Habilitation à Diriger des Recherches
UNIVERSITÉ PARIS VII - DENIS DIDEROT

Spécialité : Mathématiques

présentée par

David HERNANDEZ

Sujet :

Autour des représentations des algèbres quantiques : géométrie, dualité de Langlands et catégorification des algèbres cluster

Rapporteurs : M. Henning ANDERSEN, M. Pavel ETINGOF et M. Marc ROSSO.

Soutenue le 17 juillet 2009 devant le jury composé de :

M. Henning ANDERSEN
M. Michel DUFLO
M. Edward FRENKEL
M. Masaki KASHIWARA
M. Peter LITTELMANN
M. Marc ROSSO

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Henning Andersen, Pavel Etingof et Marc Rosso d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, et à Michel Duflo, Edward Frenkel, Masaki Kashiwara et Peter Littelmann d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Hiraku Nakajima, Edward Frenkel, Vyjayanthi Chari, Corrado De Concini, Nicolai Reshetikhin, Nicolas Guay, Serguey Loktev et Bernard Leclerc, avec qui j'ai eu la chance de collaborer ces dernières années.

Toute ma reconnaissance va aux départements de mathématiques de l'Université de Versailles et de l'Ecole Normale Supérieure où j'ai été heureux de travailler.

Enfin, je souhaite ici renouveler sincèrement tous les remerciements exprimés au début de ma thèse, envers mes collègues, mes amis, ma famille, et en particulier Alexa.

Résumé

Nous présentons des résultats obtenus dans cinq directions autour des représentations des algèbres affines quantiques $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. En premier lieu nous prouvons la conjecture de Kirillov-Reshetikhin, c'est-à-dire des formules de caractères pour certaines représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, et nous étendons le résultat à des affinisations minimales ; nous étendons le modèle monomial des cristaux aux représentations extrémales et nous y interprétons des automorphismes de Kashiwara. Ensuite, à l'interface avec la géométrie algébrique, nous définissons une notion de groupes de lacets analytiques avec une factorisation de Riemann-Hilbert qui permet de réaliser géométriquement le centre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ aux racines de 1. Comme application, nous paramétrisons des classes d'équivalences de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ par des G-fibrés sur une courbe elliptique. On résoud le problème de petitesse géométrique posé par Nakajima pour des résolutions de variétés carquois. Troisièmement, nous établissons une nouvelle dualité de Langlands pour des représentations de $\mathfrak{g}$ et de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et nous définissons des groupes quantiques d'interpolation pour l'interpréter. Quatrièmement, nous construisons une catégorie tensorielle pour les algèbres affinisées quantiques et des représentations de dimension finie d'algèbres toroïdales quantiques (et de Cherednik) ; nous proposons un analogue en théorie de Lie des algèbres de réflexion symplectiques. Enfin, nous obtenons des catégorifications monoïdales d'algèbres cluster en terme d'une catégorie $\mathcal{C}_1$ de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Pour ce faire, nous établissons notamment la factorisation en modules premiers de modules simples de $\mathcal{C}_1$.

Mots clés : Algèbres affines quantiques, conjecture de Kirillov-Reshetikhin, variétés carquois, groupe des lacets, dualité de Langlands, algèbres toroïdales quantiques, algèbres de Cherednik, catégorification, algèbres cluster.

Abstract

We present results obtained in five directions around representations of quantum affine algebras $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. We prove the Kirillov-Reshetikhin conjecture which gives character formulas for certain finite dimensional representations of $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, and we extend this result to some minimal affinizations ; we extend the monomial cristal model to extremal representations and we interpret Kashiwara automorphisms in this model. At the interface with algebraic geometry, we define a notion of analytic loop groups with a Riemann-Hilbert factorization which gives a geometric realization of the center of $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ at roots of 1. As an application we parametrize equivalence classes of representations of $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ by G-fibers on an elliptic curve. We solve the smallness problem raised by Nakajima for resolutions of quiver varieties. Third, we establish a new Langlands duality for representations of $\mathfrak{g}$ and $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ and we construct interpolating quantum groups to interpret it. Four, we construct a tensor category for quantum affinizations, and we construct finite dimensional representations of quantum toroidal algebras (and Cherednik algebras) ; we propose a Lie theoritical analog of symplectic reflection algebras. Eventually, we obtain monoidal categorifications of cluster algebras in terms of a category $\mathcal{C}_1$ of representations of $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. We establish in particular the factorization in prime modules of simple modules in $\mathcal{C}_1$.

Key words : Quantum affine algebras, Kirillov-Reshetikhin conjecture, quiver varieties, loop groups, Langlands duality, quantum toroidal algebras, cherednik algebras, categorification, cluster algebras.

Table des matières

Introduction

La notion centrale de ce mémoire d'habilitation est celle d'algèbre quantique, plus précisément d'algèbre affine quantique $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Ses liens avec divers objets de nature géométrique ou algébrique seront étudiés suivant cinq thèmes correspondant aux cinq parties du mémoire :

1. Conjecture de Kirillov-Reshetikhin et formules de caractères. Nous prouvons la conjecture de Kirillov-Reshetikhin (formules de caractères), et nous étendons le résultat à des affinisations minimales. Nous étendons le modèle monomial aux cristaux extrémaux.

2. Interfaces avec la géométrie algébrique. Nous définissons les groupes de lacets analytiques avec une factorisation de Riemann-Hilbert qui réalisent géométriquement le centre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ aux racines de 1. Comme application nous paramétrisons des classes d'équivalences de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ par des G-fibrés sur une courbe elliptique. Nous apportons une solution au problème de petitesse géométrique posé par Nakajima pour des résolutions de variétés carquois.

3. Dualité de Langlands. Nous établissons une dualité de Langlands pour des représentations de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et définissons des groupes quantiques d'interpolation pour l'interpréter.

4. Algèbres toroïdales et affinisées quantiques. Nous construisons une catégorie tensorielle pour les algèbres affinisées quantiques et des représentations de dimension finie d'algèbres toroïdales quantiques (et de Cherednik).

5. Catégorification monoïdale des algèbres cluster. Nous obtenons des catégorifications monoïdales d'algèbres cluster en terme d'une catégorie $\mathcal{C}_1$ de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Nous décrivons notamment la factorisation en modules premiers de modules simples de $\mathcal{C}_1$.

Les résultats des articles **[6-18]** présentés pour l'habilitation peuvent intervenir dans plusieurs thèmes. Les articles **[1-5]** constituent la thèse soutenue en 2004. Le sujet central en était les (q)-caractères des représentations de dimension finie des algèbres affines quantiques, leurs t-déformations et applications aux produits de fusion. Après ce premier travail, je me suis attaché à l'analyse de la structure même de ces représentations, en démontrant plusieurs conjectures présentées dans ce mémoire, et en élargissant progressivement mon champ d'étude aux interfaces avec la géométrie algébrique et à d'autres questions plus générales, énoncées ci-dessus.

Le point de départ est la théorie classique des algèbres de Lie semi-simples complexes de dimension finie $\mathfrak{g}$ [Bo]. Deux classes d'algèbres généralisant $\mathfrak{g}$ ont une importance particulière. Les algèbres de Kac-Moody affines $\hat{\mathfrak{g}}$ [Kac] sont des algèbres de Lie, analogues de dimension infinie de $\mathfrak{g}$, possédant une structure similaire, en particulier une présentation analogue à la présentation de Serre de $\mathfrak{g}$. Ensuite les groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ de Drinfeld-Jimbo sont des algèbres de Hopf et des déformations de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pour un paramètre de quantification complexe q. Lorsqu'on considère les deux généralisations simultanément, on obtient les algèbres affines quantiques $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, qui sont des déformations de $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ et des affinisations (quantiques) de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation}"] \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"'] & & \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \\
 & \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation}"'] &
\end{tikzcd}$$

La théorie des représentations des algèbres affines quantiques est très riche et a été étudiée intensivement ces quinze dernières années dans différentes perspectives, en lien avec des domaines variés en mathématiques et en physique mathématique.

Rappelons d'abord quelques définitions et résultats concernant les algèbres de Kac-Moody quantiques (dont les groupes quantiques et les algèbres affines quantiques) et les algèbres affinisées quantiques (dont les algèbres toroïdales quantiques). Les définitions d'autres objets importants pour ce mémoire, comme celles de variétés carquois, d'algèbres de Cherednik ou d'algèbres cluster, seront données plus loin.

Considérons une matrice de Cartan généralisée $C = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, c'est-à-dire une matrice avec des coefficients entiers négatifs, exceptés les coefficients diagonaux égaux à 2, et telle que $(C_{i,j} = 0 \Leftrightarrow C_{j,i} = 0)$. On suppose de plus que C est symétrisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n)$ avec $r_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ telle que $B = DC$ est symétrique. Cela inclut les matrices de Cartan des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie, qui sont caractérisées, parmi les matrices de Cartan généralisées, par la stricte positivité de leur mineurs principaux (ce sont les matrices dites "de type fini"). Si on change légèrement cette condition en imposant $\det(C) = 0$, les autres mineurs principaux restant positifs, on obtient les matrices dites "de type affine".

On fixe une matrice de Cartan généralisée C de format n et de rang l. On considère une réalisation $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ de C au sens de [Kac]. $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $2n - l$, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ est l'ensemble des racines simples, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \cdots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ est l'ensemble des coracines simples. De plus pour tous i, j on a $\alpha_i^\vee(\alpha_j) = C_{j,i}$. A une telle donnée est associée une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, qui est une algèbre de Lie complexe avec une présentation "à la Serre". $\mathfrak{g}$ est de dimension finie si et seulement si C est de type fini, c'est-à-dire si et seulement si $\mathfrak{g}$ est une algèbre semi-simple de dimension finie. Lorsque C est de type affine, l'algèbre Kac-Moody (notée $\mathfrak{g}$) est de dimension infinie mais possède une deuxième réalisation comme extension (éventuellement "torsionnée"[1]) d'une algèbre de lacets $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre semi-simple de dimension finie (l'extension est l'ajout d'un élément central et d'un élément de dérivation relativement à t). Dans le cas affine, comme il est coutume, on remplace n par $n + 1$ et on note $C = (C_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ avec $(C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Dans ce mémoire nous étudions principalement la version quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Soit $q \in \mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de 1. On note $q_i = q^{r_i}$, $[m]_q = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$ et on utilise les notations standards de q-factorielle et q-coefficient binomial.

Définition .1. *$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est l'algèbre définie par les générateurs x_i^+, x_i^-, $k_i^{\pm 1}$ ($i \in I = \{1, \cdots, n\}$) et les relations :*

$$k_i k_j = k_j k_i \ , \ k_i x_j^\pm k_i^{-1} = q_i^{\pm C_{i,j}} x_j^\pm \ , \ [x_i^+, x_j^-] = \delta_{i,j}\frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\sum_{r=0\cdots 1-C_{i,j}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - C_{i,j} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^\pm)^{1-C_{i,j}-r} x_j^\pm (x_i^\pm)^r = 0 \text{ (pour } i \neq j).$$

(Notons qu'ici on considère la version avec la "petite" sous algèbre de Cartan). Comme dans la théorie classique, on définit le réseau des poids $P = \{\lambda \in \mathfrak{h} | \forall i \in I, \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$ et le groupe de

[1]On utilise dans ce mémoire la traduction "torsionné" pour le terme anglais "twisted".

Weyl $W \subset GL(\mathfrak{h})$ généré par les s_i tels que $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha_i^\vee)\alpha_i$ pour $i \in I$. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ possède une décomposition triangulaire

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g}),$$

avec $\mathcal{U}_q^\pm(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$) sous algèbre génerée par les $x_i^\pm$ (resp. les $k_i^{\pm 1}$). Ainsi pour $\lambda \in P$ on a le module de Verma $M(\lambda)$ et son unique quotient simple $L(\lambda)$. Les $L(\lambda)$ sont les objets simples de la catégorie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Rappelons la définition de cette catégorie. Pour $\lambda \in P$, on a les espaces de poids d'un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module :

$$V_\lambda = \{v \in V | \forall h \in \mathfrak{h}, k_i v = q_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)} v\}.$$

On dit que V est dans la catégorie $\mathcal{O}$ si les V_λ sont de dimension finie, si ils génèrent linéairement V et si $\mathrm{wt}(V) = \{\lambda \in P | V_\lambda \neq 0\}$ est inclus dans une union finie de $D(\mu)$ avec pour $\mu \in P$, $D(\mu) = \{\mu' = \mu - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_N} | N \geq 0, i_1, \cdots, i_N \in I\}$. Si on remplace cette dernière propriété par

$$(\forall \lambda \in P, \exists N \geq 0, \forall N' \geq N, \forall i \in I, V_{\lambda \pm N'\alpha_i} = 0),$$

on dit que V est une représentation intégrable. La représentation $L(\lambda)$ est intégrable si et seulement si λ est dominant, c'est-à-dire si $\lambda \in P^+ = \{\lambda \in P | \forall i \in I, \lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0\}$. Par exemple, c'est le cas pour les poids fondamentaux $\omega_1, \cdots, \omega_n$ choisis dans P tels que $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}$. Le caractère d'une représentation intégrable V de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est $\chi(V) = \sum_{\lambda \in P} \dim(V_\lambda) e(\lambda)$. D'autres exemples de représentations intégrables sont donnés par Kashiwara [Kas1, Kas3]. Pour $\lambda \in P$, le module extrémal $V(\lambda)$ de poids extrémal λ est le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module généré par une famille de vecteurs $\{v_w\}_{w \in W}$ avec les relations

$$x_i^\pm v_w = 0 \text{ si } \pm w(\lambda)(\alpha_i^\vee) \geq 0 \text{ et } (x_i^\mp)^{\pm(w(\lambda)(\alpha_i^\vee))} v_w = v_{s_i(w)}.$$

Le vecteur $v_{\mathrm{Id}} = v_\lambda$ est dit extrémal. Kashiwara a démontré [Kas3] que pour tout $\lambda \in P$, $V(\lambda)$ est non triviale et intégrable. Si λ est dominant, $V(\lambda) \simeq L(\lambda)$, mais en général, $V(\lambda)$ n'est pas dans la catégorie $\mathcal{O}$.

Revenons au "diagramme commutatif" donné au début de cette introduction. Nous avons défini précédemment les algèbres affines quantiques comme algèbre de Kac-Moody avec une matrice de Cartan de type affine, c'est-à-dire comme quantification d'algèbre de Kac-Moody de type affine. En fait on peut les voir comme affinisations quantiques d'algèbres quantiques de type fini $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: il existe une deuxième réalisation (dite "de Drinfeld") analogue à la deuxième réalisation des algèbres de Kac-Moody affines.

Donnons cette présentation pour l'algèbre de lacets quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ ($\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est une extension centrale de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$; l'élément central c agit trivialement sur les représentations de dimension finie et par conséquent ces représentations sont les mêmes pour $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$). En utilisant des automorphismes de Lusztig [Bec] on définit des éléments $x_{i,m}^\pm$, $k_i^{\pm 1}$, $h_{i,r}$ ($1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$) de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. Alors l'algèbre est réalisée [Dr2, Bec] par ces générateurs et les relations :

$$[k_i, k_j] = [k_i, h_{j,m}] = [h_{i,m}, h_{j,m'}] = 0 \ , \ k_i x_{j,r}^\pm = q_i^{\pm C_{i,j}} x_{j,r}^\pm k_i,$$

$$[h_{i,m}, x_{j,r}^\pm] = \pm \frac{1}{m}[m B_{i,j}]_q x_{j,m+r}^\pm \ , \ [x_{i,r}^+, x_{j,r'}^-] = \delta_{i,j} \frac{\phi_{i,r+r'}^+ - \phi_{i,r+r'}^-}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$x_{i,r+1}^\pm x_{j,r'}^\pm - q^{\pm B_{i,j}} x_{j,r'}^\pm x_{i,r+1}^\pm = q^{\pm B_{i,j}} x_{i,r}^\pm x_{j,r'+1}^\pm - x_{j,r'+1}^\pm x_{i,r}^\pm,$$

$$\sum_{\pi\in\Sigma_s, k=0..s}(-1)^k \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_{q_i} x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}} x^{\pm}_{j,r'} x^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(s)}} = 0,$$

avec Σ_s le groupe des permutations de s éléments et

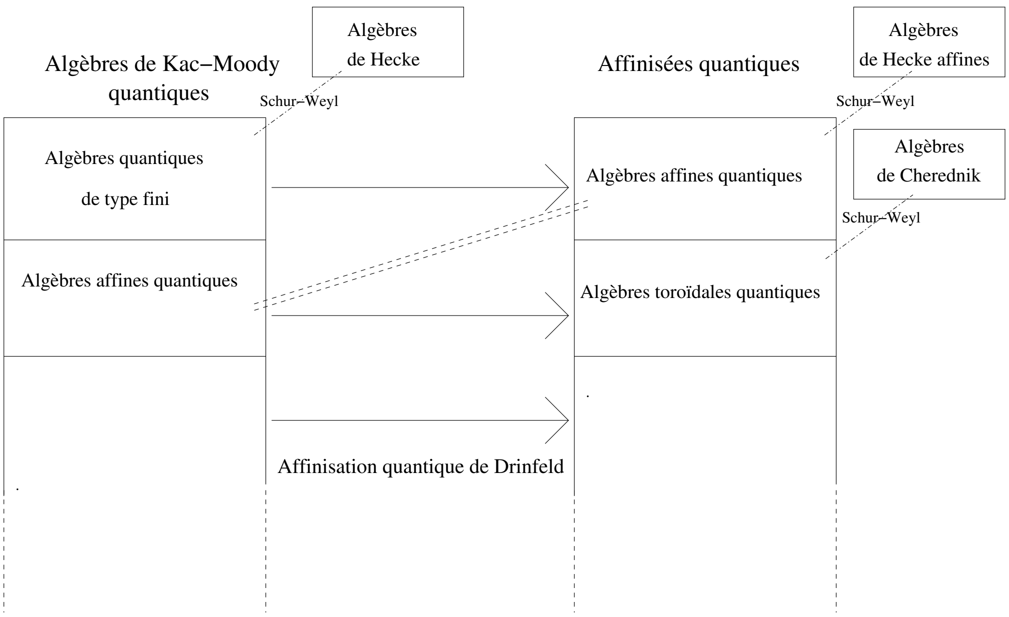
$$\sum_{m\geq 0}\phi^{\pm}_{i,\pm m} z^{\pm m} = k_i^{\pm 1}\exp(\pm(q-q^{-1})\sum_{m'\geq 1} h_{i,\pm m'} z^{\pm m'}).$$

Cette réalisation est particulièrement utile pour paramétrer les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. En effet ces dernières ne sont en général pas dans la catégorie $\mathcal{O}$. La réalisation de Drinfeld donne une nouvelle décomposition triangulaire

$$\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q^-(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_q^+(\mathcal{L}\mathfrak{g}),$$

avec $\mathcal{U}_q^{\pm}(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h})$) la sous-algèbre générée par les $x^{\pm}_{i,r}$ (resp. par les $h_{i,m}$ et les $k_i^{\pm 1}$). Alors les représentations simples de dimension finie sont de plus haut poids pour cette décomposition. On obtient [CP1] leur paramétrisation (en type I) par des n-uplet de polynômes $(P_1(z), \cdots, P_n(z))$ tels que $P_i(0) = 1$ (les polynômes de Drinfeld). Ceci est analogue à la paramétrisation des représentations simples de dimension finie (de type I) de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ par des n-uplet $(m_1, \cdots, m_n)$ avec $m_i \geq 0$. Il y a cependant des différences importantes avec la théorie des représentations des algèbres quantiques de type fini : la catégorie des représentations de dimension finie n'est pas semi-simple et la structure des représentations simples est en général très peu connue.

