux qui le définit est localement libre de rang 1.*

On note alors $\mathcal{O}(-D)$ ce faisceau d'idéaux. Une autre manière de voir les choses, plus concrètes, est la suivante. On recouvre X par des ouverts sur lesquels $\mathcal{O}(-D)$ est libre, de base f_i . Comme

$$\mathcal{O} \xrightarrow{f_i} \mathcal{O}(-D)$$

est un isomorphisme, f_i est non diviseur de zéro. Sur l'intersection $U_i \cap U_j$, le quotient f_i/f_j est une unité de \mathcal{O} (notation un peu abusive pour dire qu'il existe u inversible sur $U_i \cap U_j$ telle que $f_i = uf_j$ sur cette intersection.

Inversement, si on a une telle donnée (U_i, f_i) avec f_i/f_j inversible sur $U_i \cap U_j$, on définit $\mathcal{O}(-D)$ le sous-faisceau de \mathcal{O} engendré localement par les f_i . Il définit un diviseur Cartier effectif D . Bien entendu, le cas de l'idéal \mathcal{O} correspond au diviseur... \emptyset .

Notons que si D_1, D_2 sont Cartier, $\mathcal{O}(-D_1) \otimes \mathcal{O}(-D_2)$ s'envoie injectivement dans \mathcal{O} par le produit, donc définit un faisceau d'idéaux de \mathcal{O} , localement libre de rang 1, noté $\mathcal{O}(-(D_1 + D_2))$. Ceci définit la somme de deux diviseurs de Cartier effectifs, qui est simplement la réunion schématique de D_1 et D_2 .

Ce point de vue est le point de vue classique.

7.2. Notion de diviseur de Cartier

Supposons X intègre pour simplifier et les U_i précédents non vides, les quotients f_i/f_j peuvent être vus comme des éléments non nuls de $k(X)$, le corps des fonctions de X . Si K désigne le faisceau de groupes multiplicatifs constant $k(X)$ (dont le groupe des sections sur un ouvert non vide est $k(X)$), un diviseur de Cartier effectif définit donc une section de $H^0(K^*/\mathcal{O}^*)$, notée très provisoirement s_D (\mathcal{O}^* est le faisceau en groupes des *inversibles* de \mathcal{O}). Visiblement (exercice si on veut, $D \mapsto s_D$ est injectif et $s_{D_1+D_2} = s_{D_1}s_{D_2}$).

Définition 7.2.1. — *Le groupe des diviseurs de Cartier $\text{Car}(X)$ est le groupe $H^0(X, K^*/\mathcal{O}^*)$.*

Remarque 7.2.2. — *Si $X = \sqcup X_i$ est une réunion disjointe de schémas intègres, on définit*

$$\text{Car}(X) = \sqcup \text{Car}(X_i).$$

La projection

$$K^* \rightarrow K^*/\mathcal{O}^*$$

définit une morphisme de groupes

$$\text{div} : k(X)^* = H^0(K^*) \rightarrow H^0(K^*/\mathcal{O}^*) = \text{Car}(X).$$

Exercice 7.2.3. — On note K_A l'anneau total des fractions d'un anneau A , localisé de A par rapport aux non diviseurs de 0. Définir le faisceau en groupes K^* qui sur les ouverts non vides $\text{Spec}(A)$ de X vaut K_A . En déduire une définition des diviseurs de Cartier pour un schéma quelconque et de la flèche div .

7.3. Groupe de Picard et diviseurs de Cartier

On suppose toujours, pour simplifier, que X est intègre (voire une réunion disjointe de schémas intègres). Le lecteur généralisera sans peine au cas général dans la lignée 7.2.3. La flèche tautologique $D \mapsto \mathcal{O}(-D)$ définit une flèche, on injective en toute généralité

$$\text{Car}(X)_{\geq 0} \rightarrow \text{Pic}(X)$$

du monoïde des diviseurs de Cartier effectifs dans le groupes de Picard. Prolongeons à $\text{Car}(X)$. Une section D de $H^0(K^*/\mathcal{O}^*)$ s'écrit sur un recouvrement ouvert assez fin U_i sous la forme $f_i \in k(X)^*$ avec

$$g_{i,j} = f_j/f_i \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*),$$

ie fonction *invertible* sur $U_i \cap U_j$. On a

$$g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k} \text{ et } g_{i,i} = 1$$

de sorte que $g_{i,j}$ est un 1-cocycle de \mathcal{O}^* et définit donc un faisceau localement libre de rang 1. Si on change d'équations locales $f_i \rightsquigarrow u_i f_i$ avec u_i invertible sur U_i , le cocycle est changé en $u_j/u_i g_{i,j}$ qui lui est cohomologue et donc définit un faisceau invertible isomorphe (exercice de TD). Le cocycle d'un diviseur de Cartier définit par des équations locales f_i fait commuter par définition le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} & \begin{array}{c} \searrow f_i \\ \sim \\ \searrow \end{array} & \mathcal{O}(-D)|_{U_i \cap U_j} \\ \downarrow g_{i,j} & & \nearrow \sim \\ \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} & \begin{array}{c} \nearrow f_j \\ \sim \\ \nearrow \end{array} & \end{array}$$

et vaut f_i/f_j . Ainsi, on a défini un morphisme de groupes

$$\text{Car}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$$

qui envoie D effectif sur $\mathcal{O}(-D)^*$.

Définition 7.3.1. — Soit D un diviseur de Cartier. On note $\mathcal{O}(D)$ son image dans $\text{Pic}(X)$.

Notons que l'image de

$$\text{div}(f), f \in k(X)^*$$

est triviale. En effet, on vérifie que cette image est $f^{-1}\mathcal{O}$ (notation abusive pour $U \mapsto f^{-1}\mathcal{O}(U)$ pour U ouvert non vide, avec $\mathcal{O}(U)$ plongé dans $k(X)$). La multiplication par f^{-1} induit un isomorphisme

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} f^{-1}\mathcal{O}.$$

Théorème 7.3.2. — *Le morphisme induit*

$$\mathrm{Cl}(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathrm{Car}(X)/k(X)^* \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

est un isomorphisme.

Preuve : le groupe de Picard s'identifie au groupe de cohomologie de Čech $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ (exercice facile, vu en TD). La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow K^* \rightarrow K^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

fournit une suite exacte de cohomologie de Čech

$$0 \rightarrow \mathrm{Cl}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(X) \rightarrow H^1(X, K^*).$$

Mais j'affirme que $H^1(K^*)$ est nul : en effet, un cocycle $g_{i,j}$ s'écrit aussi γ_i/γ_j avec $\gamma_i = g_{i,0}$. ■

Le lecteur n'aimant pas la cohomologie de Čech fera ce raisonnement aisément à la main. Il le généralisera également au cas d'un schéma non intègre.

Définition 7.3.3. — *Deux diviseurs de Cartier ayant même image dans $\mathrm{Pic}(X)$ sont dits linéairement équivalents.*

L'exercice suivant est facile, mais très important.

Exercice 7.3.4. — *Soit D Cartier dans X intègre. Montrer que D est effectif si et seulement si $\mathcal{O}(D)$ a une section. Si X est de plus une variété complète, montrer que $\mathcal{O}(D)$ est trivial si et seulement si $D = 0$. Montrer que, dans ce cas, l'espace projectif des droites de $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ s'identifie aux diviseurs de Cartier linéairement équivalents à D .*

7.4. Schémas normaux

On dit qu'un schéma est normal s'il est noethérien et si ses anneaux locaux sont intégralement clos (la définition est légèrement plus restrictive que dans EGA). Le lemme suivant justifie la définition.

Lemme 7.4.1. — *Soit A intègre. Alors, A intégralement clos si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ normal pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.*

Preuve : Soit $x = a/b \in K$ entier sur A . Si $A_{\mathfrak{p}}$ normal pour tout \mathfrak{p} , on a $x \in A_{\mathfrak{p}}$ pour tout \mathfrak{p} . Ceci prouve que l'idéal des $t \in A$ tel que $tx \in A$ n'est contenu dans aucun des \mathfrak{p} et donc est A entier. Donc, $1x = x \in A$. Inversement, si A est intégralement clos et $x \in K$ est entier sur $A_{\mathfrak{p}}$, il existe une équation

$$x^n + \sum_{i < n} (a_i/s)x^i = 0$$

dans $A_{\mathfrak{p}}$ (avec $s(\mathfrak{p}) \neq 0$) d'où une équation

$$(sx)^n + \sum_{i < n} (a_i)s^{n-i-1}(sx)^i = 0$$

dans A . On a alors $sx \in A$ puis $x \in A_{\mathfrak{p}}$. ■

Le lemme suivant prouve qu'on peut se ramener sans peine au cas intègre dans le cas normal.

Lemme 7.4.2. — *Les composantes connexes d'une variété normale sont ouvertes et intègres.*

Preuve : en effet, X étant noethérien, il a un nombre fini de composantes irréductibles, et *a fortiori* de composantes connexes. Celles-ci sont donc ouvertes (et aussi fermées comme toujours). On se ramène donc à prouver qu'une variété normale connexe est intègre, puisqu'un ouvert d'un normal est normal trivialement. Supposons X réductible. Soit donc X_1 une composante irréductible. Par connexité, elle rencontre une autre composante de X , disons X_2 en x . Mais alors, les points génériques de X_1, X_2 sont génériques dans \mathcal{O}_x , qui est intègre : une contradiction. ■

Par exemple, la réunion de deux droites sécantes n'est pas normale. En fait, on a prouvé qu'une variété localement intègre connexe est intègre.

7.5. Rappels sur la définition de la dimension

Rappelons que la dimension d'un espace topologique est la borne supérieure des longueurs de chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles. Dans le cas d'un schéma, si on se souvient que l'application $x \mapsto \bar{x}$ est une bijection entre les points et les fermés irréductibles, on trouve que c'est la borne supérieure des longueurs n de chaînes

$$x_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n$$

de spécialisations (strictes). La dimension d'un anneau est celle de son spectre. Nous n'aurons en fait pas besoin de plus pour le moment. En fait, la notion de codimension d'un point est cruciale.

Définition 7.5.1. — *La codimension (ou hauteur) d'un point x d'un schéma est la dimension de \mathcal{O}_x .*

On notera cette codimension $\text{codim}_X(x)$, ou, si aucune confusion n'est à craindre, $\text{codim}(x)$. On a alors évidemment

$$(7.5.a) \quad \dim X = \sup_x \text{codim}(x)$$

Par exemple, les points génériques sont les points de codimension nulle. Notons que si η se spécialise sur s , on a

$$\text{codim}(\eta) \leq \text{codim}(s)$$

avec égalité si et seulement si $s = \eta$. Rappelons que toute variété sur un corps ou tout schéma arithmétique non vide a des points fermés, de sorte qu'un point se spécialise toujours sur un point fermé (théorème des zéros ou 6.12.11). On a donc

Corollaire 7.5.2. — *Soit X une variété sur un corps ou un schéma arithmétique. On a*

$$\dim(X) = \sup_{x \text{ fermé}} \text{codim}(x).$$

Exercice 7.5.3. — *Soit Y fermé dans X intègre de dimension finie. Vérifier qu'on a $\dim(Y) \leq \dim(X)$ avec égalité si et seulement si $X = Y$.*

7.6. Diviseurs de Cartier sur les variétés normales

Soit D un diviseur de Cartier effectif sur X un schéma normal.

Théorème 7.6.1. — *Tout point associé x de D est générique (D est sans point immergé) et de codimension 1. Plus précisément, \mathcal{O}_x est un anneau de valuation discrète.*

Autrement dit, D est purement de codimension 1.

Preuve : La question est locale : on peut supposer $X = \text{Spec}(A)$ et $D = V(a)$ avec a non inversible si on veut (sinon D est vide...). Soit donc $x = \mathfrak{p}$ un point associé de D . Quitte à localiser en x , qui reste associé dans D_x , on peut supposer que x est fermé. On s'est ramené à (A, \mathfrak{m}) normal et local, et \mathfrak{m} associé de A/aA . On veut montrer que A est de valuation discrète. Ceci suffit évidemment car dans ce cas A/aA est artinien et x générique : c'est le seul point du spectre!

Montrons que \mathfrak{m} est principal. Le reste suivra sans effort. Traduisons les hypothèses. Il existe $b \in B - aB$ tel que $\text{Ann}(b \bmod aA) = \mathfrak{m}$. Autrement dit, on a

$$b/a \notin A \text{ et } b\mathfrak{m} \subset aA.$$

Comme $b/a\mathfrak{m}$ est un idéal de A local, il est soit égal à A , soit contenu dans \mathfrak{m} . Dans ce second cas, on a $bA/a\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ et \mathfrak{m} de type fini sur A . La ruse du déterminant assure que b/a est entier sur A , et donc dans A qui est normal, une contradiction. Donc, $b/a\mathfrak{m} = A$ et il existe $\mu \in \mathfrak{m}$ tel que $\mu b/a = 1$. On a donc

$$\mathfrak{m} = \mu A.$$

Maintenant, montrons que tout élément x s'écrit (de façon unique) sous la forme $u\mu^n$ avec u inversible. En effet, le lemme de Krull (7.12.5) assure qu'il existe un plus grand $n \geq 0$ tel que $x \in \mathfrak{m}^n = \mu^n A$. On a $x = \mu^n u$ et $u \notin \mathfrak{m}$, donc est inversible. ■

Notons au passage que les anneaux intègres normaux de dimension nulle sont les corps bien entendu.

Corollaire 7.6.2. — *Soit A intègre normal. Alors, $A = \bigcap_{\text{codim}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$.*

Preuve : l'intersection est prise dans le corps des fractions K de A (si A est de dimension nulle, cette intersection est indexée par le vide et vaut K , qui n'est autre que A dans ce cas). Dans tous les cas, A est bien contenu dans l'intersection.

Inversement, soit donc a/b un élément de l'intersection. Mais les points associés de $D = V(bA)$ sont de codimension 1 (s'il n'y en a pas, c'est que D est vide et b inversible : il n'y a rien à faire). On en déduit que a est nul dans

$$(A/bA)_{\mathfrak{p}} \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/bA).$$

Mais l'application

$$A/bA \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/bA)} (A/bA)_{\mathfrak{p}}$$

étant injective (6.4.13), on déduit $a \in bA$ ■

Corollaire 7.6.3. — *Un anneau local normal de dimension 1 est de valuation discrète.*

Preuve : Soit (A, \mathfrak{m}) local de dimension 1. Comme \mathfrak{m} est non nul, choisissons a non nul dans \mathfrak{m} qui définit un diviseur de Cartier D (car a non diviseur de zéro) passant par \mathfrak{m} . Si \mathfrak{m} n'est pas générique dans D , D serait de dimension 1, donc égal à Y , ce qui n'est pas. Le théorème 7.6.1 permet de conclure. ■

En particulier, on voit que 7.6.2 admet une réciproque, à savoir que si A intègre est l'intersection de tous ses localisés aux points de codimension 1 qui sont des anneaux de valuation discrète, alors A est normal.

7.7. L'équation $ax = by$

Soit a, b, x, y des éléments de A normal.

Proposition 7.7.1. — *Supposons $ax = by$ et $V(a), V(b)$ sans composante commune. Il existe $u \in A$ unique tels que*

$$x = ub \text{ et } y = -ua.$$

Preuve : On peut supposer A intègre (se restreindre aux composantes connexes du spectre). Écrivons $x = ub$ avec $u = y/a$ (dans le corps des fractions de A si on veut). Soit \mathfrak{p} de codimension 1. Si $a(\mathfrak{p})$ est non nul, on a évidemment $u \in A_{\mathfrak{p}}$ car a inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$. Sinon, $b(\mathfrak{p})$ est non nul car sinon b serait générique dans $V(b)$. Mais $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète notée v . On a donc $v(x) \geq 0$ car $x \in A_{\mathfrak{p}}$ et vaut aussi $v(y) - v(a)$ car $v(b)$ est nul. Donc, $u = y/a \in A_{\mathfrak{p}}$. On a donc $u \in A$ d'après 7.6.2. Le lemme suit par intégrité de A . ■

Autrement dit, la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{(f,g)} A \rightarrow A/(f,g) \rightarrow 0$$

est exacte. Géométriquement, si D_1, D_2 sont deux diviseurs de Cartier effectifs dans X normal, sans composante commune, on a une suite exacte

$$(7.7.a) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(-D_1 - D_2) \rightarrow \mathcal{O}(-D_1) \oplus \mathcal{O}(-D_2) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{D_1 \cap D_2} \rightarrow 0.$$

On verra une généralisation de ce cas particulier du complexe dit de Koszul dans le cas des schémas de Cohen-Macaulay.

7.8. Diviseurs de Weil

Soit X un schéma noethérien. On suppose de plus X normal, ou, plus généralement, que ses localisés aux points x de codimension 1 soient des anneaux de valuation discrète de valuation v_x . On supposera pour simplifier X intègre pour ne pas s'embêter avec les anneaux totaux de fraction (ça n'a pas d'importance comme on a vu, qu ce soit dans le cas normal ou le cas des anneaux de codimension 1 de valuation discrète). A tout diviseur de Cartier effectif, on peut associer la somme formelle

$$\sum v_x(D)x$$

où x parcourt les points génériques de D et v_x est la valuation de l'anneau de valuation discrète \mathcal{O}_x . Une somme formelle (finie) à coefficients entiers (resp. entiers ≥ 0) s'appelle un diviseur de Weil (resp. de Weil effectif). On peut ajouter visiblement les diviseurs de Weil ce qui fournit un groupe abélien libre $A^1(X)$. On a une notion évidente de restriction d'un diviseur de Weil à un ouvert U par la formule

$$\sum_{\substack{x \in U \\ \text{codim}(x)=1}} n_x x.$$

De même, on définit la restriction d'un diviseur de Weil à un localisé $\text{Spec}(\mathcal{O}_y), y \in x$ par la formule

$$\sum_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \text{codim}(x)=1}} n_x x$$

(x est encore de codimension 1 dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ car \mathcal{O}_x est le localisé de \mathcal{O}_y en $x \in \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$). Bien entendu, deux diviseurs de Weil qui coïncident localement sont égaux de sorte que $A^1(X)$ est le groupe des sections globale du faisceau W des diviseurs de Weil sur X (qu'on peut voir comme les fonctions à valeurs entières de support fini sur les points de codimension 1).

Si $f \in k(X) - 0$, l'ensemble des points de codimension 1 où f est soit nulle ou soit non définie est certainement fini. En effet, recouvrant X par un nombre fini d'ouverts affines $U = \text{Spec}(A)$, on se ramène au cas affine et $f = a/b$. Les points cherchés sont les points génériques de $V(a)$ et $V(b)$ -dans le cas normal, c'est le théorème 7.6.1, dans le cas plus général, c'est 9.1.4, qui sont en nombre fini. On définit alors le diviseur de Weil comme étant

$$\text{div}(f) = \sum_{\text{codim}(x)=1} v_x(f)x,$$

la somme étant bien finie. Si on multiplie par une fonction inversible, on ne change pas le diviseur. On définit ainsi un morphisme de faisceaux de groupes abéliens $K^*/\mathcal{O}^* \rightarrow W$ qui induit

$$\text{div} : \text{Car}(X) \rightarrow A^1(X).$$

Bien entendu, on a

$$\text{div}(D) = \sum_{\text{codim}(x)=1} v_x(D)x$$

dans le cas effectif.

Lemme 7.8.1. — *Deux diviseurs de Cartier effectifs qui ont même diviseur de Weil sont égaux.*

Preuve : la question est locale : on peut supposer $X = \text{Spec}(A)$. Soient f_1, f_2 des équations locales des deux diviseurs. Le quotient f_1/f_2 est par construction dans \mathcal{O}_x pour tous les points de codimension 1 de x , donc est dans A . Par symétrie, f_2/f_1 est dans A , et donc $f_1A = f_2A$. ■

En général, on n'a pas surjectivité. Toutefois, si la variété n'est pas trop singulière, c'est le cas.

Théorème 7.8.2. — *Supposons X localement factoriel (anneaux locaux factoriels). Alors, tout diviseur de Weil effectif est de Cartier.*

Preuve : Un anneau factoriel est intégralement clos : X est normal. Soit $D = \sum n_x x$ un diviseur de Weil. Il s'agit de montrer qu'étant donné p arbitraire dans X , il existe un ouvert affine $U = \text{Spec}(B)$ le contenant et $a \in A$ tel que le diviseur de Weil de $V(a)$ soit $D \cap U$. En effet, sur l'intersection de deux tels ouverts, ces diviseurs de Cartier coïncident puisqu'ils ont même diviseur de Weil. Soit $A = \mathcal{O}_p$ et $x \in \text{Spec}(\mathcal{O}_p)$ le point générique d'une des composantes de D qui passe par p . Soit π_x une uniformisante de l'anneau de valuation discrète \mathcal{O}_x . On peut supposer $\pi_x \in A$. Si on décompose

$$\pi_x^{n_x} = \prod a_i^{m_i}$$

en facteurs irréductibles, on sait (factorialité) que $x_i = a_i \mathcal{O}_p$ est premier et, bien entendu, de codimension 1 (\mathcal{O}_p est normal). Ainsi, le diviseur de π_x dans $\text{Spec}(A)$ est $\sum m_i x_i$. On déduit qu'un certain couple (x_i, m_i) est (x, n_x) . On note alors a_i aussi a_x et que a_x est une uniformisante de \mathcal{O}_x . On définit alors $a = \prod a_x^{n_x}$ et on peut supposer que a est défini au voisinage de p . Le diviseur de Weil de a est $\sum n_x x + D'$ avec D' qui ne se spécialise pas sur p par construction. Quitte à rétrécir l'ouvert en question (en prenant le complémentaire de l'adhérence des points définissant D'), on a ce qu'on veut. ■

7.9. Groupe de Chow

Soit X un schéma intègre noethérien. On suppose X normal, ou, plus généralement, que ses localisés aux points x de codimension 1 soient des anneaux de valuation discrète de valuation v_x .

Remarque 7.9.1. — Plus généralement, soit L localement libre de rang 1 et $s \in L_\eta = L \otimes k(X)$ une section rationnelle non nulle, ie une section de L au point générique. Le choix d'un isomorphisme $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} L_U$ sur U ouvert non vide contenant x de codimension 1 identifie s à un élément de $k(X)^*$ dont on peut prendre la valuation. Changer d'isomorphisme ne modifie pas cette valuation. On définit alors

$$\operatorname{div}(s) = \sum_{\operatorname{codim}(x)=1} v_x(s)x.$$

Bien entendu, changer de section rationnelle change $\operatorname{div}(s)$ en $\operatorname{div}(s) + \operatorname{div}(f)$, $f \in k(X)^*$.

Définition 7.9.2. — Le groupe de Chow $\operatorname{CH}^1(X)$ est le groupe abélien quotient $A^1(X)/\operatorname{div}(k(X)^*)$.

Deux diviseurs de Weil ayant même image dans le groupe de Chow sont dits **linéairement équivalents**.

Proposition 7.9.3. — Soit A un anneau factoriel. Alors, $\operatorname{CH}^1(\operatorname{Spec}(A))=0$.

Preuve : c'est la même qu'en 7.8.2. En effet, soit $D = \sum n_x x$ un diviseur. On choisit une uniformisante de \mathcal{O}_x qu'on peut supposer provenir de $\pi_x \in A$. On décompose π_x en facteurs irréductibles et on déduit comme plus haut qu'on peut supposer π_x irréductible. Le diviseur de $\prod \pi_x^{n_x}$ est D . ■

Corollaire 7.9.4. — Le groupe de $\operatorname{CH}^1(\mathbf{A}_k^n)$ est nul.

7.10. Groupe de Picard et groupe de Chow

Supposons X intègre et normal. La remarque 7.9.1 permet de définir un morphisme de groupes

$$\operatorname{Pic}(X) \rightarrow \operatorname{CH}^1(X).$$

On peut aussi (7.3.2) identifier $\operatorname{Pic}(X)$ et $\operatorname{Cl}(X)$ et utiliser le diviseur de Weil associé à un diviseur de Cartier pour le définir.

Théorème 7.10.1. — Si X est localement factorielle, le morphisme précédent est un isomorphisme.

Preuve : La surjectivité est donnée par 7.8.2. Mais l'injectivité est claire, car si D est que tel que $\operatorname{div}(D) = \operatorname{div}(f)$ où $f \in k(X)^*$, changeant $D = (U_i, f_i)$ en $(U_i, f_i/f)$ qui lui est équivalent, on a $\operatorname{div}(D) = 0$ et donc $D = 0$ par injectivité de div . ■

Corollaire 7.10.2. — On a $\operatorname{Pic}(\mathbf{A}_k^n) = 0$.

Quillen a pu montrer, mais c'est très difficile, que tout fibré vectoriel de rang n arbitraire sur \mathbf{A}_k^n est trivial. C'est une situation très exceptionnelle.

7.11. Application au projectif

Théorème 7.11.1. — On a $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}_k^n) = \mathbf{Z}$ engendré par $\mathcal{O}(1)$.

Preuve : on a déjà observé que le morphisme $l \mapsto \mathcal{O}(l)$ est injectif. Montrons sa surjectivité. Un fibré en droites L sur le projectif est trivial sur $D(X_i) = \mathbf{A}_k^n$ d'après ce qui précède. Il est donc défini par un cocycle $g_{i,j} \in \mathbf{G}_m(k[X_t/X_i][X_j/X_i])$. Or, les inversibles de cet anneau sont les puissances de X_i/X_j (écrire $u = P(X_t)/(X_i X_j)^\alpha$, $v = Q(X_t)/(X_i X_j)^\beta$ et $uv = 1$). Le cocycle est donc de la forme $(X_i/X_j)^{m_{i,j}}$. Or, l'équation de cocycle

$$(X_0/X_1)^a (X_1/X_2)^b (X_2/X_0)^c = 1$$

entraîne immédiatement $a = b = c$ de sorte que le cocycle est de la forme $(X_i/X_j)^l$ et donc $L = \mathcal{O}(-l)$. ■

Si D un diviseur sur $\text{Pic}(\mathbf{P}_k^n)$, l'entier d tel que $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(d)$ s'appelle le **degré** de D .

Exercice 7.11.2 (Théorème de Bezout). — Soient D_1, D_2 des diviseurs de \mathbf{P}_k^2 sans composante commune, montrer que $D_1 \cap D_2$ est de longueur finie égale aux produits des degrés de D_1, D_2 (utiliser la suite exacte 7.7.a tensorisée par $\mathcal{O}(n)$, $n \gg 0$ et calculer les sections globales). Montrer que si tous les points d'intersection sont rationnels et qu'en ces points les tangentes (cf. TD) de D_1, D_2 sont distinctes, alors $D_1 \cap D_2$ est réunion schématique de $\deg(D_1) \deg(D_2)$ points rationnels.

Dans la plupart des cas, la notion de codimension d'un point est reliée à la dimension de son adhérence. On a (cours accéléré), le résultat relativement difficile suivant, conséquence du lemme de normalisation de Noether et des deux théorèmes de Cohen-Seidenberg :

Théorème 7.11.3. — Soit A une k -algèbre de type fini intègre et $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Alors, on a

$$\text{codim}(\mathfrak{p}) + \dim \bar{\mathfrak{p}} = \dim(A) = \text{degr}_k \text{Frac}(A).$$

En particulier, si \mathfrak{p} maximal, on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \dim A = \text{degr}_k \text{Frac}(A)$. En terme géométrique, cette formule signifie que si x est un point d'une variété intègre, on a

$$(7.11.a) \quad \text{codim}_X(x) + \dim(\bar{x}) = \dim(X) = \text{degr}_k(k(X)).$$

Noter que cette formule est fautive si X non intègre (prendre l'union d'une droite et d'un plan vectoriels dans l'espace) et x le point générique de la droite par exemple. Si donc Y est une sous-variété d'un tel X dont toutes les composantes ont pour dimension $\dim(X) - 1$, alors les points génériques de Y ont pour codimension 1.

