

Hommage à André Lichnerowicz (1915-1998)⁽¹⁾

Il y a trente ans paraissait le volume 111 des *Annals of Physics*. La quantification par déformation était née. Cet ensemble de deux articles [BBFLS 1978] avait été précédé de plusieurs textes dont les auteurs étaient Daniel Sternheimer, que vous venez d'entendre,⁽²⁾ Moshé Flato, dont Daniel vient d'évoquer la mémoire et dont la personnalité et les travaux en mathématiques et en physique furent si remarquables, et André Lichnerowicz.

Qui était Lichnerowicz ? Pour ses élèves, il était « Lichné ». Pour ses amis, il était « André ». Comme mathématicien, physicien mathématicien, réformateur de l'enseignement des mathématiques en France, et philosophe, il était connu du public comme « Lichnerowicz », une personnalité d'une vaste culture, un homme affable et toujours courtois, un grand homme de science.

On peut aborder l'œuvre et la personnalité d'André Lichnerowicz de bien des façons. On peut, bien sûr, lire les plus de trois cent soixante articles et livres qu'il a publiés, dont les résumés ont paru dans *Mathematical Reviews* et sont disponibles sur « MathSciNet », ou lire seulement la sélection qu'il en a faite lui-même, ceux qui ont été publiés par les éditions Hermann en 1982 en un volume de 633 pages, *Choix d'œuvres mathématiques* [L 1982]. On peut lire les précis de ses travaux jusqu'en 1986, rédigés par Yvonne Choquet-Bruhat, Marcel Berger et Charles-Michel Marle, dans les comptes-rendus de la conférence tenue en son honneur à Paris à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire [PQG 1988], ou son portrait et la transcription d'un entretien avec lui qui ont

⁽¹⁾Traduction de l'hommage prononcé le 7 juillet 2008, à l'occasion du dixième anniversaire de la mort de Lichnerowicz, lors de la séance d'ouverture de la Conférence internationale « Poisson 2008, Poisson Geometry in Mathematics and Physics », tenue au Centre Interfacultaire Bernoulli de l'École Polytechnique Fédérale à Lausanne, devant environ 200 personnes, en majorité des jeunes de tous les pays qui ne connaissaient de Lichnerowicz que le nom ou rien. Une version anglaise de cet hommage se trouve sur le site web de Poisson 2008.

⁽²⁾Cet hommage fut précédé par des hommages à Stanisław Zakrzewski, fondateur de la série de conférences internationales sur la géométrie de Poisson, mort en avril 1998 (par Alan Weinstein), à Paulette Libermann, pour le premier anniversaire de sa mort (par Charles-Michel Marle), et à Moshé Flato, ami et co-auteur de Lichnerowicz, mort en novembre 1998 (par Daniel Sternheimer).

paru dans un beau volume illustré décrivant les carrières de vingt-huit des plus importants savants français du vingtième siècle, *Hommes de Science* [HdeS 1990]. Enfin, et c'est plus triste, on peut lire les éloges scientifiques qui ont paru après sa mort dans la *Gazette des Mathématiciens* [Gazette 1999] qui furent aussitôt traduits pour les *Notices of the American Mathematical Society* [Notices 1999], car Lichnerowicz était aussi célèbre à l'étranger qu'en France. D'autres notices parurent dans le *Journal of Geometry and Physics*, dont il était un des fondateurs, et dans de nombreuses autres revues.

Lichnerowicz, né à Bourbon-l'Archambault (Allier) en 1915, eut une carrière exceptionnelle. De 1933 à 1936 il fut élève à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, où il suivit les cours d'Élie Cartan qui eut une grande influence sur sa pensée mathématique. Il soutint sa thèse de doctorat, préparée sous la direction de Georges Darmon, en 1939 et fut nommé professeur de mécanique à l'Université de Strasbourg en 1941. À cause de la guerre, les enseignants et étudiants de l'Université de Strasbourg s'étaient déjà repliés à Clermont-Ferrand afin de ne pas rester dans la zone occupée par les Allemands. Cependant, en 1943 les Allemands occupèrent aussi Clermont-Ferrand et opérèrent une vague d'arrestations au cours de laquelle Lichnerowicz fut pris, mais fut assez heureux, ou assez audacieux, pour s'échapper. À cette époque, il fit ce qu'il put pour aider ceux qui étaient en danger de mort, ses collègues juifs en particulier.⁽³⁾ Après la Libération, l'Université de Strasbourg retourna à Strasbourg. En 1949, Lichnerowicz fut nommé professeur à l'Université de Paris, puis en 1952 il fut élu au Collège de France, à la chaire de physique mathématique, les chaires du Collège de France étant les plus prestigieuses de toutes.⁽⁴⁾