Toutes les algèbres de Kac-Moody quantique n'ont pas une deuxième réalisation "à la Drinfeld". Cependant, dans les relations de la réalisation de Drinfeld, on peut remplacer l'algèbre quantique de type C par une matrice de Cartan généralisée. On obtient ainsi une nouvelle classe d'algèbres appelées "algèbres affinisées quantiques". Par exemple, l'affinisée d'une algèbre affine quantique est une algèbre toroïdale quantique [GKV] qui n'est pas une algèbre de Kac-Moody quantique. Notons qu'en type A, on a une dualité de Schur-Weyl entre les algèbres quantiques de type fini (resp. les algèbres affines quantiques, les algèbres toroïdales quantiques) et les algèbres de Hecke (resp. les algèbre de Hecke affines, les algèbres de Cherednik) [J2, CP2, VV1]. La situation est résumée dans la figure suivante.



Première partie

Conjecture de Kirillov-Reshetikhin, formules de caractères

Dans cette partie nous nous intéressons aux représentations simples de dimension finie des algèbres affines quantiques (ou de manière équivalente de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$). Comme cela a été expliqué plus haut, leur structure est en général très peu connue : par exemple, il n'y a pas d'analogue de la formule de caractères de Weyl et même leur dimension n'est pas connue en général. Cependant, pour certaines familles importantes de représentations, des résultats peuvent être obtenus. C'est l'objet de cette partie.

1 Preuve de la conjecture de Kirillov-Reshetikhin

On rappelle que les algèbres affines quantiques peuvent être divisées en deux classes ("non-torsionnées" et "torsionnées"). Supposons d'abord que $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ est non-torsionnée. Les modules de Kirillov-Reshetikhin (KR) $W_{k,a}^{(i)}$ sont des modules simples de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ définis par les polynômes de Drinfeld $(P_j(u))_{1\leq j\leq n}$ suivant

$$P_i(u) = (1-au)(1-aq_i^2u)...(1-q_i^{2k-2}u) \text{ , et pour } j \neq i : P_j(u) = 0,$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$, $i \in I$, $k \geq 0$ (pour $k = 1$ on obtient les représentations dites "fondamentales").

Plusieurs raisons conduisent à étudier les modules KR : en type A, on a des morphismes d'évaluation $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ et les modules KR sont exactement les représentations obtenues par évaluation à partir des représentations simples de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ de plus haut poids un multiple $k\omega_i$ d'un poids fondamental (en type quelconque on n'a pas de tels morphismes d'évaluation). Deuxièmement, comme on le verra plus loin, les modules KR ont de bonnes propriétés relativement aux bases critallines. Enfin, c'est la première classe infinie de représentations pour laquelle on peut prouver une formule de caractère uniforme ; il s'agit de la conjecture de KR démontrée dans **[6]** et qui fait l'objet de cette section. Ce problème remonte à 1931, quand Bethe [Bet] l'a résolu pour certaines représentations de type A_1 dans un autre langage. Les méthodes pour résoudre les modèles physiques associés sont appelés "Ansatz de Bethe". Plus tard (1987) Kirillov et Reshetikhin [KR, Ki] ont apporté une solution en type A et ont conjecturé des formules explicites en tout type en analysant l'Ansatz de Bethe. La description de ces caractères est la conjecture de KR. Ces articles constituent depuis lors le point de départ d'intenses recherches. De nombreux résultats partiels ont été obtenus (voir [KNT] et **[14]** pour un historique sur le sujet ; voir aussi par exemple [Kl, HKOTY, Cha2]). Nakajima [N8, N6] a démontré le résultat, ainsi que d'autres résultats de cette section, dans les cas ADE en s'appuyant sur la géométrie des variétés carquois qui n'existent pas dans le cas général. Cependant, il est également important de comprendre les cas non-simplement lacés, notamment en vue des applications à la dualité de Langlands dans la Partie III. Nous démontrons **[6]** le résultat général par une méthode différente, purement algébrique.

Théorème I.1. **[6]**[*Conjecture KR*] *Pour* $\nu = (\nu_k^{(i)})_{i\in I, k>0}$ *des entiers presque tous nuls et*

$a \in \mathbb{C}^*$:

$$\prod_{i\in I,k\geq 1}(\chi(W_{k,a}^{(i)}))^{\nu_k^{(i)}} = \frac{\sum\limits_{N=(N_k^{(i)})}\prod\limits_{i\in I,k>0}\binom{P_k^{(i)}(\nu,N)+N_k^{(i)}}{N_k^{(i)}}e(-kN_k^{(i)}\alpha_i)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(1-e(-\alpha))},$$

avec $P_k^{(i)}(\nu,N) = \sum\limits_{l=1\cdots\infty}\nu_l^{(i)} min(k,l) - \sum\limits_{j\in I,l>0} N_l^{(j)} r_i C_{i,j} min(k/r_j, l/r_i)$,

et $\binom{b}{c} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(c+1)}$ *où* Γ *est la fonction gamma usuelle.*

La preuve, que nous allons expliquer dans cette partie, est liée à la preuve d'autres conjectures, celle des Q et T-systèmes. Dans [KNS], un système de relations fonctionelles appelé T-système est défini (il est motivé par les matrices de transfert dans les modèles intégrables sur réseau[2]). En terme de représentations, il est naturellement conjecturé [KOSY] que les modules KR satisfont les T-systèmes dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}))$ des représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. Nous démontrons cette conjecture avec un énoncé plus fort sous forme d'une suite exacte :

Théorème I.2. [6]/*T-systèmes] Pour $a \in \mathbb{C}^*$, $k \geq 1$, $i \in I$, on a une suite exacte :*

$$0 \to S_{k,a}^{(i)} \to W_{k,a}^{(i)} \otimes W_{k,aq_i^2}^{(i)} \to W_{k+1,a}^{(i)} \otimes W_{k-1,aq_i^2}^{(i)} \to 0.$$

Cette suite exacte de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$-modules est non-scindée. Ici le module $S_{k,a}^{(i)}$ est défini par :

$$S_{k,a}^{(i)} = \begin{cases} (\bigotimes\limits_{j/a_{j,i}=-1} W_{k,aq_i}^{(j)}) \otimes (\bigotimes\limits_{j/a_{j,i}\leq -2} W_{d_ik,aq}^{(j)}) & \text{si } r_i \geq 2, \\ (\bigotimes\limits_{j/a_{i,j}=-1} W_{k,aq}^{(j)}) \otimes (\bigotimes\limits_{j/a_{i,j}=-2} W_{r,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)}) & \text{si } r_i = 1,\ \mathfrak{g} \neq G_2,\ k = 2r, \\ (\bigotimes\limits_{j/a_{i,j}=-1} W_{k,aq}^{(j)}) \otimes (\bigotimes\limits_{j/a_{i,j}=-2} W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)}) & \text{si } r_i = 1,\ \mathfrak{g} \neq G_2,\ k = 2r+1, \end{cases}$$

et pour $r_i = 1$ et $\mathfrak{g}$ of type G_2 ($j \neq i$ est l'autre sommet) :

$$S_{k,a}^{(i)} = \begin{cases} W_{r,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r, \\ W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r+1, \\ W_{r+1,aq}^{(j)} \otimes W_{r+1,aq^3}^{(j)} \otimes W_{r,aq^5}^{(j)} & \text{si } k = 3r+2. \end{cases}$$

Le T-système, via le foncteur de restriction dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ des représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, devient le Q-système conjecturé dans [KR, Ki]. Nous obtenons donc également une preuve de cette conjecture. Par exemple, dans le cas sl_2 on a

$$0 \to 1 \to W_{k,a} \otimes W_{k,aq^2} \to W_{k+1,a} \otimes W_{k-1,aq^2} \to 1$$

avec 1 la représentation triviale, ce qui donne le Q-système avec $Q_k = \chi(W_{k,a})$:

$$Q_k^2 = Q_{k-1}Q_{k+1} + 1$$

[2]Le "T" de "T-système" provient de "transfert".

dont on connait la solution évidente $Q_k = y^k + y^{k-2} + \cdots + y^{-k}$ avec $y = e(\omega)$. Notons que pour le type A un module KR est simple comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module, mais ce n'est pas le cas en général.

Il est démontré combinatoirement dans [HKOTY, KN] que le Q-système (conséquence du théorème I.2) implique le théorème I.1, si une certaine condition asymptotique est satisfaite. Pour conclure, nous la démontrons également :

Théorème I.3. [6] *On a une limite comme série formelle*

$$\exists \lim_{k\to\infty} (\chi(W_{k,a}^{(i)})e(-k\omega_i)) \in \mathbb{Z}[[e(-\alpha_j)]]_{j\in I}.$$

Les preuves des théorèmes I.2, I.3 utilisent les q-caractères de Frenkel-Reshetikhin [FR4], une théorie des caractères adaptée à la réalisation de Drinfeld de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. Rappelons-en la définition : le morphisme de q-caractère est un morphisme d'anneaux $\chi_q : \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$ qui décrit la décomposition en blocs de Jordan V_m communs des éléments de la sous-algèbre commutative $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h})$. Les V_m sont appelés espaces de l-poids. Ainsi les monômes $m = \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)}$ sont des analogues de poids dans le contexte affine quantique et on a

$$\chi_q(V) = \sum_m \dim(V_m) m.$$

On peut retrouver le caractère usuel χ car on a le diagramme commutatif [FR4]

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow{\scriptstyle res} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1}]_{i\in I} \end{array}.$$

avec res le foncteur de restriction et β le morphisme d'anneaux tel que $\beta(Y_{i,a}) = y_i$. Le monôme d'un module simple L correspondant au plus haut poids (resp. plus bas poids) pour la décomposition de Drinfeld est dominant (resp. antidominant), c'est-à-dire qu'il est constitué uniquement de puissances positives (resp. négatives) des $Y_{i,a}$. Le plus haut monôme caractérise la représentation simple qu'on note $L(m)$. La donnée de m équivaut à la donnée des polynômes de Drinfeld.

En général on ne connait pas de formule explicite des q-caractères. Frenkel et Mukhin [FM] ont cependant défini un algorithme qui donne le q-caractère des modules simples dits minuscules. Un module est dit minuscule (resp. antiminuscule) si son q-caractère contient un seul monôme dominant (resp. antidominant).

Théorème I.4. [6] *Les modules KR sont minuscules.*

Cette propriété donne assez d'information sur la structure des modules KR pour démontrer les théorèmes I.2 et I.3 : en particulier nous utilisons le fait [FR4, FM, N3] qu'un élément de $\mathrm{Im}(\chi_q)$ est caractérisé par ses monômes dominants et nous parvenons à déterminer ceux qui apparaissent dans les produits des T-systèmes. La preuve du théorème I.3 est basée sur le fait que l'algorithme de Frenkel-Mukhin se "stabilise" quand $k \to \infty$. Pour démontrer le théorème I.4, en développant des arguments que nous avions précédemment établis dans **[5]**, nous prouvons que certains monômes ne peuvent pas apparaître dans les $\chi_q(W_{k,a}^{(i)})$. Ceci sera écrit plus loin, sous une forme plus générale, dans le Théorème I.10.

D'un point de vue géométrique, par analogie avec le cas ADE, nos résultats donnent une formule explicite sur ce que seraient les nombres d'Euler pour des variétés carquois non-simplement lacées (dont la construction n'est pas encore connue). Autre application dans les cas classiques $ABCD$: les formules explicites pour les q-caractères des modules KR conjecturées dans [KNH] découlent directement de nos résultats. Notons aussi que le résultat du théorème I.1 est utilisé dans [DFK] pour démontrer d'autres formules de caractères pour les modules KR, avec des coefficients positifs. D'autres conséquences seront décrites plus loin.

Intéressons-nous à présent à l'autre grande classe d'algèbres affines quantiques, c'est-à-dire les algèbres affines quantiques torsionnées $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$. Ici $\mathfrak{g}$ est simplement lacée et σ est un automorphisme non nul du diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ indicé par I. I_σ est l'ensemble des classes de I sous l'action de σ. Notons que $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. Les algèbres $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$ sont duales de Langlands des algèbres affines quantiques non-torsionnées non-simplement lacées. Pour ces algèbres, la première difficulté est qu'un analogue de la réalisation de Drinfeld n'a pas été établi (voir l'introduction de **[11]**). Cependant, dans [Da], des analogues des générateurs de Drinfeld sont construits à partir des générateurs $x_i^\pm$, $k_i^{\pm 1}$. Certaines relations entre eux sont établies dans [Da, A]. En démontrant des relations supplémentaires entre ces générateurs **[11]**, nous complétons une preuve amorcée dans [CP4] et démontrons :

Théorème I.5. *Les représentations simples (de type 1) de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$ sont paramétrées par des n-uplet de polynômes $(P_i)_{i\in I_\sigma}$ tels que $P_i(0) = 1$.*

Nous pouvons alors définir les modules KR $W_{k,a}^{(i)}$ de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$. Nous démontrons la conjecture KR dans le cas torsionnée, ce qui conclut la preuve dans le cas le plus général.

Théorème I.6. [11] *Les modules KR de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)$ sont minuscules, satisfont les T-systèmes torsionnés et leurs caractères sont donnés par les formules fermioniques torsionnées.*

Les T-systèmes torsionnés ont été conjecturés dans [KS1]. Pour démontrer ce résultat nous développons **[11]** une théorie des "q-caractères torsionnés". Il existe une différence technique importante avec le cas non-torsionné : les sous-algèbres affines quantiques élémentaires $\mathcal{U}_i =< x_{i,m}^\pm, k_i^{\pm 1}, h_{i,r} >$ ne sont pas nécessairement de type $A_1^{(1)}$ mais peuvent être de type $A_2^{(2)}$ dont la théorie des représentations est différente (par exemple, les représentations fondamentales sont de dimension 3).

Nous obtenons également un isomorphisme d'anneaux de Grothendieck faisant le lien avec la théorie non-torsionnée. Considérons le morphisme d'anneaux

$$\pi : \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \rightarrow \mathbb{Z}[Z_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I_\sigma, a\in\mathbb{C}^*}\ ,\ \pi(Y_{\sigma^p(i),a}) = \begin{cases} Z_{i,(\omega^p a)^{d_i}} & \text{si } \mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma \text{ pas de type } A_{2n}^{(2)}, \\ Z_{i,a(-1)^p} & \text{si } \mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma \text{ de type } A_{2n}^{(2)}. \end{cases}$$

où $i \in I_\sigma$, $p \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}^*$ (on voit ici $I_\sigma \subset I$ en choisissant de bons représentants des classes **[11]**). Soit $\mathcal{Y}' = \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1}]_{i\in I, r\in\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Rep}'(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) = (\chi_q)^{-1}(\mathcal{Y}')$ et $\mathrm{Rep}'(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}^\sigma)) = (\chi_q^\sigma)^{-1}(\pi(\mathcal{Y}'))$.