En particulier, si k est un corps, on a

$$\dim(\mathbf{P}_k^n) = \dim(\mathbf{A}_k^n) = n.$$

Corollaire 7.11.4. — Si Y est réduit et toutes ses composantes ont dimension $n - 1$ dans $X = \mathbf{P}_k^n$, alors $Y = V(P)$ où P polynôme homogène. En particulier, Y est Cartier.

Preuve : Soit y_i un point générique de Y . D'après 7.11.a, on a $\text{codim}_X(y_i) = 1$ et donc il existe D Cartier tel que $\text{div}(D_i) = y_i$. Si $D = \sum D_i$, la réunion schématique des D_i , on a donc $y_i \in D$ puis $Y = D$ car Y, D réduits. Or, $\mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}(-l)$ donc l'inclusion $\mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O}$ s'identifie à une inclusion $\mathcal{O}(-l) \rightarrow \mathcal{O}$, qui est définie par une section de $H^0(\mathcal{O}(l)) = S_l$. ■

Exercice 7.11.5. — Énoncer et démontrer un théorème analogue sur \mathbf{A}_k^n , voire sur $\text{Spec}(A)$ avec A une k -algèbre de type finie normale.

7.12. Appendice : le lemme d'Artin-Rees

On va faire quelques rappels de topologie générale. On se donne un anneau **noethérien** A et un idéal I . On munit A de la filtration I -adique $I^n, n \in \mathbf{N}$.

Soit N est un sous-module de M . On va comparer la topologie induite par la filtration I -adique de M (définie par la filtration $I^n M \cap N$) et la topologie I -adique de N . Chacune des deux filtrations vérifie $\text{IFil}_n N \subset \text{Fil}_{n+1} N$. On ne considérera que de telles filtrations dans cette appendice.

Définition 7.12.1. — Soit M un A -module filtré. On dit que la filtration de M est bonne si $IM_n = M_{n+1}$ pour n assez grand.

Bien entendu, la filtration I -adique de M est bonne. Soit T une indéterminée. Notons

$$\bar{A} = A[IT] = \bigoplus_{n \geq 0} I^n T^n$$

l'anneau de l'éclaté de $\text{Spec}(A)$ le long de $V(I)$. Comme A est noethérien, I est noethérien et \bar{A} est noethérien et gradué. Soit $\bar{M} = \bigoplus_{n \geq 0} M_n T^n$: c'est un \bar{A} -module gradué.

Lemme 7.12.2. — Supposons que tous les M_n sont noethériens. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- La filtration de M est bonne.
- Le \bar{A} -module \bar{M} est noethérien.

Preuve : Supposons $IM_n = M_{n+1}$ pour $n \geq k$. Alors, \bar{M} est engendré par $\bigoplus_{n \leq k} M_n T^n$ et donc est de type fini.

Inversement, si \bar{M} est engendré par un nombre fini de générateurs de degré $\leq d$ disons, on a $IM_n = M_{n+1}$ pour $n \geq d$. ■

Corollaire 7.12.3. — Soit N un sous-module de M et supposons que tous les M_n sont noethériens. Si la filtration de M est bonne, il en est de même de la filtration induite $M_n \cap N$ de N .

Preuve : Comme \bar{M} est noethérien sur \bar{A} noethérien, il en est de même de son sous-module $\bar{N} = \bigoplus_{n \leq N} (M_n \cap N) T^n$. ■

Le corollaire implique immédiatement

Théorème 7.12.4 (Artin-Rees). — Soit N un sous-module de M . Supposons M noethérien. Alors, la filtration $I^n M \cap N$ de N induite par la filtration I -adique de M est bonne. En particulier, les topologie I -adiques de N et induites sur N par la topologie I -adiques de M sont les mêmes.

Supposons donc M noethérien. Si k vérifie $I(I^n M \cap N) = I^{n+1} M \cap N$ pour $n \geq k$, on a donc

$$(7.12.a) \quad I^n (I^k M \cap N) = I^{n+k} M \cap N \text{ pour } n \geq 0$$

D'un point de vue topologique, l'inclusion triviale

$$I^n N \subset I^n M \cap N$$

prouve qu'un ouvert induit est un ouvert I -adique. Réciproquement, l'inclusion

$$I^{n+k} M \cap N \subset I^n (I^k M \cap N) \subset I^n N$$

prouve que l'ouvert I -adique est un ouvert induit. La topologie induite sur N par la topologie I -adique de M est bien la topologie I -adique de N . ■

Corollaire 7.12.5. — Si M de type fini sur A noethérien et $I \subset \text{rad}(A)$, alors $N = \bigcap_n I^n M$ est nul.

Preuve : le module IN est un ouvert I -adique, donc aussi pour la topologie induite. Soit $n > 0$ tel que $N = N \cap I^n M \subset IN$. On a alors $N = IN$ et $N = 0$ par Nakayama. ■

CHAPITRE 8

PLATITUDE

Nous avons rencontré des morphismes fermés, et mêmes universellement fermés, à savoir les morphismes projectifs. En fait, comme le montrera le cours, on rencontre naturellement une classe de morphismes fondamentale, qui eux sont ouverts : les morphismes plats. Cette notion est délicate, mais fondamentale, aussi lui consacrons-nous une partie. Elle débouchera sur la notion de morphisme lisse, qui elle se teste facilement par un calcul de différentielles : c'est l'analogie algébrique des submersions de la géométrie différentielle.

8.1. Platitude, fidèle platitude

Rappelons qu'un A -module M est dit **plat** si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$ est exact. Il revient au même de dire que les localisés M_y sont A_y -plats pour $y \in \text{Spec}(A)$ (exercice). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 8.1.1. — Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur Y -schéma X . Alors, \mathcal{F} est plat en $x \in X$ si \mathcal{F}_x est plat sur $\mathcal{O}_{f(x)}$, plat s'il est plat en tout point. Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on dit simplement X plat sur Y (en $x \dots$).

L'associativité du produit tensoriel assure que **notion de platitude est invariante par changement de base**. Dire M plat sur A , c'est dire que les groupes $\text{Tor}_i^A(M, N)$ sont nuls pour $i > 0$ pour tout N , voire tout N de type fini si on veut (exercice). On peut même supposer $N = A/I$ avec I de type fini, autrement dit il suffit de prouver l'injectivité de $I \otimes_A M \rightarrow M$.

Exercice 8.1.2. — Montrer qu'un module sur un anneau principal est plat si et seulement si il est sans torsion. En déduire qu'un schéma intègre est soit plat sur \mathbf{Z} soit est un \mathbf{F}_p -schéma. Montrer que $\mathbf{Z}[x]/(f(x))$ est plat sur \mathbf{Z} si et seulement si f est nul ou ses coefficients de f sont premiers entre eux.

Un module projectif est plat. Inversement, on a

Exercice 8.1.3. — Montrer qu'un module de type fini M sur un anneau local noethérien A est plat si et seulement si il est libre ou encore si $\text{Tor}_1^A(M, k) = 0$ (k est le corps résiduel) [Indication : considérer une base de $M \otimes k$ et utiliser Nakayama]. Énoncer et prouver l'analogie gradué.

À vrai dire, l'hypothèse A noethérien dans l'exercice précédent est inutile, mais la preuve est un peu plus compliquée dans le cas général (pas très utile en fait). En fait, malheureusement, on regardera le plus souvent des modules qui ne sont pas de type fini. Le prototype sera les morphismes $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ provenant d'un morphisme de schémas : le plus souvent, \mathcal{O}_x n'est pas un module de type fini.

Définition 8.1.4. — On dit qu'un A -module M est **fidèlement plat** s'il est plat et si $N \otimes_A M = 0$ entraîne $N = 0$.

On peut pour tester la fidèle platitude d'un module plat M se restreindre à N *monogène*, ie de la forme $An = A/I, I = \text{Ann}_A(n)$: en effet, si $N \otimes_A M$ est nul, pour tout n , on a une injection $An \otimes_A M \hookrightarrow N \otimes_A M = 0$, et donc $An = 0$ par hypothèse, puis $N = 0$. Comme tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal, on peut même supposer I maximal.

Proposition 8.1.5. — *Soit B une A -algèbre.*

i) B est fidèlement plat sur A si et seulement si B est plat sur A et $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif.

ii) si $A \rightarrow B$ est un morphisme local d'anneaux locaux, B plat sur A , alors B fidèlement plat sur A .

Preuve : Prouvons *i)*. Supposons B fidèlement plat sur A . Soit $y \in \text{Spec}(A)$. Alors, $B \otimes_A k(y) = B/[y]B$ est non nul. Donc, $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A k(y)) \neq \emptyset$, ce qui prouve f surjectif.

Inversement, soit $N = A/I$ un module monogène non nul. Comme N est non nul, $\text{Spec}(A/I)$ est non vide et on choisit alors

$$y \in V(I) = \text{Spec}(A/I) \subset \text{Spec}(A).$$

L'image inverse de $V(I)$ par f s'identifie à $V(IB) = \text{Spec}(B/IB)$. Comme f surjectif, il existe $x \in f^{-1}(y) \subset \text{Spec}(B/IB)$ de sorte que $V(IB)$ est non vide et ainsi

$$B/IB = N \otimes_A B \neq 0.$$

Prouvons *ii)*. Comme le seul idéal maximal de A est \mathfrak{m}_A , il suffit de prouver que $B \otimes_A A/\mathfrak{m}_A = B/\mathfrak{m}_A B$ est non nul. Mais comme $A \rightarrow B$ est local, B/\mathfrak{m}_B est un quotient non nul de $B/\mathfrak{m}_A B$. ■

Exercice 8.1.6. — *Montrer que si B est fidèlement plat sur A , alors la flèche $A \rightarrow B$ est injective. [Observer $Ba \xrightarrow{\sim} B \otimes_A Aa$ pour tout $a \in A$].*

Définition 8.1.7. — *Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de schémas est fidèlement plat s'il est plat et surjectif.*

En particulier, l'image inverse $f^*\mathcal{F}$ par un morphisme fidèlement plat d'un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur Y est nulle si et seulement si \mathcal{F} est nul.

Exercice 8.1.8. — *On considère $X = \text{Spec}(\mathbf{C}[t])$ et $Y = \text{Spec}(\mathbf{C}[x, y](x^2 - y^3))$ et le morphisme $f(t) = (x^3, y^2)$ (normalisation d'un cusp). Montrer que f est plat sauf en l'origine. Que se passe-t-il si on remplace le corps de base \mathbf{C} par l'anneau \mathbf{Z} (quels sont les points de platitude) ?*

Exercice 8.1.9. — *Montrer qu'un morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme si et seulement si il le devient après un changement de base fidèlement plat $S' \rightarrow S$.*

8.2. Ouverture et platitude

Proposition 8.2.1. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas qui est plat. Soit $x \in X$ et $y' \rightsquigarrow y$ une générisation de $y = f(x)$. Alors, il existe une générisation de $x' \rightsquigarrow x$ tel que $f(x') = y'$. En particulier, l'image d'un ouvert est stable par générisation. Si de plus Y est localement noethérien et f de type fini, f est ouvert.*

Preuve : Soit y' une générisation de y . Soit x au dessus de y . On regarde le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_x) & \longrightarrow & X \\ f_x \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On a déjà remarqué en 6.2 que le point y' provient de $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, puisque ce dernier s'identifie à l'ensemble des généralisations de y . Comme f_x est fidèlement plat d'après la proposition 8.1.5, on sait que f_x est surjectif et donc qu'il existe x' au dessus de y' . Il suffit d'invoquer le théorème de constructibilité de Chevalley pour conclure. ■

Corollaire 8.2.2. — *Un morphisme plat de schémas noethériens envoie point générique sur point générique.*

Preuve : En effet, si l'image y d'un point générique x , a une généralisation y_0 , celle-ci provient d'une généralisation x_0 de x . Comme x est générique, $x_0 = x$ et donc $y_0 = y$. ■

En fait, on a mieux.

Proposition 8.2.3. — *Un morphisme plat de schémas localement noethériens envoie points associés sur points associés. Réciproquement, $f : X \rightarrow Y$ envoyant associé sur associé est plat si Y est le spectre d'un anneau principal. Si X est intègre, ceci équivaut à f dominant.*

Preuve : supposons que $f(x)$ non associé avec $y = x$ associé. Le morphisme $\phi : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est local et plat. Par hypothèse, $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$ n'est pas associé, donc n'est pas contenu dans les diviseurs de zéro de \mathcal{O}_y (évitement du nombre fini d'associés (cf. 6.4.6)). Soit $f \in \mathfrak{m}_y$ non diviseur de zéro, de sorte que $\phi(f)$ est diviseur de zéro dans \mathcal{O}_x . Mais c'est absurde, car le produit tensoriel de l'injection

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_y \xrightarrow{f} \mathcal{O}_y$$

s'identifie à l'injection (platitude)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{f} \mathcal{O}_x.$$

Dans le cas principal, l'hypothèse signifie que \mathcal{O}_x est sans \mathcal{O}_y torsion, et donc est plat (8.1.2). ■

CHAPITRE 9

DIMENSION ET PLATITUDE

9.1. Rappels sur la dimension des anneaux locaux noethériens : rappels bis

Rappelons le résultat fondamental de la théorie, dans le cas local noethérien. Soit donc M de type fini sur (A, \mathfrak{m}, k) local noethérien. On peut associer à M trois entiers :

- 1) Par définition, la dimension $\dim(M)$ de M est celle de son support $V(\text{Ann}(M))$ (cf. 6.3.6), autrement dit la dimension de Krull de $A/\text{Ann}(M)$.
- 2) Le module $M/\mathfrak{m}^n M$ est de longueur finie $l(M/\mathfrak{m}^n M)$, à savoir

$$l(M/\mathfrak{m}^n M) = \sum_{i=0}^{n-1} \dim_k(\mathfrak{m}^i M/\mathfrak{m}^{i+1} M)$$

(filtrer par les $\mathfrak{m}^i M/\mathfrak{m}^n M$). La fonction de n s'appelle la fonction de Hilbert de M . Un théorème non trivial assure que la fonction $n \mapsto l(M/\mathfrak{m}^n M)$ est polynomiale si $n \gg 0$. On note $d(M)$ son degré.

- 3) Rappelons qu'un système de paramètres est une famille a_1, \dots, a_l d'éléments de \mathfrak{m} tel que $M/(a_i)M$ de longueur finie, autrement dit tel qu'il existe un entier l vérifiant

$$\mathfrak{m}^l M \subset (a_i)M \subset \mathfrak{m}M.$$

Notons que si $l = 0$ (famille vide), on a $(a_i) = 0$. La borne inférieure du cardinal des systèmes de paramètres de M est notée $s(M)$. Géométriquement, dans le cas $M = A$ disons, ceci signifie simplement que $s(A)$ est le plus petit nombre d'équations a_i qu'il faut pour définir (ensemblisamment) le point fermé \mathfrak{m} de $\text{Spec}(A)$, ie tel que $V(a_i) = \{\mathfrak{m}\}$.

Théorème 9.1.1. — *Les trois nombres $s(M)$, $d(M)$ et $\dim(M)$ sont égaux.*

EN particulier, la dimension de M est nulle si et seulement si il existe l tel que $\mathfrak{m}^l M = 0$. Ces points ont été revus en TD. On en déduit l'énoncé suivant, absolument fondamental, qui, sous une forme un peu moins générale, est due à Krull :

Théorème 9.1.2. — *Soient f_1, \dots, f_r des fonctions régulières sur un schéma localement noethérien X définissant un sous-schéma fermé $Y = V(f_1, \dots, f_r)$. Alors, pour tout $y \in Y$, on a*

$$\text{codim}_Y(y) \geq \text{codim}_X(y) - r.$$

Preuve : Posons $M = A = \mathcal{O}_{X,y}$ et considérons un système de paramètres a_1, \dots, a_d de $\mathcal{O}_{Y,y} = A/(f_1, \dots, f_r)$ avec $d = \text{codim}_Y(y)$. On note \mathfrak{m} l'idéal maximal de A . Par construction, on a pour un certain l

$$\mathfrak{m}^l A/(f_1, \dots, f_r) \subset (a_i)A/(f_1, \dots, f_r) \subset \mathfrak{m}A/(f_1, \dots, f_r)$$

ce qui impose

$$\mathfrak{m}^l A \subset (a_i, f_1, \dots, f_r) \subset \mathfrak{m}.$$

On déduit

$$s(A) = \text{codim}_X(y) \leq d + r = \text{codim}_Y(y) + r.$$

■

Exercice 9.1.3. — Généraliser au cas où X est le support d'un faisceau cohérent.

En tout cas, le théorème assure qu'un point générique d'un diviseur de Cartier dans un schéma noethérien de codimension 1 (la codimension nulle est interdite!).

Corollaire 9.1.4. — Avec les notations précédentes, on a

- Si X est local, on a $\dim(Y) \geq \dim(X) - r$ dès que Y non vide.
- Si y générique dans Y , alors $\text{codim}_X(y) \leq r$. En particulier, les points génériques d'un diviseur de Cartier sont de codimension 1.
- Si X est une k -variété intègre, toutes les composantes de Y ont une dimension $\geq \dim(X) - r$.

Preuve : Prouvons le premier point. Soit x le point fermé de X . Si X est local, on a certainement $\dim(X) = \text{codim}_X(x)$ et $x \in Y$ car Y non vide. On applique alors le théorème à $y = x$. Le second point est immédiat. Pour le troisième point, on choisit y fermé dans $F_1 - f_2 \cup \dots \cup F_n$ où F_1, \dots, F_n sont les composantes de $Y \neq \emptyset$. Par constricton, on a $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{F_1,y}$. L'inégalité résulte alors du théorème et de l'égalité $\dim(F_1) = \text{codim}_{F_1}(y)$ (7.11.a). Mais noter que Y peut-être vide (prendre une droite horizontale dans le plan ne passant pas par l'origine de coordonnée x, y et prendre $f = y$). ■

Notons que l'inégalité dans le cas local prouve seulement qu'une composante de Y a une dimension minorée par $\dim(X) - r$. Dans la pratique, c'est toujours le cas, même si il y a des contre-exemples pathologiques. La raison est que les anneaux locaux de la géométrie algébrique usuelle sont des quotients d'anneaux de Cohen-Macaulay et donc sont caténaire. On peut alors pour évaluer la dimension d'une composante majorer la codimension dans x d'un point générique de Y exactement comme dans le cas des variétés pour obtenir le résultat. On montrera que le dernier point subsiste (12.4.3) par exemple pour les schémas arithmétiques, mais la preuve est plus délicate.

9.2. Équidimensionalité

Les dimensions des fibres d'un morphisme plat sont « aussi constantes que possibles » au sens suivant.

Théorème 9.2.1. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas localement noethériens. Soit $x \in X$ d'image $y = f(x)$.

- On a $\text{codim}_X(x) \leq \text{codim}_{f^{-1}(y)}(x) + \text{codim}_Y(y)$;
- Si f est plat en x , on a $\text{codim}_X(x) = \text{codim}_{f^{-1}(y)}(x) + \text{codim}_Y(y)$ (f équidimensionnel en x).

Preuve : Prouvons *i*). Quitte à faire un changement de base $\text{Spec}(\mathcal{O}_y) \rightarrow Y$ qui ne modifie pas les nombres en jeu, on peut supposer y fermé dans Y local. Mais alors, le fermé $\{f(x)\}$ est défini (ensemblément) par $r = \text{codim}_Y(y)$ équations f_i dans Y (9.1.1) de sorte que la fibre $f^{-1}(y)_{\text{réd}}$ est le fermé $V(f_1, \dots, f_r)_{\text{réd}}$. On applique alors 9.1.2.

Prouvons *ii*). On peut trouver $l = \text{codim}_{f^{-1}(x)}(x)$ spécialisations strictes dans $f^{-1}(x)$

$$x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x_l = x.$$

On peut trouver $k = \text{codim}_Y(y)$ spécialisations strictes

$$y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow y_k = y.$$

Mais, grâce au lemme 8.2.1, on peut trouver k spécialisations,

$$\xi_0 \rightsquigarrow \xi_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \xi_k = x_0$$

avec $f(\xi_i) = y_i$. On a donc $k + l$ spécialisations, nécessairement strictes,

$$\xi_0 \rightsquigarrow \xi_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \xi_k = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x_l = x,$$

d'où l'inégalité en sens inverse. ■

Pour une réciproque partielle, voir 9.5.2.

De même que pour 9.1.4, on obtient alors

Corollaire 9.2.2. — Soit A un anneau noethérien (de dimension finie ou non) et $n \in \mathbf{N}$. Alors, on a $\dim \mathbf{A}_A^n = \dim(A) + n$.

Preuve : Prouvons le premier point. On peut supposer $n = 1$ (faire une récurrence). La dimension est certainement plus grande : partant d'une chaîne strictement croissantes d'idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$$

de A , on construit la chaîne de longueur $m + n$

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m \subset (\mathfrak{p}_m, X)$$

de l'anneau de coordonnées $A[X]$ de $X = \mathbf{A}_A^1$.

Soit x un point de X au dessus de $y \in Y = \text{Spec}(A)$. La fibre F au dessus de y est la droite $\mathbf{A}_{k(y)}^1$ d'anneau $k(y)[X]$ principal, et donc est de dimension 1 (ou bien invoquer 7.11.3). Mais la projection $X \rightarrow Y$ est plate (car $A[x]$ est libre sur A) et donc (9.2.1)

$$\text{codim}_X(x) = \text{codim}_F(x) + \text{codim}_Y(y) \leq 1 + \dim(Y),$$

et l'inégalité annoncée suit par passage au sup. ■

Par exemple, si P est un polynôme non constant de $k[x_1, \dots, x_n]$, la dimension de $V(P)$ est $n - 1$ (9.1.4 et 9.2.2).

Exercice 9.2.3. — On considère le sous-schéma fermé d'équation $y = tx$ dans $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}[x, y, t]$ qu'on projette sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}[x, y]$ par $(x, y, t) \mapsto (x, y)$ (ouvert de l'éclatement de l'origine du plan). Montrer que la projection n'est pas plate

9.3. Rappels sur les morphismes entiers

Pour mémoire, rappelons la définition suivante

Définition 9.3.1. — Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est dit entier s'il est affine et si $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ est une $\mathcal{O}_Y(U)$ -algèbre entière pour tout ouvert affine U de Y .

Les morphismes entiers se comportent presque comme les morphismes finis. En particulier, la notion de morphisme entier est stable par composition et changement de base. Notons qu'un schéma entier $X = \text{Spec}(A)$ sur un corps est de dimension nulle : si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, l'algèbre A/\mathfrak{p} est intègre et entière ; le minimal $\sum_{i \leq n} k_i x^i \in k[x]$ d'un élément non nul $a \in A/\mathfrak{p}$ a un premier terme $k_0 \neq 0$ (intégrité) et donc $(-1/k_0) \sum_{i > 0} k_i a^{i-1}$ est un inverse de a , de sorte que \mathfrak{p} est maximal .

Lemme 9.3.2. — Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entier et dominant est surjectif.

Preuve : On peut supposer X, Y affines et réduits. On a alors une injection (6.9.1) $A \rightarrow B$ qui fait de B une A -algèbre entière. Soit $y \in Y$. Quitte à localiser, on peut supposer A local et que y est le point fermé de Y . Soit x un point fermé de X , qui existe car X est affine et non vide comme Y . Montrons l'égalité $f(x) = y$. Autrement dit, soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ un idéal maximal de B et montrons $\mathfrak{m} \cap A$ est maximal. Mais B/\mathfrak{m} contient $A/\mathfrak{m} \cap A$ et est entière sur $A/\mathfrak{m} \cap A$. On peut donc supposer que B est un corps et il s'agit de montrer qu'alors A est un corps. Notons déjà que A est non nul. Puis, soit $a \neq 0$ dans A . Comme a reste non nul dans B , il a un inverse $b \in B$. Comme b^{-1} est entier sur A , son inverse b est un polynôme $P(b^{-1})$ en b^{-1} à coefficient dans A . Mais $ab = 1$ dans B , de sorte que $b^{-1} = a$ dans B , ie $aP(a) = 1$ dans B , donc dans A (injectivité de $A \rightarrow B$ encore). ■

Proposition 9.3.3. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entier et dominant. Alors, on a $\dim(X) = \dim(Y)$.

Preuve : On peut supposer X, Y réduits et affines. On a alors une injection (6.9.1) $A \rightarrow B$ qui fait de B une A -algèbre entière. Soit alors une suite de spécialisations strictes

$$y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow y_n$$

dans $Y = \text{Spec}(A)$.

Montrons par récurrence sur n qu'on peut trouver une suite de spécialisations strictes

$$x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n$$

dans X qui est au dessus. Si $n = 0$, c'est la surjectivité des morphismes entiers. Supposons $n > 0$ et l'énoncé vrai pour $n - 1$. Comme f est surjectif, on peut choisir x_0 au dessus de y_0 . On considère X_0 et Y_0 les adhérences de x_0 et y_0 . Comme f est continue, on a $f(X_0) = f(\overline{x_0}) \subset \overline{f(x_0)} = Y_0$. Mais le morphisme $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ induit par f est encore entier, comme composé de l'immersion fermée $X_0 \rightarrow f^{-1}(Y_0)$ et du morphisme entier $f^{-1}(Y_0) \rightarrow Y_0$. Il est dominant (l'image contient le point générique de Y_0 et f quasi-compact car affine, cff 6.9.1). On a donc $f(X_0) = Y_0$.

Comme $f(X_0)$ est fermé et contient y_0 , on a $Y_0 \subset f(X_0)$, et donc $f(X_0) = Y_0$. Bien entendu, on a $y_i \in Y_0$ pour $i > 0$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à f_0 et y_1, \dots, y_n . On en déduit l'inégalité $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Pour prouver l'égalité, on part d'une suite de spécialisations strictes

$$x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n$$

dans X qui s'envoie sur une suite de spécialisations

$$y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow y_n$$

dans Y . Imaginons par exemple qu'on ait $y = y_i = y_{i+1}$. Alors, on aurait une spécialisation stricte $x_i \rightsquigarrow x_{i+1}$ dans le $k(y)$ -schéma entier X_y , ce qui est impossible car il de dimension nulle. ■

Notons que la preuve donne au passage que l'image d'un morphisme entier est stable par spécialisation.

Corollaire 9.3.4. — Soit K/k une extension algébrique de corps et X est une variété irréductible sur k . Alors, toutes les composantes de X_K (qui est non vide) ont pour dimension $\dim(X)$.

Preuve : Le morphisme $f : X_K \rightarrow X$ est entier et plat. Soit F_K une composante irréductible de X_K . Le complémentaire U_K des autres composantes est un ouvert contenant le point générique η_K de F_K . Comme la restriction de f à U_K est plate, l'image de $\eta_K \in U_K$ est le point générique de Y (8.2.2) de sorte que $F_K \rightarrow Y$ est dominant et entier, et donc $\dim(F_K) = \dim(X)$. ■

Exercice 9.3.5. — Montrer que l'hypothèse K/k algébrique est inutile (utiliser 6.10.2 pour se ramener au cas précédent).

9.4. Intersections dans l'espace affine, projectif

De même, on obtient le corollaire suivant.

Proposition 9.4.1. — Soient X, Y deux k -variétés irréductibles. Alors, toutes les composantes irréductibles de $X \times_k Y$ ont pour dimension $\dim(X) + \dim(Y)$.

La projection $f : X \times Y \rightarrow Y$ est plate (car déduite par changement de base de $X \rightarrow \text{Spec}(k)$), de type fini, donc ouverte. Le complémentaire U dans P des autres composantes est un ouvert non vide. Choisissons y fermé dans l'ouvert $f(U)$ de Y et x fermé dans $f^{-1}(y) \cap U = X_{k(y)} \cap U$. On a

$$\text{codim}_{f^{-1}(y) \cap U}(x) = \dim(X)$$

(se restreindre aux composantes X_i de $f^1(y)$ qui ont toute dimension $\dim(X)$ d'après 9.3.4) et remarquer $\text{codim}_{f^1(y)}(x) = \sup_i \text{codim}_{X_i}(y)$. On invoque alors l'équidimensionalité de $U \rightarrow X$ (9.2.1). ■

En cas d'égalité (pour toutes les composantes), on dit que X et Y se *coupent proprement*. On en déduit le résultat très important suivant :

Théorème 9.4.2. — Soient X, Y deux sous-schémas fermés intègres de \mathbf{A}_k^n . Alors, toute composante irréductible de $X \cap Y$ est de dimension $\geq \dim(X) + \dim(Y) - n$.