Quand Lichnerowicz fut élu à l'Académie des Sciences de Paris – il avait seulement 48 ans, ce qui était exceptionnellement jeune pour un

⁽³⁾Dans son autobiographie [S 1997, p. 200], Laurent Schwartz raconte qu'il arriva « que Lichnerowicz, à l'occasion d'un passage – qu'il fit peut-être pour nous [*i.e.*, lui-même et sa femme Marie-Hélène] – dans un commissariat de police, profitât d'une absence d'une ou deux minutes du commissaire pour dérober un instant son cachet et tamponner une [fausse] carte [d'identité] », laquelle ne lui servirait à rien mais sauverait peut-être la vie d'un collègue ou d'un étudiant. Survivre aux années de guerre en France dans l'honneur était en soi un haut fait.

⁽⁴⁾Une chaire de mathématiques avait été créée par François I^{er} lors de la fondation du Collège Royal en 1531 !

membre de l'Académie en ce temps-là – ses élèves, comme c'était la coutume, se cotisèrent pour contribuer à lui offrir son épée d'académicien. (L'épée, créée spécialement pour chaque académicien ou académicienne, est la seule partie de son riche uniforme qui reflète sa personnalité et son œuvre.) Mais deux ans plus tard, pour son cinquantième anniversaire, nous donnâmes presque autant d'argent pour lui offrir un objet beaucoup plus à son goût, ... une pipe ! Il est vrai qu'il était impossible de l'imaginer sans sa pipe à aucun moment ... sauf pendant ses cours où il emplissait le tableau noir d'équations, de son écriture fine et serrée, équations qui comportaient presque toujours un nombre impressionnant d'indices tensoriels. D'ailleurs tous ses portraits photographiques le représentent ... avec sa pipe.

L'œuvre de Lichnerowicz en relativité générale commence avec sa thèse où l'on trouve le premier exposé de la théorie de la relativité générale d'Einstein d'un point de vue de géométrie globale, ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique de signature hyperbolique sur une variété différentiable soit une solution globale des équations d'Einstein. Il montra qu'il ne peut exister de solitons gravitationnels ; il établit l'« équation de Lichnerowicz », équation semi-linéaire elliptique permettant de résoudre les équations des contraintes pour les conditions initiales des équations d'Einstein. Il poursuivit ses travaux dans ce domaine tout au long de sa carrière de recherche. « Géométrie différentielle et analyse globale sur les variétés », « relations des mathématiques avec la physique », « traitement mathématique de la théorie de la gravitation d'Einstein » : c'est ainsi qu'il décrit lui-même ses principaux centres d'intérêt et domaines de recherches dans l'entretien publié dans *Hommes de Science* [HdeS 1990].

Ses travaux en géométrie riemannienne, qui paraissent à partir de 1944, restent particulièrement importants. Il fut parmi les premiers géomètres à établir une relation entre le spectre du laplacien et la courbure de la métrique ; il démontra les équivalences, aujourd'hui classiques, entre les diverses définitions des variétés kählériennes ; il démontra, avec Armand Borel, que le groupe d'holonomie restreint d'une variété riemannienne est compact, et bien d'autres résultats fondamentaux.