Théorème I.7. [11] *Il existe un unique isomorphisme d'anneaux $\pi : Rep'(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)) \simeq Rep'(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}))$ qui préserve les modules KR et tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Rep'(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Rep'(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}^\sigma)) & \xrightarrow{\chi_q^\sigma} & \mathbb{Z}[Z_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I_\sigma, a\in\mathbb{C}^*} \end{array}.$$

Dans le cas torsionné, ce théorème implique d'autres résultats conjecturés par plusieurs auteurs [KS1, R, HKOTT]. En particulier des formules explicites de q-caractères torsionnés et des formules de décomposition en module simples pour le groupe quantique sous-jacent. Par exemple, en type $D_{n+1}^{(2)}$, nous obtenons pour $1 \leq i \leq n-1$ (avec res le foncteur de restriction) :

$$res(W_{k,a}^{(i)}) = \bigoplus_{m_1 \geq 0, \cdots, m_i \geq 0 \text{ et } m_1 + \cdots + m_i \leq k} L(m_1\omega_1 + \cdots + m_i\omega_i) \ , \ res(W_{k,a}^{(n)}) = L(k\omega_n).$$

2 Affinisations minimales et preuve d'une conjecture de Nakai-Nakanishi

Les techniques utilisées pour démontrer la conjecture KR peuvent être étendues à des représentations plus générales. Chari [Cha1] a défini la notion d'affinisation minimale. Ces représentations sont importantes du point de vue de la physique ([FR1, Remark 4.2]). Par exemple dans la théorie des modèles sur réseaux en physique statistique, les affinisations minimales sont liées au probléme de l'intégrabilité du modèle : il s'agit d'ajouter un paramètre spectral à l'équation de Yang-Baxter quantique correspondante.

Une affinisation d'un module simple $L(\lambda)$ de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est un module simple de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ de plus haut poids λ. Deux affinisations sont dites équivalentes si elles sont isomorphes comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules. On a un ordre partiel sur l'ensemble des classes $[V]$ des affinisations de $L(\lambda)$ en posant $[V] \leq [V']$ si

$$\text{pour tout } \mu \in P^+, \ (m_\mu(V) \leq m_\mu(V')) \text{ ou bien } (\exists \nu > \mu, m_\nu(V) < m_\mu(V')),$$

avec l'ordre partiel usuel sur P et $m_\nu(V)$ la multiplicité de $L(\nu)$ dans la décomposition de V en $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-modules simples. Une affinisation minimale de $L(\lambda)$ est une affinisation minimale pour $\leq$. En type A, comme on a des morphismes d'évaluation $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, les affinisations minimales sont simples comme $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-module. Ce n'est pas vrai en général. Les affinisations minimales des $L(k\omega_i)$ sont exactement les modules KR. Ainsi ces représentations généralisent les modules KR (nous introduirons naturellement dans la partie V des représentations plus générales **[18]**).

Une représentation est dite quasi-minuscule si ses espaces de l-poids sont de dimension 1. Par exemple, en types A, B, C, toutes les représentations fondamentales sont quasi-minuscules **[5]**. Nous obtenons le résultat suivant (notons qu'en type A les résultats de cette Section ont été établis précédemment par d'autres auteurs, voir l'introduction de **[10]**) :

Théorème I.8. [10]. *En types A, B, G, toutes les affinisations minimales sont minuscules et antiminuscules. En types A, B, elles sont quasi-minuscules.*

Pour les autres types, en général les affinisations minimales ne sont pas minuscules ou antiminuscules, mais nous obtenons des résultats partiels **[10]** : en types C, F_4, si $\lambda(\alpha_n^\vee) = 0$, toutes les affinisations minimales de $L(\lambda)$ sont minuscules ou antiminuscules. En types D, si $\lambda(\alpha_n^\vee) = \lambda(\alpha_{n-1}^\vee)$, il existe des affinisations minimales minuscules de $V(\lambda)$. Avant de donner des éléments de preuve du théorème I.8, donnons-en une application. Nous prouvons une formule explicite pour les affinisations minimales en types A, B conjecturée dans [NN] :

Théorème I.9. [10][*Conjecture de Nakai-Nakanishi] En types A, B, le q-caractère d'une affinisation minimale est donné par le déterminant de Jacobi-Trudi.*

Comme illustration, donnons cette expression explicite en type B. Soit une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ suite décroissant d'entiers positifs inférieurs à n et presque tous nuls, et $\Lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$. Soit $\mathbf{B} = \{1, \cdots, n, 0, \overline{n}, \cdots, \overline{1}\}$ muni de l'ordre total $1 \prec \cdots \prec n \prec 0 \prec \overline{n} \prec \cdots \prec \overline{1}$. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, soient $(2 \leq i \leq n-1$ et on note $Y_{0,a} = Y_{n+1,a} = 1)$:

$$\boxed{i}_a = Y_{i-1,aq^{2i}}^{-1} Y_{i,aq^{2(i-1)}} \ , \ \boxed{\overline{i}}_a = Y_{i-1,aq^{4n-2i-2}} Y_{i,aq^{4n-2i}}^{-1} \ , \ \boxed{n}_a = Y_{n-1,aq^{2n}}^{-1} Y_{n,aq^{2n-1}} Y_{n,aq^{2n-3}}$$

$$\boxed{\overline{n}}_a = Y_{n-1,aq^{2n-2}} Y_{n,aq^{2n+1}}^{-1} Y_{n,aq^{2n-1}}^{-1} \ , \ \boxed{0}_a = Y_{n,aq^{2n+1}}^{-1} Y_{n,aq^{2n-3}},$$

Soit $\mathrm{Tab}(B_n, \Lambda)$ l'ensemble des tableaux $T = (T_{i,j})_{(i,j)\in\Lambda}$ à coefficients dans $\mathbf{B}$ tels que :

$$[T_{i,j} \preceq T_{i,j+1} \text{ et } (T_{i,j}, T_{i,j+1}) \neq (0,0)] \text{ et } [T_{i,j} \prec T_{i+1,j} \text{ ou } (T_{i,j}, T_{i+1,j}) = (0,0)].$$

Le déterminant de Jacobi-Trudi [NN], de plus haut poids $\sum_j \sum_{i|\lambda_i = j} (3 - r_j)\omega_j$, est :

$$\chi_{\lambda,a} = \sum_{T \in \mathrm{Tab}(B_n,\lambda)} \Big(\prod_{(i,j)\in\Lambda} \boxed{T_{i,j}}_{aq^{4(j-i)}} \Big) \in \mathcal{Y}.$$

En conclusion de cette partie, décrivons quelques aspects techniques de la preuve du théorème I.8, formulés dans le théorème I.10 d'élimination suivant. En utilisant des arguments de Frenkel-Mukhin [FM], on peut produire des monômes qui doivent apparaître dans un q-caractère. Le résultat suivant répond à la question opposée, en donnant des conditions pour qu'un monôme n'apparaisse pas (soit éliminé) dans un q-caractère. Il sera aussi utilisé dans la partie II pour des applications en géométrie algébrique. Avant d'énoncer le théorème, donnons quelques définitions. Les $A_{i,a}$ $(i \in I, a \in \mathbb{C}^*)$ sont des analogues [FR4] des racines simples pour les monômes. On a un ordre partiel sur les monômes : $m \leq m'$ si $m'm^{-1}$ est un produit de $A_{i,a}$. Pour m un monôme i-dominant (les puissance des $Y_{i,a}$ sont positives), on a un polynôme $L_i(m)$ défini à partir d'un module simple de $\mathcal{U}_i$ de plus haut monôme m. $\mathcal{M}(L)$ est l'ensemble des monômes de $\chi_q(L)$. Enfin, pour M un produit $\prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} A_{i,a}^{-v_{i,a}}$, on note $v(M) = \sum_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} v_{i,a}$.

Théorème I.10. **[9]** *Soit $V = L(m)$ simple et $m' < m$, $i \in I$ tels que :*

(i) on a un unique monôme i-dominant $M \in (\mathcal{M}(V) \cap m'\mathbb{Z}[A_{i,a}]_{a\in\mathbb{C}^*}) - \{m'\}$,

(ii) $\sum_{r\in\mathbb{Z}} x_{i,r}^+(V_M) = \{0\}$,

(iii) m' n'est pas un monôme de $L_i(M)$,

(iv) si $m'' \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_i.V_M)$ est i-dominant, alors $v(m''m^{-1}) \geq v(m'm^{-1})$,

(v) pour $j \neq i$, $\{m'' \in \mathcal{M}(V) | v(m''m^{-1}) < v(m'm^{-1})\} \cap m'\mathbb{Z}[A_{j,a}^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*} = \emptyset$.

Alors m' n'apparait pas dans $\chi_q(V)$.

3 Bases cristallines et réponse à une question de Kashiwara

Kashiwara [Kas3] a démontré que les représentations extrémales ont une base cristalline. Par ailleurs, Nakajima [N7] et Kashiwara [Kas4] ont défini un modèle (dit "des monômes") pour les cristaux des représentations de dimension finie des groupes quantiques. Dans **[8]** nous répondons à une question de Kashiwara en démontrant pour les algèbres de Kac-Moody $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ générales :

Théorème I.11. **[8]** *Le modèle des monômes donne le cristal de la composante connexe principale du cristal de toute représentation extrémale.*

Revenons au cas des algèbres affines quantiques : Kashiwara a démontré [Kas4] que des représentations fondamentales de dimension finie peuvent être construites comme quotients de certaines représentations extrémales (dites fondamentales de niveau 0). Le quotient est déterminé par identication $x = z(x)$ où z est un automorphisme de la représentation extrémale (dit de Kashiwara). La représentation de dimension finie hérite ainsi d'une base critalline. Une question est de la décrire. Dans le cadre du modèle du Théorème I.11, le problème est particulièrement simple et constitue un intérêt de cette réalisation. Par exemple, en type $A_3^{(1)}$, nous avons le cristal extrémal infini suivant :

$$\cdots \xrightarrow{0} Y_{1,q^0}Y_{0,q}^{-1} \xrightarrow{1} Y_{2,q}Y_{1,q^2}^{-1} \xrightarrow{2} Y_{3,q^2}Y_{2,q^3}^{-1} \xrightarrow{3} Y_{0,q^3}Y_{3,q^4}^{-1} \xrightarrow{0} Y_{1,q^4}Y_{0,q^5}^{-1} \xrightarrow{1} \cdots \tag{1}$$

On peut identifier $Y_{1,q^4}Y_{0,q^5}^{-1}$ à $Y_{1,q^0}Y_{0,q}^{-1}$ par décalage d'indice de q^4 : l'automorphisme z est l'application sur les monômes donnée par $Y_{i,a} \mapsto Y_{i,aq^4}$. Nous obtenons ainsi le quotient, qui est un cristal fini de cardinal 4 (bien connu dans ce cas). En général nous établissons :

Théorème I.12. [8] *Pour les représentations fondamentales de niveau* 0 *(exceptés quelques cas en types $E_6^{(2)}$, $E_7^{(1)}$, $E_8^{(1)}$), il existe une puissance de z qui est un décalage d'indice dans le modèle des monômes. Nous obtenons ainsi une description du cristal fini correspondant.*

Notons que la méthode est uniforme et que la description de certains de ces cristaux finis n'était pas connue précédemment. Par exemple en type $G_2^{(1)}$ pour la représentation fondamentale correspondant à ω_2, z est donné par le décalage $a \mapsto aq^{-4}$ et nous obtenons le cristal :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "2"] & m_2 \arrow[r, "1"] & m_3 \arrow[r, "2"] & m_4 \arrow[r, "2"] & m_5 \arrow[r, "1"] & m_6 \arrow[r, "2"] \arrow[lllll, bend right, "0"'] & m_7 \arrow[lllll, bend left, "0"]
\end{tikzcd}$$

En type $D_4^{(3)}$ pour la représentation fondamentale correspondant à ω_1, z est donné par le décalage $a \mapsto aq^{-2}$ et nous obtenons le cristal de [KMOY] :

$$\begin{tikzcd}
 & & & m_8 \arrow[dlll, bend right, "0"'] & & & \\
M \arrow[r, "1"] & m_2 \arrow[r, "2"] & m_3 \arrow[r, "1"] & m_4 \arrow[r, "1"] & m_5 \arrow[r, "2"] \arrow[lll, bend right, "0"'] & m_6 \arrow[r, "1"] \arrow[lll, bend left, "0"] & m_7 \arrow[ulll, bend right, "0"']
\end{tikzcd}$$

Plus généralement, on attend que les modules KR $W_{k,a}^{(i)}$ admettent une bases cristallines (pour certaines valeurs du paramètre spectral a). Ceci a été démontré en types classiques torsionnés [OS], en utilisant notamment le Théorème I.6.

Deuxième partie

Interfaces avec la géométrie algébrique

La géométrie est omniprésente dans ce mémoire, puisqu'elle est liée à la plupart des objets qui y sont étudiés. Nous donnons dans cette partie les résultats, applications et constructions qui sont le plus clairement de nature géométrique.

Nous définissons d'abord une notion de groupes de lacets analytiques avec une factorisation de Riemann-Hilbert qui permet de réaliser géométriquement le centre de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ aux racines de 1. Comme application, nous paramétrisons des classes d'équivalence de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ par des G-fibrés sur une courbe elliptique. Ensuite, nous apportons une solution au problème de petitesse géométrique posé par Nakajima pour des résolutions de variétés carquois.

1 Groupe analytique des lacets et représentations aux racines de l'unité

Nous nous intéressons dans cette partie aux algèbres affines quantiques aux racines de l'unité avec charge centrale générique (nous travaillons donc avec $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$).

Quand le paramètre de quantification q d'un groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ de type fini est spécialisé à une racine de l'unité ϵ, la théorie des représentations change complètement. Nous considérons ici la spécialisation avec un grand centre [DCK]. L'algèbre $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ est finie sur son centre, qui est un module fini sur une sous algèbre de Hopf commutative Z. Cette dernière est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynômiales sur un groupe de Lie algébrique affine d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (voir [DCP, DCKP, E1]). Ainsi la géométrie entre en jeu et on a la correspondance :

$$\begin{aligned}
&\text{Classes de conjugaison dans le groupe de Lie } G \text{ d'algèbre de Lie } \mathfrak{g},\\
\leftrightarrow\ &\text{Feuille symplectique dans } \mathrm{Spec}(Z),\\
\leftrightarrow\ &\text{Classes d'équivalence de caractères centraux de } \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}),\\
\leftrightarrow\ &\text{Classe d'équivalence de représentations génériques de } \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

Dans **[15]** nous nous intéressons au cas affine. Contrairement au type fini, $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\mathfrak{g}})$ n'est pas finie sur son centre $\hat{Z}_\epsilon$. Le centre $\hat{Z}_\epsilon$ est une algèbre commutative infiniment engendrée : c'est une algèbre polynômiale avec certains générateurs inversés [BK]. Nous allons étudier les représentations avec une charge centrale générique, la charge centrale étant la valeur prise par l'élément d'extension centrale de $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\mathfrak{g}})$ sur une représentation (dans [BK] sont étudiées les représentations de dimension finie, en particulier avec charge centrale triviale). Cette théorie des représentations est liée à la géométrie du groupe de Lie correspondant, c'est-à-dire ici une certaine extension du groupe des lacets associé à $\mathfrak{g}$. Il existe de nombreuses versions (topologiques) de groupe de lacets. La construction d'un groupe adapté à l'étude des représentations de $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\mathfrak{g}})$ constitue un des points principaux de **[15]**.

Nous considérons **[15]** le groupe des germes de fonctions holomorphes LG sur le disque pointé à valeurs dans G. Nous construisons une topologie sur LG en utilisant une topologie produit d'une topologie de Fréchet et d'une limite directe d'espaces de Banach. Puis nous définissons un atlas et une structure de groupe de Lie. Nous utilisons notamment des résultats de [ADCKP, Section 1] et des constructions de [PS] (notons que le groupe étudié dans [PS] est le groupe des lacets topologiques, c'est-à-dire des applications continues $S^1 \to G$).

Définition II.1. *Le groupe de Lie complexe de dimension infinie LG est le groupe analytique des lacets de G.*

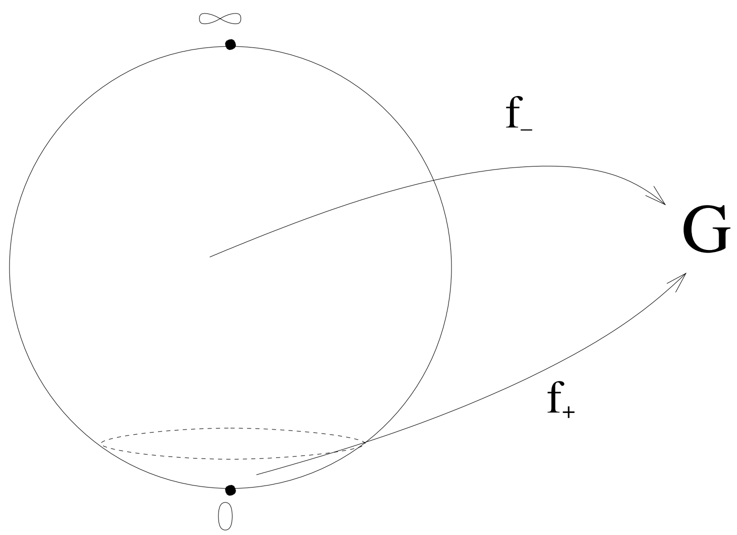
Ce groupe a des propriétés qui sont utiles dans notre étude et que ne possèdent pas simultanément les groupes de lacets utilisés par d'autres auteurs (comme les groupes de lacets topologiques ou les groupes de lacets formels). LG est stable par changement de variable $z \mapsto cz$, contient les lacets rationels et holomorphes et possède une factorisation de Riemann-Hilbert, que nous établissons. Soient

LG^+ le groupe des germes de fonctions holomorphes autour de 0 à valeur dans G,

LG^- le groupe des fonctions holomorphes $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \to G$.