Preuve : Soit Δ la diagonale de $\mathbf{A}_k^n \times \mathbf{A}_k^n$. L'isomorphisme canonique

$$k[\underline{x}]/(P_i(\underline{x}), Q_j(\underline{x})) \xrightarrow{\sim} k[x, y]/(P_i(x), Q_j(y), x_a - y_a)_{i,j,1 \leq a \leq n}$$

identifie le sous-schéma fermé

$$(X \times_k Y) \cap \Delta \hookrightarrow \mathbf{A}_k^n \times \mathbf{A}_k^n$$

à $X \cap Y$. Comme Δ est défini par n équations et que $X \times_k Y$ a toutes ses composantes de dimension $\dim(X) + \dim(Y)$ (9.4.1), il ne reste qu'à invoquer 9.1.4. ■ Notons que l'intersection peut-être vide

(pas de composante dans ce cas) (penser à deux plans parallèles dans l'espace par exemple).

Corollaire 9.4.3. — Soient X, Y deux sous-schémas fermés intègres de \mathbf{P}_k^n . Alors, toute composante irréductible de $X \cap Y$ est de dimension $\geq \dim(X) + \dim(Y) - n$. Si de plus $\dim(X) + \dim(Y) - n \geq 0$, l'intersection est non vide.

Preuve : seul la non vacuité demande une preuve. Soient I_X, I_Y des idéaux homogènes définissant X, Y et $CX = V(I_X), CY = V(I_Y)$ les sous-schémas fermés de \mathbf{A}_k^{n+1} correspondants. Bien entendu, CX, CY sont intègres et le morphisme de coordonnées homogènes $CX - 0 \rightarrow X$ est trivialement localement libre de fibre G_m (le lecteur pas convaincu le vérifiera, cf. 5.10.4), donc plat. On déduit que CX est de dimension $\dim(X) + 1$. Soit C une composante de $CX \cap CY$ passant par zéro. On a $\dim(C) \geq \dim(X) + 1 + \dim(Y) + 1 - (n + 1) \cdot 0$ et donc C est non réduit à 0. Un point de C définit un point de $X \cap Y$. ■

On en déduit aisément une caractérisation géométrique de la dimension d'un schéma projectif (le cas affine est analogue, laissé en exercice) :

Théorème 9.4.4. — Soit X un sous-schéma projectif de \mathbf{P}_k^n de dimension d . Si k est infini, il existe un espace linéaire de codimension $d + 1$ ne rencontrant pas X .

Preuve : Choisissons un hyperplan H_0 ne passant pas par les points génériques de X (possible, car les formes linéaires s'annulant en un nombre fini de points forment une union d'espaces linéaires stricts dans $H^0(\mathcal{O}(1))$ et donc ne le remplit pas car k infini). Si $d = 0$, c'est terminé. Sinon, d'après 9.4.3, $H_0 \cap X$ est de dimension $\geq d - 1$ puisqu'il est non vide d'après 9.4.3. Mais $\dim(H_0 \cap X) > d$ car sinon il contiendrait une composante de X , donc un point générique. Ainsi, $\dim(H_0 \cap X) = d - 1$. Par récurrence, on construit ainsi des hyperplans H_0, \dots, H_d avec

$$H_0 \cap \dots \cap H_d \cap X = \emptyset.$$

Mais l'intersection de ces hyperplans est un espace projectif de dimension $n - D$ avec $D \leq d + 1$. On a exactement $D = d + 1$ d'après 9.1.4. ■

En fait, on a mieux.

Proposition 9.4.5. — Il existe un ouvert dense U de la grassmannienne $G = G(d + 1, n)$ tel que si $L \in U(k)$, alors $L \cap X = \emptyset$.

Preuve : on considère le graphe d'incidence (cf. TD)

$$\Gamma = \{(x, L) \in X \times G \text{ tels que } x \in L\}$$

et sa projection p sur G . Comme p est propre, $p(\Gamma)$ est un fermé F , strict d'après 9.4.4. On pose $U = G - F$. ■

Le lecteur se reportera plus bas pour des précisions dans le cas lisse (14.5.1).

9.5. Platitude générique : application à la dimension des fibres

Proposition 9.5.1. — *Soit X de type fini sur S noethérien réduit et \mathcal{F} cohérent sur X . Alors, il existe un ouvert dense Ω de S tel que la restriction \mathcal{F}_Ω de \mathcal{F} à l'ouvert X_Ω est plate sur Ω .*

Preuve : Soient S_i les composantes irréductibles de S (en nombre fini car S est noethérien). Pour tout i , la réunion des $S_j, j \neq i$ est un fermé strict de S_i et l'ouvert complémentaire U_i est dense dans S_i et donc est intègre. Si on construit un ouvert Ω_i qui convient pour chacune des restrictions de \mathcal{F} à \mathbf{P}_{U_i} , la réunion Ω des ouverts Ω_i est dense (elle contient tous les points génériques) et convient.

-On peut donc supposer S intègre et même affine d'anneau A . Comme X est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, on peut également supposer $X = \text{Spec}(B)$ et donc $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

On utilisera sans plus de précaution que si on a une suite exacte

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

avec M_1 plat sur $A[1/f]$ et M_3 plat sur $A[1/g]$, alors M_2 plat sur $A[1/fg]$ ce qui permet de dévisser les modules.

Utilisant le lemme de dévissage 6.4.10, on se ramène immédiatement au cas où $M = B$ et B intègre.

-On peut supposer aussi $A \rightarrow B$ injectif, car sinon $M = B = 0$ au dessus de l'ouvert non vide $\text{Spec}(A) \setminus V(\text{Ker}(A \rightarrow B)) \neq \text{Spec}(A)$.

On se ramène donc à prouver que si A est contenu dans une algèbre de type fini B intègre, alors $B[1/f]$ plat sur $A[1/f]$ pour un certain f non nul. On fait une récurrence sur le degré de transcendance d de $L = \text{Frac}(B)$ sur $K = \text{Frac}(A)$, autrement dit une récurrence sur la dimension de la fibre générique (7.11.3).

Notons que $B_K = B \otimes_A K$ est le localisé de $(A \setminus 0)^{-1}B$ et donc son corps des fractions est L . D'après le lemme de normalisation, B_K contient des d éléments algébriquement indépendants $b_i \in B$ -a priori, les b_i sont dans B_K , mais on chasse les dénominateurs qui sont dans A - tel que B_K est fini sur $K[b_1, \dots, b_d]$ (géométriquement, on a une projection finie surjective de $\text{Spec}(B)$ sur \mathbf{A}_K^d).

Chaque b_j annule un polynôme de la forme

$$X^N + a_{N-1,j}X^{N-1} + \dots + a_{0,j} \text{ avec } a_i \in K[b_1, \dots, b_d].$$

Si B n'est pas fini sur $A[b_1, \dots, b_n]$, le localisé $B[1/f]$ l'est sur $A[1/f][b_1, \dots, b_n]$ où f est un dénominateur commun des coefficients des $a_{j,l}$.

Si $d = 0$, on a $B[1/f]$ fini sur $A[1/f]$. Choisissons une K -base $\beta_j, j \in J$ de $L = \text{Frac}(B_f)$ formée d'éléments de B . Elle définit un morphisme

$$(A_f)^J \rightarrow B[1/f]$$

dont les noyaux et conoyaux sont donc nuls au point générique de $\text{Spec}(A[1/f])$ donc sur un ouvert non vide.

Si $d > 0$, on suppose la proposition prouvée au rang $d - 1$. Soit r le rang de $B[1/f]$ vu comme $C = A_f[b_1, \dots, b_n]$ -module de type fini (ie $r = \dim \text{Frac}(C) \otimes_C B[1/f]$). On a donc une suite exacte de C -modules de type fini

$$0 \rightarrow N \rightarrow C = (A_f[b_1, \dots, b_n])^r \rightarrow B_f \rightarrow M \rightarrow 0.$$

La tensorisation par K est aussi la localisation au point générique de $\text{Spec}(C)$, donc est exacte. On déduit les égalités

$$\text{Frac}(C) \otimes_C M = 0 \text{ et } \text{Frac}(C) \otimes_C N = 0$$

de sorte que M, N sont de torsion. Comme $N \hookrightarrow C^r$ et C sans torsion, on a $N = 0$ d'ailleurs.

Comme précédemment, utilisant le lemme 6.4.10, on peut supposer $M = C/\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_C(M)$ et \mathfrak{p} non nul car M de torsion. On peut en outre supposer $A \rightarrow C/\mathfrak{p}$ injectif. La fibre générique de $\text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(A[1/f])$ est le K -schéma $\text{Spec}(C_K/\mathfrak{p}_K)$. Elle est intègre (c'est un localisé d'un intègre). Si \mathfrak{p}_K était nul, l'idéal \mathfrak{p} serait annulé par un élément non nul et donc \mathfrak{p} serait nul (intégrité de C) ce qui n'est pas car le point générique n'est pas dans le support de M . Ainsi, la dimension de Krull de C_K/\mathfrak{p}_K est $< d$ et on conclut par récurrence. ■

Corollaire 9.5.2. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini et dominant de schémas localement noethériens. Supposons de plus Y réduit. Alors, il existe U ouvert (dense) de Y tel que f soit plat sur l'ouvert non vide $f^{-1}(U)$ et en particulier équidimensionnel.*

Preuve : En effet, l'ouvert Ω précédent étant dense il contient les points génériques de Y , qui, par hypothèse sont dans $f(X)$ de sorte que $f^{-1}(\Omega)$ est non vide. ■

Exercice 9.5.3. — *Soit $X \rightarrow S$ un morphisme propre de variétés (ou de schémas arithmétiques). On suppose que les fibres fermées X_s sont irréductibles de dimension constante. Montrer que X est irréductible. Montrer que c'est faux si on ne suppose pas que f est propre.*

Exercice 9.5.4. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini de variétés (ou de schémas arithmétiques) intègres. Montrer que les ensembles de points fermés $y \in Y$ où $\dim f^{-1}(y)$ est constante est constructible. Montrer (difficile) que la fonction $x \mapsto \dim F_x$ est continue sur l'ensemble des points fermés de X (Montrer que la fonction « dimension » croît par spécialisation).*

Exercice 9.5.5. — *Soit \mathcal{F} cohérent sur X noethérien et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. Alors, l'ensemble des $x \in X$ tels que \mathcal{F}_x est plat sur Y est ouvert [Utiliser le critère local de platitude 10.2.1 et le théorème de platitude générique 9.5.1]*

CHAPITRE 10

APPENDICE : LE CRITÈRE LOCAL DE PLATITUDE

On va donner une preuve du critère local de platitude (10.2.1), outil extrêmement puissant qui généralise 8.1.3. On étudie le cas nilpotent auquel on se ramène par « approximation » grâce au lemme d'Artin-Rees. Ceci permet de donner un critère de platitude par fibre extrêmement commode (10.3.2).

10.1. Le cas nilpotent

Soit J un idéal d'un anneau A . Pour tout A -module M , on note \bar{M} le quotient M/JM .

Lemme 10.1.1. — *Soit M un A -module tel que \bar{M} est \bar{A} -plat et $\text{Tor}_1^A(M, \bar{A})$ nul. Si J est nilpotent, M est plat.*

Preuve : On doit prouver la nullité de $\text{Tor}_1^A(M, N)$ pour tout A -module N de type fini. Comme la filtration $(J^n N)_n$ de N est nulle pour n assez grand, il suffit de prouver la nullité de $\text{Tor}_1^A(M, \bar{N})$ pour tout \bar{A} -module \bar{N} . Choisissons une suite exacte

$$0 \rightarrow \bar{K} \rightarrow \bar{L} \rightarrow \bar{N} \rightarrow 0$$

où \bar{L} est libre (sur \bar{A}). Par hypothèse, on a

$$\text{Tor}_1^A(M, \bar{L}) = 0$$

de sorte que la suite

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, \bar{N}) \rightarrow M \otimes_A \bar{K} \xrightarrow{\phi} M \otimes_A \bar{L} \rightarrow M \otimes_A \bar{N} \rightarrow 0$$

est exacte. Mais, la partie droite s'identifie à

$$\bar{M} \otimes_{\bar{A}} \bar{K} \rightarrow \bar{M} \otimes_{\bar{A}} \bar{L} \rightarrow \bar{M} \otimes_{\bar{A}} \bar{N} \rightarrow 0$$

de sorte que ϕ est injective car \bar{M} est plat sur \bar{A} . ■

Corollaire 10.1.2. — *Soit M un A -module tel que \bar{M} est \bar{A} -plat et $\text{Tor}_1^A(M, \bar{A})$ nul. Pour tout $n \geq 1$, le module $M/J^n M$ est plat sur A/J^n .*

Preuve : Il suffit de prouver la nullité de $\text{Tor}_1^{A/J^n}(M/J^n M, A/J)$ d'après ce qui précède, nullité qui résulte du lemme suivant appliqué à $B = A/J^n$, $M/J^n M$ et $N = A/J$ (le lecteur qui connaît les suites spectrales pourra en donner une preuve moins calculatoire).

Lemme 10.1.3. — *Soient $\phi : A \rightarrow B$ un quotient de A , M un A -module et N un B -module. Alors, $\text{Tor}_1^B(B \otimes_A M, N)$ est un quotient du B -module $\text{Tor}_1^A(M, N)$.*

Preuve : On peut procéder comme suit. Soit $(m_i)_{i \in I}$ une famille de générateurs de M donnant lieu à une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow A^{(I)} \rightarrow M \rightarrow 0$$

de sorte qu'on a

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = \mathrm{Ker}(K \otimes_A N \rightarrow N^{(I)}).$$

Un élément de ce Tor s'écrit $\sum_j (a_{i,j})_i \otimes n_j$ avec

$$\sum_i a_{i,j} m_i = 0 \text{ pour tout } j \text{ et } \sum_j a_{i,j} n_j = 0 \text{ pour tout } i.$$

Soit K_B le noyau de la surjection $B^{(I)} \rightarrow B \otimes_A M$ définie par les $1 \otimes m_i, i \in I$. On a alors

$$\mathrm{Tor}_1^B(B \otimes_A M, N) = \mathrm{Ker}(K_B \otimes_B N \rightarrow N^{(I)}).$$

Un élément de ce Tor s'écrit $\sum_j (b_{i,j})_i \otimes n_j$ avec

$$\sum_i b_{i,j} \otimes m_i = 0 \text{ pour tout } j \text{ et } \sum_j b_{i,j} n_j = 0 \text{ pour tout } i.$$

L'application

$$\begin{cases} K \otimes_A N & \rightarrow & K_B \otimes_B N \\ (a_i)_i \otimes n & \mapsto & (\phi(a_i))_i \otimes_B n \end{cases}$$

induit une application

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^B(B \otimes_A M, N).$$

Montrons sa surjectivité. Si $t = \sum_j k_{j,B} \otimes n_j \in K_B \otimes N$ un élément de $\mathrm{Tor}_1^B(M, N)$. Comme $B \otimes_A K$ se surjecte sur K_B , on peut écrire $k_{j,B}$ sous la forme

$$k_{j,B} = \sum_l b_{j,l} \phi(k_{j,l}) \text{ avec } k_{j,l} = (a_{i,j,l})_i \in K \hookrightarrow A^{(I)}.$$

Choisissons un antécédent $a_{j,l}$ de $b_{j,l}$ pour tout j, l . Les formules

$$a_{j,l} a_{i,j,l} n_j = b_{j,l} a_{i,j,l} n_j$$

et

$$\sum_i a_{i,j,l} m_i = 0$$

assurent que le tenseur $\sum_{j,l} (a_{j,l} a_{i,j,l})_i \otimes n_j$ est un élément de $\mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ qui s'envoie sur t . ■

■

10.2. Le cas général

Théorème 10.2.1. — *Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux noethériens, J un idéal de A et M un B -module de type fini. On suppose que JB est contenu dans le radical de B . Alors M est plat sur A si et seulement si M/JM est plat sur A/J et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$.*

Notons que la condition sur B est réalisée si J est nilpotent ou bien $A \rightarrow B$ morphisme local avec $J \neq A$. Notons de plus que dans le cas local avec $J = \mathfrak{m}_A$ la condition de platitude de $M/\mathfrak{m}_A M$ est automatiquement vérifiée de sorte que seule la condition de nullité du Tor est à vérifier.

Preuve : Supposons M plat sur A . La condition de platitude étant invariante par changement de base, M/JM est plat sur A/J . La suite exacte

$$0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$$

donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) \rightarrow M \otimes J \rightarrow M.$$

Comme M est plat, la flèche $M \otimes J \rightarrow M$ est injective, prouvant la nullité du Tor. Inversement, la nullité de $\text{Tor}_1^A(M, A/J)$ assure d'après ce qui précède la platitude sur A/J^n de $M/J^n M$. Soit alors I un idéal de type fini de A et prouvons l'injectivité de $I \otimes_A M \rightarrow M$. Un élément t du noyau définit un élément du noyau de

$$(I \otimes M)/J^n(I \otimes M) \rightarrow M/J^n M.$$

Soit $m \geq n$ et considérons l'idéal $I/I \cap J^m$ de A/J^m . Comme $M/J^m M$ est plat sur A/J^m , la flèche

$$I/I \cap J^m \otimes_{A/J^m} M/J^m M \rightarrow M/J^m M$$

est injective. Mais, le lemme d'Artin-Rees assure que la topologie J -adique de I coïncide avec la topologie induite sur I par la topologie J -adique de A . Ainsi, IJ^n est ouvert pour la topologie induite sur I . Choisissons donc $m \geq n$ tel que $I \cap J^m \subset IJ^n$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \otimes M & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ I/I \cap J^m \otimes_{A/J^m} M/J^m M & \hookrightarrow & M/J^m M \\ \downarrow & & \downarrow \\ (I \otimes M)/J^n(I \otimes M) & \longrightarrow & M/J^n M \end{array}$$

qui assure que t est nul dans $I/I \cap J^m \otimes_{A/J^m} M/J^m M$ et donc aussi dans $(I \otimes M)/J^n(I \otimes M)$. Comme $I \otimes M$ est de type fini sur B noethérien, $\cap_n J^n(I \otimes M)$ est nul d'après le corollaire 7.12.5 et $t = 0$. ■

Exercice 10.2.2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type de schémas noethériens et U l'ouvert des $x \in X$ tels que f plat en x . Montrer que U est ouvert. [Indication : montrer que U est stable par génératisation en appliquant 10.2.1 et 9.5.1]

10.3. Critère de platitude par fibres

On s'intéresse à un diagramme commutatif de morphismes de S -schémas noethériens

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array} \quad \text{plat}$$

avec Y plat sur S en $y = f(x)$ d'image $s \in S$. Soit \mathcal{F} cohérent sur X . Alors, on va montrer que \mathcal{F}_x est plat sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ si et seulement si \mathcal{F}_x est plat sur $\mathcal{O}_{S,s}$ et la restriction $\mathcal{F}|_{X_s,x}$ à la fibre en s est plate sur $\mathcal{O}_{Y_s,y}$. Ce critère s'applique en particulier pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ ce qui donne un critère de platitude de f en x ne dépendant que de la fibre X_s au dessus de Y_s . Notons que, a posteriori, Y est plat en $f(x)$ sur S , de sorte que ce critère concerne la platitude des morphismes de S -schémas plats. La traduction algébrique est la proposition suivante.

Proposition 10.3.1. — On considère un diagramme commutatif de morphismes d'anneaux locaux noethériens

$$\begin{array}{ccc} C & \longleftarrow & B \\ & \swarrow & \searrow \\ & A & \end{array} \quad \text{plat}$$

et on considère M un C -module de type fini. On note $k = A/\mathfrak{m}_A$ le corps résiduel de A et on suppose B plat sur A . Alors M est plat sur B si et seulement si M est plat sur A et $M \otimes k$ plat sur $B \otimes k$.

Preuve : La partie directe est triviale. Inversement, d'après le critère local de platitude appliqué à $(M, C, B, \mathfrak{m}_A B)$, on doit vérifier que $M/\mathfrak{m}_A M = M \otimes k$ plat sur $B/\mathfrak{m}_A B = B \otimes k$, ce qui est le cas, et que $\mathrm{Tor}_1^B(M, B/\mathfrak{m}_A B)$ est nul. Cette dernière hypothèse signifie que le morphisme $\mathfrak{m}_A B \otimes_B M \rightarrow M$ est injectif. Comme B est plat sur A , on a $\mathfrak{m}_A \otimes_A B \rightarrow \mathfrak{m}_A B$ isomorphisme, de sorte que la dernière flèche est

$$(\mathfrak{m}_A \otimes_A B) \otimes_B M \rightarrow M$$

qui par associativité du produit tensoriel est aussi

$$\mathfrak{m}_A \otimes_A M \rightarrow M$$

qui est injective par platitude de M sur A . ■

Corollaire 10.3.2. — *Considérons un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de S -schémas noethériens avec Y plat sur S . Alors, f est plat en x au dessus de $s \in S$ si et seulement si le morphisme induit sur les fibres en s l'est.*

Exercice 10.3.3. — *Soit X un schéma de type fini et plat sur un anneau valuation discrète R . Soit Y_η un sous schéma fermé de la fibre générique X_η (qui est ouvert dans X). Montrer que l'adhérence schématique (6.9.3) de Y_η dans X est plate sur R .*

CHAPITRE 11

PARENTHÈSE SUR LES ANNEAUX CATÉNAIRES

On va expliquer comment relier la formule de dimension 7.11.a et la notion d'anneau caténaire.

11.1. Schémas caténaires

Rappelons (7.11.a) que si x est un point d'une variété intègre X , on a

$$(11.1.a) \quad \text{codim}_X(x) + \dim(\bar{x}) = \dim(X).$$

Dans le cas d'une variété X , non nécessairement intègre, on a

$$(11.1.b) \quad \text{codim}_{\bar{x}}(y) = \dim(\bar{x}) - \dim(\bar{y}) \text{ pour tout } x \rightsquigarrow y$$

(utiliser la formule précédente pour $y \subset \bar{x}$ où \bar{x} est munie de sa structure réduite). On a donc la relation de Chasles suivante

$$(11.1.c) \quad \text{codim}_{\bar{x}}(z) = \text{codim}_{\bar{y}}(z) + \text{codim}_{\bar{x}}(y) \text{ pour tout } x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \text{ dans } X.$$

Exercice 11.1.1. — Soit X une variété intègre. Vérifier qu'on a

$$(11.1.d) \quad \text{codim}_X(x) + \text{codim}_{\bar{x}}(y) = \text{codim}_X(y) \text{ pour tout } x \rightsquigarrow y \text{ dans } X.$$

Montrer que cette formule est fautive si X n'est pas intègre (prendre par exemple la réunion d'une droite et d'un plan dans l'espace et considérer le point générique de la droite qui se spécialise sur le point d'intersection).

Définition 11.1.2. — Un schéma localement noethérien pour lequel (11.1.c) est vrai pour toute spécialisation y de x est dit caténaire. Un anneau noethérien A est dit caténaire si son spectre l'est; A est dit universellement caténaire si $A[x_1, \dots, x_n]$ est caténaire pour tout $n \geq 0$.

Ainsi, toute variété est caténaire, et donc toute algèbre de type fini sur un corps est universellement caténaire. Faisons le lien avec la définition usuelle.

Lemme 11.1.3. — Un schéma est caténaire si et seulement pour toute chaîne de spécialisations strictes maximale

$$x_1 \rightsquigarrow x_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x_n$$

de x_1 à x_n dans X , on a

$$n - 1 = \text{codim}_{\bar{x}_1}(x_n).$$

En particulier, toutes ces chaînes ont même longueur.

Preuve : dire que la chaîne est maximale signifie exactement $\text{codim}_{x_i}(x_{i+1}) = 1$. Si X est caténaire, en sommant ces égalités, on obtient l'égalité cherchée. Inversement, partons de spécialisation $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z$ dans X . On choisit une chaîne de spécialisations maximale (à a termes) entre x et y et

une chaîne de spécialisations maximale (à b termes) entre y et z . La chaîne composée a $a + b - 1$ termes (y est compté deux fois) et est maximale. On a alors

$$a + b - 2 = \text{codim}_{\bar{x}}(z) = a - 1 + b - 1 = \text{codim}_{\bar{y}}(z) + \text{codim}_{\bar{x}}(y).$$

■

Exercice 11.1.4. — Vérifier qu'un schéma intègre X est caténaire si et seulement si $\text{codim}_X(x) + \text{codim}_{\bar{x}}(y) = \text{codim}_X(y)$ pour tout $x \rightsquigarrow y$ dans X .

Remarque 11.1.5. — Contrairement aux apparences, cette propriété de « caténarité » est locale et ne dépend que de l'anneau local $A = \mathcal{O}_z$. En effet si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ définit $x \rightsquigarrow y$, elle s'écrit

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{q}) + \dim(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}.$$

En particulier, un schéma X est caténaire si et seulement si \mathcal{O}_x est caténaire pour tout x et donc tout localisé $A[S^{-1}]$ d'un anneau caténaire est caténaire.

Exercice 11.1.6. — Vérifier que tout sous-schéma fermé d'un schéma caténaire est caténaire. Vérifier que toute A -algèbre de type fini d'un anneau universellement caténaire est caténaire.

Notre approche de la théorie de la dimension des schémas arithmétiques repose sur le résultat suivant.

Théorème 11.1.7. — Soit X un $Y = \text{Spec}(A)$ -schéma intègre de type fini. On suppose $X \rightarrow Y$ dominant. Si A est intègre et universellement caténaire, on a

$$\text{codim}_X(x) - \text{codim}_Y(y) = \text{degtr}_{k(Y)} k(X) - \text{degtr}_{k(y)} k(x).$$

Preuve : la question est locale, de sorte qu'on suppose $X = \text{Spec}(B)$ avec $B = A[b_1, \dots, b_n]$ un A -algèbre de type fini. Comme X domine Y , la flèche $A \rightarrow B$ est injective. Si $n = 0$, on a $X = Y$, et le théorème est trivial. Supposons $n > 0$ et le théorème prouvé pour $C = A[b_1, \dots, b_{n-1}]$. Comme C est de type fini sur A , il est universellement caténaire. Utilisant la formule élémentaire

$$\text{degtr}_M K = \text{degtr}_M L + \text{degtr}_L K \text{ avec } M \subset L \subset K,$$

on se ramène donc à étudier la C -algèbre B , autrement dit on peut supposer $n = 1$. Quitte à changer A en \mathcal{O}_y , on peut supposer A local et y fermé. On a alors $B = A[T]/\mathfrak{p}$ ce qui géométriquement signifie qu'on a une immersion fermée au dessus de A

$$X \hookrightarrow \mathbf{A}_A^1.$$

Si $\mathfrak{p} = (0)$, comme

$$X = \mathbf{A}_A^1 \rightarrow \text{Spec}(A),$$

est plat, on a

$$\text{codim}_X(x) - \text{codim}_Y(y) = \text{codim}_{\mathbf{A}_{k(y)}^1}(x),$$

et donc vaut 0 ou 1 suivant que x est générique ou fermé dans $\mathbf{A}_{k(y)}^1$. Mais, $k(X) = \text{Frac}(k(Y)[T])$ est de degré de transcendance 1 sur $k(Y)$. Par ailleurs, $\text{degtr}_{k(y)} k(x)$ est nul si x est fermé (théorème des zéros), et vaut 1 sinon (car $k(x) = \text{Frac}(k(y)[t])$ dans ce cas. Le théorème est vrai dans ce cas. Sinon, T est algébrique sur $k(Y)$ et $\text{degtr}_{k(Y)} k(X) = 0$. Comme A est un sous-anneau de B , la flèche $A \rightarrow B = A[X]/\mathfrak{p}$ est injective et donc $\mathfrak{p} \cap A = (0)$. Autrement dit, l'image du point générique η_X de X est le point générique de η_Y de Y . On a donc

$$\text{codim}_{\mathbf{A}^1}(x) = \text{codim}_{\mathbf{A}^1}(\eta_X) + \text{codim}_X(x).$$

On applique alors à x, η_X le résultat précédent. ■

Remarque 11.1.8. — Notons que si X est un A -schéma intègre, on se ramène au cas dominant en considérant l'image schématique de X dans $Y = \text{Spec}(A)$.