Au début des années soixante, Lichnerowicz établit la théorie des spineurs d'Élie Cartan et Hermann Weyl dans le cadre rigoureux de la géométrie différentielle sur une variété pseudo-riemannienne munie d'une

métrique hyperbolique (lorentzienne). Avec cette approche géométrique, il traita dans ses cours au Collège de France des années 1962-1964 la théorie de Dirac et celle de Rarita-Schwinger pour le spin $\frac{3}{2}$, puis la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer ainsi que les transformations CPT, tandis qu'il publiait aussi en 1963 sa célèbre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* sur les spineurs harmoniques [L 1963], où il démontrait que, pour tout champ spinoriel ψ ,

$$\Delta\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}R\psi ,$$

où $\Delta = P^2$ est le laplacien sur les spineurs, le carré de l'opérateur de Dirac P , tandis que ∇ est la dérivation covariante et R est la courbure scalaire. Et il continua ses travaux sur les spineurs jusqu'à ses derniers jours.

À partir des années soixante-dix, Lichnerowicz s'intéressa à l'étude géométrique des systèmes dynamiques. La géométrie symplectique faisait l'objet de travaux depuis quelque temps déjà⁽⁵⁾. En janvier 1973, une conférence, « Geometria simplettica e fisica matematica », se tint à Rome et fut, je crois, le premier congrès international sur ce sujet. Jeune chercheur, j'assistai à ce congrès et j'y entendis et rencontrai nombre des fondateurs de la géométrie symplectique, dont Jean Leray, Irving Segal, Bertram Kostant, Shlomo Sternberg, Włodzimierz Tulczyjew, Jean-Marie Souriau, ainsi que les jeunes Alan Weinstein et Jerry Marsden. Et Lichnerowicz était l'un des organisateurs et il prononça la conférence inaugurale.

La raison principale pour laquelle nous rendons hommage à la mémoire de Lichnerowicz, ici, à cette conférence sur la géométrie de Poisson, est qu'il en fut le fondateur, quelques années avant la publication de l'article sur la quantification par déformation que j'ai évoqué en commençant cet hommage.

Son fils Jérôme Lichnerowicz, parlant de la collaboration de son père avec Moshé Flato, a dit : « Il n'y avait plus de maître ni d'élève mais une synergie incroyable entre deux amis. J'ai vu Moshé soutenir André quand, les années passant, il doutait de ses capacités créatrices », et il a ajouté : « J'ai entendu Moshé me dire : 'C'est incroyable, il [Lichnerowicz] a eu une

⁽⁵⁾Comme l'explique Weyl au début du chapitre VI de son livre sur les groupes classiques [W 1939], il introduisit l'adjectif « symplectique » tiré du grec pour éviter la confusion avec l'adjectif « complexe » dans le sens de « nombre complexe ».

période à vide, mais là il refait des maths comme avant ! » [CMF 2000]. À partir de 1974, travaillant avec Moshé Flato et Daniel Sternheimer, Lichnerowicz formula la définition d'une variété de Poisson en termes de bivecteur, *i.e.*, du 2-tenseur contravariant prôné par Lie, Carathéodory et Tulczyjew, qui est l'analogue de la 2-forme de la géométrie symplectique. Dans son article dans *Topics in Differential Geometry* [L 1976], il définit les variétés canoniques, et l'on peut déjà y trouver une formule pour le crochet de Lie des 1-formes associé à un crochet de Poisson sur les fonctions, mais encore seulement pour le cas des formes exactes,

$$[df, dg] = d\{f, g\} .$$

(Plus tard, il montrera que les variétés canoniques sont les variétés de Poisson dont le feuilletage symplectique est partout de codimension 1.) Dans son article de 1977 au *Journal of Differential Geometry*, « Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées » [L 1977], Lichnerowicz introduisit l'opérateur de cohomologie aujourd'hui appelé « opérateur de cohomologie de Poisson », que l'on doit appeler plutôt « opérateur de cohomologie de Lichnerowicz-Poisson », découverte d'importance. Dans cet article, ainsi que dans [BFFLS 1978], on lit que, dans le cas particulier d'une variété symplectique,

$$\mu([G, A]) = d\mu(A) ,$$

où A est un champ de multivecteurs. (Les notations sont G pour le bivecteur de Poisson et μ pour le prolongement aux multivecteurs de l'isomorphisme du fibré tangent sur le fibré cotangent défini par la forme symplectique, le crochet est le crochet de Schouten-Nijenhuis, et d est la différentielle de de Rham.) Si nous écrivons cette formule en notation plus moderne,

$$\omega^b([\pi, A]) = d(\omega^b(A)) \quad \text{ou} \quad \pi^\sharp(d\alpha) = d_\pi(\pi^\sharp\alpha)$$