D est un tore maximal de G, et B^+, B^- des sous groupes de Borel opposés tels que $D = B^+ \cap B^-$. $U^\pm \subset B^\pm$ sont les sous-groupes unipotents correspondants. En utilisant notamment le théorème de Birkhoff [Bi], nous obtenons :

Théorème II.2. [15] *Un élément $f \in LG$ peut être décomposé sous la forme $f = f_+ \lambda f_-$ avec $f_\pm \in LG^\pm$, $f_-(\infty) = 1$ et λ est un sous-groupe à un paramètre de D, c'est-à-dire un germe d'homomorphisme $\lambda : \mathbb{C}^* \to D$.*



Cette factorisation de Riemann-Hilbert suggère la définition d'un triplet de Manin que nous décrivons. Nous définissons une extension $\hat{G}$ de LG. Comme espace topologique $\hat{G} = \tilde{G} \times \mathbb{C}^*$ avec $\tilde{G}$ extension centrale de G qui est topologiquement un fibré non trivial en cercles sur G. Nous définissons les groupes de Lie

$$\tilde{G} = \hat{G} \times \hat{G} \ , \ K = \{(F, F) | F \in \hat{G}\},$$

$$H = \{((f_+, \Lambda, \Gamma), (f_-, \Lambda^{-1}, \Gamma^{-1})) \in \tilde{G} | f_\pm \in LG^\pm, f_\pm(0^{\pm 1}) \in h^{\pm 1} U^\pm, h \in D\}.$$

Nous obtenons un triplet de Manin $(\tilde{G}, H, K)$ et ainsi une structure naturelle de groupe de Poisson-Lie sur H. Nous considérons alors une algèbre de coordonnées $\mathbb{C}[H]$ de H générée polynomialement par certaines coordonnées naturelles (correspondant aux générateurs de Drinfeld et aux extensions). La construction donne une structure l'algèbre de Hopf-Poisson sur $\mathbb{C}[H]$.

Maintenant le centre $\hat{Z}_\epsilon$ possède aussi naturellement une structure de Hopf-Poisson en utilisant la limite semi-classique des relations de l'algèbre affine quantique avec paramètre générique : le crochet de Poisson est donné par le premier terme dans le développement des crochets dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ quand $q \to \epsilon$. Nous obtenons avec le groupe des lacets analytiques une réalisation géométrique de $\hat{Z}_\epsilon$:

Théorème II.3. [15] *$\mathbb{C}[H]$ est isomorphe à $\hat{Z}_\epsilon$ comme algèbre de Hopf-Poisson.*

Regardons plus en détail l'exemple de $GL_1 = \mathbb{C}^*$ qui est déjà non trivial. GL_1 et LGL_1 sont commutatifs. La factorisation de Riemann-Hilbert est la suivante : tout $f \in LGL_1$ s'écrit de manière unique $f = f_+ z^{n(f)} f_-$ avec $f_\pm \in L^\pm GL_1$, $n(f) \in \mathbb{Z}$, $f_-(\infty) = 1$. La composante connexe de LGL_1 contenant 1 est

$$L^0 = \{f \in L | n(f) = 0\}.$$

Soit $\hat{\mathcal{L}} = LGL_1 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Un élément de $\hat{\mathcal{L}}$ est un triplet $(z^n e^f, \Lambda, \Gamma)$ avec $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{Z}$. Le produit de $\hat{\mathcal{L}}$ est :

$$(z^n e^f, \Lambda, \Gamma)(z^m e^g, \Lambda', \Gamma')$$
$$= (z^{n+m}(\Gamma')^{-n}\Gamma^m e^{f(z(\Gamma')^{-1})+g(z\Gamma)}, \Lambda\Lambda' \exp((\frac{d}{dz}(f(z(\Gamma')^{-1}))g(z\Gamma))_{-1}), \Gamma\Gamma').$$

Avec $()_{-1}$ qui donne le coefficient de Fourier de degré -1. Nous avons de plus $(z^n e^f, \Lambda, \Gamma)^{-1} = (z^{-n}e^{-f}, \Lambda^{-1}, \Gamma^{-1})$. Le triplet de Manin est alors $(\tilde{GL_1}, H, K)$, avec $\tilde{GL_1} = \hat{\mathcal{L}} \times \hat{\mathcal{L}}$, K le sous-groupe diagonal et

$$H = \{((f_+, \Lambda, \Gamma), (f_-, \Lambda^{-1}, \Gamma^{-1})) \in \tilde{GL_1} | f_\pm \in (L^0)^\pm, f_+(0) = f_-(\infty)^{-1}\}.$$

Un élément de $h \in H$ s'écrit de manière unique

$$h = ((ae^{\sum_{n>0} a_n z^n}, \lambda, \gamma), (a^{-1}e^{\sum_{n<0} a_n z^n}, \lambda^{-1}, \gamma^{-1})) \in H,$$

avec $a, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}^*$, $a_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Nous définissons les fonctions k, Λ, Γ, h_m, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ par

$$k(h) = a, \quad \Lambda(h) = \lambda, \quad \Gamma(h) = \gamma, \quad h_m(h) = a_m.$$

$C[H]$ est l'anneau polynomial $\mathbb{C}[\Lambda, \Gamma, k, h_m]_{m \in \mathbb{Z}\backslash 0}$ avec k, Λ, Γ inversibles. On obtient le crochet de Poisson

$$\{h_m, h_{m'}\} = \delta_{m,-m'}(\Gamma^{2m} - \Gamma^{-2m}) \ , \ \{h_m, \Lambda\} = m\Lambda h_m,$$

les crochets entre les autres générateurs étant nuls. Ces formules correspondent aux relations de $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{gl}_1)$ qui est une algèbre de Heisenberg quantique. On rappelle que $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ est l'algèbre avec générateurs h_m $(m \in \mathbb{Z} - \{0\})$, $\Lambda^{\pm 1}$, les éléments centraux $\Gamma^{\pm 1}$, k, et les relations :

$$[h_m, h_{-m'}] = \delta_{m,-m'}\frac{1}{m}[m]_q \frac{\Gamma^{2m} - \Gamma^{-2m}}{q - q^{-1}} \ , \ h_m\Lambda = q^{2m}\Lambda h_m.$$

Revenons au cas général. Nous nous intéressons à présent aux feuilles symplectiques de H correspondant aux lacets holomorphes (germes de fonctions holomorphes) que nous paramétrisons géométriquement. Nous utilisons notamment un théorème de Looijenga énoncé dans [EF]. Il décrit une bijection naturelle entre d'une part les classes de conjugaison torsionnées du groupe des lacets holomorphes pour l'action torsionnée

$$g(z) * h(z) = g(zc)^{-1}h(z)g(z),$$

et d'autre part les classes d'isomorphisme de G-fibrés sur la courbe elliptique

$$\mathcal{E} = \mathbb{C}^*/(z \sim cz).$$

Le module de la courbe est relié à la charge centrale. Notons que ces fibrés paramétrisent également des classes d'équations aux q-différences [BG].

Théorème II.4. [15] *Les feuilles symplectiques holomorphes sont paramétrées par :*

$$\{\textit{Classes d'isomorphiqme de } G\textit{-fibrés holomorphes sur } \mathcal{E}\} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^*.$$

Un point important de la preuve est, comme pour les types finis, l'existence de l'application

$$\gamma : \tilde{G} \to \hat{G} \ , \ \gamma(a,b) = a^{-1}b.$$

La restriction de γ à H est un recouvrement de Galois de groupe $H \cap K$. Nous avons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & \tilde{G} \\ \gamma\downarrow & & p\downarrow \\ \hat{G} & \xleftarrow{j} & K \setminus \tilde{G} \end{array},$$

avec i l'inclusion, p la projection et j l'application naturelle. Les feuilles symplectiques de H sont les composantes connexes des images réciproques par γ des classes de conjugaison dans $\hat{G}$.

Nous obtenons enfin la correspondance suivante :

Classes d'isomorphismes de G-fibrés sur $\mathcal{E}$,
$\leftrightarrow$ Classes d'équivalences d'équations aux q-differences,
$\leftrightarrow$ Classes de conjugaison "torsionnées" des groupes de lacets,
$\leftrightarrow$ Feuilles symplectiques dans les groupes de lacets,
$\leftrightarrow$ Classe d'équivalence de caractères centraux de $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\mathfrak{g}})$.

Les caractères centraux de $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\mathfrak{g}})$ paramétrisent les représentations simples à un recouvrement près. Par exemple, les lacets holomorphes correspondent à la catégorie avec une action nilpotente des générateurs de degré strictement négatif (E_0 a une action nilpotent, mais pas nécessairement les autres E_i pour $i \neq 0$).

2 Solution du problème de petitesse géométrique de Nakajima

Rappelons la notion de morphisme semi-petit et petit au sens de Borho-MacPherson [BM] pour une application algébrique propre $\pi : Z \to X$ où Z et X sont des variétés algébriques complexes irréductibles. On considère une stratification finie $X = \sqcup_i X_i$ en sous-variétés irréductibles lisses, telle que $\pi_{|\pi^{-1}(X_i)}$ est une fibration topologique de base X_i et de fibre $\pi^{-1}(x_i)$ avec $x_i \in X_i$ point base. π est dite semi-petite si pour tout i,

$$2\mathrm{dim}(\pi^{-1}(x_i)) \leq \mathrm{dim}(X) - \mathrm{dim}(X_i).$$

π est dite petite si π est semi-petite et si

$$(2\mathrm{dim}(\pi^{-1}(x_i)) = \mathrm{dim}(X) - \mathrm{dim}(X_i)) \Rightarrow (\mathrm{dim}(X) = \mathrm{dim}(X_i)).$$

Les propriétés ne dépendent pas de la stratification choisie. Quand π est projective et Z est rationellement lisse, cette situation géométrique est particulièrement intéressante, car il existe une description très élégante [BM, Section 1.5] des singularités de telles applications en terme de faiseaux d'homologie d'intersection [GM1, GM2]. Par [BM, Section 1.7] le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [BBD] est simplifié : pour $u \in X$, les groupes de cohomologie $H^i(\pi^{-1}(u), \mathbb{Q})$ de la fibre $\pi^{-1}(u)$ sont donnés par des formules explicites impliquant l'homologie d'intersection des adhérences $\overline{X_i}$ des strates telles que $u \in \overline{X_i}$. La formule [BM, Section 1.5] peut être écrite comme une somme qui, dans le cas des résolutions petites, se réduit à un seul terme. Dans ce cas, le résultat est essentiellement contenu dans [GM2]. La résolution de Springer $T^*\mathcal{B} \to \mathcal{N}$ du cône nilpotent d'une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, ainsi que les résolutions partielles correspondantes [BM], constituent un exemple fondamental de morphisme semi-petit.

Les variétés carquois graduées [N1, N2] ont une importance particulière en raison de leur relation profonde avec les représentations des algèbres affines quantiques [N8]. Rappelons-en la définition. On fixe un diagramme de Dynkin avec une orientation. H est l'ensemble des arêtes orientées du diagramme. Pour $h \in H$, $\mathrm{b}(h)$ (resp. $\mathrm{o}(h)$) est le sommet but (resp. origine) de h, et $\overline{h}$ est la même arête que h avec l'orientation inverse. On fixe $q : H \to \{1, -1\}$ telle que $q(h) = -q(\overline{h})$ pour tout $h \in H$.

Soit $V = \bigoplus_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} V_{i,a}$ (resp. $W = \bigoplus_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} W_{i,a}$) un espace vectoriel $I \times \mathbb{C}^*$-gradué tel que les $V_{i,a}$ (resp. $W_{i,a}$) sont de dimension finie et presque tous nuls. Pour $n \in \mathbb{Z}$ soit :

$$\mathrm{L}^\bullet(V,W)^{[n]} = \bigoplus_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} \mathrm{Hom}(V_{i,a}, W_{i,aq^n}) \ , \ \mathrm{E}^\bullet(V,W)^{[n]} = \bigoplus_{h\in H, a\in\mathbb{C}^*} \mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h),a}, W_{\mathrm{in}(h),aq^n}),$$

$$\mathbf{M}^\bullet(V,W) = \mathrm{E}^\bullet(V,V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}^\bullet(W,V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}^\bullet(V,W)^{[-1]}.$$

Les trois composantes d'un élément de $\mathbf{M}^\bullet(V,W)$ sont notées B, α, β respectivement, la composante de B sur $\mathrm{Hom}(V_{\mathrm{out}(h),a}, V_{\mathrm{in}(h),aq^{-1}})$ est notée par $B_{h,a}$. On considère

$$\mu \colon \mathbf{M}^\bullet(V,W) \to \mathrm{L}^\bullet(V,V)^{[-2]} \ , \ \mu_{i,a}(B,\alpha,\beta) = \sum_{\mathrm{in}(h)=i} q(h) B_{h,aq^{-1}} B_{\overline{h},a} + \alpha_{i,aq^{-1}}\beta_{i,a},$$

avec $\mu_{i,a}$ (resp. $\alpha_{i,a}$, $\beta_{i,a}$) la (i,a)-composante de μ (resp. α, β). $G_V = \prod_{i,a} \mathrm{GL}(V_{i,a})$ agit sur $\mathbf{M}^\bullet(V,W)$: $(B,\alpha,\beta) \mapsto g \cdot (B,\alpha,\beta) = (g_{\mathrm{in}(h),aq^{-1}} B_{h,a} g^{-1}_{\mathrm{out}(h),a},\ g_{i,aq^{-1}}\alpha_{i,a},\ \beta_{i,a} g^{-1}_{i,a})$. La sous-variété $\mu^{-1}(0)$ de $\mathbf{M}^\bullet(V,W)$ est stable pour cette action.

Soit $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}$ l'ensemble des points stables de $(B,\alpha,\beta)\in\mu^{-1}(0)$, c'est-à-dire tels que : si un sous-espace $I\times\mathbb{C}^*$-gradué S de V est B-invariant et contenu dans $\mathrm{Ker}(\beta)$, alors $S=0$. Cette condition de stabilité est invariante pour l'action de G_V, et on peut donc définir les orbites stables. Considérons les espaces quotients suivants :

$$\mathfrak{M}_0^\bullet(V,W)=\mu^{-1}(0)/\!\!/G_V,\qquad \mathfrak{M}^\bullet(V,W)=\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}/G_V.$$

Ici "$/\!\!/$" est le quotient affine algébro-géométrique et "$/$", le quotient ensembliste. Par [N2, 3.18], on a un morphisme projectif naturel :

$$\pi\colon \mathfrak{M}^\bullet(V,W)\to\mathfrak{M}_0^\bullet(V,W).$$

Pour $x\in\mu^{-1}(0)^{\mathrm{s}}$, $\pi(G_V.x)$ est l'unique orbite fermée contenue dans l'adhérence de $G_V.x$.

La variété $\mathfrak{M}^\bullet(V,W)$ est non-singulière et π est un analogue de la résolution de Springer. Ainsi il est naturel d'étudier les propriétés de petitesses de ces résolutions π : dans **[9]** nous apportons une solution à ce problème posé par Nakajima [N8, Conjecture 10.4] (voir aussi [N5]) pour certains de ces morphismes correspondant aux modules KR ($\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ est simplement lacée). On a [N8] une notion de module petit qui est la traduction de la propriété géométrique pour les représentations. En utilisant une modification d'une preuve d'un théorème de [N8], nous obtenons la caractérisation suivante, qui peut être considérée ici comme une définition (l'implication $\Rightarrow$ est démontrée dans [N8]) :

Théorème II.5. [9] *$L(m)$ est petit si et seulement si pour tout monôme dominant $m'\leq m$, $L(m')$ est minuscule.*

Considérons la notion usuelle de sommet monovalent, bivalent et trivalent dans le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$. Pour $i\in I$, on note d_i le plus petit $d\geq 1$ tel qu'il existe $i=i_1,\cdots,i_d\in I$ distincts satisfaisant $C_{i_j,i_{j+1}}<0$ et i_d est trivalent (si il n'y a pas de sommet trivalent, on écrit $d_i=+\infty$ pour tout $i\in I$). La réponse à la conjecture de petitesse de Nakajima est :

Théorème II.6. [9]*[Problème de petitesse] Soient $k>0, i\in I, a\in\mathbb{C}^*$. Alors $W_{k,a}^{(i)}$ est petit si et seulement si $k\leq 2$ ou (i est monovalent et $k\leq d_i+1$).*

En particulier pour $\mathfrak{g}=sl_2$ ou $\mathfrak{g}=sl_3$, tous les $W_{k,a}^{(i)}$ sont petits. En général nous obtenons un critère explicite de petitesse. Du point de vue géométrique, nous caractérisons ainsi les résolutions petites. Certains points de la preuve reposent sur le théorème I.10 d'élimination, qui permet d'éliminer suffisamment de monômes dans les q-caractères des représentations dont on veut montrer qu'elles sont minuscules.

Dans **[9]** un analogue du Théorème II.6 est également démontré dans le cadre plus général des affinisations quantiques simplement lacées. Notons enfin que dans ce contexte des variétés carquois, les résultats de **[1, 2, 3]** peuvent être interprétés géométriquement : ils donnent des informations sur la structure de ce que seraient des variétés carquois dans des cas non-simplement lacés.

Troisième partie

Dualité de Langlands

La dualité (ou correspondance) de Langlands est un vaste programme où sont mis en relation divers objets suivant certaines symétries. Ce programme, qui a son origine en théorie des nombres (représentations de groupes algébriques réductif sur un corps local / représentations du groupe de Galois de ce corps), a de nombreuses ramifications, par exemple en géométrie algébrique, physique mathématique... dont en particulier le programme de Langlands géométrique (représentations de groupes de lacets / fibrés vectoriels avec une connection plate sur le disque pointé, voir par exemple [F]). Dans **[13]** puis dans **[17]** nous établissons une nouvelle dualité de Langlands dans le cadre de la théorie des représentations des groupes quantiques, et même des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. On rappelle ici que l'algèbre Langlands duale de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre ${}^L\mathfrak{g}$ de matrice de Cartan la matrice transposée.