Il ne nous reste qu'à montrer que \mathbf{Z} est universellement caténaire pour avoir notre formule de dimension analogue à 7.11.a pour les schémas arithmétiques (intègres) X . En particulier, on aura, comme dans le cas des variétés intègres que la codimension de tout point fermé est la dimension de X , et que la dimension de tout ouvert non vide est la même que celle de X .

Exercice 11.1.9. — Soit R l'anneau $\mathbf{C}[[t]]$ et $X \subset \mathbf{A}_R^2$ le fermé d'équation $xy = 1$. Montrer que X mais qu'il existe des points fermés de codimension 1 et 2. Montrer que la dimension de X n'est pas forcément celle d'un ouvert non vide.

CHAPITRE 12

MODULES DE COHEN-MACAULAY

Commençons par définir la profondeur.

12.1. Profondeur

Soit M un module **non nul** de type fini sur (A, \mathfrak{m}) local noethérien, de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$.

Définition 12.1.1. — — Une suite a_1, \dots, a_d d'éléments de \mathfrak{m} est M -régulière si a_i non diviseur de zéro dans $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M, i = 1, \dots, d$. On dit que d est la longueur de la suite.
– La profondeur $\text{prof}(M)$ de $M \neq 0$ est la borne supérieure des longueurs des suites M -régulières.

Notons que le lemme de Nakayama assure que $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ n'est jamais nul si M est non nul. Notons que si I annule M , la profondeur de M vu comme A ou A/I -modules est la même. Le lemme suivant est facile, si on se souvient que la réunion des associés est l'ensemble des diviseurs de zéro (6.4), mais est la clef de ce qui suit.

Proposition 12.1.2. — Soit M un module non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes.
– La profondeur de M est nulle.
– L'idéal \mathfrak{m} est associé.
– Le module $\text{Hom}(k, M)$ est non nul.

Preuve : Dire qu'on a $\text{prof}(M) = 0$ c'est dire que tout élément de \mathfrak{m} est diviseur de zéro, autrement dit que \mathfrak{m} est contenu dans la réunion finie $\cup \mathfrak{p}_i$ des associés de M . D'après le lemme d'évitement, on a alors $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}_i$ et donc, \mathfrak{m} étant maximal, on a $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$. Ceci donne la première équivalence. Maintenant, un homomorphisme $\phi : k = A/\mathfrak{m} \rightarrow M$ est défini par l'image m de 1. Comme k est un corps, dire que ϕ est non nul c'est dire qu'il est injectif, ou encore c'est dire $\mathfrak{m} = \text{Ann}_A(m)$, à savoir \mathfrak{m} associé : c'est la seconde équivalence. ■

Ainsi, on a l'équivalence

$$\text{prof}(M) > 0 \text{ si et seulement si } \text{Ext}^0(k, M) = 0.$$

L'énoncé se généralise alors en le lemme clef suivant.

Lemme 12.1.3. — Soit M non nul comme plus haut.
i) Alors on a l'équivalence

$$\text{prof}(M) \geq n \text{ si et seulement si } \text{Ext}^i(k, M) = 0 \text{ si } i < n.$$

ii) Plus généralement, si N est de type fini, alors on a

$$\text{Ext}^i(N, M) = 0 \text{ si } i < \text{prof}(M) - \dim(N).$$

Preuve : Pour i). Prouvons l'implication réciproque par récurrence sur n . Si $n = 0$, l'énoncé est vide. Si $n > 0$, on sait déjà que M est de profondeur non nulle (12.1.2) : choisissons $a_1 \in M$ non diviseur de zéro dans M . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a_1} M \rightarrow M/a_1M \rightarrow 0.$$

La suite exacte des Ext donne $\text{Ext}^i(k, M/a_1M) = 0$ si $i < n - 1$: on applique alors l'hypothèse de récurrence à M/a_1M (qui est non nul comme on l'a observé).

Prouvons l'implication directe par récurrence sur n . Si $n = 0$, l'énoncé est vide. Si $n > 0$, choisissons une suite régulière (a_1, \dots, a_n) . On a $\text{prof}(M/a_1M) \geq n - 1$, et donc $\text{Ext}^i(k, M/a_1M) = 0$ si $i < n - 1$ par hypothèse de récurrence. La suite des Ext donne encore que la flèche

$$\text{Ext}^i(k, M) \xrightarrow{a_1} \text{Ext}^i(k, M)$$

est injective si $i < n$. Mais c'est aussi la flèche de functorialité déduite de la multiplication par a_1 sur $k = A/\mathfrak{m}$, qui est donc nulle car $a_1 \in \mathfrak{m}$. Ainsi, on a la nullité de $\text{Ext}^i(k, M)$ si $i < n$ (Nakayama, $\text{Ext}^i(k, M)$ étant de type fini comme M et k).

Pour ii). Procédons par récurrence sur $\dim(N)$. Si la dimension est nulle, $\mathfrak{m}^l N = 0$ si $l \gg 0$. Filtrant par les $\mathfrak{m}^d N$, on se ramène alors à étudier $\text{Ext}^i(\mathfrak{m}^d N / \mathfrak{m}^{d+1} N, M)$. Mais $\mathfrak{m}^d N / \mathfrak{m}^{d+1} N$ est un espace vectoriel sur $k = A/\mathfrak{m}$ de dimension finie, donc est une somme (finie) de copies de k . On invoque alors i).

Supposons la dimension est > 0 . Choisissons une filtration (6.4.10) de N dont le gradué est une somme de A/\mathfrak{p} , $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(N)$. Comme on a $\dim(A/\mathfrak{p}) \leq \dim(N)$ si $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(N)$ (car $V(\mathfrak{p}) \subset V(\text{Ann}(N))$), on peut supposer (récurrence) qu'on a $N = A/\mathfrak{p}$. Comme la dimension de N est > 0 , on a $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Choisissons $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$. On a certainement $\dim A/(\mathfrak{p}, a) < \dim(A/\mathfrak{p})$ (7.5.3) de sorte que, par récurrence, on a

$$\text{Ext}^i(A/(\mathfrak{p}, a), M) = 0 \text{ si } i < \text{prof}(M) - \dim(N) + 1.$$

La suite des Ext assure que la multiplication par a dans $\text{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M)$ est un isomorphisme si $i < \text{prof}(M) - \dim(N)$, d'où la nullité de $\text{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M)$ par Nakayama. ■

Corollaire 12.1.4. — On a $\text{prof}(M) \leq \dim(A/\mathfrak{p})$ si $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$.

Preuve : En effet, dans ce cas $\text{Ext}^0(A/\mathfrak{p}, M) \neq 0$ ce qui assure $0 \geq \text{prof}(M) - \dim(A/\mathfrak{p})$ d'après 12.1.3. ■

En particulier, on a

$$\text{prof}(M) \leq \dim(M).$$

12.2. Modules de Cohen-Macaulay

Définition 12.2.1. — Un A -module de type fini M est dit de Cohen-Macaulay s'il est nul ou si $\text{prof}(M) = \dim(M)$. Si $M = A$, on dit simplement A de Cohen-Macaulay.

Exemple 12.2.2. — Un module de dimension nulle, un anneau réduit de dimension 1 est de Cohen-Macaulay.

Un module de Cohen-Macaulay n'a pas de point immergé et les dimensions aux points génériques sont constantes ; précisément, on a :

Corollaire 12.2.3. — Un module de Cohen-Macaulay M est équidimensionnel, ie ses points associés \mathfrak{p} sont les points minimaux de son support et on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(M)$.

Preuve : En effet, si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ sont associés, on a alors $\dim(M) = \dim(A/\mathfrak{p})$ et $\dim(M) = \dim(A/\mathfrak{q})$ de sorte que $A/\mathfrak{q} = (A/\mathfrak{p})/(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ et A/\mathfrak{p} ont même dimension d'où $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ (7.5.3). ■

Par exemple, l'union schématique d'une droite et d'un plan de l'espace affine sur k qui se coupent n'est pas Cohen-Macaulay, quelle que soit la structure schématique qu'on mette dessus.

Rappelons que le support $\text{Supp}(M)$ d'un module est l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tels que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Si M est de type fini, c'est le fermé $V(\text{Ann}(M))$. On déduit du lemme de Nakayama par exemple que

$$\text{Supp}(M) \cap V(I) = \text{Supp}(M/IM)$$

pour tout idéal I .

Lemme 12.2.4. — *Soit M de type fini sur A local noethérien et $a \in \mathfrak{m}$.*

- i) Si M est Cohen-Macaulay, on a l'égalité $\dim(M/aM) = \dim(M) - 1$ si et seulement si a non diviseur de zéro dans M . Dans ce cas, on a M/aM Cohen-Macaulay, qui en particulier est équidimensionnel.*
- ii) Inversement, si M/aM est Cohen-Macaulay et a non diviseur dans M , alors M est Cohen-Macaulay.*

Preuve : Prouvons *i)*. La partie réciproque ne nécessite pas M de Cohen-Macaulay : d'après le lemme de Krull (9.1.2), on sait que la dimension de M/aM est $\geq \dim(M) - 1$. Si elle était égale, a serait dans un point générique du support de M et donc diviserait zéro dans M . Inversement, supposons donc M Cohen-Macaulay et $\dim(M/aM) = \dim(M) - 1$.

Supposons qu'on ait $a \in \mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$. Alors, $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M) \cap V(a) = \text{Supp}(M/aM)$. Comme M de Cohen-Macaulay, on a

$$\dim A/\mathfrak{p} = \dim(M) = n.$$

Comme $V(\mathfrak{p})$ est contenu dans $\text{Supp}(M) \cap V(a) = \text{Supp}(M/aM)$, on en déduit $\dim(M/aM) \geq n$, une contradiction.

Donc, a n'est pas diviseur de 0 dans M/aM .

Montrons que M/aM est de Cohen-Macaulay. La suite des $\text{Ext}(k, \cdot)$ associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} M \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

donne $\text{prof}(M/aM) \geq \text{prof}(M) - 1 = \dim(M) - 1$. Comme a non diviseur de zéro, on a de plus

$$\text{prof}(M/aM) \leq \dim(M/aM) = \dim(M) - 1,$$

ce qu'on voulait.

Prouvons *ii)*. On sait qu'on a $\dim(M/aM) = \dim(M) - 1 = n - 1$. Mais, on a une M/aM suite (a_2, \dots, a_n) par hypothèse et (a, a_2, \dots, a_n) est une suite M -régulière de cardinal $\dim(M)$. ■

Corollaire 12.2.5. — *Soit M un module de Cohen-Macaulay sur A local noethérien. Alors la suite a_1, \dots, a_n d'éléments de \mathfrak{m} est une suite M -régulière si et seulement si $\dim(M/(a_1, \dots, a_n)M) = \dim(M) - n$. Dans ce cas, $M/(a_1, \dots, a_n)M$ est Cohen-Macaulay.*

En particulier, si M est de Cohen-Macaulay, la notion de suite M -régulière de longueur maximale et de système de paramètres coïncide.

12.3. Schémas de Cohen-Macaulay, intersections complètes

Proposition 12.3.1. — *Si M est de Cohen-Macaulay, le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ est Cohen-Macaulay.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur $\dim(M)$.

Si la dimension de M est nulle, celle de $M_{\mathfrak{p}}$ également et il n'y a rien à démontrer.

Supposons $d = \dim(M) > 0$ et la proposition prouvée en dimension $< d$.

Si la profondeur de $M_{\mathfrak{p}}$ est nulle, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est associé et donc (6.4.4) \mathfrak{p} est associé. Comme M de Cohen-Macaulay, \mathfrak{p} est générique dans le support de M et donc $M_{\mathfrak{p}}$ est de dimension nulle.

Supposons que la profondeur de $M_{\mathfrak{p}}$ est > 0 . Si \mathfrak{p} était contenu dans l'ensemble des diviseurs de zéro, il serait contenu dans un associé de M . Comme M est de Cohen-Macaulay, ses associés sont minimaux de sorte que \mathfrak{p} serait associé pour M . Donc $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ dans ce cas, ce qui n'est pas car $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) > 0$. Soit donc $a \in \mathfrak{p}$ non diviseur de zéro dans M . D'après 12.2.4, M/aM est Cohen-Macaulay de dimension $\dim(M) - 1$. Par récurrence, $(M/aM)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}/aM_{\mathfrak{p}}$ est donc Cohen-Macaulay. Notons que a ne divise pas zéro dans $M_{\mathfrak{p}}$ car sinon a serait dans un associé de $M_{\mathfrak{p}}$, à savoir les associés de M contenus dans \mathfrak{p} et donc diviserait zéro dans M . D'après 12.2.4 encore, on déduit que $M_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay. ■

Ceci motive la définition suivante.

Définition 12.3.2. — *Un faisceau cohérent sur un schéma X est dit de Cohen-Macaulay en $x \in X$ si \mathcal{F}_x est de Cohen-Macaulay sur \mathcal{O}_x . On dit qu'un sous-schéma passant par $x \in X$ d'équations $f_i \in H^0(X, \mathcal{O})$, $i = 1, \dots, n$ est une **intersection complète** en x si f_i , $i = 1, \dots, n$ est une suite régulière dans \mathcal{O}_x .*

D'après 12.2.5, si f_i sont n fonctions sur X de Cohen-Macaulay en x , alors $Y = V(f_i)$ est une intersection complète en $x \in V(f_i)$ si et seulement si $\text{codim}_Y(x) = \text{codim}_X(x) - n$. Dans ce cas Y est Cohen-Macaulay en x : les intersections complètes dans les Cohen-Macaulay sont Cohen-Macaulay.

Exercice 12.3.3. — *Montrer qu'une k -variété X est de Cohen-Macaulay si et seulement si $X \otimes_{\bar{k}} \bar{k}$ est Cohen-Macaulay en tous ses points fermés [Observer par exemple que $\text{Ext}_{\bar{k}}^i(A/\mathfrak{m}, M) \otimes \bar{k} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{A \otimes \bar{k}}^i(A/\mathfrak{m} \otimes \bar{k}, M \otimes \bar{k})$ si M de type fini sur $A = \mathcal{O}_x$, $x \in X$]. Montrer qu'un schéma arithmétique plat sur \mathbf{Z} est de Cohen-Macaulay si et seulement si ses fibres le sont.*

Exercice 12.3.4. — *Montrer qu'un anneau dont les localisés aux points génériques sont réduits (donc des corps) -on dit génériquement réduit- et de Cohen-Macaulay est réduit. Montrer que le schéma $\text{Nil}_{n,k} = \text{Nil}_{n,\mathbf{Z}} \otimes k$ est réduit pour tout corps k . Qu'en est-il de $\text{Nil}_{n,\mathbf{Z}}$?*

12.4. Les anneaux de Cohen-Macaulay sont universellement caténaire ; application aux schémas arithmétiques

Proposition 12.4.1. — *Un anneau de Cohen-Macaulay est caténaire.*

Preuve : Comme $A_{\mathfrak{q}}$ est de Cohen-Macaulay, on peut supposer $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_A$. On doit donc prouver la formule

$$\dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A)$$

pour $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ avec A local de Cohen-Macaulay.

On fait une récurrence sur la dimension d de $A_{\mathfrak{p}}$. Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est Cohen-Macaulay, c'est aussi sa profondeur. Si d est nul, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est associé, et donc \mathfrak{p} aussi. Comme A est équidimensionnel, \mathfrak{p} est générique et on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A)$, d'où la formule dans ce cas.

Si $d > 0$, l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ n'est pas associé donc $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}(A)$. Comme dans la preuve de 12.3.1, on peut donc choisir $a \in \mathfrak{p}$ et a non diviseur de zéro dans A et $A_{\mathfrak{p}}$, et donc dans A (sinon, \mathfrak{p} serait contenu dans un associé, donc associé car les associés sont minimaux dans un Cohen-Macaulay). On sait alors que $\bar{A} = A/aA$ est de Cohen-Macaulay, de dimension $\dim(A) - 1$. Le localisé $(A/aA)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/aA_{\mathfrak{p}}$ est de dimension $\dim(A_{\mathfrak{p}}) - 1$ et s'identifie à $\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ avec $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \pmod{a}$. De même, A/\mathfrak{p} s'identifie à $\bar{A}/\bar{\mathfrak{p}}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à \bar{A} permet alors de conclure. ■

Théorème 12.4.2. — *Tout algèbre de polynôme sur un anneau de Cohen-Macaulay est de Cohen-Macaulay. En particulier, un anneau de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

Preuve : Soit A de Cohen-Macaulay de dimension d et $x \in X = \mathbf{A}_A^1$ d'image $y \in \text{Spec}(A)$. Comme \mathcal{O}_x est un localisé de $\mathcal{O}_y[T]$ et que \mathcal{O}_y est Cohen-Macaulay, on peut supposer y fermé dans Y et A local de Cohen-Macaulay, d'idéal maximal \mathfrak{m} . Comme $X \rightarrow Y$ est plat, on a

$$\dim(\mathcal{O}_x) = \text{codim}_{\mathbf{A}_{k(y)}^1}(x) + \dim(\mathcal{O}_y) = \text{prof}_x(\mathbf{A}_{k(y)}^1) + \text{prof}_y(Y)$$

car $\mathbf{A}_{k(y)}^1$ est visiblement de Cohen-Macaulay. Si $f_1, \dots, f_d \in A$, $d =$ sont une Y suite en y , elle le reste dans X (platitude).

Si x est le point générique de $\mathbf{A}_{k(y)}^1 = \text{Spec}(A/\mathfrak{m}[T])$, on a alors, on a $\dim(\mathcal{O}_x) = d$, et X est bien Cohen-Macaulay en x .

Sinon, $x \in \text{Spec}(A/\mathfrak{m}[T])$ est défini par la classe d'un polynôme unitaire $f(X) \in A[X]$, qui est donc certainement non diviseur de zéro dans $A/(f_1, \dots, f_d)[T]$, ce qui donne l'égalité cherchée dans ce cas. ■

Comme \mathbf{Z} est de Cohen-Macaulay (comme tout anneau principal d'ailleurs), on en déduit alors comme pour les variétés ce qu'on cherchait :

Théorème 12.4.3. — *Soit x un point d'un schéma arithmétique intègre X et $y \in \text{Spec}(\mathbf{Z})$ son image.*

- i) Alors, $\text{codim}_X(x) - \text{codim}_Y(y) = \dim(X_K) - \text{degtr}_{k(y)} k(x)$ où $K = \text{Frac}(A)$.*
- ii) Tous les points fermés ont pour codimension $\dim(X_K) = \dim(X) - 1$.*
- iii) Toutes les composantes des fibres $X_y, y \in Y$ ont pour dimension $\dim(X) - 1 = \dim(X_K)$.*
- iv) Si $f \in H^0(X, \mathcal{O})$, alors toutes les composantes de $V(f)$ ont une dimension $\geq \dim(X) - 1$.*
- v) Si de plus A est infini, tout ouvert non vide de X a pour dimension $\dim(X)$ et tous les points fermés a pour codimension $\dim(X)$.*

Preuve : rappelons rapidement comment prouver ceci. Notons que la fibre générique X_K est (localement) un localisé de X , de sorte qu'elle est intègre. On a en particulier $k(X) = k(X_K)$.

-Le point *i*) est simplement un cas particulier de 11.1.7.

-Pour *ii*), rappelons tout d'abord que le théorème de constructibilité de Chevalley entraîne qu'un point x de X est fermé si et seulement si $k(x)$ est un corps fini. On déduit que les points fermés d'un schéma arithmétiques sont denses. En considérant l'adhérence d'un point x , on déduit que x se spécialise sur un point fermé et donc

$$\dim(X) = \sup_{x \text{ fermé}} \text{codim}_X(x).$$

Soit alors x fermé, qui donc se projette sur $y = p\mathbf{Z}$ fermé dans Y . D'après *i*), on a alors $\text{codim}_X(x) - 1 = \dim(X_K)$, et donc certainement $\dim(X) = \dim(X_K) - 1$ ce qu'on voulait.

-Pour *iii*), soient F_1, \dots, F_n les composantes d'une fibre X_y en y fermé, et U_y l'ouvert non vide $F_1 - f_2 \cup \dots \cup F_n$. Soit x fermé dans U_y , donc dans X_y (théorème des zéros), donc dans X . On a alors d'après *i*) l'inégalité $\text{codim}_X(x) - 1 = \dim(X_K)$ et (platitude), $\text{codim}_X(x) = \text{codim}_{X_y}(x) + 1$. Comme X_y et F_1 coïncident près de x par construction et que F_1 est une variété intègre, on a alors, $\dim(F_1) = \text{codim}_{X_y}(x) = \dim(X_K)$, ce qu'on voulait. En ce qui concerne la fibre générique X_K , étant localement un localisé de X , elle est intègre et sa dimension est bien $\dim(X) - 1$.

-*iv*) est une conséquence de *i*) et de la densité des points fermés.

- pour *v*), on procède exactement comme dans 9.1.4. ■

CHAPITRE 13

APPENDICE : COMPLEXE DE KOSZUL

On va voir, facilement maintenant, que les idéaux définissant des intersections complètes dans les schémas de Cohen-Macaulay ou des résolutions libres très simples, ce qui a des conséquences géométriques très fortes.

13.1. Rappels d'algèbre linéaire

Soit E un A -module projectif de rang n . L'application déterminant δ

$$\delta : \begin{cases} E^k \times (E^*)^k & \rightarrow A \\ ((\underline{e}), (\underline{\phi})) & \mapsto \det(\phi_i(e_j)) \end{cases}$$

est alternée en chacune des variables et se factorise donc en une application bilinéaire

$$\bigwedge^k E \times \bigwedge^k E^* \rightarrow A$$

qui est *non dégénérée* comme on le vérifie sur des bases locales. Si $e \in \bigwedge^k E$ et $\phi \in E^*$, on définit alors le produit intérieur droit $e \lrcorner \phi \in \bigwedge^{k-1} E$ par la condition

$$\langle e \lrcorner \phi, \psi \rangle = \delta(e, \phi \wedge \psi) \text{ pour tout } \psi \in \bigwedge^{k-1} E^*.$$

En testant sur des bases, on obtient que le produit est une anti-dérivation, *ie*

$$(13.1.a) \quad (e_a \wedge e_b) \lrcorner \phi = (e_a \lrcorner \phi) + (-1)^a (e_a) \wedge (e_b \lrcorner \phi)$$

pour tout $e_a \in \bigwedge^a E$ et $e_b \in \bigwedge^b E$.

On en tire la formule

$$(13.1.b) \quad e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \lrcorner \phi = \sum_{i=1}^k (-1)^{(i-1)} \phi(e_i) e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_k$$

où le symbole \widehat{e}_i signifie qu'on a omis e_i .

Supposons que E est une somme directe $E_1 \oplus E_2$. Alors, l'application produit extérieur

$$\bigwedge^i E_1 \otimes \bigwedge^{k-i} E_2 \rightarrow \bigwedge^k E$$

définit un isomorphisme

$$(13.1.c) \quad \bigoplus_{i=0}^k (\bigwedge^i E_1 \otimes \bigwedge^{k-i} E_2) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k E$$

qui nous permet d'identifier ces espaces. Supposons alors que ϕ s'écrive $\phi_1 + \phi_2$ avec $\phi_i \in E_i^*$ (qu'on comprend comme ϕ_i est nulle sur E_{3-i}).

La formules 13.1.a donne immédiatement

$$(13.1.d) \quad (\omega_1 \wedge \omega_2) \lrcorner \phi = (\omega_1 \lrcorner \phi_1) \wedge \omega_2 + (-1)^i \omega_1 \wedge (\omega_2 \lrcorner \phi_2) \text{ pour tout } \omega_1 \in \bigwedge^i E_1 \text{ et } \omega_2 \in \bigwedge^{k-i} E_2.$$

Exercice 13.1.1. — Montrer que si on a une suite exacte de modules projectifs

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$$

de rangs r_1, r, r_2 , on a un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^{r_1} E_1 \otimes \bigwedge^{r_2} E_2 \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r E$$

(la puissance extérieure maximale d'un module libre E se note $\det(E)$ -le déterminant de E -). On a donc montré que cette opération est multiplicative pour les suites exactes de modules libres. En particulier, si E est libre de rang r , on a $\bigwedge^r E \xrightarrow{\sim} A$. Si E est projectif de rang r , vérifier que l'application

$$\bigwedge^k E \otimes \bigwedge^{r-k} E \rightarrow \bigwedge^r E.$$

est une dualité.

13.2. Définition du complexe de Koszul

On a toujours $\phi \in E^* = \text{Hom}(E, A)$ une forme linéaire sur E projectif de rang n . Bien entendu, on a $(e \lrcorner \phi) \lrcorner \phi = 0$ simplement car $\phi \wedge \phi$ est nul dans $\bigwedge^2 E^*$. Dans le cas général, on peut globaliser la construction dans le cas où ϕ est une section du dual $\mathcal{E}^* = \text{Hom}(E, \mathcal{O})$ d'un fibré vectoriel (ie un faisceau localement libre de rang n rappelons le) \mathcal{E} sur un schéma X .

Définition 13.2.1. — Le complexe de chaînes $K_\circ(\phi)$

$$\dots 0 \rightarrow \bigwedge^n \mathcal{E} \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^k \mathcal{E} \xrightarrow{\lrcorner \phi} \dots \rightarrow \bigwedge \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \dots,$$

où $\bigwedge^k \mathcal{E}$ est en degré k est appelé complexe dit de Koszul de ϕ .

La différentielle -définie donc par le produit intérieur par ϕ , est de degré -1 et sera notée (d_i) , voire d pour simplifier. L'image de $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X$ est le faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\mathcal{I}_\phi = \text{Im}(\phi)$ de A et l'homologie $H_0(K_\circ(\phi))$ est $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_\phi$ définissant un sous-schéma fermé Z_ϕ de X . Dans le cas affine $X = \text{Spec}(A)$, $\mathcal{E} = \tilde{E}$, on identifie faisceau quasi-cohérents et modules sans plus de précision, les lettres caligraphiques \mathcal{E}, \mathcal{I} se transformant en lettres scriptes E, I, \dots n notera $I_\phi = H^0(X, \mathcal{I}_\phi)$.

Exemple 13.2.2. — Regardons le cas $\mathcal{E} = (\mathcal{O}_X^2)$ de sorte que $\phi = (f, g)$ où f, g sont deux fonctions sur X . On a $\bigwedge^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ et le complexe de Koszul est

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ g \end{pmatrix}} \mathcal{O}_X^2 \xrightarrow{(f, g)} \mathcal{O}_X$$

et dire qu'il est exact signifie qu'on sait résoudre localement l'équation $af + bg = 0$ en $a = -ug, b = uf$.

Définition 13.2.3. — Si \mathcal{F} est quasi-cohérent, on note $K_\circ(\phi, \mathcal{F})$ (resp. $H_\circ(\phi, \mathcal{F})$) le complexe de chaînes $K_\circ(\phi) \otimes \mathcal{F}$ (resp. son module d'homologie).

Par exemple, l'homologie en degré zéro $H_0(\phi, \mathcal{F})$ est simplement la restriction $\mathcal{F}|_{Z_\phi}$.

Si on cherche par exemple à contrôler les sections d'un faisceau \mathcal{F} sur Z_ϕ en fonction des groupes de cohomologie de $\mathcal{F} \otimes \bigwedge^i E$, on est amené à étudier l'acycliticité de $K_o(\mathcal{E}, \phi) \otimes \mathcal{F}$ dans le but de fournir une résolution, dans les bons cas, de

$$H_0(\phi, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_Z.$$

Le cas favorable sera celui où l'on contrôle $\mathcal{F} \otimes \bigwedge^i E$ comme il apparaîtra.