(ici, G est remplacé par π et μ par ω^b , d'inverse π^\sharp , tandis que α est une forme différentielle et d_π est la différentielle de Lichnerowicz-Poisson, $d_\pi = [\pi, \cdot]$, agissant sur les multivecteurs), on y voit le précurseur de la propriété de morphisme de complexes satisfaite par l'application de Poisson (inverse de l'application μ précédente), appliquant le complexe de de Rham dans le complexe de Lichnerowicz-Poisson. Avec ses articles précédents écrits avec Flato et Sternheimer [FLS 1974, 1975, 1976] et avec le texte des *Annals of Physics* [BFFLS 1978], résolvant les problèmes de quantification par une déformation de la multiplication commutative des

observables classiques pilotée par une structure de Poisson, cet article fut le fondement de ce qui est devenu un vaste champ de recherches.

C'était le privilège des nombreux élèves de thèse de Lichnerowicz, dont je fus dans les années soixante, d'être reçu par lui dans son bureau exigü dans les combles du Collège de France, ou dans le beau bureau de son appartement, avenue Paul Appell, à la limite sud de Paris. Entouré de collections de revues scientifiques et de hautes piles de documents, Lichné, avec sa pipe, donnait encouragements et suggestions inestimables pour surmonter une difficulté rencontrée dans la recherche. Je savais alors, nous savions tous, que nous parlions à un grand mathématicien. Mais j'étais loin de me douter que je parlais au créateur d'une théorie qui deviendrait un domaine de recherche à part entière, dont les ramifications toucheraient un nombre très important de domaines des mathématiques et de la physique.

Références

[BBFLS 1978] François Bayen, Moshé Flato, Chris Fronsdal, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Deformation theory and quantization, *Annals of Physics*, **111** (1978).

I. Deformations of symplectic structures, 61-110.

II. Physical applications, 111-151.

[L 1982] André Lichnerowicz, *Choix d'œuvres mathématiques*, Hermann, Paris, 1982.

[PQG 1988] *Physique quantique et géométrie*, Colloque Géométrie et Physique de 1986 en l'honneur de André Lichnerowicz, Daniel Bernard et Yvonne Choquet-Bruhat, éd., Hermann, Paris, 1988.

- Yvonne Choquet-Bruhat, *L'œuvre de André Lichnerowicz en relativité générale*, pp. 1-10.

- Marcel Berger, *L'œuvre d'André Lichnerowicz en géométrie riemannienne*, pp. 11-24.

- Charles-Michel Marle, *L'œuvre d'André Lichnerowicz en géométrie symplectique*, pp. 25-42.

[HdeS 1990] *Hommes de Science*, 28 portraits, Entretiens et photographie de Marian Schmidt, Hermann, Paris, 1990.

[Gazette 1999] *Gazette des Mathématiciens*, **81** (1999), 94-95 et **82** (1999), 90-108.

- [Notices 1999] *Notices Amer. Math. Soc.*, **46** (11) (1999), 1387-1396.
- [S 1997] Laurent Schwartz, *Un Mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.
- [L 1963] André Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257** (1963), 7-9.
- [W 1939] Hermann Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1939 ; deuxième édition, 1946,
- [CMF 2000] Jérôme Lichnerowicz, dans *Conférence Moshé Flato 1999*, vol. I, Giuseppe Dito et Daniel Sternheimer, édés., Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 7-8.
- [L 1976] André Lichnerowicz, Variétés symplectiques, variétés canoniques et systèmes dynamiques, dans *Topics in Differential Geometry, in memory of E. T. Davies*, Academic Press, New York, 1976, pp. 57-85.
- [L 1977] André Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geometry*, **12** (1977), 253-300.
- [FLS 1974] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **279** (1974), 877-881.
- [FLS 1975] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Algèbres de Lie attachées à une variété canonique, *J. Math. Pures Appl.* (9), **54** (1975), 445-480.
- [FLS 1976] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications, *J. Mathematical Phys.*, **17** (1976), 1754-1762.

Yvette Kosmann-Schwarzbach
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
École Polytechnique
yks@math.polytechnique.fr