Avant de donner ces résultats plus en détails, expliquons-en les motivations. Il existe un isomorphisme entre le centre $Z(\mathfrak{g})$ d'une complétion de l'algèbre enveloppante de $\hat{\mathfrak{g}}$ (lorsque l'élément central est identifié à un certain niveau dit critique) et la W-algèbre $W({}^L\mathfrak{g})$ classique de l'algèbre Langlands dual ${}^L\mathfrak{g}$. Le centre $Z(\mathfrak{g})$ se retrouve ainsi mis en relation d'un côté avec des caractères centraux et, de l'autre, avec les "opers", qui sont des fibrés sur le disque pointé avec une connection plate (comme définis par Drinfeld-Sokolov et Beilinson-Drinfeld). C'est le point de départ de la correspondance de Langlands géométrique locale [FG, F] et de la construction par Beilinson-Drinfeld d'une correspondance de Langlands géométrique globale [BD].

Pour comprendre cet isomorphisme, qui est encore très mystérieux, une relation entre le centre Z_q de l'algèbre affine quantique au niveau critique et $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ est proposée dans [FR2]. Ensuite, dans [FR3], les auteurs considèrent une nouvelle déformation $W_{q,t}(\mathfrak{g})$ dont le but est d'interpoler $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ et $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_t({}^L\hat{\mathfrak{g}}))$. Quelques exemples pour des représentations fondamentales y sont étudiés. Cela suggère l'idée générale qu'en établissant des liens entre la théorie des représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et de $\mathcal{U}_t({}^L\hat{\mathfrak{g}})$, on pourra obtenir une meilleur compréhension de $Z(\mathfrak{g}) \simeq W({}^L\mathfrak{g})$ et donc de la correspondance de Langlands géométrique.

1 Cas classiques, cristaux et groupes quantiques d'interpolation

Soit $\mathfrak{g}$ de dimension finie et $r = \max_{i\in I}(r_i)$. Pour $i \in I$ soit $r_i^\vee = 1 + r - r_i$ et considérons le sous-réseau

$$P' = \sum_{i\in I} r_i^\vee \mathbb{Z}\omega_i \subset P.$$

Soit $P^L = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\check{\omega}_i$ le réseau des poids de ${}^L\mathfrak{g}$. On rappelle que les $\alpha_i^\vee$ sont les coracines de $\mathfrak{g}$. Nous définissons **[13]** l'application surjective

$$\Pi : P \to P^L,$$

$$\Pi(\lambda) = \delta_{\lambda\in P'} \sum_{i\in I} \lambda(\alpha_i^\vee)(r_i^\vee)^{-1}\check{\omega}_i.$$

χ est le morphisme de caractères de $\mathfrak{g}$ et χ^L le morphisme de caractères de ${}^L\mathfrak{g}$. Nous utilisons l'ordre partiel standard $\preceq$ sur les polynômes.

Théorème III.1. [13] *Pour $\lambda \in P^+$, $\Pi(\chi(L(\lambda)))$ est dans Im(χ^L) et on a l'inégalité :*

$$\Pi(\chi(L(\lambda))) \succeq \chi^L(L(\Pi(\lambda))).$$

Ce théorème établit un lien précis et simple entre les théories de représentations de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^L$, qui, de manière surprenante, semble ne par avoir été précédemment formulé.

L'inégalité est un résultat de positivité qui signifie que $\chi^L(\Pi(\lambda))$ est "contenu" dans $\chi(L(\lambda))$. Le premier point signifie que $\Pi(\chi(L(\lambda)))$ est le caractère d'une représentation virtuelle de ${}^L\mathfrak{g}$. Nous pouvons ainsi définir **[13]** les coefficients de décomposition de Langlands $c_{\lambda,\mu}$ par

$$\Pi(\chi(L(\lambda)) = \sum_{\mu \in P^L \text{ dominant}} c_{\lambda,\mu}\chi^L(L(\mu)).$$

Nous conjecturons leur positivité[3].

Nous confirmons cette conjecture en calculant les coefficients explicitement en type B_2. Pour $\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

$$\Pi(\chi(L(2\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2))) = \chi^L(L(\lambda_1\check{\omega}_1 + \lambda_2\check{\omega}_2)) + \chi^L(L(\lambda_1\check{\omega}_1 + (\lambda_2 - 1)\check{\omega}_2))$$
$$+\chi^L(L((\lambda_1 - 1)\check{\omega}_1 + (\lambda_2 + 1)\check{\omega}_2)) + \chi^L(L((\lambda_1 - 1)\check{\omega}_1 + \lambda_2\check{\omega}_2)).$$

La dualité du théorème III.1 a également un analogue en terme de cristaux. Pour $\lambda \in P$, soit $\mathcal{B}(\lambda)$ le $\mathfrak{g}$-cristal de $L(\lambda)$ de plus haut élément u_λ. Alors nous définissons **[13]** le sous-ensemble

$$\mathcal{B}'(\lambda) = \{u \in \mathcal{B}(\lambda) | \mathrm{wt}(u) \in P'\}$$

qui muni des opérateurs

$$e_i^L = e_i^{r_i^\vee}\ ,\ f_i^L = f_i^{r_i^\vee}\ ,\ \mathrm{wt}^L = \Pi \circ \mathrm{wt}$$

devient un $\mathfrak{g}^L$-cristal.

Théorème III.2. [13] *Pour $\lambda \in P'$ dominant, la composante connexe de $\mathcal{B}'(\lambda)$ contenant u_λ est le cristal du ${}^L\mathfrak{g}$-module de plus haut poids $\Pi(\lambda)$.*

Ce dernier résultat peut aussi être déduit de résultats dans [Kas2] (où l'application à la dualité de Langlands n'est cependant pas considérée). Considérons par exemple, pour $\mathfrak{g}$ de type

[3] Une preuve de cette conjecture a été annoncée récemment dans [MG].

B_2, les cristaux (on utilise les notations du modèle des monômes) :

$$\begin{tikzcd}
1_0^2 \arrow[d, "1"] & \\
1_0 1_2^{-1} 2_1^2 \arrow[d, "1"] \arrow[dr, "2"] & \\
1_2^{-2} 2_1^4 \arrow[d, "2"] & 1_0 2_1 2_3^{-1} \arrow[dl, "1"'] \arrow[d, "2"] \\
1_2^{-1} 2_1^3 2_3^{-1} \arrow[d, "2"] & 1_0 1_2 2_3^{-2} \arrow[d, "1"] \\
2_1^2 2_3^{-2} \arrow[d, "2"] & 1_0 1_4^{-1} \arrow[d, "1"] \\
2_1 2_3^{-3} 1_2 \arrow[d, "2"] \arrow[dr, "1"] & 1_2^{-1} 1_4^{-1} 2_1^2 \arrow[d, "2"] \\
2_3^{-4} 1_2^2 \arrow[d, "1"] & 1_4^{-1} 2_1 2_3^{-1} \arrow[dl, "2"] \\
2_3^{-2} 1_2 1_4^{-1} \arrow[d, "1"] & \\
1_4^{-2} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_0^2 \arrow[d, "1"] & \\
1_0 1_2^{-1} 2_1 \arrow[d, "1"] \arrow[ddr, "2"] & \\
1_2^{-2} 2_1 \arrow[dd, "2"] & \\
 & 1_0 1_2 2_3^{-1} \arrow[d, "1"] \\
2_1 2_3^{-1} \arrow[dd, "2"] & 1_0 1_4^{-1} \arrow[d, "1"] \\
 & 1_2^{-1} 1_4^{-1} 2_1 \arrow[ddl, "2"] \\
2_3^{-2} 1_2^2 \arrow[d, "1"] & \\
2_3^{-1} 1_2 1_4^{-1} \arrow[d, "1"] & \\
1_4^{-2} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1_0 \arrow[dl, "1"] \\
1_2^{-1} 2_1 \arrow[dd, "2"] & \\
 & \\
2_3^{-1} 1_2 \arrow[dr, "1"] & \\
 & 1_4^{-1}
\end{tikzcd}$$

Le cristal à gauche de cardinal 14 est $\mathcal{B}(2\omega_1)$ pour $\mathcal{U}_q(B_2)$. Le cristal au milieu de cardinal 10 est $\mathcal{B}(2\omega_1)$ pour $\mathcal{U}_{-t^2}(C_2)$. Le cristal à droite contient les monômes restant et est $\mathcal{B}(\omega_1)$ pour $\mathcal{U}_{-t^2}(C_2)$. Notons cependant qu'en général les monômes qui ne sont pas dans la composante connexe principale ne forment pas nécéssairement le cristal d'une représentation.

Pour expliquer la dualité du théorème III.1, nous définissons **[13]** des "groupes quantiques d'interpolation" $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{g})$ qui sont des déformations à deux paramètres des groupes quantiques $\tilde{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ et $\tilde{\mathcal{U}}_t({}^L\mathfrak{g})$. Ici la notation $\tilde{\mathcal{U}}$ signifie l'algèbre sans les relations de Serre (les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ et $\tilde{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ sont les mêmes). La spécialisation à $t = 1$ donne $\tilde{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ et la spécialisation à $q = \epsilon$ (avec $\epsilon = -1$ pour les types ADE et $\epsilon = \exp(\pi i/r)$ sinon) donne $\tilde{\mathcal{U}}_{-t}({}^L\mathfrak{g})$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dashed, "q=\epsilon"'] \arrow[dr, dashed, "t=1"] & \\
\tilde{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Langlands}"] & & \tilde{\mathcal{U}}_{-t}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Les représentations de ces nouveaux groupes quantiques permettent d'interpréter de la dualité de Langlands du Théorème III.1.

Dans les cas simplement lacés, la définition est simplement $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_{qt}(\mathfrak{g})$. Dans **[13]** nous définissons des groupes quantiques pour tous les types. Comme illustration écrivons ici la définition pour le type B_1 qui est le premier exemple non trivial (le type B_1 est le type A_1 avec la convention $r = 2$).

Définition III.3. *$\mathcal{U}_{q,t}(B_1)$ est l'algèbre définie par générateurs $X^\pm$, $K^{\pm 1}$, $\tilde{K}^{\pm 1}$, η, les éléments centraux C, $\tilde{C}$, et les relations suivantes : $\mathbb{C}[K^{\pm 1}, \tilde{K}^{\pm 1}, \eta]$ est commutative et :*

$$KX^\pm = q^{\pm 2}X^\pm K \ , \ \tilde{K}X^\pm = t^{\pm 1}X^\pm \tilde{K} \ , \eta X^\pm = X^\pm(\eta \pm 1),$$

$$X^\pm X^\mp = \frac{q^C(t^{\tilde{c}}\tilde{K}^{\pm 1})^P + q^{-C}(t^{\tilde{c}}\tilde{K}^{\pm 1})^{-P} - q^{\mp 1}t^{\pm\tilde{c}}\tilde{K}K - q^{\pm 1}t^{\mp\tilde{c}}(\tilde{K}K)^{-1}}{(q-q^{-1})(qt-(qt)^{-1})},$$

où $P = (-1)^\eta$ et $\tilde{c} = P\tilde{C} - 1/2$.

Proposition III.4. *La sous-algèbre de $\mathcal{U}_{q,1}(B_1)/(\tilde{K} = 1)$ générée par $X^\pm$, $K^{\pm 1}$ est isomorphe à $\mathcal{U}_q(sl_2) = \mathcal{U}_q(B_1)$.*

La sous-algèbre de $\mathcal{U}_{\epsilon,t}(B_1)/(K^2 = 1, Kq^{PC} = \epsilon)$ générée par $\mathcal{X}^\pm = (X^\pm)^2/(t-t^{-1})$, $\mathcal{K}^{\pm 1} = \tilde{K}^{\pm 2}$ est isomorphe à $\mathcal{U}_{t^2}(sl_2) = \mathcal{U}_{-t}(C_1) = \mathcal{U}_{-t}({}^L B_1)$.

Construisons des représentations de $\mathcal{U}_{q,t}(B_1)$. Considérons un espace vectoriel V de base $(v_i)_{0\leq i\leq n}$ avec $n = 2p \in 2\mathbb{Z}$, $v_{-1} = v_{n+1} = 0$. Définissons l'action $C = n+1$, $\tilde{C} = p + 1/2$,

$$X^+ v_{2j} = [n-2j+1]_q v_{2j-1} \ , \ X^+ v_{2j+1} = [n-2j]_{qt} v_{2j} \ , \ X^- v_{2j} = [2j+1]_q v_{2j+1}$$

$$X^- v_{2j+1} = [2j+2]_{qt} v_{2j+2} \ , \ K.v_j = q^{n-2j} v_j \ , \ \tilde{K} v_j = t^{p-j} v_j \ , \eta.v_j = -j v_j.$$

(L'idée de cette déformation est de remplacer dans la représentation usuelle de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ les $[m]_q$ avec m pair par $[m]_{qt}$, les autres $[m]_q$ restant inchangés).

Proposition III.5. *Les formules ci-dessus définissent une action de $\mathcal{U}_{q,t}(B_1)$ sur V_n.*

Comme annoncé au début de cette sous-partie, ceci permet d'interpréter un exemple de dualité de Langlands (élémentaire dans ce cas ci). En effet, en spécialisant à $t = 1$ et $q = \epsilon$, nous obtenons une action sur V_n de $\mathcal{U}_q(B_1) = \mathcal{U}_q(sl_2)$ ou de $\mathcal{U}_{-t}({}^L B_1) = \mathcal{U}_{t^2}(sl_2)$. Pour cette deuxième action la représentation n'est pas simple et se décompose en deux modules simples

$$V_n = (\mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_n) \oplus (\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_{n-1}).$$

En terme de caractère, pour $\mathcal{U}_q(sl_2)$ nous obtenons $y^{2p} + y^{2(p-1)} + \cdots + y^{-2p}$ qui se décompose

$$(y^{2p} + y^{2p-4} + \cdots + y^{-2p}) + (y^{2p-2} + y^{2p-6} + \cdots + y^{2-2p}) \succeq (y^{2p} + y^{2p-4} + \cdots + y^{-2p})$$

pour $\mathcal{U}_{t^2}(sl_2)$ (nous voyons ici se réaliser l'énoncé du Théorème III.1).

Dans **[13]** sont également construites des représentations d'interpolation systématiquement en type G_1 et des exemples sont donnés en rang supérieur.

2 Algèbres affines quantiques et (q,t)-caractères d'interpolation

Revenons aux cas des algèbres affines quantiques. Pour les représentations de plus haut poids nous obtenons des résultats analogues au théorème III.1. Intéressons-nous à présent aux représentations de dimension finie dans l'esprit de [FR3]. Nous définissons les caractères χ, χ^L pour les sous algèbres $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et $\mathcal{U}_q({}^L\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_q({}^L\hat{\mathfrak{g}})$.

Théorème III.6. [17] *Pour L un module KR de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de plus haut poids λ on a $\Pi(\chi(L)) \succeq \chi^L(L')$ où L' est un module KR de $\mathcal{U}_t(\hat{\mathfrak{g}}^L)$ de plus haut poids $\Pi(\lambda)$.*

Pour démontrer ce résultat, nous construisons des "(q,t)-caractères d'interpolation" $\chi_{q,t}$ de manière systématique : ce sont des polynômes en des variables d'interpolations Y_{i,q^rt^s} ($i \in I, r, s \in \mathbb{Z}$) et α. Ici α est une fonction d'interpolation dépendant de q,t et telle que $\alpha(q,1) = 1$ et $\alpha(1,\epsilon) = 0$. Par exemple si $r = 2$ nous pouvons utiliser la fonction de [FM] :

$$\alpha(q,t) = \frac{(q+q^{-1})(qt-q^{-1}t^{-1})}{(q^2t-q^{-2}t^{-1})}.$$

Nous définissons **[17]** une contrainte d'invariance pour ces (q,t)-caractères d'interpolation analogue à la symétrie des caractères usuels pour l'action du groupe de Weyl (ceci garantit qu'on n'a pas "trop" de (q,t)-caractères d'interpolation). Nous prouvons **[17]** que l'image de l'anneau des (q,t)-caractères d'interpolation par spécialisation à $t = 1$ est $\mathrm{Im}(\chi_q)$ et par spécialisation à $q = \epsilon$ est $\mathrm{Im}(\chi_t^L)$.

$$\begin{tikzcd} & \chi_{q,t} \arrow[dl, dashed, "q=\epsilon"'] \arrow[dr, dashed, "t=1"] & \\ \chi_q(V) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Langlands}"] & & \chi_t^L(V') \end{tikzcd}$$

Théorème III.7. [17] *Pour m un monôme dominant en les variables d'interpolation, il existe un unique (q,t)-caractère d'interpolation $F(m)$ dont m est l'unique monôme dominant.*

La preuve est constructive, basée sur un algorithme dans l'esprit de [FM] et de **[2]**.