Lemme 13.2.4. — *La multiplication par $a \in I_\phi = \text{Im}(E)$ dans $K_o(\phi)$ est homotope à 0.*

Preuve : Choisissons alors $e \in E$ tel que $\phi(e) = a$. Notons alors ϵ l'application de produit extérieur à gauche par e . La formule 13.1.a assure l'égalité

$$d \circ \epsilon + \epsilon \circ d = \phi(e)\text{Id} = a\text{Id}.$$

■

Corollaire 13.2.5. — *Si $I_\phi = A$, alors $K_o(\phi)$ est homotope à zéro.*

Exemple 13.2.6. — *Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_k}(-1))^{n+1}$ où k est un anneau et $\phi = (x_0, \dots, x_n)$ la forme donnée par les coordonnées homogènes. La différentielle d est donnée par*

$$d(fe_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_l}) = \sum_{j=1}^l (-1)^{(j-1)} f x_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_l}$$

où f est une section locale de $\mathcal{O}(-l)$. Le produit extérieur $\bigwedge^l \mathcal{O}(-1)^{n+1}$ est canoniquement isomorphe à $\binom{n+1}{l}$ copies de $\mathcal{O}(-l)$. Comme $\mathcal{I}_\phi = \mathcal{O}_X$, le complexe de Koszul de ϕ définit une suite exacte

$$(13.2.a) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(-n-1) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{O}(-l))^{\binom{n+1}{l}} \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

Proposition 13.2.7. — *Les modules d'homologie et de cohomologie de Koszul de \mathcal{F} sont à support dans Z_ϕ . En particulier, si Z_ϕ est vide, les complexes $K_o(\phi, \mathcal{F})$.*

Preuve : En effet, si a est une section locale, la multiplication par a dans $K_o(\phi, \mathcal{F})$ est encore homotope à zéro, donc induit l'application nulle en homologie. ■

13.3. Acycliticité de $K_o(\phi, \mathcal{F})$

La question est locale sur X de sorte qu'on peut supposer $X = \text{Spec}(A)$ et \mathcal{E} muni d'une base (e_1, \dots, e_n) . La forme ϕ est déterminée par $\underline{a} = (a_i, i = 1, \dots, n) = (\phi(e_i))$ et on pose $M = H^0(X, \mathcal{F})$. Dans ce cas, le complexe de Koszul sur A est noté classiquement

$$K_o(\underline{a}, M) = K_o(\underline{a}, A) \otimes M.$$

On va « affaiblir » un peu la notion de suite régulière.

Définition 13.3.1. — *On dit que \underline{a} est presque M -régulière si a_i non diviseur de zéro dans $M_i = M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Donc, dans le cas local, une suite est M régulière si et seulement si M non nul et $a_i \in \mathfrak{m}_A$ pour tout i .

Proposition 13.3.2. — *Si \underline{a} est presque M -régulière ou bien \underline{a} engendre A , alors le complexe de Koszul $K_o(\underline{a}, M)$ est acyclique en degré > 0 .*

Si M est de type fini sur A local noethérien et \underline{a} est M -régulière, la réciproque est vraie.

Preuve : L'acyclicité étant une question locale, on peut supposer A local. D'après 13.2.5, on peut supposer que \underline{a} n'engendre pas A , autrement dit que \underline{a} est contenue dans \mathfrak{m}_A .

On doit donc montrer que dans ce cas, si \underline{a} est régulière, le complexe de Koszul est acyclique avec réciproque si M de type fini et A noethérien.

Le cas $n = 1$ est facile. En effet, dans ce cas $K(a_1, M)$ est concentré en degré 1 et 0 et vaut

$$M \xrightarrow{a_1} M$$

qui est acyclique (en degré 1) si et seulement si a_1 non diviseur de zéro dans M .

Pour étudier le cas $n > 1$, on procède par récurrence.

Posons $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{n-1})$ et $E' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} Ae_i$.

On a

$$K_i(\underline{a}) = K_i(\underline{a}') \oplus K_{i-1}(\underline{a}') \otimes Ae_n \xrightarrow{\sim} K_i(\underline{a}') \oplus K_{i-1}(\underline{a}') \text{ et } d_i = \begin{pmatrix} d_i & (-1)^{(i-1)}a_n \\ 0 & d_{i-1} \end{pmatrix}$$

d'après l'identification (13.1.c) et la formule (13.1.d)

On a donc une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow K_o(\underline{a}') \rightarrow K_o(a) \rightarrow K_{o-1}(\underline{a}') \rightarrow 0.$$

La suite exacte d'homologie s'écrit alors

$$(13.3.a) \quad H_i(\underline{a}') \rightarrow H_i(\underline{a}) \rightarrow H_{i-1}(\underline{a}') \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(\underline{a}') \rightarrow H_{i-1}(\underline{a})$$

et on vérifie sans peine que le cobord ∂_i est la multiplication par $(-1)^{i-1}a_n$.

Supposons \underline{a} régulière. Si a_i est non diviseur de zéro dans M_i pour tout i , l'hypothèse de récurrence assure que $H_i(\underline{a}')$ est nul pour $i > 0$. La suite exacte 13.3.a donne alors

$$H_i(\underline{a}) = 0 \text{ si } i > 1.$$

Regardons le H_1 . En se rappelant que $H_0(\underline{a}') = M_n = M/(a_1, \dots, a_{n-1})M$, la suite exacte 13.3.a pour $i = -1$ donne

$$(*) \quad 0 = H_1(\underline{a}') \rightarrow H_1(\underline{a}) \rightarrow M_n \xrightarrow{\pm a_n} M_n,$$

d'où la nullité de $H_1(\underline{a})$ car la multiplication par a_n est injective dans M_n .

Inversement, supposons que $H_i(\underline{a})$ est nul si $i > 0$.

La multiplication par a_n dans $H_i(\underline{a}')$ est donc un isomorphisme pour tout $i > 0$. Si M de type fini sur A noethérien, le complexe de Koszul est un complexe de modules de type fini de sorte que l'homologie de Koszul $H_i(\underline{a}')$ est de type fini. Comme $a_n \in \mathfrak{m}_A$, le lemme de Nakayama assure que $H_i(\underline{a}')$ est nul pour $i > 0$. Par hypothèse de récurrence, ceci assure que a_i non diviseur de zéro dans M_i pour $i \leq n$. Si $i = 0$, la suite (*) donne l'injectivité de la multiplication de a_n sur M_n . ■

D'après 12.2.5, on a alors le critère fondamental

Corollaire 13.3.3. — *Si f_i sont n fonctions sur un schéma de Cohen-Macaulay définissant un sous-schéma fermé F . Alors, F est une intersection complète en $x \in X$ si et seulement si le complexe de Koszul localisé $K_o(f_i)_x$ est une résolution (libre) de $\mathcal{I}_{X,x}$, ie si et seulement si $x \notin F$ ou $\dim_x F = \dim_x F - n$.*

Corollaire 13.3.4. — *Si $\underline{a} \subset \mathfrak{m}_A$ est une suite M -régulière d'éléments de \mathfrak{m} , il en va de même de toute permutation de \underline{a} .*

Exemple 13.3.5. — *Soit A un anneau et $S = A[X_0, \dots, X_n]$. La suite (X_0, \dots, X_n) est presque A -régulière. Le complexe de Koszul $K_o(X_0, \dots, X_n)$ est donc acyclique en degré > 0 et $H_0(K_o(X_0, \dots, X_n)) = S/(X_0, \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} A$. Notons V un A -module libre de rang $n + 1$ de base e_i . On a*

$$\bigwedge^l V \otimes_A S \xrightarrow{\sim} \bigwedge^l (V \otimes_A S)$$

de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \bigwedge^{n+1} V \otimes_A S \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^l V \otimes_A S \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow V \otimes_A S \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow 0$$

avec

$$d(\mathbf{P}e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}) = \sum_{j=1}^l (-1)^{(j-1)} \mathbf{P}X_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}.$$

La différentielle d augmente le degré des polynômes de 1, de sorte que, si on tient compte des degrés, cette suite exacte devient

$$(13.3.b) \quad 0 \rightarrow \bigwedge^{n+1} V \otimes_A S[-n-1] \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^l V \otimes_A S[-l] \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow V \otimes_A S[-1] \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow 0$$

On reconnaît le complexe des sections globales de la suite exacte (13.2.a) convenablement tordue donnée aussi par Koszul.

En fait, comme on le verra en TD, il est très facile de tirer de ces résultats l'annulation de $\text{Pic}(\mathbf{A}_k^n)$ ou le fait que $\text{Pic}(\mathbf{P}_k^n) = \mathbf{Z}\mathcal{O}(1)$ par exemple. On peut d'ailleurs même généraliser avec k local noethérien par exemple. On reviendra sur ces questions.

Remarque 13.3.6. — Le lecteur féru d'algèbre homologique aura remarqué qu'on a prouvé que $K(a)$ s'identifie au cône de $K(a') \xrightarrow{a_n} K(a')$, d'où la suite exacte précédente, qui dans ce cas est au aussi le complexe $K(a') \otimes K(a_n)$.

13.4. Intersections complètes dans \mathbf{P}_k^n

Comme le projectif \mathbf{P}_k^n est recouvert par des espaces affines sur k qui sont de Cohen-Macaulay, il en est de même de \mathbf{P}_k^n . Soient alors n polynômes homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$ de degré d_i définissant donc des hypersurfaces H_i . On peut voir les P_i comme définissant un morphisme

$$\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}(-d_i) \xrightarrow{(P_i)} \mathcal{O}.$$

On suppose que l'intersection schématique

$$X = H_1 \cap \cdots \cap H_n$$

est finie, autrement dit (2.5.1) que X est fini sur k .

Comme \mathbf{P}_k^n est localement isomorphe à \mathbf{A}_k^n , le critère 13.3.3 assure que complexe de Koszul sur les P_i est exact. On a donc une résolution de \mathcal{O}_X , autrement dit une suite exacte

$$(13.4.a) \quad 0 \rightarrow \bigwedge^{n+1} \mathcal{E} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^l \mathcal{E} \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

On peut en déduire facilement une démonstration du théorème de Bézout qu'on peut écrire (sous les hypothèses précédentes)

$$(13.4.b) \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}) = d_1 \cdots d_n$$

en prenant les sections globales de cette suite exacte tensorisée par l , qui restera exacte pourvu si $l \gg 0$ grâce à 5.14.4. Mais la preuve est beaucoup plus agréable avec un peu de cohomologie comme on va le voir. En particulier, si X est lisse sur k , on a

$$\text{card}X(\bar{k}) = d_1 \cdots d_n$$

ce qui est l'énoncé usuel du théorème de Bézout.

Exercice 13.4.1. — Soit $x \in k^{n+1} \setminus 0$ un k -point de X . Montrer que $X = H_1 \cap \cdots \cap H_n$ est réduit en x si et seulement si $\mathbf{T}_x^*X = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = 0$ (utiliser Nakayama et 2.5.1 par exemple). Montrer que le tangent $T_xX \subset T_x\mathbf{P}_k^n = k^{n+1}/kx$ s'identifie à l'intersection des noyaux des formes linéaires $dP_i(x)$ vues comme formes sur $k^{n+1}/k.(x_0, \dots, x_n)$ (cf. TD), ce qui est possible car $dP_i(x).x = 0$ et qu'ainsi x est un point lisse si et seulement si cette intersection est nulle (on dit que l'intersection est transverse).

CHAPITRE 14

LISSITÉ

La lissité est la notion qui généralise la régularité et a l'avantage d'être invariante par changement de base. C'est l'analogue des des submersions en calcul différentiel.

14.1. Notion d'anneau régulier

Soit (A, \mathfrak{m}, k) local noethérien. Les morphismes surjectifs

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \rightarrow A/\mathfrak{m}$$

définissent des immersions fermées de k -variétés

$$\{x\} \hookrightarrow C_x \hookrightarrow T_x.$$

Par définition,

$$C_x = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})$$

est le cône tangent et

$$T_x = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$$

est l'espace tangent de $X = \mathrm{Spec}(A)$ en $x = \mathfrak{m}$. Bien entendu, T_x est un espace affine \mathbf{A}_k^n d'origine x avec $n = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Comme \mathfrak{m} est maximal, on a $k(x) = A/\mathfrak{m}$ et la localisation $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \rightarrow (\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})_{\mathfrak{m}}$ est un isomorphisme. On déduit que la fonction de Hilbert de C_x à l'origine est

$$n \mapsto \sum_{i=0}^m \dim_k(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = l(A/\mathfrak{m}^{m+1}),$$

autrement dit est celle de A . En particulier, on a $\mathrm{codim}_{C_x}(x) = \dim(A)$. On a donc

$$\dim(A) \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

(ce qui se voit directement par Nakayama), mais surtout égalité si et seulement si $C_x = T_x$ (car alors $\dim(C) \geq \mathrm{codim}_{C_x}(x)$ *geqd* et T_x intègre).

Définition 14.1.1. — Un anneau local noethérien (A, \mathfrak{m}, k) est dit régulier si $\dim(A) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Un schéma X est régulier en x si \mathcal{O}_x est régulier.

Théorème 14.1.2. — Un anneau régulier est intègre. Toute famille $x_1, \dots, x_n, n = \dim(A)$ de \mathfrak{m} tels que $dx_i = (x_i \bmod \mathfrak{m}^2)$ est libre est une suite de paramètres. En particulier, A est de Cohen-Macaulay.

Preuve : Soient $f, g \in \mathfrak{m}$ tel que $fg = 0$, définissant f', g' fonction sur C_x . Si $f, g \neq 0$, choisissons n, m tels que $f \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^{n+1}$ et $g \in \mathfrak{m}^m - \mathfrak{m}^{m+1}$ de sorte que $f', g' \neq 0$. Bien entendu, $f'g' = 0$, ce qui est absurde car $C_x = T_x$ qui est intègre. On constate que x_1 , étant non nul, est non diviseur de zéro dans A et que $B = A/x_1$ est encore régulier de dimension $n - 1$. Les $dx_i, i = 2, \dots, n$ sont libres dans $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$, et on fait une récurrence. ■

Exercice 14.1.3. — Soit $X \subset \mathbf{A}_k^n$ défini par un idéal $I = (P_1, \dots, P_m)$ et x l'origine. On suppose $x \in X$ (n'importe quel point de $X(k)$ ferait l'affaire). On note dx_i l'image dans $T_x \mathbf{A}_k^n$ des coordonnées et $dP(x) = \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x) dx_i$. Vérifier qu'on a

$$T_x = V(dP_i(x), i = 1, \dots, m) \text{ et } C_x = V(\text{in}_x(P), P \in I - 0)$$

où $\text{in}_x(P)$ est la composante homogène de plus bas degré v de $P \neq 0$ vue comme polynôme homogène de degré v en les dx_i de manière évidente. En particulier, on a $\dim T_x = n - \text{rg} J_P(x)$ où J_P est la matrice jacobienne des P_i en x . Montrer que $T_x(k)$ s'identifie aux morphismes $\text{Spec}(k[\epsilon]/\epsilon^2) \rightarrow X$ d'image x .

Théorème 14.1.4. — Tout localisé d'un régulier est régulier. Tout anneau local régulier est factoriel.

Le point clef consiste qu'un anneau local est régulier si et seulement si A/\mathfrak{m} a une résolution libre finie. Dans un sens, c'est clair (prendre un complexe de Koszul sur des x_i à différentielles indépendantes). La réciproque est plus subtile, et due à Serre en général (cf. 15.1.9). Une fois qu'on a ça, on peut prouver le second point par récurrence sur la dimension (cf. EGA 4 pour la preuve, très astucieuse).

En particulier, si les points fermés sont très denses, pour montrer que X est régulier, il suffit de montrer que X est régulier aux points fermés; la locale factorialité assure alors que les notions de diviseur de Weil et de Cartier coïncident.

Exercice 14.1.5. — Montrer que si X est une k -variété telle que $X \otimes_k \bar{k}$ est régulière, alors X est régulière. En déduire que \mathbf{A}_k^n est régulier. Prouver alors que $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n$ est régulier. Plus généralement, prouver que si $f : X \rightarrow Y$ de type fini est plat sur Y régulier à fibres régulières, alors X est régulier.

Malheureusement, la réciproque est fautive en général (penser à une extension inséparable de corps).

14.2. Notion de morphisme lisse

Comme en géométrie différentielle, on définit les morphismes lisses. Précisément, on a le modèle lisse standard, à savoir un sous schéma fermé X passant par x de \mathbf{A}_A^{n+d} défini par n équations

$$f_i = 0 \text{ avec } f_i \in A[x_1, \dots, x_{n+d}]$$

telles que le déterminant jacobien

$$J_f(x) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

non nul dans $k(x)$.

Définition 14.2.1. — Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est dit lisse en $x \in X$ s'il est localement isomorphe au modèle lisse standard.

Exercice 14.2.2. — Soit x un point fermé d'une k -variété X . On suppose que X est régulier en x . Vérifier que si $x \in X(k)$, X est lisse en x (utiliser le calcul de 14.1.3). Dans le cas général, montrer que si k est parfait, $X \otimes k(x)$ est régulier en x (écrire $k(x) = k[X]/P$ avec P séparable). En déduire que X est lisse en ce point puis qu'une variété est lisse si et seulement si $X \otimes \bar{k}$ est régulier en ses points fermés (utiliser 14.1.5).

Notons que par définition, la fibre $X_y, y = f(x)$ est lisse en x , donc que X est régulier en x de dimension d (cf. 14.1.3 pour le calcul de l'espace tangent). Lorsque d est nul, on dit que f est étale en x : c'est l'analogue des difféomorphismes locaux de la géométrie différentielle. On montrera en exposé un analogue formel du théorème d'inversion local, très certainement faux en topologie de Zariski (exercice : pourquoi?!).

Rappelons que $\Omega_{B/A}$ est le quotient du B-module de base $db, b \in B$ par les relations

$$da, a \in A, dbb' = bdb' + b'db, d(b + b') = db + db', b, b' \in B.$$

Ceci permet par recollement de définir le faisceau quasi-cohérent $\Omega_{X/Y}$.

Exercice 14.2.3. — Vérifier que si f est lisse, on a $\Omega_{X,Y}$ localement libre. Montrer que si f est un morphisme de k -variétés, on a alors une suite exacte

$$0 \rightarrow f^*\Omega_{Y/k} \rightarrow \Omega_{X/k} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0.$$

Notons que c'est une propriété ouverte, stable par changement de base, à la différence de la notion de régularité.

Théorème 14.2.4. — Une variété lisse sur un corps est un schéma régulier.

14.3. Platitude des morphismes lisses

Montrons le critère d'injectivité suivant d'un morphisme $u : M \rightarrow N$.

Proposition 14.3.1. — Soit $A \rightarrow B$ un morphisme local avec B noethérien. Soit $u : M \rightarrow N$ un morphisme de B -modules de type fini. et M, N deux B -module de type fini. On suppose N plat. Alors il y a équivalence entre :

- i) u est injectif et $\text{Coker}(u)$ est plat;
- ii) $\bar{u} : M \otimes k \rightarrow N \otimes k$ est injectif.

Preuve : la partie directe est triviale. Inversement, supposons \bar{u} injective et montrons que u est injective. Soit m dans le noyau. Par injectivité de \bar{u} , on a $m \in \mathfrak{m}M$. Supposons que $m \in \mathfrak{m}^n M$ et montrons $m \in \mathfrak{m}^{n+1} M$. Soit a_1, \dots, a_k une famille finie d'éléments de \mathfrak{m}^n telle que $(a_i \bmod \mathfrak{m}^{n+1})$ soit une base du k -espace vectoriel (de dimension finie) $\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$. Le lemme de Nakayama assure que les a_i engendrent \mathfrak{m}^n . On peut écrire

$$m = \sum a_i m_i, m_i \in M$$

et on a une relation $\sum a_i u(m_i) = 0$ dans N .

Par platitude de N , le produit tensoriel de

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^k \xrightarrow{(a_1, \dots, a_r)} A$$

par N est la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \otimes N \longrightarrow N^k \xrightarrow{(a_1, \dots, a_r)} N$$

de sorte que

$$(u(m_1), \dots, u(m_k)) = \left(\sum_j c_{1,j} n_{1,j}, \dots, \sum_j c_{k,j} n_{k,j} \right) \text{ avec } \sum_i c_{i,j} a_i = 0.$$

En réduisant les relations

$$\sum_i c_{i,j} a_i = 0$$

modulo \mathfrak{m}^{n+1} , on trouve que $c_{i,j} \in \mathfrak{m}$. On conclut que $\bar{u}(m_i) = 0$ et donc $m_i \in \mathfrak{m}M$ ce qui assure $m \in \mathfrak{m}^{n+1}M$ et donc m est nul. La suite exacte des Tor associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

donne la nullité de $\text{Tor}_1^A(M/N, k)$ et donc la platitude de M/N sur A grâce à la proposition 10.2.1. ■

Corollaire 14.3.2. — Soit $A \rightarrow B$ un morphisme local avec B noethérien et M de type fini sur B , plat sur A . Soient b_1, \dots, b_n des éléments de B . Alors, il y a équivalence entre

- i) pour tout $i = 1, \leq, n$, b_i non diviseur de 0 dans $M_i = M/(b_1, \dots, b_{i-1})M$ et M_i plat sur A .
 ii) pour tout $i = 1, \leq, n$, $b_i \pmod{\mathfrak{m}}$ non diviseur de 0 dans $M_i \otimes k$.

Preuve : la partie directe est triviale. Pour la partie réciproque, on fait une récurrence sur i . Pour $i = 0$, on regarde l'application u de multiplication par b_1 dans $M_0 = M$, qui est injective d'après la proposition 14.3.1 et, grâce à *loco citato*, le quotient M_1 est plat. On passe de M_i à M_{i+1} de même en changeant M en M_i . ■

Par exemple, si $X \rightarrow Y$ est un morphisme plat de schémas noethériens et si $D \hookrightarrow X$ est localement défini par une équation, dire que D est un diviseur de Cartier plat sur Y c'est dire que toutes les fibres $D \otimes k(y)$, $y \in Y$ sont des diviseurs de Cartier de X_y . Comme l'espace affine $X = \mathbf{A}_A^{n+r}$ est plat sur A , on obtient

Corollaire 14.3.3. — *Un morphisme lisse est plat. En particulier, il est ouvert.*

Ainsi, un morphisme lisse est plat à fibres lisses. Notons que c'est un cas favorable où cette notion subtile de platitude peut être testée calculatoirement.

On peut aisément prouver la réciproque comme suit, preuve que le lecteur passera en première lecture, ou mieux établira de lui-même.

14.4. Morphismes plats à fibres lisses

La preuve du lemme suivant est en fait une simple traduction des définitions mais illustre « le caractère liant » de la platitude.

Lemme 14.4.1. — *Soit F un sous-schéma fermé d'un S -schéma noethérien X . Soit $\bar{x} \in X(\bar{k})$ un point géométrique de X d'image $\bar{s} \in S(\bar{k})$. On suppose que les fibres géométriques $F_{\bar{s}}$ et $X_{\bar{s}}$ coïncident en \bar{x} . Alors, si F est plat sur S en x , l'image x de \bar{x} dans X , on a $F = X$ au voisinage de x .*

Preuve : On se ramène au cas affine. On dispose donc d'un idéal I d'une A -algèbre noethérienne B . On suppose que B/I est plat sur A en $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B/I)$, vu comme idéal premier contenant I . Traduisons l'hypothèse. On s'est donné donc un plongement $\bar{x} : k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \bar{k}$ dans un corps algébriquement clos \bar{k} qui donc définit le morphisme

$$\bar{x} : B \rightarrow B/I \rightarrow k(\mathfrak{p}) \rightarrow \bar{k},$$

notre point $\bar{x} \in X(\bar{k})$. Le composé

$$\bar{s} : A \rightarrow B \rightarrow B/I \rightarrow k(\mathfrak{p}) \rightarrow \bar{k}$$

est $\bar{s} \in S(\bar{k})$.

L'immersion $F_{\bar{s}} \hookrightarrow X_{\bar{s}}$ des fibres géométriques est définie par

$$B \otimes_A \bar{k} \rightarrow (B/I) \otimes_A \bar{k} = B \otimes_A \bar{k} / (I.B \otimes_A \bar{k})$$

où $I.B \otimes_A \bar{k}$ est l'idéal engendré par l'image de $I \otimes_A \bar{k}$. Le morphisme (surjectif)

$$\bar{x} \otimes 1 : B \otimes_A \bar{k} \rightarrow \bar{k}$$

est \bar{x} , vu comme \bar{k} -point (fermé) de la fibre au dessus de \bar{s} . Son noyau

$$\bar{\mathfrak{p}} \supset I.B \otimes_A \bar{k}$$

est l'idéal premier $\bar{x} \in F_{\bar{s}} \hookrightarrow X_{\bar{s}}$. Par hypothèse, on a donc la nullité du localisé

$$(I.B \otimes_A \bar{k})_{\bar{\mathfrak{p}}} = 0$$

et l'image inverse de $\bar{\mathfrak{p}}$ par $B \otimes B \otimes_A \bar{k}$ est \mathfrak{p} (on dit ici que l'image de \bar{x} est x) et cette flèche induit un plongement $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow k(\bar{\mathfrak{p}})$. Le but est de prouver la nullité de $I_{\mathfrak{p}}$.

Comme B/I est plat sur A en \mathfrak{p} , la flèche

$$(I \otimes_A \bar{k})_{\bar{\mathfrak{p}}} \rightarrow (I \cdot (B \otimes_A \bar{k}))_{\bar{\mathfrak{p}}}$$

est un isomorphisme de sorte qu'on a

$$(I \otimes_A \bar{k})_{\bar{\mathfrak{p}}} = 0.$$

Si on se souvient de l'égalité $k(\bar{\mathfrak{p}}) = \bar{k}$, l'associativité du produit tensoriel donne

$$(I \otimes_A \bar{k})_{\bar{\mathfrak{p}}} = I_{\bar{\mathfrak{p}}} \otimes_A k(\bar{\mathfrak{p}}) = (I_{\mathfrak{p}} \otimes_A k(\mathfrak{p})) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\bar{\mathfrak{p}}) = 0.$$

Une extension de corps est fidèlement plate de sorte que $I_{\mathfrak{p}} \otimes_A k(\mathfrak{p}) = I_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}I_{\mathfrak{p}}$ est nul. Comme B est noethérien, $I_{\mathfrak{p}}$ est de type fini et lemme de Nakayama assure $I_{\mathfrak{p}} = 0$. ■

Corollaire 14.4.2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini de schémas (localement) noethérien, et $x \in X$ d'image $y = f(x)$. Si f est plat en x , de fibre X_y lisse en x sur $k(y)$, alors f est lisse en x .

Preuve : Prouvons le premier point. On peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ et X sous-schéma fermé de \mathbf{A}_A^{n+d} et X_y définie par un système de coordonnées locales $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \in k[x_1, \dots, x_{n+d}]$ avec $k = k(y)$. On remonte \bar{f}_i en $f_i \in A[x_1, \dots, x_{n+d}]$. Comme plus haut, le critère 14.3.2 assure que le sous-schéma F d'équations $f_i = 0$ est plat sur A en x . Par construction, les fibres de F, X coïncident en $\bar{x} \in X(\bar{k})$ au dessus de x , et donc $F = X$ au voisinage de x , ce qui donne la lissité car le déterminant jacobien des f_i est non nul dans $k(x)$ par construction. ■

Exercice 14.4.3. — Montrer que si X, Y sont des k -variétés lisses et $\mathbf{d}f(x) : k(x) \otimes_{k(y)} \Omega_{Y,y} \rightarrow \Omega_{X,x}$ injectif (cf. exposé pour la définition de Ω et ses propriétés), alors f est lisse en x . [Indication : montrer la platitude en utilisant un critère local de platitude]. Comparer avec 14.2.3.

14.5. Le théorème de Bertini

On peut maintenant préciser 9.4.4 dans le cas lisse.

Proposition 14.5.1 (Bertini). — Si X est lisse et H général, l'intersection $X \cap H$ est lisse.

Preuve : On peut supposer X irréductible. Considérons le graphe d'incidence Γ paramétrant les couples $(x, H) \in X \times (\mathbf{P}_k^n)^*$ tels que $x \in H$. Soient P_1, \dots, P_n des équations homogènes de X . La condition x point lisse de $X \cap H, H = \text{Ker}(\phi)$ s'écrit simplement $\text{rg}_{k(x)} J_{P, \phi} = n - d + 1$ où J est la matrice jacobienne. C'est donc une condition ouverte (non annulation de mineurs de matrices). La projection du complémentaire G sur l'espace des hyperplans est donc un fermé (propriété de X). Reste à voir que ce fermé est strict. En effet, le complémentaire U est un ouvert qui contient un point rationnel car $\mathbf{P}_k^n(k)$ dense (k infini). Il suffit de prouver que la dimension de Γ est strictement inférieure à la dimension de m de \mathbf{P}_k^m . On peut supposer (changer de base) que k est algébriquement clos. Pour cela, projetons sur X et regardons la dimension de G_x où x point fermé de X . On peut supposer $x \in D(x_0)$. Dire que ϕ est dans G_x , c'est dire que ϕ s'annule en x (une condition linéaire) et que la différentielle du quotient $\phi/X_0 \in H^0(D(X_0), \mathcal{O})$ est nulle dans T_x^*X (d conditions linéaires indépendantes car la flèche qui à un tel ϕ associe sa classe dans T_x^*X est surjective, puisque les X_i/X_0 sont les coordonnées affines près de x). Cette fibre est donc de dimension $m - 1 - d$. Le théorème de dimension des fibres assure que G est de dimension $m - 1$. ■

14.6. le théorème de Bertini pour les systèmes linéaires en caractéristique nulle

Supposons ici que k est de caractéristique nulle et soit V un système linéaire de L sur une variété irréductible lisse X . Tout élément non nul de $V(k)$ définit une hypersurface H de X . On note \mathbf{P} le projectif paramétrant les droites de V .

Proposition 14.6.1. — *Si V est sans point base, il existe un ouvert Zariski dense U de $\mathbf{P}(k)$ tel que si $H \in U$, alors $X \cap H$ est lisse.*

Preuve : On procède un peu comme dans le théorème de Bertini général (les détails sont laissés au lecteur). On considère le graphe d'incidence Γ paramétrant les couples $(x, H) \in X \times \mathbf{P}$ tels que $x \in H$. La projection sur X est un fibré projectif (du fibré (dual du) noyau de la surjection $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L$). Ainsi Γ est lisse de dimension $\dim(X) + \dim \mathbf{P} - 1$. La projection sur \mathbf{P} est surjective. Le théorème de platitude générique et le théorème de Chevalley assure l'existence d'un ouvert dense Ω de \mathbf{P} telle que la restriction de cette projection est plate au dessus de Ω , donc équidimensionnelle de dimension relative $\dim(\Gamma) - \dim(\mathbf{P}) = \dim(X) - 1$. La fibre générique est un localisé de Γ , donc est régulière, de dimension $\dim(X) - 1$. Comme on est en caractéristique nulle, elle est lisse. L'ensemble des points de Γ où la fibre est lisse de dimension $\dim(X) - 1$ est un ouvert (critère jacobien) contenant la fibre générique. L'image de son complémentaire est donc un fermé strict (propreté) et les points rationnels du complémentaire fournissent l'ouvert cherché. ■

Remarque 14.6.2. — *En remplaçant l'argument de propreté par le théorème de Chevalley, on s'aperçoit que le théorème de Bertini est vrai pour des sous-schémas lisses, fermés ou non, du projectif.*

Exercice 14.6.3. — *Montrer qu'on ne peut se passer de l'hypothèse de caractéristique nulle (prendre par exemple $X = \mathbf{A}_k^1$ avec k de caractéristique $p > 0$ et $V = \langle x^p, (x+1)^p \rangle$).*

CHAPITRE 15

APPENDICE : LOCALISATION DES ANNEAUX RÉGULIERS

On a vu que les localisés $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau régulier sont Cohen-Macaulay. En fait, ils sont même réguliers (Serre). Expliquons pourquoi. Soit A local noethérien et M de type fini sur A . Appelons dimension projective $\text{dh}(M)$ de M la borne inférieure dans \mathbf{N} de l'ensemble des longueurs l des résolutions libres

$$0 \rightarrow L_l \xrightarrow{d_l} \dots \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

de M . En général, comme on le verra, le corps résiduel k de A est de dimension infinie, sauf si justement A est régulier.

Lemme 15.1.4. — Soient l un entier naturel et M un module de type fini. On a $\text{dh}(M) \leq l$ si et seulement si $\text{Tor}_i^A(M, k) = 0$ pour $i > l$. On a égalité si de plus $\text{Tor}_i^A(M, k) \neq 0$.

Preuve : Le sens direct est trivial. On fait une récurrence sur l . Si $l = 0$, on a déjà vu ça (c'est une conséquence facile de Nakayama). Si $l > 0$, choisissons des éléments de M dont les images dans $M \otimes k$ forment une base. D'après le lemme de Nakayama, ils définissent une surjection $L_0 \xrightarrow{d_0} M$ avec L_0 libre de rang fini et $d_0 \otimes k$ isomorphisme. Son noyau M_1 est de type fini et la suite des Tor donne $\text{Tor}_i^A(M_1, k) = 0$ si $i > l - 1$. On applique alors l'hypothèse de récurrence. ■

Remarque 15.1.5. — On a prouvé mieux, à savoir l'existence d'une résolution projective de longueur $\leq l$ telle que $d_i \otimes k$ est nul si $i > 0$. On parlera d'une **résolution minimale** dans ce cas.

Corollaire 15.1.6. — Soit M de type fini.

- i) Si $\text{dh}(M) \leq h$ et N facteur direct de M , alors $\text{dh}(N) \leq h$;
- ii) Si $\text{Tor}_i^A(k, k) = 0$ pour $i > l$, alors $\text{dh}(M) \leq l$.

Preuve : Le i) est immédiat. Pour le ii), on constate que k a alors une résolution projective de longueur $\leq l$, et donc $\text{Tor}_i^A(k, M) = 0$ si $i > l$. ■

Lemme 15.1.7. — Soit M un A -module de type fini de dimension homologique h . Soit $a \in \mathfrak{m}$ non diviseur dans A et dans M . Alors, $\dim_{A/aA}(M/aM) \leq h$.

Preuve : On peut supposer h fini. On fait une récurrence sur h . Si $h = 0$, c'est immédiat. Sinon, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

avec L libre de type fini, N de type fini de dimension homologique $h - 1$. Comme a est A régulier et L libre, a est L régulier, donc N régulier. Par hypothèse de récurrence, N/aN est donc de dimension homologique $\leq h - 1$ sur A/aA . La suite exacte

$$N/aN \xrightarrow{j} L/aL \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

est exacte à gauche. En effet, un élément du noyau $N \cap aL$ de j s'écrit al , $l \in L$ avec $\phi(al) = a\phi(l) = 0$. Mais a est M régulier, donc $\phi(l) = 0$ et $l \in N$.

Comme, N/aN est de dimension homologique $\leq h - 1$, le lemme suit. ■

Théorème 15.1.8. — *Soit A local noethérien. Supposons que tout module de type fini est de dimension projective finie, ou, ce qui revient au même d'après 15.1.6, que $\text{Tor}_i^A(k, k) = 0$ si $i \gg 0$. Alors, A est régulier.*

Preuve : On fait une preuve sur la dimension d du cotangent $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Si d est nul, A est un corps.

On suppose $d > 0$. On cherche à couper par $a \in \mathfrak{m}$ qui fait chuter la dimension de A et du cotangent.

Chute de $\dim(A)$: on veut donc trouver un a non diviseur de zéro et donc montrons que \mathfrak{m} est non associé. On considère une résolution minimale de L_0 de longueur h de k . Si $h = 0$, alors k libre donc $\mathfrak{m}_A = 0$, ce qui n'est pas ($d > 0$). La matrice d_h est à coefficients dans \mathfrak{m} de sorte que d_h est un injection de L_h dans $\mathfrak{m}L_{h-1}$. Si $\mathfrak{m} = \text{Ann}(a)$, on a alors $aL_h = 0$, ce qui est absurde car L_h libre non nul.

Chute du cotangent : on veut simplement que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ car $d > 0$.

Chute conjointe de $\dim(A)$ et du cotangent : il s'agit de prouver que \mathfrak{m} est distinct de l'union des associés et de \mathfrak{m}^2 . Mais, sinon, par le lemme d'évitement, on a \mathfrak{m} contenu dans un associé, donc est associé car maximal ou \mathfrak{m} contenu, donc égal, à \mathfrak{m}^2 , ce qui n'est pas.

Soit donc a non diviseur de zéro et pas dans \mathfrak{m}^2 et soit $\bar{A} = A/aA$. La dimension \bar{d} du cotangent de \bar{A} est $d - 1$.

Si on sait que que tout \bar{A} -module de type fini est de dimension projective finie, on conclut que \bar{A} est régulier. et donc $\dim(\bar{A}) - 1 = d - 1$, ie A régulier.

Reste donc à prouver $\text{dh}_{\bar{A}}(A/\mathfrak{m}) < \infty$.

On a d'abord la suite

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}/xA \rightarrow \bar{A} \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$$

de sorte qu'il suffit de prouver $\text{dh}_{\bar{A}}(\mathfrak{m}/xA) < \infty$.

On a une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow xA/x\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/xA \rightarrow 0.$$

Comme la classe $\mathfrak{d}x \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est non nulle, il existe une forme linéaire $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow A/\mathfrak{m}$ qui envoie $\mathfrak{d}x$ sur 1. La multiplication par x définit un isomorphisme $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} xA/x\mathfrak{m}$ de sorte qu'on a une rétraction $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \rightarrow A/\mathfrak{m}$: (*) est scindée.

D'après le corollaire 15.1.6, il suffit de montrer que $\text{dh}_{A/\bar{x}A}(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}) < \infty$, mais, comme x est A (et \mathfrak{m}) régulier, c'est une conséquence du lemme 15.1.7. ■

Corollaire 15.1.9. — *Le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ de A régulier en \mathfrak{p} premier est régulier.*

Preuve : Soit L_0 une résolution projective de A/\mathfrak{p} . Le localisé $L_{\mathfrak{p},0}$ est une résolution projective du $A_{\mathfrak{p}}$ -module $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = k(\mathfrak{p})$. ■

CHAPITRE 16

COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS SUR UN SCHÉMA NOETHÉRIEN

On suppose que le lecteur a déjà rencontré la notion de foncteur dérivé comme dans le cours accéléré. On va construire rapidement la cohomologie des faisceaux cohérents et dégager ses principales propriétés. On expliquera comment la calculer à la Čech dans le cas des schémas séparés noethériens. Puis on calculera la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}(l)$ sur \mathbf{P}^n pour en déduire quelques applications. Ce n'est qu'un aperçu de l'incroyable richesse de cet outil. Il mériterait largement un cours entier à lui seul. On ne cherche pas donc des énoncés optimaux, mais plutôt une approche simple et efficace. Nous dérogerons donc à la tradition en ce que nous ne considérerons pas la cohomologie des faisceaux quasi-cohérents comme un sous-produit de la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens, ce qui oblige à des détours pénibles, mais en ne considérant que des faisceaux quasi-cohérents, ce qui est possible si le schéma est quasi-compact. Pour simplifier, on se donne un anneau de base A (voir la remarque).

16.1. Définition de la cohomologie

Si \mathcal{C} est une catégorie abélienne avec suffisamment d'injectifs et F un foncteur à valeurs dans une catégorie abélienne, exact à gauche, on peut définir les foncteurs dérivés $R^i F$ comme suit : si \mathcal{F} est un objet de \mathcal{C} , on prend une résolution injective $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\circ$ qui, si elle n'est pas unique, l'est à homotopie près. Du coup, le complexe $F(\mathcal{I}^\circ)$ est bien défini à homotopie près, et ses modules de cohomologie

$$R^i F = \mathcal{H}^i(F(\mathcal{I}^\circ))$$

sont définis à isomorphisme unique près. Ceci permet de définir les (δ) foncteurs $F \rightarrow R^i F$. Comme F est exact à gauche, on a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$F \rightarrow R^0 F$$

et bien entendu on a $R^i F I = 0$ si $i > 0$ et I injectif. Enfin, une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte longue infinie

$$\cdots R^{i-1} F(\mathcal{F}_3) \rightarrow R^{i+1} F(\mathcal{F}_1) \rightarrow R^i F(\mathcal{F}_2) \rightarrow R^i F(\mathcal{F}_3) \rightarrow R^i F(\mathcal{F}_1) \cdots$$

qui est fonctorielle en un sens évident. Ces trois propriétés caractérisent les foncteurs dérivés (unicité des foncteurs dérivés) comme on le vérifie sans peine.

On utilisera librement les caractérisations usuelles (et élémentaires) des modules injectifs. Par exemple, I injectif si et seulement si $\text{Ext}^1(M, I) = 0$ pour tout M de type finie, ou encore si pour tout idéal \mathfrak{a} de type fini de A , la flèche $I = \text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{a}, I)$ est surjectif, que le lecteur montrera sans aucune difficulté s'il ne l'a pas appris en M1. En particulier, les modules injectifs sur les principaux sont les modules divisibles. L'exemple typique est le \mathbf{Z} -module injectif \mathbf{Q}/\mathbf{Z} , qui visiblement est divisible.

Remarque 16.1.1. — Si \mathcal{F} est exact, $\mathcal{F}(\mathcal{I}^\circ)$ est acyclique en degré > 0 et $R^i\mathcal{F} = 0$ si $i > 0$.

Soit X un schéma, que nous supposons noethérien. On note \mathcal{C}_X la catégorie abélienne des faisceaux quasi-cohérents sur X .

Lemme 16.1.2. — *i) Si $i : U \rightarrow X$ est une immersion ouverte, l'image directe d'un injectif de \mathcal{C}_U est injectif dans \mathcal{C}_X .*

ii) \mathcal{C}_X a assez d'injectifs.

Preuve : Prouvons *i)*. Soit donc $A \rightarrow B$ une injection (un monomorphisme) de faisceaux quasi-cohérents. Mais i est séparée comme toute immersion et donc i_* envoie \mathcal{C}_U dans \mathcal{C}_X d'après 4.2.9. Comme $i^* = i^{-1}$ dans ce cas, la flèche $i^*A \rightarrow i^*B$ reste injective. Si I_U injectif dans \mathcal{C}_U , la flèche

$$\mathrm{Hom}(A, i_*I_U) = \mathrm{Hom}(i^*B, I_U) \rightarrow \mathrm{Hom}(i^*A, I_U) = \mathrm{Hom}(A, i_*, I_U)$$

est surjective, ce qu'on voulait.

Prouvons *ii)*. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, \mathcal{C}_X est équivalente à la catégorie des A -modules qui a assez d'injectifs, d'où le lemme dans ce cas. Dans le cas général, recouvrons X par un nombre fini d'ouverts U et notons $i(U) : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante. On peut plonger alors la restriction à U de \mathcal{F} quasi-cohérent dans \mathcal{I}_U injectif, ce qui fournit un morphisme

$$\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_U i(U)_*I_U.$$

Comme l'image inverse commute aux sommes directes, cette flèche est injective (restreindre à un des ouverts du recouvrement). Le point *i)* assure que $i(U)_*I_U$ est injectif. Or, un produit d'injectifs est injectif (exercice formel). Comme le recouvrement est fini, on a l'égalité

$$\bigoplus_U i(U)_*I_U = \prod_U i(U)_*I_U,$$

et le lemme est démontré. ■

Définition 16.1.3. — Les foncteurs dérivés du foncteur section globale $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ de \mathcal{C} dans celle des groupes abéliens s'appellent les foncteurs de cohomologie. On dira qu'un objet injectif de \mathcal{C} est un faisceau Injectif.

Remarque 16.1.4. — Si X est un A -schéma, la functorialité de la cohomologie fait de $H^i(\mathcal{F})$ des A -modules.

16.2. Nullité de la cohomologie dans le cas affine

L'énoncé suivant est trivial avec notre définition de la cohomologie, mais crucial.

Proposition 16.2.1. — La cohomologie d'un faisceau quasi-cohérent sur un schéma affine est nulle en degré > 0 .

Preuve : En effet, soit I° une résolution injective d'un A -module M . Alors, \tilde{I}° est une résolution injective dans \mathcal{C} de \tilde{M} . Le complexe $H^0(\tilde{I}^\circ)$ s'identifie donc au complexe initial I° , qui est par construction acyclique. D'où la nullité de

$$H^i(\tilde{M}) = \mathcal{H}^i(H^0(\tilde{I}^\circ)).$$

■

On retrouve ainsi 4.1.3 si on veut grâce à la suite longue de cohomologie. Bien entendu, c'est faux en général si X n'est pas affine.

Exercice 16.2.2. — Soit $0 = (0 : 1)$ l'origine de $\mathbf{P}_k^1 = \text{Proj}(k[x_0, x_1])$. Montrer que la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}(-1) \rightarrow k \rightarrow 0$$

ne reste pas exacte au niveau des sections globales (on a mis k pour $k(0) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\sim} k$).

16.3. Calcul de la cohomologie à la Cech d'un schéma séparé

On se donne un recouvrement ouvert affine $\mathcal{U} = (U_i, i \in I)$ d'un schéma X noethérien et séparé. On supposera I fini pour simplifier Rappelons la définition du complexe de Cech $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F})$. Soit V un ouvert de X . On pose

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^p(V, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(V \cap U_{i_0, \dots, i_p}) = \prod_{\mathbf{i}} \mathbf{i}_* \mathcal{F}|_{U_{\mathbf{i}}}(V) = \mathbf{i}_* \mathbf{i}^* \mathcal{F}(V)$$

avec $\mathbf{i} : U_{\mathbf{i}} = U_{i_0, \dots, i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \rightarrow X$ l'immersion ouverte canonique.

On construit alors la différentielle de Cech en posant pour $s \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^p(V, \mathcal{F})$

$$(16.3.a) \quad (ds)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+1}}.$$

On a une augmentation (restriction des sections)

$$(16.3.b) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F}).$$

On peut si on veut montrer à la main que d est de carré nul. On peut aussi faire la remarque suivante 16.3.1.

Observons déjà que si $I' = \{i \in I \text{ tels que } U_i \cap V \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{U}' = \{U_i, i \in I'\}$, l'inclusion

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}'}^p(V, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^p(V, \mathcal{F})$$

est une égalité. Posons alors

$$I_x = \{i \in I \text{ tels que } x \in U_i\} \text{ et } \mathcal{U}_x = \{U_i, i \in I_x\}.$$

Soit E_x le \mathbf{Z} -module libre de base I_x et ϕ_x la forme linéaire de matrice de matrice $(1, \dots, 1)$. Le complexe de Koszul augmenté $K_{\circ}(E_x, \phi_x)$ est homotope à zéro car $1 \in \text{Im}(\phi_x)$ (13.2.5). La proposition suivant est immédiat, mais utile.

Proposition 16.3.1. — La tige de $(\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{\circ}(\mathcal{F}), \mathcal{F})$ s'identifie au complexe de Koszul dual $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(E_x, \mathcal{F}_x)$. En particulier, $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{\circ}(\mathcal{F})$ est une résolution de \mathcal{F} .

Définition 16.3.2. — La cohomologie de Cech $H_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ est le module gradué $H(\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{F}))$.

Si maintenant $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^{\circ}$ est une résolution Injective de \mathcal{F} , on a un morphisme, unique à homotopie près

$$\mathcal{C}_{\mathcal{U}}^{\circ}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I}^{\circ}$$

qui induit donc un morphisme canonique, gradué et fonctoriel

$$H_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}) \rightarrow H(X, \mathcal{F}).$$

Exercice 16.3.3. — Montrer qu'on a toujours un isomorphisme $H_{\mathcal{U}}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathcal{F})$.

Lemme 16.3.4. — Soient V, U des ouverts affines de X un schéma noethérien séparé, $i : U \rightarrow X, j : V \rightarrow X$ les immersions ouvertes. Soit I_V un faisceau quasi-cohérent Injectif sur V . Alors, $i_*(j_* I_V)|_U = i_* i^* j_* I_V$ est un faisceau Injectif sur X .

Preuve : Il suffit de prouver que $(j_*I_V)|_U = i^*j_*I_V$ est Injectif sur U (16.1.2). On a un diagramme (cartésien) d'immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} V \cap U & \xrightarrow{\bar{j}} & U \\ \downarrow \bar{i} & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Comme \bar{i} et i sont ouvertes, pour tout ouvert U' de U , on a

$$i^*j_*I_V(U') = j_*I_V(U') = I_V(U' \cap V)$$

et

$$\bar{j}_*\bar{i}^*I_V(U') = \bar{i}^*I_V(U' \cap (V \cap U)) = \bar{i}^*I_V(U' \cap V) = I_V(U' \cap V),$$

de sorte qu'on a un isomorphisme

$$i^*j_*I_V = \bar{i}_*\bar{i}^*I_V.$$

Comme précédemment, il suffit de prouver que \bar{i}^*I_V est Injectif.

L'hypothèse de séparation assure que $U \cap V$ est un ouvert affine $\text{Spec}(B)$ de $V = \text{Spec}(A)$ et B est A -plat. On doit vérifier que si I est un A -module injectif, il en est de même de $B \otimes_A I$.

Soit donc \mathfrak{b} un idéal de B et $\mathfrak{a} = \text{Ker}(A \rightarrow B/\mathfrak{b})$. La flèche

$$B \otimes_A B/\mathfrak{b} \rightarrow B/\mathfrak{b}$$

est un isomorphisme car elle le devient après localisation en $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \leftrightarrow \text{Spec}(A)$ puisque $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$. Tensorisant alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow B/\mathfrak{b}$$

par B , on obtient

$$\mathfrak{b} = B \otimes_A \mathfrak{a}.$$

Géométriquement, on ne fait que constater que $V(\mathfrak{b})$ est la restriction à $U \cap V$ de son adhérence schématique $V(\mathfrak{a})$ dans V (cf. 6.9.4).

Comme I est un A -module injectif, la flèche

$$I = \text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{a}, I)$$

est surjective. Mais

$$B \otimes_A \text{Hom}(\mathfrak{a}, I) = \text{Hom}(B \otimes_A \mathfrak{a}, B \otimes_A I) = \text{Hom}(\mathfrak{b}, B \otimes_A I)$$

car B plat sur A et \mathfrak{a} de présentation finie (exercice) de sorte que

$$B \otimes_A I = \text{Hom}(B, B \otimes_A I) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{b}, B \otimes_A I)$$

l'est aussi, ce qui prouve que $B \otimes_A I$ est injectif. ■ En faisant $X = V = \text{Spec}(A)$ et $U = D(f)$, on

a en particulier le

Corollaire 16.3.5. — *Si I est un module injectif sur A noethérien, alors $I[1/f]$ est un A -module injectif pour tout $f \in A$.*

Montrons un petit lemme, qui nous servira plus tard.

Lemme 16.3.6. — *Avec les notations précédentes, on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow K \rightarrow I \rightarrow I[1/f] \rightarrow 0.$$

Preuve : il suffit de prouver que pour tout A-module M, la flèche $\text{Hom}(M, I) \rightarrow \text{Hom}(M, I[1/f])$ est surjective. En effet, si $M = A$, on a la surjectivité $I \rightarrow I[1/f]$. Puis, I étant injectif, on déduit alors $\text{Ext}^1(M, K) = 0$ et donc K injectif.

Comme M est noethérien, M est de présentation fini. Si M est libre de rang fini, on a certainement $\text{Hom}(M, I[1/f]) = \text{Hom}(M, I)[1/f]$. En utilisant une présentation, on en déduit encore vrai si M est de type fini.

Soit alors $\phi \in \text{Hom}(M, I[1/f])$. Il existe $n \geq 0$ et $\psi \in \text{Hom}(M, I)$ tel que $\phi = \psi/f^n$. La suite des anneaux $M_m = \text{Ann}_M(f^m)$ est croissante, donc stationne si $m \geq N$. La multiplication par f^{n+N} définit une injection

$$f^{n+N} : M/M_N \hookrightarrow M.$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \nearrow f^N \psi & \\ M/M_N & \xrightarrow{f^{n+N}} & M \end{array}$$

se complète en

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \nearrow f^N \psi & \uparrow \psi' \\ M/M_N & \xrightarrow{f^{n+N}} & M \end{array} .$$

Par construction, l'image de ψ' dans $\text{Hom}(M, I[1/f])$ est ϕ . ■

Théorème 16.3.7. — Soit \mathcal{U} un recouvrement affine fini de X noethérien et séparé \mathcal{F} . Alors, le morphisme $H_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}) \rightarrow H(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Preuve : Tout d'abord, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est exact. Il suffit de vérifier que si $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ épimorphisme de \mathcal{C} , alors on a un épimorphisme $C_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F}) \rightarrow C_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{G})$ pour tout p, puis, la somme directe étant un foncteur exacte, il suffit de vérifier que $\mathcal{F}(U_i \cap V) \rightarrow \mathcal{G}(U_i \cap V)$ surjectif pour tout ouvert affine V de X. Comme X est séparé, $U_i \cap V$ est affine, et on sait alors que le $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U_i \cap V)$ est exact.

Mais ceci assure que $H_{\mathcal{U}}$ est un foncteur cohomologique. En effet, si

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

suite exacte de \mathcal{C} , on a une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_1) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_2) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}_3) \rightarrow 0$$

induisant une suite exacte longue et fonctorielle en cohomologie de Cech par passage aux sections globales

$$\dots H_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F}_1) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F}_2) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{F}_3) \rightarrow \dots$$

compatible avec la suite exacte longue de cohomologie (c'est la functorialité dans le lemme du serpent).

Il suffit alors de vérifier que la cohomologie de Cech $H_{\mathcal{U}}(\mathcal{I})$ d'un Injectif de la forme $j_* I_V$ où $j : V \rightarrow X$ immersion d'un ouvert affine V dans X et I_V injectif sur V est nulle en degré > 0 (découper une résolution injective en suites exactes courtes ou invoquer le résultat d'unicité des foncteurs dérivés). Mais d'après ce qui précède, $0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow C_{\mathcal{U}}^0(\mathcal{I})$ est une résolution Injective de \mathcal{I} (simplement car les $C_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{I})$ sont des sommes de $\mathbf{i}_* \mathbf{i}^* j_* I_V$ avec $\mathbf{i} : U_i \hookrightarrow X$ l'immersion d'une des intersections de $p + 1$ ouverts du recouvrement \mathcal{U} . Elle permet donc de calculer sa cohomologie

$$H^p(\mathcal{I}) = \mathcal{H}^p(C_{\mathcal{U}}^0(X, \mathcal{I})) = H_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{I}).$$

Mais par définition, cette cohomologie $H^p(\mathcal{I})$ est nulle en degré > 0 puisque \mathcal{I} est injectif. ■

Corollaire 16.3.8. — Soit $i : X \rightarrow Y$ une immersion dans Y noethérien et séparé et $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_F$. Alors, la flèche canonique $H(X, \mathcal{F}) \rightarrow H(Y, i_*\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Preuve : Si l'immersion est ouverte, c'est clair car i_* est alors exact et envoie Injectif sur Injectif. On se ramène donc à i immersion fermée. Dans ce cas, on calcule $H^p(X, i_*\mathcal{F})$ à la Čech en utilisant un recouvrement fini ouvert et affine \mathcal{U} de Y et on constate que $i^{-1}\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap X$ est un recouvrement ouvert fini et affine de X qui permet de calculer la cohomologie de \mathcal{F} . On constate alors qu'on a un isomorphisme $H^0(U_i \cap X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^0(U_i, i_*\mathcal{F})$ qui donne le résultat. ■

Corollaire 16.3.9. — Si \mathcal{F} est quasi-cohérent sur \mathbf{P}_A^n avec A noethérien au moins, $H^q(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{F}) = 0$ si $q > n$.