En général nous conjecturons qu'il existe certaines combinaisons des $F(m)$ qui interpolent entre des q-caractères de représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et des t-caractères torsionnés de représentations de $\mathcal{U}_t(\hat{\mathfrak{g}}^L)$. Nous le montrons dans le cas des modules KR en utilisant les théorèmes I.4 et I.6 :

Théorème III.8. [17] *Pour L un module KR de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de plus haut poids $\lambda \in P'$ il existe un (q,t)-caractère d'interpolation dont la spécialisation à $t = 1$ est $\chi_q(L)$ et la spécialisation à $q = \epsilon$ est $\chi_t^L(L')$ avec L' module KR de $\mathcal{U}_t(\hat{\mathfrak{g}}^L)$ de plus haut poids $\Pi(\lambda)$.*

L'existence de ces (q,t)-caractères d'interpolation confirme [FR3, Conjecture 1]. Comme illustration, donnons un exemple de (q,t)-caractère d'interpolation :

$$
\begin{tikzcd}
Y_{2,1}Y_{2,q^2} \arrow[d, "{2,q^3t}"] & & \\
\alpha Y_{2,1}Y^{-1}_{2,q^4t^2}Y_{1,q^3t} \arrow[d, "{2,qt}"] \arrow[dr, "{1,q^5t^2}"] & & \\
Y^{-1}_{2,q^2t^2}Y^{-1}_{2,q^4t^2}Y_{1,qt}Y_{1,q^3t} \arrow[d, "{1,q^3t^2}"] \arrow[dr, "{1,q^5t^2}"] & \alpha Y_{2,1}Y_{2,q^6t^2}Y^{-1}_{1,q^7t^3} \arrow[d, "{2,qt}"] \arrow[dr, "{2,q^7t^3}"] & \\
Y_{1,q^3t}Y^{-1}_{1,q^5t^3} \arrow[d, "{1,q^5t^2}"] & Y^{-1}_{2,q^2t^2}Y_{2,q^6t^2}Y^{-1}_{1,q^7t^3}Y_{1,qt} \arrow[dl, "{1,q^3t^2}"] \arrow[d, "{2,q^7t^3}"] & \alpha Y_{2,1}Y^{-1}_{2,q^8t^4} \arrow[dl, "{2,qt}"] \\
Y^{-1}_{1,q^5t^3}Y^{-1}_{1,q^7t^3}Y_{2,q^4t^2}Y_{2,q^6t^2} \arrow[d, "{2,q^7t^3}"] & \alpha Y^{-1}_{2,q^2t^2}Y^{-1}_{2,q^8t^4}Y_{1,qt} \arrow[dl, "{1,q^3t^2}"] & \\
\alpha Y^{-1}_{1,q^5t^3}Y_{2,q^4t^2}Y^{-1}_{2,q^8t^4} \arrow[d, "{2,q^5t^3}"] & & \\
Y^{-1}_{2,q^6t^4}Y^{-1}_{2,q^8t^4} & &
\end{tikzcd}
$$

Π_q donne le q-caractère d'un module KR de $\mathcal{U}_q(B_2^{(1)})$ de dimension 11 et Π_t donne :

$$
\begin{tikzcd}
(Y_{2,1}Y_{2,-1}) \arrow[d, "{2,-t^2}"] & \\
(Y_{2,-t^2}Y_{2,t^2})^{-1}Y_{1,-\epsilon t}Z_{1,\epsilon t} \arrow[d, "{1,-\epsilon t^2}"] \arrow[dr, "{1,\epsilon t^2}"] & \\
Y_{1,\epsilon t}Y^{-1}_{1,-\epsilon t^3} \arrow[d, "{1,\epsilon t^2}"] & Y^{-1}_{1,\epsilon t^3}Y_{1,-\epsilon t} \arrow[dl, "{1,-\epsilon t^2}"] \\
Y^{-1}_{1,-\epsilon t^3}Y^{-1}_{1,\epsilon t^3}(Y_{2,-t^2}Y_{2,t^2}) \arrow[d, "{2,-t^6}"] & \\
(Y_{2,t^4}Y_{2,-t^4})^{-1} &
\end{tikzcd}
$$

C'est le t-caractère d'une représentation fondamentale de dimension 6 de $\mathcal{U}_t(A_3^{(2)})$.

Quatrième partie

Algèbres toroïdales et affinisées quantiques

Dans cette partie nous étudions les algèbres affinisées quantiques (définies dans l'introduction). Nous construisons en particulier une structure tensorielle sur une catégorie de leurs représentations (ceux ne sont pas des algèbres de Hopf en général). Nous étudions des liens (en partie prospectifs) avec la théorie des algèbres de Cherednik.

1 Catégorification du produit de fusion et T-systèmes généralisés

Considérons une algèbre de Kac-Moody quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ et son affinisée quantique $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \supset \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. On dit qu'une représentation de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ est intégrable (resp. dans la catégorie $\mathcal{O}$) si elle a cette propriété comme représentation de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Dans **[4]** nous démontrons une décomposition triangulaire

$$\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})^- \otimes \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})^-,$$

analogue à celle obtenue pour les algèbres affines quantiques avec la réalisation de Drinfeld (il s'agit de vérifier la compatibilité avec les relations de Drinfeld-Serre). Nous avons alors la notion correspondante de représentation de l-plus haut poids. Ainsi pour $\gamma : \mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbre, nous obtenons un module de Verma $M(\gamma)$ et son quotient simple $L(\gamma)$. Nous démontrons dans **[4]** que les représentations simples intégrables dans la catégorie $\mathcal{O}$ sont les $L(\gamma)$ où γ est donné par des polynômes de Drinfeld :

$$\sum_{r\geq 0}\gamma(\phi^{\pm}_{i,\pm r})z^{\pm r} = q^{r_i \deg(P_i)}P_i(zq^{-r_i})(P_i(zq^{r_i}))^{-1}.$$

Nous pouvons ainsi considérer les modules KR $W^{(i)}_{k,a}$ pour les algèbres affinisées quantiques. Dans la suite de cette partie nous supposons que la matrice quantique de $\mathfrak{g}$, qui est définie par $C_{i,j}(z) = [C_{i,j}]_z + \delta_{i,j}([2]_{z^{r_i}} - [2]_z)$, est inversible. Cette propriété est satisfaite pour les algèbres toroïdales quantiques (dans le cas $A_1^{(1)}$ on utilise la convention $r_0 = r_1 = 2$).

Dans **[4]** nous construisons combinatoirement un produit $*$ qui donne une structure d'anneau sur le groupe de Grothendieck $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}))$ des représentations intégrables dans la catégorie $\mathcal{O}$. Il est de plus démontré **[4]** que $*$ est un produit de fusion, c'est-à-dire que les constantes de structure sur les représentations simples sont des entiers positifs. Cela est évident dans le cas des algèbres affines quantiques car $*$ est le produit provenant de la structure tensorielle (dans ce cas nous obtenons l'anneau de Grothendieck). Mais en général $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ n'a pas de structure d'algèbre de Hopf. Il reste à comprendre la positivité de ces constantes de structure.

Il est alors naturel de chercher à catégorifier $*$, c'est-à-dire de construire une catégorie tensorielle de représentations de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ correspondant à $*$. Expliquons-en la construction dans **[7]**. Pour simplifier l'exposition nous supposons dans le reste de cette partie que ($i \neq j \Rightarrow C_{i,j}C_{j,i} \leq 3$) (cette condition est satisfaite par presque toutes les algèbres toroïdales quantiques). Pour les algèbres affinisées quantiques, il existe le "coproduit de Drinfeld" qui n'est pas un coproduit au sens habituel du terme car il est défini dans une complétion. En particulier on ne peut pas l'utiliser directement pour fabriquer des produits tensoriels car il y a des problèmes de divergences (même dans des cas simples). Pour dépasser cette difficulté, nous utilisons un procédé de déformation/renormalisation que nous définissons **[7]**. Cette stratégie peut apparaître comme un analogue de la construction des bases critallines de Kashiwara. Nous définissons **[7]** le coproduit de Drinfeld déformé par les formules suivantes sur les générateurs de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})((u))$ avec u paramètre formel :

$$\Delta_u(x_{i,r}^+) = x_{i,r}^+ \otimes 1 + \sum_{l\geq 0} u^{r+l}(\phi_{i,-l}^- \otimes x_{i,r+l}^+) \ , \ \Delta_u(x_{i,r}^-) = u^r(1\otimes x_{i,r}^-) + \sum_{l\geq 0} u^l(x_{i,r-l}^- \otimes \phi_{i,l}^+),$$

$$\Delta_u(\phi_{i,\pm m}^\pm) = \sum_{0\leq l\leq m} u^{\pm l}(\phi_{i,\pm(m-l)}^\pm \otimes \phi_{i,\pm l}^\pm) \ , \ \Delta_u(k_h) = k_h \otimes k_h.$$

Dans les cas où la matrice de Cartan a des coefficients inférieurs à -4, on travaille avec l'algèbre sans les relations de Serre, car leur compatibilité avec Δ_u n'est pas encore établie (ceci est lié à des conjectures dans [E2]). Nous définissons une certaine catégorie Mod de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}(u)$-modules V tel qu'il existe un $\mathbb{C}$-sous espace $W \subset V$ tel que $V \simeq W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(u)$, W (resp. $W \otimes \mathbb{C}[u^\pm]$) est stable pour $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{h})$), et la dépendance en m des coefficients matriciels de l'action des $x_{i,m}^\pm$ est quasi-polynômiale.

Théorème IV.1. [7] Δ_u *définit une structure de catégorie tensorielle sur Mod.*

Notons que l'associativité est garantie par la coassociativité "déformée" suivante :

$$(\mathrm{Id}\otimes \Delta_{u^{r'}}) \circ \Delta_{u^r} = (\Delta_{u^r} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{u^{r+r'}} \text{ pour } r, r' \in \mathbb{Z}.$$

Donnons quelques applications. Soient V et V' deux représentations intégrables de l-plus haut poids de plus haut vecteurs respectifs v et v'. Δ_u définit une structure de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}((u))$-module sur $(V\otimes V')\otimes \mathbb{C}((u))$. De plus $(V\otimes V')\otimes\mathbb{C}(u)$ est stable pour l'action de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}(u)$, et nous pouvons alors définir le module de fusion :

$$V *_f V' = (\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})\otimes \mathbb{C}(u)).(v\otimes v')/(u-1)(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}(u))(v\otimes v').$$

Théorème IV.2. [7] *$V *_f V'$ est un $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$-module de l-plus haut poids et on a dans le groupe de Grothendieck :*

$$[V *_f V'] = [V] * [V'].$$

En conséquence nous comprenons à présent pourquoi les constantes de structures de $*$ sont positives : elles correspondent aux multiplicités des modules simples dans des produits de fusion pour $*_f$. Remarquons de plus que le théorème IV.2 est un résultat de cyclicité. En particulier dans le cas des algèbres affines quantiques, $V *_f V'$ n'est pas le produit tensoriel usuel car $V\otimes V'$ n'est pas nécessairement de l-plus haut poids.

Dans ce cadre général, les modules KR satisfont un T-système (généralisant le théorème I.2), avec une suite exacte exprimée en terme de produit de fusion :

Théorème IV.3. [7] *On a une suite exacte de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$-modules :*

$$0 \to S_{k,a}^{(i)} \to W_{k,a}^{(i)} *_f W_{k,aq_i^2}^{(i)} \to W_{k+1,a}^{(i)} *_f W_{k-1,aq_i^2}^{(i)} \to 0,$$

avec :

$$S_{k,a}^{(i)} = *_{f\,(j,l)\in A_i} W^{(j)}_{K(j,l),aq_j^{-(2l-1)/C_{i,j}}},$$

$$A_i = \{(j,l)\in I\times\mathbb{Z} | C_{j,i} < 0 \ , \ 1 \leq l \leq -C_{i,j}\} \ , \ K(j,l) = -C_{j,i} + E(r_i(k-l)/r_j),$$

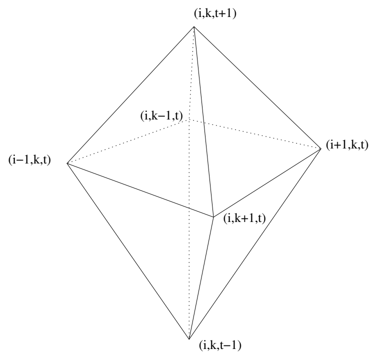
et $E(m)\in\mathbb{Z}$ la partie entière de $m\in\mathbb{R}$.

Comme illustration, étudions plus en détails l'exemple de l'algèbre toroïdale quantique $\mathcal{U}_q(sl_{n+1}^{tor})$ $(n \geq 2)$ de type $A_n^{(1)}$. On identifie I avec $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$. Nous obtenons :

$$0 \to W_{k,aq}^{(i+1)} *_f W_{k,aq}^{(i-1)} \to W_{k,a}^{(i)} *_f W_{k,aq^2}^{(i)} \to W_{k+1,a}^{(i)} *_f W_{k-1,aq_i^2}^{(i)} \to 0.$$

En considérant la classe $T_{i,k,t} = [W_{k,aq^{t+1-k}}^{(i)}]$, nous obtenons l'équation classique de l'octaèdre ("multiplication des sommets opposés"), voir par exemple [KTW] (elle apparaît aussi pour $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_{n+1})$). Nous obtenons une catégorification de cette équation :

$$T_{i,k,t-1}T_{i,k,t+1} = T_{i+1,k,t}T_{i-1,k,t} + T_{i,k+1,t}T_{i,k-1,t}.$$



Considérons le morphisme d'anneaux $R : \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$ tel que $R(Y_{i,a}) = Y_{i+1,a}$. Pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $i \in \mathbb{Z}$ soit $\boxed{i}_a = Y_{[i-1],aq^i}^{-1} Y_{[i],aq^{i-1}}$ avec $[j] \in I$ la classe de $j \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des tableaux $(T_{i,j})_{i \leq 0, 1 \leq j \leq k}$ à coefficients entiers tels que pour tous i, j, $T_{i,j} \leq T_{i,j+1}$, $T_{i,j} < T_{i+1,j}$ et $\forall 1 \leq j \leq k$, $T_{i,j} = i$ pour $i << 0$.

Théorème IV.4. [12] *On a* $\chi_q(W_{k,aq}^{(\ell)}) = R^\ell(\sum_{T \in \mathcal{T}} \prod_{i \leq 0, 1 \leq j \leq k} \boxed{T_{i,j}}_{aq^{2(j-i)}})$.

La preuve esquissée dans **[12]** s'appuie sur des techniques analogues à celle du cas torsionné **[11]**. En effet $\mathcal{U}_q(sl_{n+1}^{tor})$ peut être vue comme une algèbre quantique torsionnée obtenue à partir de l'algèbre affinisée $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}sl_\infty)$ de diagramme de Dynkin une droite infinie (les analogues de σ sont obtenus par décalage d'indice $i \mapsto i + n + 1$).

2 Algèbres affinisées quantiques et algèbres de Cherednik

Pour $x \in \mathbb{C}^*$ et $\epsilon = q^2$, l'algèbre de Cherednik (ou algèbre de Hecke affine double) $\mathbb{H}_l(\epsilon, x)$ est l'algèbre avec les générateurs $\sigma_i^{\pm 1}$, $X_j^{\pm 1}$, $Y_j^{\pm 1}$ $(1 \leq i \leq l-1,\ 1 \leq j \leq l)$ et les relations :

$$(\sigma_i + q^{-1})(\sigma_i - q) = 0 \ ,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \ ,\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1,$$

$$X_0Y_1 = xY_1X_0 \ ,\ X_2Y_1^{-1}X_2^{-1}Y_1 = \sigma_1^2 \ ,\ X_iX_j = X_jX_i \ ,\ Y_iY_j = Y_jY_i \text{ pour } 1 \leq i, j \leq l,$$

$$X_j\sigma_i = \sigma_iX_j \ ,\ Y_j\sigma_i = \sigma_iY_j \text{ si } j \neq i, i+1 \ ,\ \sigma_iX_i\sigma_i = X_{i+1} \ ,\ Y_i = \sigma_iY_{i+1}\sigma_i \text{ pour } 1 \leq i \leq l-1,$$

avec $X_0 = X_1 \cdots X_l$. Ces algèbres ont de remarquables applications [Che] et sont en dualité de Schur-Weyl [VV1] avec les algèbres toroïdales quantiques $\mathcal{U}_q(sl_{n+1}^{tor})$. En général on connaît peu de représentations de dimension finie des algèbres de Cherednik. Nous proposons ici une application **[13]** du modèle des cristaux de niveau 0 (Théorèmes I.11 et I.12) à la construction de telles représentations. Pour commencer, reprenons l'exemple (1) de la réalisation monomial en type $A_3^{(1)}$ du cristal extrémal $\mathcal{B}(\Lambda_1 - \Lambda_0)$ dans la partie 3. En utilisant l'ensemble de ces monômes, nous obtenons **[13]** une représentation intégrable V de $\mathcal{U}_q(sl_4^{tor})$ de q-caractère :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}}(Y_{1,q^{4p}}Y^{-1}_{0,q^{4p+1}} + Y_{2,q^{4p+1}}Y^{-1}_{1,q^{4p+2}} + Y_{3,q^{4p+2}}Y^{-1}_{2,q^{4p+3}} + Y_{0,q^{4p+3}}Y^{-1}_{3,q^{4p+4}}).$$

Soit $\mathcal{U}_q^h(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{U}_q^{v,i}$) la sous-algèbre affine quantique générée par les $x^{\pm}_{j,0}, k_j^{\pm 1}$ (resp. les $x^{\pm}_{i,m}, k_i^{\pm 1}$ avec $i \neq 0$). V est une représentation extrémale affine au sens suivant :

Définition IV.5. [13] *Une représentation extrémale affine de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}^{tor})$ est une représentation intégrable V telle qu'il existe $v \in V$ de l-poids satisfaisant :*

(1) $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}^{tor}).v = V$,

(2) v est extrémal pour $\mathcal{U}_q^h(\mathcal{L}\mathfrak{g})$,

(3) $\forall w \in V$, $\forall 0 \leq i \leq n$, $\mathcal{U}_q^{v,i}(\mathcal{L}\mathfrak{g}).w$ est de dimension finie.