Soit X est de type fini et séparé sur A noethérien. La cohomologie de \mathcal{F} quasi-cohérent se calcule par la cohomologie de Čech $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ d'un recouvrement affine \mathcal{U} . Si B noethérien est plat sur A , on a

$$B \otimes H(C_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})) \rightarrow H(B \otimes C_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}))$$

isomorphisme. Comme $B \otimes C_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ s'identifie au complexe de Čech de \mathcal{F}_B associé au recouvrement $\mathcal{U}_B = B \otimes \mathcal{U}$ de X_B , on a donc

Corollaire 16.3.10. — Soit X est de type fini et séparé sur A noethérien. La cohomologie d'un faisceau quasi-cohérent sur X commute au changement de base plat.

16.4. Appendice : comparaison avec la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens

Ce paragraphe n'a comme vertu que de soulager un remords de l'auteur. En effet, on peut oublier que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent et ne se souvenir que de sa structure de groupe abélien. Dans ce cas, la catégorie des faisceaux de groupes abéliens quelconques a encore assez d'injectifs (même genre d'arguments, avec cette fois i^{-1} au lieu de i^* comme image inverse) et on d'autres modules de cohomologie. On veut expliquer qu'on retrouve ainsi les groupes abéliens de cohomologie usuels, ce qui à vrai dire est assez académique et ne nous servira pas. Nous nous contenterons de l'énoncé suivant.

Proposition 16.4.1. — Soit X noethérien. Alors le δ -foncteur de cohomologie des faisceaux quasi-cohérents est la restriction du δ -foncteur de cohomologie des faisceaux de groupes abéliens.

Preuve : soit $I_U = \tilde{I}$ injectif sur $U = \text{Spec}(A)$ affine et $i : U \rightarrow X$ une immersion ouverte. Il suffit de prouver que i_*I_U , vu comme faisceau de groupes abéliens n'a pas de cohomologie. Il est bien connu (et facile d'ailleurs, cf. TD) qu'un faisceau flasque est acyclique. Il suffit de prouver que i_*I_U est flasque, autrement dit que I_U est flasque, ce qui en particulier nous ramène au cas affine. Soit donc V un ouvert de U et $s \in H^0(V, I_U)$. On veut prouver que s_V se prolonge à U par récurrence noethérienne sur l'adhérence du support de I (le support n'est en général pas fermé car I n'est pas type fini). Si V est vide, c'est terminé : on prolonge par 0. Sinon, choisissons $D(f) \neq \emptyset$ contenu dans V . On se souvient alors (16.3.6) qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow I \rightarrow I[1/f] \rightarrow 0$$

où K (et $I[1/f]$) sont injectifs. La restriction de \tilde{K} à $D(f)$ est nulle de sorte que

$$\overline{\text{Supp}(K)} \subset \overline{\text{Supp}(I)} \cap V(f) \subsetneq \overline{\text{Supp}(I)}.$$

Par récurrence noethérienne, on peut supposer \tilde{K} flasque. La restriction de S_U à $D(f)$ est un élément de $I[1/f]$ qui se prolonge en $s_f \in I$. La différence $s_U - (s_f|_U)$ est une section de \tilde{K} sur U , donc se prolonge en $s_K \in K \subset I$. La section $s_K + s_f$ coïncide avec s_U sur U par construction. ■

16.5. Cohomologie de $\mathcal{O}(l)$ sur \mathbf{P}^n

On note S l'algèbre de polynômes $A[x_0, \dots, x_m]$ graduée par le degré où A est un anneau noethérien. On veut calculer la cohomologie de $\mathcal{O}(l)$ sur $\mathbf{P}_A^n = \text{Proj}(S)$ de coordonnées homogènes x_0, \dots, x_n . En fait, on va essentiellement ramener le calcul sur le cône $\mathbf{A}_A^{n+1} \setminus \{0\}$ au dessus de \mathbf{P}_A^n en utilisant le fait que l'image inverse de $\mathcal{O}(l)$ est le fibré trivial muni d'une action de $\mathbf{G}_{m,A}$ de multiplication par λ^l . Plutôt que de faire une ennuyeuse théorie générale, procédons comme suit.

On pose

$$\mathcal{F} = \Pi\mathcal{O} = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}(m) :$$

c'est un faisceau quasi-cohérent gradué par le poids total des polynômes (on évitera le mot degré ici, réservé au degré de cohomologie). Par définition, on a

$$H^0(D(x_i), \mathcal{O}(m)) = x_i^l A[x_t/x_i] = \bigoplus_l \{P_{l+m}/x_i^l \text{ avec } P_{l+m} \in S_{l+m}\}$$

vu comme sous-module de $S[\frac{1}{x_0 \dots x_n}]$ comme d'habitude (5.8). C'est la partie homogène de poids m du localisé usuel $S[1/x_i]$ ce qui traduit l'énoncé géométrique plus haut. Ainsi, le complexe de Čech $C(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ associé au recouvrement affine standard $D^+(x_i)$ est le complexe de modules gradués (par le poids)

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_i S_{x_i} & \longrightarrow & \dots & \bigoplus_{i_0 < i_1 < \dots < i_q} S_{x_{i_0} \dots x_{i_q}} & \longrightarrow & \dots & S_{x_0 x_1 \dots x_n} \longrightarrow 0, \\ \parallel & & & \parallel & & & \parallel \\ C^0 & \longrightarrow & \dots & C^q & \longrightarrow & \dots & C^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

les différentielles étant données par les formules 16.3.a les restrictions étant comprises comme des localisations convenables. La cohomologie de $\mathcal{O}(m)$ est celle de poids m .

Comme les x_i sont réguliers (ie non diviseurs de zéro), on peut voir $S_{x_{i_0} \dots x_{i_q}}$ comme le A -module libre de base les monômes \underline{x}^e de degré $e \in \mathbf{Z}^n$ tels que $e_i \in \mathbf{N}$ si $i \neq i_0, \dots, i_q$.

Bien que cela ne soit pas vraiment nécessaire, examinons les cas extrêmes. Tout d'abord, comme il n'y a que $n+1$ ouverts, on retrouve la nullité de $H^q(\mathcal{F})$ si $q > n$ (cf. 16.3.9). On sait par ailleurs que la flèche tautologique $S \rightarrow H^0(\mathcal{F})$ est un isomorphisme (5.8.7).

16.5.1. Cohomologie de $\mathcal{O}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$ en degré n . — Regardons le cas $q = n$. La différentielle ∂_n est nulle tandis que l'image de ∂_{n-1} est le module engendré par les polynômes de la forme $P/(x_{i_0} \dots \widehat{x_{i_r}} x_{i_n})^N$ ie le module libre engendré par les monômes \underline{x}^e tels qu'il existe i vérifiant $e_i \geq 0$. Le quotient s'identifie alors au module libre engendré par les \underline{x}^e avec $e_i < 0$ pour tout i , autrement dit à l'ensemble

$$\left\{ \frac{P(x_i^{-1})}{x_0 x_1 \dots x_n}, P \in A[x] \right\}.$$

Le poids de $\omega_m = \frac{P(x_i^{-1})}{x_0 x_1 \dots x_n}$ sera m si et seulement si P est homogène de degré $-m - n - 1$ et l'application $\omega_m \rightarrow S_{-n-1-m}$ qui à ω_m associe P est un isomorphisme

$$H^n(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(m)) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(-n-1-m)).$$

En particulier, le groupe de droite est non nul si et seulement si $-n-1-m \geq 0$ et donc est nul pour m assez grand. Cet isomorphisme dépend d'un choix de coordonnées linéaires x_i . En fait, la version « coordinate free » est la dualité de Serre : on remplace $\mathcal{O}(-n-1)$ par le fibré en droite isomorphe $\bigwedge^n \Omega_{\mathbf{P}_A^n/A}$ qui lui est isomorphe. On n'a hélas pas le temps de discuter ce thème, bien important pourtant. L'accouplement

$$H^0(\mathcal{O}(m)) \otimes H^q(\mathcal{O}(-n-1-m)) \rightarrow H^q(\mathcal{O}(-n-1))$$

est donné par le produit des monômes de sorte que c'est plutôt le dual de l'un qui est canoniquement l'autre.

16.5.2. Cohomologie des $\mathcal{O}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$ en degrés médians. — On va montrer que $H^q(\mathbf{P}_r^n, \mathcal{F})$ est nul si $0 < q < n$ par récurrence sur n : on note plutôt \mathcal{F}_n le faisceau \mathcal{F} . C'est vrai si $n = 1$. Soit donc $n > 1$ et supposons donc la propriété vraie au rang $n - 1$.

La suite exacte de modules gradués

$$(16.5.2.a) \quad 0 \rightarrow A[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{x_n} A[x_0, \dots, x_n] \rightarrow A[x_0, \dots, x_{n-1}] \rightarrow 0$$

fournit pour tout m une suite exacte

$$(16.5.2.b) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^n}(m-1) \xrightarrow{x_n} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^n}(m) \rightarrow \mathcal{O}(m)|_{\mathbf{P}_A^{n-1}} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^{n-1}}(m) \rightarrow 0$$

(géométriquement, on restreint \mathcal{F} à la section hyperplane d'équation $x_n = 0$ qui est isomorphe à \mathbf{P}_A^{n-1}). La suite exacte de cohomologie fournit alors, en sommant sur m , une suite exacte

$$H^{q-1}(\mathcal{F}_n(-1)) \xrightarrow{x_n} H^{q-1}(\mathcal{F}_n) \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{F}_{n-1}) \xrightarrow{\partial} H^q(\mathcal{F}_n(-1)) \xrightarrow{x_n} H^q(\mathcal{F}_n) \rightarrow H^q(\mathcal{F}_{n-1}).$$

Mais ∂ est nul : si $1 < q < n$, on a par récurrence la nullité de $H^{q-1}(\mathcal{F}_{n-1})$ et si $q = 1$, la suite des 3 premiers termes est la suite (16.5.2.a).

Or, $H^q(\mathcal{F}_n(-1))$ est simplement le module gradué $H^q(\mathcal{F}_n)$ avec une graduation décalée. Aussi, on a montré que la multiplication par x_n sur $H^q(\mathcal{F}_n)$ est injective.

Montrons qu'elle est nilpotente sur tout élément. Il suffit de prouver que le localisé $H^q(\mathcal{F}_n)_{x_n}$ est nul. Or, si \mathbf{K}^\bullet est un complexe et F un foncteur exact, la cohomologie $H(F(\mathbf{K}^\bullet))$ s'identifie à $F(H(\mathbf{K}^\bullet))$ (vérification facile), de sorte que le localisé $H^q(\mathcal{F}_n)_{x_n}$ est la cohomologie de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{x_n}$. Mais, ce complexe de Čech n'est autre que le complexe de Čech de la restriction de \mathcal{F} à $U_n = D(x_n) = \text{Spec}(S_{x_n})$ relativement au recouvrement affine $\mathcal{U} \cap U_n$ et donc sa cohomologie est la cohomologie de \mathcal{F}_n sur U_n qui est nulle si $q > 0$ car U_n affine et \mathcal{F}_n quasi-cohérent. Une endomorphisme de $H^q(\mathcal{F}_n)$ ne peut-être injectif et localement nilpotent que si $H^q(\mathcal{F}_n)$ est nul. En résumé, on a prouvé le résultat suivant.

Proposition 16.5.1. — *La cohomologie de $\mathcal{O}(m)$ sur \mathbf{P}_A^n se calcule comme suit :*

- $H^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(m)) = S_m$ si $m \geq 0$ et est nulle sinon.
- $H^q(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(m))$ isomorphe au (dual du) module $H^0(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(-n-1-m))$.
- $H^q(\mathcal{O}(m))$ est nul si $0 < q < m$.

Remarque 16.5.2. — *Comme on le voit, dès qu'on sait que la cohomologie d'un quasi-cohérent sur un affine est nulle, la preuve précédente est vraie sans hypothèse noethérienne : elle vaut donc en général en fait.*

16.6. Applications à Bézout, Noether AF+BG

Soient $H_i = V(f_i)$, $i = 1, \dots, n$ des hypersurfaces de \mathbf{P}_k^n . On suppose que $X = H_1 \cap \dots \cap H_n$ est fini. On a vu (13.4.a) que le complexe de Koszul fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow \bigwedge^n E \rightarrow \bigwedge^{n-1} E \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

avec $E = \bigoplus \mathcal{O}(-d_i)$, $d_i = \text{deg}(f_i)$. Comme X est affine, on a $H^q(X, \mathcal{O}) = 0$ si $q > 0$ de sorte que

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \sum (-1)^q \dim H^q(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}).$$

Comme la caractéristique d'Euler est additive sur les suite exactes, on a

$$\sum (-1)^q \chi(\bigwedge^q E) = \chi(X, \mathcal{O}).$$

En particulier, ce nombre ne dépend pas des f_i se coupant en un nombre fini de points mais seulement des d_i . Bien entendu, si X est de plus lisse et que ses points sont rationnels, on a

$\mathcal{O}_{X,x} = k(x) = k$ si $x \in X$ et $\mathcal{O}_X = \bigoplus_{x \in X} k(x)$ de sorte qu'on a $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}) = \text{card}(X)$. En général, si $x \in X$, on définit la multiplicité $\mu_{x,X}$ de X en x par la formule

$$\mu_{x,X} = \dim_k \mathcal{O}_{X,x}$$

qui est fini car X est de dimension nulle. On a alors visiblement

$$\chi(X, \mathcal{O}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}) = \sum_{x \in X} \mu_{x,X}.$$

Pour calculer ce nombre, on peut supposer k infini car $\chi(X, \mathcal{O}) = \chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{O})$ d'après 16.3.10.

Prenons donc $f_i = X_i^{d_i}$ de sorte que $X \subset D(X_0)$. Alors, \mathcal{O}_X est défini dans $k[x_1, \dots, x_n]$, $x_i = X_i/X_0$ par $k[x_i]/(x_i^{d_i})$ qui est de dimension $d_1 \cdots d_n$.

Tenant compte de 13.4.1, on a donc montré

Proposition 16.6.1 (Théorème de Bézout). — *Si l'intersection X des hypersurfaces $V(f_i)$ de \mathbf{P}_k^n est finie, alors X est de longueur $d_1 \cdots d_n$. En particulier, si les f_i se coupent transversalement en des points rationnels, alors $\text{card}(X) = d_1 \cdots d_n$.*

Exercice 16.6.2. — *Soient f, g deux polynômes homogènes non constants sans facteur commun. Montrer que $V(f) \cap V(g)$ est fini. Comment alors reformuler le théorème de Bézout dans le plan projectif ?*

16.7. Applications aux faisceaux cohérents sur \mathbf{P}_A^n

De même qu'une section globale d'un faisceau cohérent un ouvert $D(f)$ d'un espace affine se prolonge au tout, de même une section d'un faisceau cohérent sur l'ouvert $D(x_i)$ de \mathbf{P}_A^n se prolonge en une section de $\mathcal{F}(m)$ pour m assez grand comme on l'a déjà vu. Ainsi, $\mathcal{F}(m)$ est engendré par ses sections globales si $m \gg 0$. C'est le théorème A de Serre. En particulier, tout faisceau cohérent est quotient d'une somme directe finie de faisceaux $\mathcal{O}(m)$.

Théorème 16.7.1. — *Soit \mathcal{F} cohérent sur \mathbf{P}_A^n . Les groupes de cohomologie $H^q(\mathcal{F})$ sont de type fini. De plus, il existe m_0 tel que $H^q(\mathcal{F}(m)) = 0$ si $q > 0$ et $m > m_0$.*

Preuve : On fait une récurrence descendante sur $q > 0$. Si $q > n + 1$, c'est vrai (\mathbf{P}_A^n est recouvert par $n + 1$ ouverts affines). Sinon on écrit \mathcal{F} comme quotient d'une somme $\bigoplus \mathcal{O}(d)$ de noyau \mathcal{G} , cohérent car A est noethérien. La suite exacte

$$H^q(\bigoplus \mathcal{O}(d)) = \bigoplus H^q(\mathcal{O}(d)) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{G})$$

assure alors grâce à l'hypothèse de récurrence sur \mathcal{G} et à la proposition 16.5.1 la finitude et la nullité cherchée. ■

Remarque 16.7.2. — *Il est à noter que, la cohomologie d'un faisceau cohérent ne dépendant que de son support (si i est l'inclusion d'un fermé dans X on a toujours que \mathcal{F}_Y et $i_* \mathcal{F}$ ont même cohomologie car i_* envoie flasque sur flasque), que cette proposition contient la finitude de la cohomologie de tout faisceau cohérent sur une variété projective. En fait, c'est vrai pour les schémas propres sur A , ce qui peut se prouver par réduction au cas projectif. Notons également que la dimension des espaces de cohomologie d'un faisceau cohérent sur une variété projective ne dépendent pas du corps de base (16.3.10).*

Exercice 16.7.3. — *Montrer qu'un faisceau cohérent sur \mathbf{P}_A^n avec A local noethérien est plat sur A si et seulement si $H^0(\mathcal{F}(l))$ est libre si $l \gg 0$.*

Corollaire 16.7.4. — *Soit \mathcal{F} cohérent sur X un A -schéma projectif et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de A -schémas noethériens disons. Alors, les images directes $R^j f_* \mathcal{F}$ sont des faisceaux cohérents sur Y .*

Preuve : Comme X est projectif, il est séparé sur A de sorte que le morphisme graphe $X \rightarrow X \times_A Y$ est une immersion fermée. Choisissons une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n$. Ainsi, f est le composé d'une part du composé i des deux immersions fermées

$$X \rightarrow X \times_A Y \text{ et } X \times_A Y \rightarrow \mathbf{P}_A^n \times_A Y$$

et, d'autre part, de la projection $g : \mathbf{P}_A^n \times_A Y \rightarrow Y$. Mais, pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(B)$ de Y , on a donc

$$H(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = H(\mathbf{P}_B^n, i_*\mathcal{F}).$$

Or, un faisceau cohérent sur un fermé de \mathbf{P}_B^n est simplement un faisceau cohérent sur \mathbf{P}_B^n supporté par ce fermé, de sorte que $i_*\mathcal{F}$ est cohérent. Mais on invoque alors 16.7.1. Comme le faisceau associé à $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ est $R^i f_*\mathcal{F}$, le lemme suit. ■

Proposition 16.7.5. — *Soit \mathcal{F} cohérent sur \mathbf{P}_A^n . On suppose que \mathcal{F} est engendré par des sections globales s_1, \dots, s_N . Alors, la flèche $H^0(\mathcal{O}(m))^N \xrightarrow{s_i} H^0(\mathcal{F}(m))$ est surjective si m assez grand.*

Preuve : Soit \mathcal{G} le noyau de l'évaluation $\mathcal{O} \xrightarrow{s_i} \mathcal{F}$. Si m est assez grand, on a $H^1(\mathcal{G}(m)) = 0$ d'où la proposition par la suite de cohomologie. ■

Remarque 16.7.6. — *Rappelons que \mathcal{F} est quotient d'un faisceau de la scindé de la forme $\mathcal{O}(-m)^N$ de sorte que $\mathcal{F}(m)$ est engendré par ses sections.*

16.8. Cohomologie et dimension

On peut montrer que la cohomologie d'un faisceau quasi-cohérent sur un schéma noethérien de dimension d est nul en degré $> d$ (comparer avec 16.3.9). Nous nous contenterons du résultat suivant.

Proposition 16.8.1. — *Soit \mathcal{F} quasi-cohérent sur un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_k^n de dimension d . Alors, $H^q(X, \mathcal{F})$ est nul si $q > d$.*

Preuve : Tout d'abord, \mathcal{F} est la réunion de ses-sous faisceaux \mathcal{F}_i cohérents (pour le voir, observer par exemple qu'une section de \mathcal{F} sur $D(X_i)$ se prolonge en un section globale de $\mathcal{F}(N)$ pour N assez grand, et donc est dans l'image (cohérente) d'un morphisme $\mathcal{O}(-N) \rightarrow \mathcal{F}$). Comme le foncteur limite inductive est exact, il commute à la cohomologie : on a $H^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim H^q(X, \mathcal{F}_i)$. Il suffit donc de prouver la nullité de $H^q(X, \mathcal{F}_i), q > d$ pour tout i : on peut supposer \mathcal{F} cohérent. On peut supposer k infini. On fait une récurrence sur d . Si d est nul, X est (topologiquement) une union d'un nombre fini de points fermés x_i qui sont donc également ouverts. Le complexe de Čech associé est nul en degré > 0 , d'où le résultat dans ce cas. Supposons le résultat prouvé en dimension $d - 1 \geq 0$ et prouvons le en dimension d . Soient a_i les associés de d . L'ensemble des formes linéaires $\phi \in V = H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1))$ qui sont nulles en a_i est un sous-espace vectoriel $V_i \neq V$ de V car V est sans point base. La réunion finie des V_i est donc distincte de V car k infini. Soit alors ϕ qui n'est nulle en aucun des a_i . L'intersection H de X et de $V(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n-1}$ est donc de dimension $d - 1$ et ϕ injective sur \mathcal{F} . La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(N - 1) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}_H(N) \rightarrow 0$$

donne alors par hypothèse de récurrence un isomorphisme

$$\phi : H^q(\mathcal{F}(N - 1)) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{F}(N))$$

pour tout N . Comme $H^q(X, \mathcal{F}(N))$ est nul si $N \gg 0$ (16.3.9), le résultat suit.

16.9. Un critère pour les immersions fermées

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés sur un corps k . On note $\bar{f} : X(\bar{k}) \rightarrow Y(\bar{k})$ le morphisme induit sur les points géométriques.

Lemme 16.9.1. — *Si \bar{f} injectif, alors f injectif.*

Preuve : Supposons que $x, x' \in X$ aient même image $y \in Y$. Si $x \neq x'$, on peut supposer par exemple que x ne se spécialise pas sur x' . Si F, F' sont les adhérences de x, x' , on a donc F' non inclus dans F . Soit I l'adhérence de Y . Les images de F, F' sont des constructibles (6.12.8) qui sont denses, car elles contiennent y . L'image $F \setminus F'$ contient y , donc est un constructible dense dans I : il contient un ouvert dense U de I . De même, l'image de F' contient un ouvert dense U' de I . Par densité des points fermés, on peut trouver y_0 fermé dans l'intersection (qui est non vide). On prend des points fermés x_0, x'_0 dans l'intersection de la fibre et de $F \setminus F', F'$: ils sont encore fermés dans X par le théorème des zéros. On a donc construit deux points fermés distincts ayant même image. Comme les extensions résiduelles de x_0, x'_0, y_0 sont des extensions finies de k , on peut choisir un k -plongement des corps résiduels dans \bar{k} , ce qui fournit deux points distincts de $X(\bar{k})$ ayant même image dans $Y(\bar{k})$, une contradiction. ■

Attention, la réciproque est fautive bien entendu (penser à $\text{Spec}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{R})$ vu comme morphisme de \mathbf{R} -variétés).

Définition 16.9.2. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de k -variétés. On dit que f*

- *sépare les points si f induit une injection $X(\bar{k}) \rightarrow Y(\bar{k})$:*
- *sépare les tangentes si la différentielle*

$$df(x) : T_x X_{\bar{k}} \rightarrow T_{f(x)} Y_{\bar{k}}$$

est injective pour tout $x \in X(\bar{k})$.

Proposition 16.9.3. — *Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de k -variétés projectives est une immersion fermée si et seulement si f sépare les points et les tangentes.*

Preuve : La partie directe est laissée en exercice. Supposons que f sépare les points et les tangentes. Comme f sépare les points, f est injective d'après le lemme précédent. Comme X est complète, f est fermée (propre en fait) et donc f est un homéomorphisme sur son image $f(X)$. De même d'ailleurs $f \otimes \bar{k}$ est injective. Reste à voir que

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

est surjectif. Comme la cohomologie d'une k variété commute au changement de base plat, on peut par changement de base $k \rightarrow \bar{k}$ supposer $k = \bar{k}$. Comme $f_* \mathcal{O}_X$ est cohérent, le conoyau \mathcal{Q} de $f^\#$ l'est aussi (16.7.4).

On doit donc vérifier la nullité de $\mathcal{Q} \otimes k(y)$ pour tout point **fermé** y de Y .

Bien entendu, si $y \notin f(X)$, on a $(f_* \mathcal{O}_X)_y = 0$, et c'est terminé (rappelons que $f(X)$ est fermé). Sinon, choisissons x fermé dans X au dessus de y .

Lemme 16.9.4. — *Soit $x \in X$. Le morphisme de localisation $(f_* \mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est bijectif.*

Preuve : On identifie X à un fermé de Y et x à son image $f(x)$. Comme $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, les voisinages ouverts U_X de x dans X sont de la forme $V_Y \cap X$ où V voisinage ouvert de x dans Y . On a alors

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in U_X} \mathcal{O}_X(U_X) = \varinjlim_{x \in V_Y} \mathcal{O}_X(V_Y \cap X) = \varinjlim_{x \in V_Y} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_Y)) = (f_* \mathcal{O}_X)_x.$$

■

Ainsi, le localisé en $y = f(x)$ de la suite exacte

$$\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

s'identifie à

$$\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{Q}_y \rightarrow 0.$$

En prenant des voisinages affines convenables, on est ramené au problème algébrique suivant : on a un morphisme de k -algèbres locales $f^\# : A \rightarrow B$ de conoyau Q avec $f^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ et on veut montrer qu'on a

$$Q \otimes k(y) = Q/\mathfrak{m}_A Q = 0.$$

Comme $k(x) = k(y) = k = \bar{k}$ car x, y sont fermés, la flèche f induit un isomorphisme

$$(16.9.a) \quad A/\mathfrak{m}_A \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{m}_B.$$

Comme f sépare les tangentes en x , la flèche f induit une surjection

$$\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2.$$

Tensorisant par A/\mathfrak{m}_A , on obtient une suite exacte

$$A/\mathfrak{m}_A \rightarrow B/\mathfrak{m}_A B \rightarrow Q/\mathfrak{m}_A Q \rightarrow 0.$$

Le noyau de la surjection $B/\mathfrak{m}_A B \rightarrow B/\mathfrak{m}_B$ est $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B$. Comme $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ est surjective, on a

$$(\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B) \otimes_B B/\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_B/(\mathfrak{m}_B^2 + \mathfrak{m}_A B) = 0$$

ce qui donne (Nakayama) $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B = 0$. On a donc une suite exacte

$$A/\mathfrak{m}_A \rightarrow B/\mathfrak{m}_B \rightarrow Q/\mathfrak{m}_A Q \rightarrow 0$$

ce qui, compte tenu de 16.9.a, donne la proposition. ■

16.10. Application aux systèmes linéaires

Soit L un fibré en droites (ie un faisceau localement libre de rang 1) sur une k variété X . On note $\bar{X}, \bar{L} \dots$ leurs changements par $k \rightarrow \bar{k}$. Si $V \subset H^0(X, L)$ un système linéaire de L , on note encore $\bar{V} = V \otimes_k \bar{k}$: comme la cohomologie commute à l'extension des scalaires, c'est un système linéaire de \bar{L} . Si $x \in X(\bar{k})$, la fibre $L_x = L \otimes k(x)$ est, non canoniquement, isomorphe à \bar{k} . On note $s(x)$ l'image dans cette fibre d'une section $s \in H^0(X, L)$. On note alors \bar{V}_x le noyau $\text{Ker}(\bar{V}_x \rightarrow L_x)$ de l'évaluation en x .

Définition 16.10.1. — Soit $V \subset H^0(X, L)$ un système linéaire. On dit que V

- est sans point base si pour tout $x \in X(\bar{k})$, il existe $s \in \bar{V}$ tel que $s(x) \neq 0$;
- sépare les points, si pour tout $x, y \in X(\bar{k})$, il existe $s \in \bar{V}$ tel que $s(x) = 0$ et $s(y) \neq 0$;
- sépare les tangentes si la projection $\bar{V}_x \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes L_x$ est surjective.