Soit $L \geq 1$ et ϵ une racine primitive de l'unité de rang $4L$. Alors nous obtenons une suite périodique de monômes quand $q = \epsilon$. Considérons la spécialisation $\mathcal{U}_\epsilon(sl_4^{tor})$ de $\mathcal{U}_q(sl_4^{tor})$ à $q = \epsilon$. Nous obtenons une représentation $\tilde{V}$ de dimension $4L$ de $\mathcal{U}_\epsilon(sl_4^{tor})$ telle que :

$$\chi_\epsilon(\tilde{V}) = \sum_{1\leq p\leq L}(Y_{1,\epsilon^{4p}}Y^{-1}_{0,\epsilon^{4p+1}} + Y_{2,\epsilon^{4p+1}}Y^{-1}_{1,\epsilon^{4p+2}} + Y_{3,\epsilon^{4p+2}}Y^{-1}_{2,\epsilon^{4p+3}} + Y_{0,\epsilon^{4p+3}}Y^{-1}_{3,\epsilon^{4p+4}}).$$

En utilisant la dualité de Schur-Weyl nous obtenons une représentation de l'algèbre de Cherednik $\mathbb{H}_1(\epsilon^2, \epsilon^4)$ de dimension L. Nous avons ainsi un procédé pour construire des représentations de dimension finie des algèbres de Cherednik.

Dans une autre direction, les algèbres de réflexion symplectiques ont été définies [EG] comme des généralisations des algèbres de Cherednik (rationelles) dont la structure dépend d'une groupe fini Γ. Dans **[16]** nous définissons naturellement par analogie des algèbres de Lie dont la structure dépend d'un groupe fini cyclique Γ (nous travaillons en type A). Rappelons que pour $\mathcal{A}$ une algèbre associative, l'algèbre de Lie $sl_n(\mathcal{A})$ est l'algèbre dérivée $[gl_n(\mathcal{A}), gl_n(\mathcal{A})]$ avec $gl_n(\mathcal{A}) = gl_n \otimes \mathcal{A}$. En type fini l'analogue naturelle est $sl_n(\mathbb{C}[\Gamma])$. Nous montrons qu'elle est semi-simple de type A. Pour le type affine, soit d l'ordre de Γ, ξ un générateur de Γ et ζ une racine primitive de l'unité de rang r. Considérons l'action de Γ sur $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ définie par $\xi(u) = \zeta u$. Alors les algèbres $sl_n(\mathbb{C}[u^{\pm 1}] \rtimes \Gamma)$, $sl_n(\mathbb{C}[u] \rtimes \Gamma)$ sont aussi connues car elles sont de Kac-Moody de type affines (elles rentrent dans le cadre de la classification de [Ma]). Le cas doublement affine présente plus de nouveauté. On définit l'action de Γ sur $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$: ξ agit sur u, v par $\xi(u) = \zeta u, \xi(v) = \zeta^{-1} v$. En posant $w = uv$, nous obtenons que $sl_n(\mathbb{C}[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}] \rtimes \Gamma)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[u^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \rtimes \Gamma$ avec l'action triviale de Γ sur w (nous avons un résultat analogue pour $sl_n(\mathbb{C}[u^{\pm 1}, v] \rtimes \Gamma)$). En revanche, ceci n'est pas valable pour $sl_n(\mathbb{C}[u, v] \rtimes \Gamma)$ dont la structure ne se déduit pas aussi directement du cas affine. Même dans les cas où elles sont isomorphes à des algèbres connues, nous obtenons pour ces algèbres une présentation différente et une gradation naturelle différente **[16]**. Nous étudions leur extension centrale en calculant leur premier groupe d'homologie cyclique avec des résultats de [Kl, VV2].

Cinquième partie

Catégorification monoïdale des algèbres cluster

Les algèbres cluster[4] [FZ1, FZ2] sont des structures combinatoires qui apparaissent dans des domaines variés en géométrie, topologie, théorie des représentations... C'est un sujet en plein développement. Nous présentons ici une nouvelle réalisation **[18]** d'algèbres cluster, en terme de représentations de dimension finie des algèbres affines quantiques. L'idée générale est de catégorifier une algèbre cluster, c'est-à-dire d'exprimer l'information qu'elle contient en terme d'une catégorie. Ceci est utile pour obtenir d'une part des informations sur l'algèbre cluster, d'autre part sur la catégorie elle-même. De nombreuses catégorifications en terme de catégories additives ont été étudiées (voir par exemple [Kel]). Dans **[18]** nous établissons une catégorification monoïdale : en effet la catégorie des représentations de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ est munie d'une structure monoïdale car $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf, et cette structure intervient également dans notre catégorification.

Avant de donner plus de détails, rappelons la définition des algèbres cluster. Ce sont des sous-algèbres du corps des fractions d'une algèbre de polynômes avec un nombre fini de variables. Considérons des entiers $0 \geq d \geq n \geq 0$ et une matrice antisymétrique $B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq d-n}$ à coefficients entiers (analogue de la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple). L'algèbre cluster $\mathcal{A}(B)$ est définie par Fomin-Zelevinsky [FZ1, FZ2] comme une sous-algèbre du corps des fractions $\mathcal{F} = \mathbb{C}(y_1, \cdots, y_n)$ générée par certaines fractions appelées variables cluster. Donnons leur définition. A partir du couple $((y_1, \cdots, y_n), B)$ appelé graine initiale, on définit d'autres graines qui sont des couples $((z_1, \cdots, z_n), D)$ où $z_1, \cdots, z_n \in \mathcal{F}$ et $D \in \mathcal{M}_{d-n}(\mathbb{Z})$ est antisymétrique. Les nouvelles graines sont obtenues par mutations successives. Une mutation est la transformation pour un $k \in [1, d-n]$ d'une graine $((z_1, \cdots, z_n), D)$ en une nouvelle graine $((z'_1, \cdots, z'_n), D') = \mu_k.((z_1, \cdots, z_n), D)$ avec

$$z'_k = \frac{\prod_{D_{i,k}>0} z_i^{D_{i,k}} + \prod_{D_{i,k}<0} z_i^{-D_{i,k}}}{z_k}\ ,\ D'_{i,j} = \begin{cases} -D_{i,j} & \text{si } k \in \{i,j\}, \\ D_{i,j} + \frac{|D_{i,k}|D_{k,j} + D_{i,k}|D_{k,j}|}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables cluster sont définies comme les z_i des différentes graines $((z_1, \cdots, z_n), B)$.

Les relations ci-dessus donnant les z'_k sont appelées relations d'échange. Si on observe l'image des T-systèmes du Théorème I.2 dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}))$, on obtient des formules de la même forme que les relations d'échange. C'est le point de départ de ce qui suit (voir [Ked, IIKNS] pour d'autres liens entre les algèbres cluster et les algèbres affines quantiques).

1 Catégorification monoïdale et théorème du produit tensoriel

Nous établissons des catégorifications monoïdales dans le sens suivant. On dit qu'une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est une catégorification d'une algèbre cluster $\mathcal{A}$ si on a un isomorphisme ϕ de $\mathcal{A}$ vers l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}$ tel que :

- les variables cluster correspondent à des objets simples premiers (qui ne peuvent s'écrire comme produit tensoriel de modules non-triviaux),

[4]Le terme "algèbres amassées" est aussi utilisé.

- pour un produit de variables cluster dans la même graine, le produit tensoriel des représentations simples correspondantes est simple,

- les relations d'échange $xx' = m + m'$ correspondent à des suites exactes courtes

$$0 \to M' \to S_x \otimes S_{x'} \to M \to 0,$$

$$0 \to M \to S_{x'} \otimes S_x \to M' \to 0.$$

Pour définir une catégorification monoïdale, une propriété importante de la catégorie $\mathcal{C}$ est de contenir suffisamment d'objets simples réels S, c'est-à-dire tels que $S \otimes S$ est simple. On sait qu'il y en a très peu dans la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe quantique de type fini, ou bien dans la catégorie des représentations intégrables qui sont dans la catégorie $\mathcal{O}$ d'une algèbre de Kac-Moody quantique.

Le candidat naturel suivant est la catégorie $\mathcal{C}$ des représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. On sait cependant qu'il y a des objets simples non réels [L] dans $\mathcal{C}$. C'est pour cela que nous définissons **[18]** une sous-catégorie naturelle de $\mathcal{C}$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ est simple et simplement lacée. On choisit une application $\epsilon : I \to \{0,1\}$ telle que pour $i, j \in I$, $(C_{i,j} = -1 \Rightarrow \epsilon_i + \epsilon_j = 1)$ (comme $\mathfrak{g}$ est simple, il n'y a que deux choix possibles). Nous définissons la catégorie $\mathcal{C}_1$ comme la catégorie des modules de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ tels que les constituants simples de la série de Jordan-Hölder ont un plus haut monôme dans $\mathbb{Z}[Y_{i,q^{\epsilon_i}}, Y_{i,q^{2+\epsilon_i}}]_{i\in I}$.

Proposition V.1. [18] *$\mathcal{C}_1$ est une sous-catégorie tensorielle de $\mathcal{C}$.*

La catégorie $\mathcal{C}_1$, bien que plus "petite" que $\mathcal{C}$, est hautement non semi-simple et a une structure très riche. Elle contient des représentations fondamentales, des modules de Kirillov-Reshetikhin, des affinisations minimales et d'autres représentations simples.

Nous établissons le résultat suivant sur la structure tensorielle de $\mathcal{C}_1$, qui va nous permettre de définir des catégorifications :

Théorème V.2. [18] *Soient $S_1, \cdots, S_N$ des modules simples de $\mathcal{C}_1$ tels que pour $i \neq j$, $S_i \otimes S_j$ est simple. Alors $S_1 \otimes \cdots \otimes S_n$ est simple.*

Un des arguments importants utilisés dans la preuve est un résultat de [Cha3, Kas3] concernant des morphismes de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$-module définis à partir de la R-matrice universelle de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$: pour $m \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^{\epsilon_i}}]_{i\in I}$ et $m' \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^{2+\epsilon_i}}]_{i\in I}$ on a un morphisme de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$-modules :

$$\phi : L(m') \otimes L(m) \to L(m) \otimes L(m') \text{ avec } \mathrm{Im}(\phi) \simeq L(mm').$$

2 Preuve des relations d'échange, applications

Le point de départ est que l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_1$ peut-être muni d'une structure d'algèbre cluster avec la graine initiale constituée de modules KR, les premières relations d'échange étant des T-systèmes. Pour étudier cette algèbre cluster et établir les propriétés ci-dessus (comme les relations d'échange), il parait difficile d'utiliser en général directement les q-caractères car les représentations peuvent avoir une très grande dimension et il n'est pas facile de déterminer leur q-caractère. En fait nous n'avons pas besoin de connaître toute l'information du q-caractère pour les représentations dans $\mathcal{C}_1$. Nous introduisons les q-caractères tronqués d'une représentation simple $L(m)$ simple dans $\mathcal{C}_1$. On rappelle que d'après [FM], nous avons

$$\chi_q(L(m)) \in m\mathbb{Z}[A^{-1}_{i,q^{2r+\epsilon_i+1}}]_{i\in I, r\geq 0}.$$

Le q-caractère tronqué de $L(m)$

$$\tilde{\chi}_q(L(m)) \in m\mathbb{Z}[A^{-1}_{i,q^{1+\epsilon_i}}]_{i\in I}$$

est l'expression obtenue en remplacant dans $\chi_q(L(m))$ les $A^{-1}_{i,q^{1+\epsilon_i+2r}}$ pour $r \geq 1$ par 0.

Le q-caractère tronqué contient tous les monômes dominants et le produit de deux q-caractères tronqués contient tous les monômes dominants du produit des q-caractères. Comme d'après [FM] un q-caractère est caractérisé par la multiplicité des monômes dominants, il suffit pour démontrer les relations d'échange de les établir entre les q-caractères tronqués. Ils sont beaucoup plus simples à calculer que les q-caractères car ils ne contiennent que quelques uns de leur monômes (nous utilisons le théorème I.10).

Donnons un exemple en type A_3. Les 12 représentations simples premières de $\mathcal{C}_1$ sont

Les représentations fondamentales : $L(Y_{1,1})$, $L(Y_{2,q^3})$, $L(Y_{3,1})$, $L(Y_{1,q^2})$, $L(Y_{2,q})$, $L(Y_{3,q^2})$,

Les modules de Kirillov-Reshetikhin : $L(Y_{1,1}Y_{1,q^2})$, $L(Y_{2,q}Y_{2,q^3})$, $L(Y_{3,1}Y_{3,q^2})$,

Les affinisations minimales : $L(Y_{1,1}Y_{2,q^3})$, $L(Y_{2,q^3}Y_{3,1})$,

Autre représentation : $L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1})$.

Alors les 12 q-caractères tronqués sont respectivement :

Représentations fondamentales : $1 + A^{-1}_{1,q}(1 + A^{-1}_{2,q^2})$, 1, $1 + A^{-1}_{3,q}(1 + A^{-1}_{2,q^2})$, 1, $1 + A^{-1}_{2,q^2}$, 1,

Modules KR : 1, 1, 1,

Affinisations minimales : $1 + A^{-1}_{1,q}$, $1 + A^{-1}_{3,q}$,

Autre représentation : $(1 + A^{-1}_{1,q})(1 + A^{-1}_{3,q})$.

Dans cet exemple on vérifie aisément à la main que ces q-caractères tronqués vérifient les relations d'échange écrites explicitement :

$L(Y_{1,1}) \otimes L(Y_{1,q^2}) = L(Y_{1,1}Y_{1,q^2}) + L(Y_{2,q})$,

$L(Y_{2,q}) \otimes L(Y_{2,q^3}) = L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}) + L(Y_{1,q}) \otimes L(Y_{3,q})$,

$L(Y_{1,1}) \otimes L(Y_{2,q^3}Y_{3,1}) = L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) + L(Y_{3,1}Y_{3,q^2})$,

$L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{2,q}) = L(Y_{2,q}Y_{2,q^3}) \otimes L(Y_{1,1})L(Y_{3,1}) + L(Y_{1,1}Y_{1,q^2}) \otimes L(Y_{3,1}Y_{3,q^2})$,

$L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{2,q^3}) = L(Y_{1,1}Y_{2,q^3}) \otimes L(Y_{3,1}Y_{2,q^3}) + L(Y_{2,q}Y_{2,q^3})$,

$L(Y_{2,q^3}Y_{3,1}) \otimes L(Y_{3,q^2}) = L(Y_{3,1}Y_{3,q^2}) \otimes L(Y_{2,q^3}) + L(Y_{2,q}Y_{2,q^3})$.

Notons que les deux premières relations sont des T-systèmes, les autres sont de nouvelles relations.

En type général, nous établissons des formules de q-caractères tronqués pour les représentations premières de $\mathcal{C}_1$ dont les racines des polynômes de Drinfeld sont sans multiplicité :

Théorème V.3. [18] *Les formules de q-caractères tronqués de ces modules simples premiers sont données explicitement par les polynômes de Fibonacci de [FZ3].*

Explicitons le théorème : soit $J \subset I$ connexe et $m = \prod_{i \in J} Y_{i,q^{3\epsilon_i}}$. On choisit ϵ telle que si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A, le noeud trivalent est dans I_0. Nous prouvons

$$\tilde{\chi}_q(L(m)) = m \sum_{(R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}} \prod_{i \in I} A_{i,q^{1+\epsilon_i}}^{-R_i},$$

avec $\mathcal{R}$ l'ensemble des $(R_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I$ tels que

pour $i \in I_0 \setminus (J \cup I_0)$, $R_i = 0$,

pour $i \in I_1$, $R_i \leq \mathrm{Max}(0, -\eta_i + \sum_{j, C_{i,j} = -1} R_j)$,

où $\eta : I \to \{0,1\}$ est la fonction caractéristique de J.

Nous généralisons également notre résultat à des représentations avec racines multiples en type D. Comme conséquence nous obtenons en types classiques (i.e. A, D) que les variables cluster correspondent à des représentations premières simples. Nous établissons leurs relations d'échange dans l'anneau de Grothendieck (elles généralisent les T-systèmes).

On suppose à présent que $\mathfrak{g}$ est de type A (les résultats suivants sont aussi démontrés en type D_4). On rappelle qu'une algèbre cluster est dite de type fini si elle a un nombre fini de graines. Les algèbres cluster de type fini sont classifiées par les diagrammes de Dynkin de type fini [FZ2].