Dire que V est sans point base, c'est dire que le conoyau \mathcal{Q} de l'évaluation $\mathbf{e} : V \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow L$ vérifie $\mathcal{Q} \otimes k(x)$ pour tout point fermé x (théorème des zéros comme d'habitude qui assure qu'alors $k(x)$ se plonge dans \bar{k}) de sorte que \mathcal{Q} est nul (il est cohérent et les points fermés sont denses). Ainsi (propriété universelle du projectif rappelons le), il existe un unique morphisme $f_V : X \rightarrow \mathbf{P}V = \text{Proj}(\text{Sym} V)$ tel que l'image inverse $V \otimes_k \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ s'identifie à \mathbf{e} .

Proposition 16.10.2. — Soit L un fibré en droites sur X une variété projective. Soit V un système linéaire de L . Alors, si V est sans point base, sépare les points et les tangentes, le morphisme f_V est une immersion fermée.

Preuve : C'est une reformulation de 16.9.3. Par construction, $f_V(x)$ est l'hyperplan de \bar{V} des sections nulles en x . Mais alors, dire que V sépare les points, c'est dire que f est injective sur les points géométriques. Rappelons alors (??) que le choix de coordonnées homogènes $x = (x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}^{n+1} = \bar{V}^*$ au dessus de $x \in \mathbf{P}_k^n$ identifie $T_x \mathbf{P}_k^n$ avec $T_x \mathbf{A}_k^{n+1}/\bar{k}x = \bar{V}^*/\bar{k}x$ de sorte que le cotangent $T_x^* \mathbf{P}_k^n$ s'identifie au sous-espace \bar{V}_x de l'espace \bar{V} formes linéaires sur \bar{V}^* qui sont nulles en $x \in \bar{V}^*$. Si on ne veut pas choisir de coordonnées homogènes, autrement dit d'isomorphisme $\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} k(x) \xrightarrow{\sim} \bar{k}$, on a plutôt un isomorphisme $(\bar{V}^*/\bar{k}x \otimes \mathcal{O}(1)) \otimes k(x) \xrightarrow{\sim} T_x^* \mathbf{P}_k^n$. La (co)différentielle de \bar{f}_V en x est alors l'application canonique $\bar{V}_x \otimes L_x^{-1} \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Dire que V sépare les tangentes c'est dire que cette codifférentielle est surjective, autrement dit que f_V sépare les tangentes en x . ■

CHAPITRE 17

DEGRÉ DES VARIÉTÉS PROJECTIVES

Dans cette partie, on se donne un corps k . On s'intéresse aux sous-variétés X (fermées) du projectif \mathbf{P}_k^m . On va associer à X un entier naturel $\deg(X)$, qui est invariant par extension du corps de base. On montrera que si k est algébriquement clos disons et X irréductible de dimension d , un espace linéaire de codimension d général coupe X en $\deg(X)$ points convenablement comptés, distincts si X est lisse. Comme d'habitude, il est commode d'associer à tout faisceau cohérent \mathcal{F} un degré, même si c'est avant tout le cas $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ qui nous intéresse. On adopte un point de vue un peu démodé faute de temps, pas très loin toutefois du point de vue moderne, développé magnifiquement dans [4]. L'outil est la fonction de Hilbert gradué, analogue de la fonction de Hilbert des modules de type fini dans le cas local (on pourrait d'ailleurs n'utiliser que celle-ci, mais ce n'est pas très agréable).

17.1. Degré des faisceaux cohérents

Soit donc \mathcal{F} cohérent (non nul) sur une variété projective.

Définition 17.1.1. — On appelle dimension de \mathcal{F} la dimension $\dim(\mathcal{F})$ de son support $\text{Supp}(\mathcal{F}) = V(\text{Ann}(\mathcal{F}))$. La fonction de Hilbert $\chi_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} est la fonction $\chi_{\mathcal{F}} : n \mapsto \chi(\mathcal{F}(n))$.

Observons que la cohomologie commutant aux extensions de corps, on peut pour le calcul de $\chi_{\mathcal{F}}$ supposer k infini (algébriquement clos si cela rassure). Si $i : X \rightarrow \mathbf{P}_k^m$ est une immersion fermée, on a $H^*(\mathcal{F}) = H^*(i_*\mathcal{F})$ et $i_*\mathcal{F}$ cohérent. De plus, \mathcal{F} et $i_*\mathcal{F}$ ont des supports isomorphes. On peut donc supposer $X = \mathbf{P}_k^n$, et si on veut $n > \dim(\mathcal{F})$ (utiliser un plongement de Veronese). Comme dans le cas local, montrons le résultat suivant.

Proposition 17.1.2. — Il existe des entiers $n_0, a_i \in \mathbf{Z}, i = 0, \dots, d = \dim(\mathcal{F})$ tels que

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum a_i \binom{n+i}{i}.$$

De plus $a_d > 0$: on l'appelle le degré de \mathcal{F} et on le note $\deg(\mathcal{F})$.

Preuve : On peut supposer k infini. On fait une récurrence sur d . Si d est nul, le support de \mathcal{F} est fini. On choisit (k infini) un hyperplan ne le rencontrant pas. Le faisceau $\mathcal{O}(n)$ est trivial sur le complémentaire de H , de sorte que $\mathcal{F}(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ pour tout n . On a alors $\chi(\mathcal{F}(n)) = \chi(\mathcal{F})$ pour tout n , démontrant la proposition dans ce cas. Notons que \mathcal{F} s'identifiant à un faisceau sur son support-schématique $V(\text{Ann}(\mathcal{F}))$ qui est de dimension nulle, on a alors simplement dans ce cas

$$\deg(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}) = \dim H^0(\mathcal{F})$$

d'après 16.8.1.

Supposons le résultat prouvé en dimension $d-1 \geq 0$, et prouvons le en dimension d . On procède comme dans la preuve de 16.8.1. Soit $\phi \in H^0(\mathcal{O}(1))$ une forme linéaire n'annulant aucun point associé de \mathcal{F} , définissant un hyperplan. Le support de la restriction $\mathcal{F}|_H = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$ de \mathcal{F} à H est

exactement $\text{Supp}(\mathcal{F}) \cap H$ (exercice) qui donc est de dimension $d - 1 \geq 0$ par construction. En particulier, cette restriction est non nulle. La suite exacte de cohomologie de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(n - 1) \rightarrow \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}_H(n) \rightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à $\mathcal{F}|_H$, on a pour n assez grand une écriture valable pour $n \geq n_0$

$$P(n) = \chi_{\mathcal{F}}(n) - \chi_{\mathcal{F}}(n - 1) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \left(\binom{n+i+1}{i+1} - \binom{n+i}{i+1} \right)$$

avec $a_{d-1} \in \mathbf{N}^*$. En sommant de n_0 à $n \geq n_0$, on obtient

$$\chi_{\mathcal{F}}(n) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{n+i+1}{i+1} + C$$

où C est un certain entier ce qui achève la preuve. ■

Remarque 17.1.3. — Avec les notations de la preuve, on a prouvé au passage la formule $\text{deg}(\mathcal{F}|_H) = \text{deg}(\mathcal{F})$ si H hyperplan ne passant pas par les associés de \mathcal{F} . Notons également que le degré d’une somme directe de faisceaux de même dimension est la somme des degrés. Notons enfin que comme $\binom{n+i}{i}$ est équivalent en $n = +\infty$ à $\frac{n^i}{i!}$, on trouve le degré en calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d! \chi_{\mathcal{F}}(n)}{n^d}$.

Définition 17.1.4. — Le degré d’une sousvariété fermée X de \mathbf{P}_k^m est le degré de \mathcal{O}_X .

17.2. Degré et cycle

Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent de dimension $d \geq 0$. Soit F l’ensemble fini des points génériques x de \mathcal{F} tels que $\dim(\bar{x}) = d$. Le module \mathcal{F}_x est de longueur

$$\text{lg}(\mathcal{F}_x) = \sum_n \dim_{k(x)}(\mathfrak{m}_x^n \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x^{n+1} \mathcal{F}_x)$$

finie. En effet, si $X = V(\text{Ann}(\mathcal{F}))$ est le support schématique de \mathcal{F} , par définition x est générique dans X et donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien (6.2.6). Comme \mathcal{F}_x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de type fini, on a la finitude de la longueur.

Définition 17.2.1. — Un cycle (de \mathbf{P}_k^m) est une somme formelle finie $\sum a_i x_i$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \in \mathbf{P}_k^m$. Le cycle $Z(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} est la somme formelle

$$Z(\mathcal{F}) = \sum_{x \in F} \text{lg}(\mathcal{F}_x) x.$$

Le degré de $Z(\mathcal{F})$ est

$$\text{deg}(Z(\mathcal{F})) = \sum_{x \in F} \text{lg}(\mathcal{F}_x) \text{deg}(\bar{x}).$$

Montrons que le degré de \mathcal{F} ne dépend que de $Z(\mathcal{F})$. Précisément, on a

Proposition 17.2.2. — On a l’égalité $\text{deg}(\mathcal{F}) = \text{deg}(Z(\mathcal{F}))$.

Preuve : Soit $S = k[x_0, \dots, x_m]$ l’algèbre (graduée) du projectif. Choisissons M un S -module gradué de type fini tel que $\mathcal{F} = \tilde{M}$. On a un analogue gradué du lemme de dévissage ??.

Lemme 17.2.3 (Lemme de dévissage gradué). — Il existe une filtration (graduée)

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

avec $M_i/M_{i+1} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}_i[d_i]$, avec \mathfrak{p}_i idéaux premiers homogènes de S .

Preuve : On procède comme dans 6.4.6. Si M est nul, c'est terminé. Sinon, on choisit un élément maximal \mathfrak{p}_1 dans les annulateurs $\text{Ann}(m)$ d'éléments **homogènes** de M . On vérifie que \mathfrak{p}_1 est premier. Comme m est homogène de degré $-d_1$, l'idéal \mathfrak{p}_1 est homogène. On pose $M_0 = Sm \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{p}[d_1]$. On recommence avec M/M_1 et le processus s'arrête car M noethérien. ■

Ceci fournit une filtration de \mathcal{F} par des $\mathcal{F}_i = \tilde{M}_i$ tel que le gradué gr^i soit de la forme $\mathcal{O}_{X_i}[d_i]$ avec $X_i = V(\mathfrak{p}_i)$ (on enlève les indices tels que $\tilde{M}_i = \tilde{M}_{i+1}$, correspondant à $\mathfrak{p}_i = (x_0, \dots, x_n)$). Le support de \mathcal{F} est, ensemblistement, la réunion des X_i . Si maintenant $x = \mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$ est un point générique de F , c'est un point générique d'un des X_i . Comme \mathfrak{p} est minimal parmi les \mathfrak{p}_i . On a alors $(S/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}} = 0$ ou $S_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$ suivant qu'on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ ou non. En prenant la partie de degré 0, on a donc $\text{gr}^i \mathcal{F}_x = 0$ ou $k(x)$ si x minimal. Ainsi, la longueur de \mathcal{F}_x est le d'indices i tels que $\text{gr}^i M = S/\mathfrak{p}[d_i]$. De l'identité

$$\sum_i \chi(\mathcal{F}_i()) = 0$$

on déduit

$$\chi_{\mathcal{F}}(n) = \sum \chi(\mathcal{O}_{X_i}(d_i + n))$$

et en comparant les termes en n^d on obtient

$$\deg(\mathcal{F}) = \sum_{x \in F} \lg(\mathcal{F}_x) \deg(\mathcal{O}_{\bar{x}}).$$

■

17.3. Intersection avec une hypersurface générale

Soit X fermé dans \mathbf{P}_k^m de dimension > 0 et $P \in S$ homogène de degré d définissant une hypersurface H . Notons que le théorème de la dimension des intersections dans le projectif assure que $X \cap H$ est non vide. On note simplement $Z(X)$ pour $Z(\mathcal{O}_X)$: on ne conserve dans $Z(X)$ que les composantes \bar{x} de dimension maximale avec leur multiplicités, la longueur de $\mathcal{O}_{X,x}$. Par exemple, comme $H(\mathbf{P}_k^m, \mathcal{O}(n)) = S_n$ si $n \geq 0$, on a

$$\chi(\mathcal{O}_H(n)) = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n-d}{m} = \frac{d}{(m-1)!} n^{m-1} + \text{termes d'ordre} < m-1.$$

de sorte que $\deg(H) = d$ d'après 17.1.3.

Proposition 17.3.1. — *Si P non diviseur de zéro dans X , alors on a $\deg(X \cap H) = \deg(Z(X \cap H)) = \deg(X) \deg(H)$.*

Preuve : La première égalité nous est déjà connue. On écrit simplement la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(n-d) \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_{X \cap H}(n) \rightarrow 0$$

qui donne

$$\chi(X \cap H, \mathcal{O}(n)) = \chi(X, \mathcal{O}(n)) - \chi(X, \mathcal{O}(n-d)).$$

On écrit ensuite $n^a - (n-d)^a = adn^{a-1} + o(n^a)$ de sorte qu'on un équivalent

$$\chi(X \cap H, \mathcal{O}(n)) \sim d \deg(X) \frac{n^{\delta-1}}{(\delta-1)!}$$

où $\delta = \dim(X)$ et on invoque 17.1.3 pour conclure. ■

En fait, en lisant attentivement les preuves, il aurait suffi que P ne soit nul en aucun point générique d'une composante de X de dimension maximale pour que l'égalité de la proposition soit correcte.

En particulier, si on coupe par un hyperplan en bonne position, les composantes de l'intersection de dimension $\dim(X) - 1$ sont de degré $\leq \deg(X)$.

Exercice 17.3.2. — Montrer qu'une variété intègre de degré 1 est un espace linéaire. Montrer qu'une variété intègre de degré 2 est une hypersurface quadrique d'un sous-espace linéaire. Montrer qu'il existe des variétés de degré 3 dans \mathbf{P}^3 qui sont de dimension 1, mais qui ne sont pas planes (cf. la cubique tordue vue en TD).

Exercice 17.3.3. — Soit X un fermé irréductible de dimension d de \mathbf{P}_k^n et L un sous-espace linéaire de codimension d . Supposons que $X \cap L$ soit fini et que X soit Cohen-Macaulay. Montrer alors qu'on a $\deg(X \cap L) = \deg(X)$. Le résultat demeure-t-il si X n'est pas supposé de Cohen-Macaulay ?

17.4. Sections hyperplanes générales : le théorème de Bertini

On suppose le corps k infini. Soit X une variété irréductible de degré d . Notons \mathbf{P} l'espace projectif des droites de $H^0(\mathcal{O}(1))$: c'est l'ensemble des points rationnels de $\text{Proj}(\text{Sym}H^0(\mathcal{O}(1))^*)$. On identifie une telle droite à l'hyperplan H de \mathbf{P}_k^m défini par n'importe quel élément non nul de cette droite.

On sait d'après ce qui précède qu'il existe un ouvert dense de Zariski de U de \mathbf{P} tel que si $H \in U(k)$ -on dira pour H général-, l'intersection $X \cap H$ est purement de dimension 1 et de degré d .

Proposition 17.4.1 (Bertini). — Si X est lisse et H général, l'intersection $X \cap H$ est lisse.

Preuve : On peut supposer X irréductible. Considérons le graphe d'incidence Γ paramétrant les couples $(x, H) \in X \times (\mathbf{P}_k^n)^*$ tels que $x \in H$. Soient P_1, \dots, P_n des équations homogènes de X . La condition x point lisse de $X \cap H, H = \text{Ker}(\phi)$ s'écrit simplement $\text{rg}_{k(x)} J_{P, \phi} = n - d + 1$ où J est la matrice jacobienne. C'est donc une condition ouverte (non annulation de mineurs de matrices). La projection du complémentaire G sur l'espace des hyperplans est donc un fermé (propriété de X). Reste à voir que ce fermé est propre. En effet, le complémentaire U est un ouvert qui contient un point rationnel car $\mathbf{P}_k^n(k)$ dense (k infini). Il suffit de prouver que la dimension de Γ est strictement inférieure à la dimension de m de \mathbf{P}_k^m . On peut supposer (changer de base) que k est algébriquement clos. Pour cela, projetons sur X et regardons la dimension de G_x où x point fermé de X . On peut supposer $x \in D(x_0)$. Dire que ϕ est dans G_x , c'est dire que ϕ s'annule en x (une condition linéaire) et que la différentielle de ϕ/X_0 est nulle dans T_x^*X (d conditions linéaires car la flèche qui à un tel ϕ associe sa classe dans T_x^*X est surjective, puisque les X_i/X_0 sont les coordonnées affines près de x). Cette fibre est donc de dimension $m - 1 - d$. Le théorème de dimension des fibres assure que G est de dimension $m - 1$. ■

En particulier, on voit que le degré d'une variété intègre de dimension d sur k algébriquement clos s'obtient en coupant par un espace linéaire de codimension d général et en comptant les points d'intersection : c'est la définition de nos grands-parents!!!

Exercice 17.4.2. — Montrer que si on suppose seulement X sous-schéma lisse de \mathbf{P}_k^n , alors il existe un ouvert dense U de $(\mathbf{P}_k^n)^*$ tel que si $H \in U(k)$ alors $H \cap X$ est lisse.

17.5. le théorème de Bertini pour les systèmes linéaires en caractéristique nulle

Supposons ici que k est de caractéristique nulle et soit V un système linéaire de L sur une variété irréductible lisse X . Tout élément non nul de $V(k)$ définit une hypersurface H de X . On note \mathbf{P} l'espace projectif paramétrant les droites de V .

Proposition 17.5.1. — *Si V est sans point base, il existe un ouvert Zariski dense U de $\mathbf{P}(k)$ tel que si $H \in U$, alors $X \cap H$ est lisse.*

Preuve : On procède un peu comme dans Bertini (les détails sont laissés au lecteur). On considère le graphe d'incidence Γ paramétrant les couples $(x, H) \in X \times \mathbf{P}$ tels que $x \in H$. La projection sur X est un fibré projectif (du fibré (dual du) noyau de la surjection $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L$). Ainsi Γ est lisse de dimension $\dim(X) + \dim \mathbf{P} - 1$. La projection sur \mathbf{P} est surjective. Le théorème de platitude générique et le théorème de Chevalley assurent l'existence d'un ouvert dense Ω de \mathbf{P} telle que la restriction de cette projection est plate au dessus de Ω , donc équidimensionnelle de dimension relative $\dim(\Gamma) - \dim(\mathbf{P}) = \dim(X) - 1$. La fibre générique est un localisé de Γ , donc est régulière, de dimension $\dim(X) - 1$. Comme on est en caractéristique nulle, elle est lisse. L'ensemble des points de Γ où la fibre est lisse de dimension $\dim(X) - 1$ est un ouvert (critère jacobien) contenant la fibre générique. L'image de son complémentaire est donc contenu dans un fermé strict (Chevalley) et les points rationnels du complémentaire fournissent l'ouvert cherché. ■

Exercice 17.5.2. — *Montrer qu'on ne peut se passer de l'hypothèse de caractéristique nulle (prendre par exemple $X = \mathbf{A}_k^1$ avec k de caractéristique $p > 0$ et $V = \langle x^p, (x + 1)^p \rangle$).*

CHAPITRE 18

DEGRÉ ET PROJECTIONS LINÉAIRES

18.1. Quelques remarques sur les projections linéaires

Se donne un k -espace vectoriel \underline{V} de dimension $n + 1$. À toute sous-variété linéaire $L = \underline{P}_L$ de $\mathbf{P} = \underline{P}\underline{V}$ est associée une projection linéaire

$$\pi_L : \mathbf{P} - L \rightarrow \mathbf{P}_L$$

où $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}(\underline{V}/\underline{L})$ est un espace projectif de dimension $\text{codim}_{\mathbf{P}} L - 1$. Bien entendu, \mathbf{P}_L paramètre les sous-variétés linéaires M de dimension $\dim(L) + 1$ de \mathbf{P} contenant L . La projection s'identifie à $y \mapsto \langle y, L \rangle$, la sous-variété linéaire engendrée par y et L .

L'application tangente en $[x] \notin L$ s'identifie à l'application linéaire quotient

$$(18.1.a) \quad T_x \mathbf{P} = \underline{V}/k\underline{x} \rightarrow \underline{V}/k\underline{x} + \underline{L}.$$

Notons que $\underline{x} \notin \underline{L}$.

Soit alors X sous-variété de \mathbf{P} de dimension r et degré d . Si $x \in X$, on note $\underline{T}_x X$ le sous-espace de \underline{V} contenant x tel que

$$\underline{T}_x X / k\underline{x} = T_x X \subset T_x \mathbf{P} = \underline{V}/k\underline{x}.$$

Lemme 18.1.1. — Si $L \cap X = \emptyset$, la restriction

$$\pi_L : X \rightarrow \mathbf{P}_L$$

est finie sur son image. De plus, sa différentielle en $x \in X$ est injective si et seulement si $\underline{L} \cap \underline{T}_x X = 0$.

Preuve : comme X est projective, il suffit de montrer que les fibres sont finies. Or, la fibre F_x au dessus de $\pi_L(x)$ est l'intersection $\langle x, L \rangle \cap X$. Si F_x était de dimension > 0 , elle rencontrerait l'hyperplan L de $\langle x, L \rangle$, et donc L rencontrerait X , puisque F_x est contenu dans X , ce qui n'est pas. Dire que la différentielle est injective, c'est dire que la projection

$$\underline{T}_x X / k\underline{x} \rightarrow \underline{V}/k\underline{x} + \underline{L}$$

est injective d'où le lemme car $\underline{x} \notin \underline{L}$. ■

En particulier, si L est de plus de codimension $r + 2$, on a $\dim \mathbf{P}_L = r + 1$ et $\pi_L(X)$ est une hypersurface, certainement de degré $d_L \leq d$ de \mathbf{P}_L . Une équation

$$h_L \in \text{Sym}^{d_L}(\underline{V}/\underline{L})^*$$

peut-être vue comme un élément

$$h_L \in \text{Sym}^{d_L}(\underline{V})^*$$

définissant une hypersurface H_L de \mathbf{P} . En coordonnées, on peut choisir des coordonnées homogènes telle que L soit défini par les équations

$$x_0 = \dots = x_{r+1} = 0.$$

La projection est alors l'application (rationnelle)

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{r+1})$$

et H_L est défini par l'équation (conique)

$$h_L(x_0, \dots, x_{r+1}) = 0.$$

Par construction,

$$y \in H_L \text{ si et seulement si } y \in L \text{ ou } \pi_L(y) \in \pi_L(X).$$

En particulier, on a $X \subset H_L$.

Lemme 18.1.2. — *La variété X est réunion ensembliste des d'hypersurfaces H_L où L décrit les espaces linéaires de codimension $r + 2$ ne rencontrant pas L .*

Preuve : Soit $y \notin X$ un point (fermé). Soit

$$\pi_y : \mathbf{P} - y \rightarrow \mathbf{P}_y \simeq \mathbf{P}^{n-1}$$

la projection correspondante. La restriction de la projection à X étant finie, son image $\pi_y(X)$ est de dimension r . Soit alors M linéaire de codimension $r + 1$ dans \mathbf{P}_y ne rencontrant pas $\pi_y(X)$. Soit L linéaire dans \mathbf{P} de dimension $\dim(M) = n - 1 - (r + 1) = n - r - 2$, ne contenant pas y , tel que $\pi_y(L) = M$ (exercice d'algèbre linéaire). On a certainement $L \cap X = \emptyset$. Je dis qu'on a $y \notin H_L$. Sinon, il existerait x dans X tel que $\pi_L(y) = \pi_L(x)$, ou encore $y \in \langle x, L \rangle$. Il existerait donc $l \in L$ tels que $y \in \langle x, l \rangle$. Ceci impose $\langle l, y \rangle = \langle x, y \rangle$, et comme l, x sont visiblement distincts de y , on a $\pi_y(l) = \pi_y(x)$, contredisant $M \cap \pi_y(X) = \emptyset$. ■

Proposition 18.1.3. — *Soit X une sous-variété fermée, lisse de \mathbf{P} de degré d . Alors, X est intersection schématique des hypersurfaces de degré d qui la contiennent.*

Preuve : on sait déjà que l'intersection est ensembliste. Il suffit donc de prouver que pour tout $x \in X$, on peut trouver L_1, \dots, L_r espaces linéaires de codimension $r + 2$ ne rencontrant pas X tels que

$$T_x(H_{L_1} \cap \dots \cap H_{L_r}) = T_x X.$$

Autrement dit, il suffit de trouver r tels espaces linéaires tels que les H_{L_i} se coupent transversalement (argument de dimension), puisque l'intersection contient $T_x X$ qui est de codimension $r = \text{codim}(X)$ dans $T_x \mathbf{P}$ puisque X est lisse.

Il suffit de prouver le lemme suivant.

Lemme 18.1.4. — *Soit $x \in X$. Si L est assez général dans $G = G(n, r + 2)$, on a*

- $L \cap X = \emptyset$;
- $\langle x, L \rangle \cap X = \{x\}$ schématiquement ;

Preuve : on sait que G est irréductible de dimension $(r + 2)(n - r - 2)$. Les mauvais L pour les deux premières propriétés sont ceux tels que $\langle x, L \rangle$ rencontre X en $x' \in X$, ou bien tels que $\langle x, L \rangle$ soit tangent à X en x . Soit S_X la variété des sécantes à X passant par x , adhérence de la réunion des droites $\langle x, x' \rangle, x \neq x' \in X$. On vérifie facilement que S_X contient la réunion des droites tangentes à X en x (faire « tendre » x' vers x). Si $L \cap S_X$ est vide, alors L vérifie les deux propriétés requises. Mais S_X est visiblement au plus de dimension $r + 1$ (r libertés pour x' et une droite est de dimension 1). Donc un L générique est comme cela (voir le chapitre degré). ■

Choisissons L comme dans le lemme. Par construction, la fibre schématique au dessus de x est réduite à x .

Lemme 18.1.5. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini. On suppose que la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un point $k(y)$ -rationnel x . Alors, il existe un voisinage U de x tel que f induise une immersion fermée de $f^{-1}(U)$ dans U .*

Preuve : la question est locale sur Y . On se ramène à une A -algèbre finie B , un idéal premier \mathfrak{p} de A tel que $k(\mathfrak{p}) \rightarrow B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ soit un isomorphisme. Soit Q conoyau de $A \rightarrow B$: c'est un A -module de type fini comme B , tel que $Q \otimes k(\mathfrak{p})$ est nul. Nakayama assure que $Q_{\mathfrak{p}}$ est nul, donc, Q est nul dans un voisinage $U = D_A(a)$ de \mathfrak{p} et f induit une immersion fermée de $f^{-1}(U) = D_B(a)$ dans U . ■

Soit L est comme dans le lemme. Alors, il existe un voisinage U de $\pi_L(x)$ tel que $\pi_L : X \rightarrow \mathbf{P}_L$ restreint à $\pi_L^{-1}(U)$ soit une immersion fermée, de sorte que l'image schématique $\pi_L(X) \cap U$ est lisse et que $d\pi_L(x)$ est injective. L'espace tangent de H_L en x est alors l'hyperplan $\underline{L} + \underline{T}_x X / kx$. Mais L (ou \underline{L} comme on veut) varie dans un ouvert dense Ω de $G(\underline{V}, r+2)$. L'image de \underline{L} dans $\underline{V}/\underline{T}_x X$ est un hyperplan et le morphisme $\Omega \rightarrow G(\underline{V}/\underline{T}_x X)$ est visiblement lisse (localement trivial à fibres lisse). L'image de Ω est donc ouverte et donc dense. On en déduit qu'on peut écrire 0 comme intersections de r d'hyperplans de l'image de Ω , puis $T_x X$ comme l'intersection correspondante des $T_x H_L$. La proposition suit. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.
- [2] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974.
- [3] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] William Fulton. *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [5] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [6] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.*, 4,8,11,17,20,24,28,32, 1960-1967.
- [7] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. No. 8, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [8] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971. Lectures Notes in Math., 224.
- [9] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [10] David Mumford. *Abelian varieties*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5.
- [11] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [12] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [13] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]*. InterEditions, Paris, 1995. Une introduction. [An introduction].
- [14] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61 :197–278, 1955.