Théorème V.4. [18][*Catégorification*] *La catégorie $\mathcal{C}_1$ est une catégorification monoïdale de l'algèbre cluster du même type que $\mathfrak{g}$.*

Pour démontrer ce théorème, il faut pouvoir décrire la factorisation des modules simples en représentations premières. En général il y a peu d'exemples de modules simples de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ pour lesquels on connaît une telle factorisation (en dehors du cas $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}sl_2)$ pour lequel une solution complète au problème de factorisation est connue [CP1]). Des exemples de représentations premières sont donnés dans [CP3], **[14]**. Nous établissons :

Théorème V.5. [18] *Tous les modules simples de $\mathcal{C}_1$ sont réels. Nous obtenons une factorisation explicite en modules premiers de toute représentation simple de $\mathcal{C}_1$.*

Les modules premiers sont les $\beta_i = L(Y_{i,q^{2-\epsilon_i}})$, $F_i = L(Y_{i,q^{\epsilon_i}} Y_{i,q^{\epsilon_i+2}})$ $(i \in I)$ et les $\alpha_J = L(\prod_{i \in J} Y_{i,q^{3\epsilon_i}})$ pour $J \subset I$ connexe. La factorisation est obtenue en écrivant des produits de modules premiers deux à deux compatibles, les paires compatibles étant les (β_i, β_j), (F_i, F_j), (F_i, α_J) pour $i, j \in I, J \subset I$, les (β_i, α_J) pour $i \notin J$, et les $(\alpha_{[i,j]}, \alpha_{[i',j']})$ avec

$$j < i' - 1 \text{ ou } (i \leq i' \leq j \leq j' \text{ et } j - i' \text{ est pair}) \text{ ou } (i \leq i' \leq j' \leq j \text{ et } j' - i' \text{ est impair}).$$

Pour les algèbres cluster en question, nous obtenons une nouvelle preuve de la positivité des constantes de structures sur les produits de variables cluster (ce résultat étant connu pour les types étudiés dans cette partie).

Comme autres applications, nous obtenons, en utilisant des résultats connus pour les algèbres cluster, des coefficients Clebsch-Gordan dans $\mathcal{C}_1$ (les relations d'échange en donnent des exemples).

Conclusion : quelques perspectives

Nous décrivons ici quelques directions dans lesquelles nous envisagerions de poursuivre les travaux présentés dans ce mémoire.

Pour l'instant il n'existe pas d'analogue de la formule de caractères de Weyl pour les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$. La preuve de la conjecture de Kirillov-Reshetikhin dans la Partie I est basée sur le théorème I.10 et fonctionne aussi pour des affinisations minimales. Il serait intéressant de pousser la méthode pour une plus grande classe de représentations simples, et ainsi de s'approcher d'une formule de caractère la plus uniforme possible.

Dans la partie II nous avons donné un cadre géométrique pour étudier les représentations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ aux racines de 1. Ces représentations (en particulier la catégorie des représentations correspondants aux lacets holomorphes) seront étudiées plus en détail : comme pour le type fini, on attend que les représentations irréductibles avec le même caractère central ont la même dimension graduée. Il sera également intéressant d'étudier les coefficients de Clebsch-Gordan (gradués) dans l'esprit de [DCPRR]. Dans la partie II nous avons démontré également la propriété de petitesse pour certaines résolutions de variétés carquois. Dans cette situation géométrique on obtient une description des singularités des résolutions. On peut poursuivre cette étude afin d'exploiter géométriquement cette propriété dans les cas où nous l'avons démontrée. Par ailleurs, une preuve analogue fonctionne dans le cadre plus général des algèbres toroïdales quantiques. Une interprétation géométrique des résultats qui en découlent reste à comprendre.

Dans la partie III nous avons expliqué la construction de (q,t)-caractères d'interpolation dans le contexte général de la dualité de Langlands. L'existence de ces (q,t)-caractères confirme [FR3, Conjecture 1] qui prédit l'existence de telles expressions mais d'une nature un peu différente. Elles appartiennent à une algèbre non-commutative à deux paramètres (et non à une double déformation commutative d'anneaux de Grothendieck). Il reste donc à élucider le lien entre ces deux situations. Ceci relierait notamment plus directement nos résultats et le programme de Langlands géométrique, qui est la motivation première de [FR3].

Dans la Partie IV nous avons donné une construction de représentations de dimension finie d'algèbres toroïdales quantiques aux racines de 1. La construction est basée sur une interprétation "monomiale" de l'automorphisme de Kashiwara. Ces représentations devraient pouvoir être comprises dans un cadre plus général (représentations extrémales affines définies dans la partie IV) qui reste à développer, et par dualité dans le cadre de la théorie des algèbres de Cherednik pour lesquelles des modèles géométriques fins ont été obtenus.

Dans la Partie V nous avons décrit des résultats de catégorification des algèbres cluster. Plusieurs questions restent ouvertes dans cette nouvelle direction. Il s'agit d'abord d'obtenir une telle catégorification pour tous les types, simplement et non-simplement lacés. Par ailleurs la catégorie étudiée $\mathcal{C}_1$ a des analogues naturels en niveau supérieur $\mathcal{C}_l$ avec $l \geq 1$ (la condition sur les plus hauts monômes devient $m \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^{\epsilon_i+2r}}]_{0\leq r\leq l}$). En général ces catégories ne donnent pas des catégorifications monoïdales car elles peuvent contenir des objets simples non réels. Mais il semble que certaines propriétés de ces catégories sont controlées par $\mathcal{C}_1$, en particulier avec de possibles analogues des relations d'échanges dans ces catégories qu'il s'agira d'établir (ceci est lié à la conjecture de périodicité démontrée dans [Kel]).

Liste complète des publications :

Articles présentés pour la thèse (2004) :

[1] D. Hernandez, *t-analogues des opérateurs d'écrantage associés aux q-caractères*, International Mathematics Research Notices 2003, no. 8, 451–475

[2] D. Hernandez, *Algebraic approach to q,t-characters*, Advances in Mathematics 187 (2004), no.1, 1–52

[3] D. Hernandez, *The t-analogs of q-characters at roots of unity for quantum affine algebras and beyond*, Journal of Algebra 279 (2004), no. 2, 514–557.

[4] D. Hernandez, *Representations of quantum affinizations and fusion product*, Transformation Groups 10 (2005), no. 2, 163–200.

[5] D. Hernandez, *Monomials of q and q,t-characters for non simply-laced quantum affinizations*, Mathematische Zeitschrift 250 (2005), no. 2, 443–473.

Articles présentés pour l'habilitation (2009) :

[6] D. Hernandez, *The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 596 (2006), 63–87.

[7] D. Hernandez, *Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) 95 (2007), no. 3, 567–608.

[8] D. Hernandez et H. Nakajima, *Level 0 monomial crystals*, Lusztig's issue of Nagoya Mathematical Journal, Vol. 184 (2006), 85–153.

[9] D. Hernandez, *Smallness problem for quantum affine algebras and quiver varieties*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (4) 41 (2008) , no. 2 , 271-306.

[10] D. Hernandez, *On minimal affinizations of representiations of quantum groups*, Communications in Mathematical Physics 277 (2007), no. 1, 221–259.

[11] D. Hernandez, *Kirillov-Reshetikhin conjecture : the general case*, A paraître dans International Mathematics Research Notices.

[12] D. Hernandez, *Quantum toroidal algebras and their representations*, Selecta Mathematica (N.S.) 14 (2009), no. 3-4, 701–725.

[13] E. Frenkel et D. Hernandez, *Langlands duality for representations of quantum groups*, arXiv :0809.4453.

[14] V. Chari et D. Hernandez, *Beyond Kirillov-Reshetikhin modules*, A paraître dans Contemporary Mathematics

[15] C. De Concini, D. Hernandez et N. Reshetikhin, *Geometry of the analytic loop group*, arXiv :0812.3540.

[16] N. Guay, D. Hernandez et S. Loktev, *Double affine Lie algebras and finite groups*, A paraître dans Pacific Journal of Mathematics.

[17] E. Frenkel et D. Hernandez, *Langlands duality for finite dimensional representations of quantum affine algebras*, arXiv :0902.0447.

[18] D. Hernandez et B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, arXiv :0903.1452.

Les articles sont disponibles sur la page web www.dma.ens.fr/$\sim$dhernand et sur arXiv. Les articles **[12, 14]** sont pour une part des articles d'exposition, avec aussi des résultats nouveaux.

Références

[A] **T. Akasaka**, *An integral PBW basis of the quantum affine algebra of type* $A_2^{(2)}$ Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38**, no. 4, 803–894 (2002)

[ADCKP] **E. Arbarello, C. De Concini, V. Kac et C. Procesi**, *Moduli spaces of curves and representation theory*, Comm. Math. Phys. **117**, no. 1, 1–36 (1988)

[Bec] **J. Beck**, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555-568.

[Bet] **H.A. Bethe**, Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, Z. Phys. 71, 205-226 (1931)

[Bi] **G. Birkhoff**, *Equivalent singular points of ordinary linear differential equations*, Math. Ann. **74**, no. 1, 134–139 (1913)

[Bo] **N. Bourbaki**, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres IV-VI, Hermann (1968)

[BBD] **A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne**, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris (1982)

[BD] **A. Beilinson et V. Drinfeld**, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, available at http ://www.math.uchicago.edu/∼mitya/langlands.html

[BG] **V. Baranovsky et V. Ginzburg**, *Conjugacy classes in loop groups and G-bundles on elliptic curves*, Internat. Math. Res. Notices **1996**, no. 15, 733–751

[BK] **J. Beck et V. G. Kac**, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras at roots of unity*, J. Amer. Math. Soc. **9**, no. 2, 391–423 (1996)

[BM] **W. Borho et R. MacPherson**, *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), 23–74, Astérisque, **101-102**, Soc. Math. France, Paris (1983)

[Cha1] **V. Chari**, *Minimal affinizations of representations of quantum groups : the rank* 2 *case*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31**, no. 5, 873–911 (1995)

[Cha2] **V. Chari**, *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Int. Math. Res. Not. **2001**, no. 12, 629–654 (2001)

[Cha3] **V. Chari**, *Braid group actions and tensor products*, Int. Math. Res. Not. **2002**, no. 7, 357–382

[Che] **I. Cherednik**, *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 1, 191–216

[CP1] **V. Chari et A. Pressley**, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)

[CP2] **V. Chari et A. Pressley**, *Quantum affine algebras and affine Hecke algebras*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 295–326

[CP3] **V. Chari et A. Pressley**, *Factorization of representations of quantum affine algebras*, Modular interfaces (Riverside, CA, 1995), 33–40, AMS/IP Stud. Adv. Math., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997

[CP4] **V. Chari et A. Pressley**, *Twisted quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **196**, no. 2, 461–476 (1998)

[Da] **I. Damiani**, *The $\mathcal{R}$-matrix for (twisted) affine quantum algebras*, Representations and quantizations (Shanghai, 1998), 89–144, China High. Educ. Press, Beijing, (2000)

[Dr1] **V. G. Drinfeld**, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987)

[Dr2] **V. G. Drinfeld**, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36**, no. 2, 212–216 (1988)

[DCK] **C. De Concini et V. Kac**, *Representations of quantum groups at roots of* 1, Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 471–506, Progr. Math., 92, Birkhauser Boston, Boston, MA, (1990)

[DCKP] **C. De Concini, V. Kac et C. Procesi**, *Quantum coadjoint action*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 1, 151–189

[DCP] **C. De Concini et C. Procesi**, *Quantum groups*, in D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992), 31–140, Lecture Notes in Math. **1565**, Springer, Berlin (1993)

[DCPRR] **C. De Concini, C. Procesi, N. Reshetikhin et M. Rosso**, *Hopf algebras with trace and representations*, Invent. Math. **161** (2005), no. 1, 1–44

[DFK] **P. Di Francesco et R. Kedem**, *Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 7

[E1] **B. Enriquez**, *Le centre des algèbres de coordonnées des groupes quantiques aux racines p^α-ièmes de l'unité*, Bull. Soc. Math. France **122**, no. 4, 443–485 (1994)

[E2] **B. Enriquez**, *On correlation functions of Drinfeld currents and shuffle algebras*, Transform. Groups **5** (2000), no. 2, 111–120

[EF] **P. Etingof et I. Frenkel**, *Central extensions of current groups in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 3, 429–444

[EG] **P. Etingof et V. Ginzburg**, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.

[F] **E. Frenkel**, *Langlands Correspondence for Loop Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[FG] **E. Frenkel et D. Gaitsgory**, *Affine Kac-Moody algebras and local geometric Langlands correspondence* (with D. Gaitsgory), in *Algebraic Geometry and Number Theory*, Progress in Math. **253**, pp. 69–260, Birkhäuser Boston, 2006 (math.RT/0508382).

[FL] **G. Fourier et P. Littelmann**, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 566–593

[FM] **E. Frenkel et E. Mukhin**, *Combinatorics of q-Characters of Finite-Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras*, Comm. Math. Phy., vol **216**, no. 1, pp 23-57 (2001)

[FR1] **I. Frenkel et N. Reshetikhin**, *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, Comm. Math. Phys. **146**, no. 1, 1–60 (1992)

[FR2] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *Quantum affine algebras and deformations of the Virasoro and W-algebras*, Comm. Math. Phys. **178** (1996), no. 1, 237–264.

[FR3] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *Deformations of W-algebras associated to simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **197** (1998), no. 1, 1–32.

[FR4] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *The q-Characters of Representations of Quantum Affine Algebras and Deformations of W-Algebras*, Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics, Cont. Math., vol. **248**, pp 163-205 (1999)

[FZ1] **S. Fomin et A. Zelevinsky**, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2

[FZ2] **S. Fomin et A. Zelevinsky**, *Cluster algebras. II. Finite type classification*, Invent. Math. 154 (2003), no. 1, 63–121

[FZ3] **S. Fomin et A. Zelevinsky**, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 3, 977–1018

[GKV] **V. Ginzburg, M. Kapranov et E. Vasserot**, *Langlands reciprocity for algebraic surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 2, 147–160

[GM1] **M. Goresky et R. MacPherson**, *Intersection homology theory*, Topology **19**, no. 2, 135–162 (1980)

[GM2] **M. Goresky et R. MacPherson**, *Intersection homology. II*, Invent. Math. **72**, no. 1, 77–129 (1983)

[HKOTT] **G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi et Z. Tsuboi**, *Paths, crystals and fermionic formulae*, MathPhys odyssey, 2001, 205–272, Prog. Math. Phys., **23**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2002

[HKOTY] **G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi et Y. Yamada**, *Remarks on fermionic formula*, in Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 243–291, Contemp. Math., **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999)

[IIKNS] **R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi et J. Suzuki**, *Periodicities of T-systems and Y-systems* Preprint arXiv :0812.0667

[J1] **M. Jimbo**, *A q-difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10**, no. 1, 63–69 (1985)

[J2] **M. Jimbo**, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), no. 3, 247–252

[Kac] **V. Kac**, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd Edition, Cambridge University Press (1990)

[Kas1] **M. Kashiwara**, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73**, no. 2, 383–413 (1994)

[Kas2] **M. Kashiwara**, *Similarity of crystal bases*, Lie algebras and their representations (Seoul, 1995), 177–186, Contemp. Math., 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Kas3] **M. Kashiwara**, *On level-zero representation of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112**, no. 1, 117–175 (2002)

[Kas4] **M. Kashiwara**, *Realizations of crystals*, in Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001), 133–139, Contemp. Math., **325**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003)

[Ked] **R. Kedem**, *Q-systems as cluster algebras*, J. Phys. A **41** (2008), no. 19

[Kel] **B. Keller**, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories*, Prépublication arXiv :0807.1960

[Ki] **A. N. Kirillov**, *Identities for the Rogers dilogarithmic function connected with simple Lie algebras*, J. Soviet Math. **47**, no. 2, 2450–2459 (1989) ; translated from Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 164, Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh. IX, 121–133, **198** (1987)

[Kl] **M. Kleber**, *Combinatorial structure of finite-dimensional representations of Yangians : the simply-laced case*, Internat. Math. Res. Notices **1997**, no. 4, 187–201 (1997)

[KL] **C. Kassel et J.L. Loday**, *Extensions centrales d'algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **32** (1982), no. 4, 119–142 (1983).

[KMOY] **M. Kashiwara, K. Misra, M. Okado et D. Yamada**, *Perfect crystals for* $U_q(D_4^{(3)})$. *J. Algebra* **317** *(2007), no. 1, 392–423*

[KN] **A. Kuniba et T. Nakanishi**, *The Bethe equation at* $q = 0$*, the Mobius inversion formula, and weight multiplicities. II. The* X_n *case*, J. Algebra **251**, no. 2, 577–618 (2002)

[KNH] **A. Kuniba, S. Nakamura et R. Hirota**, *Pfaffian and determinant soluations to a discretized Toda equation for* B_r*,* C_r *and* D_r, J. Phys. A **29**, no. 8, 1759–1766 (1996)

[KNS] **A. Kuniba, T. Nakanishi et J. Suzuki**, *Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory*, Internat. J. Modern Phys. A 9, no. **30**, 5215–5266 (1994)

[KNT] **A. Kuniba, T. Nakanishi et Z. Tsuboi**, *The canonical solutions of the Q-systems and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Comm. Math. Phys. **227**, no. 1, 155–190 (2002)

[KOSY] **A. Kuniba, M. Okado, J. Suzuki, et Y. Yamada**, *Difference L operators related to q-characters*, J. Phys. A **35**, no. 6, 1415–1435 (2002)

[KR] **A.N. Kirillov et N. Reshetikhin**, *Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras*, J. Soviet Math. **52**, no. 3, 3156–3164 (1990) ; translated from Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 160, Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 8, 211–221, 301 (1987)

[KS1] **A. Kuniba et J. Suzuki**, *Functional relations and analytic Bethe ansatz for twisted quantum affine algebras*, J. Phys. A **28**, no. 3, 711–722 (1995)

[KTW] **A. Knutson, T. Tao et C. Woodward**, *A positive proof of the Littlewood-Richardson rule using the octahedron recurrence*, Electron. J. Combin. 11 (2004), no. 1, Research Paper **61** (2004)

[L] **B. Leclerc**, *Imaginary vectors in the dual canonical basis of* $U_q(n)$, Transform. Groups **8** (2003), no. 1, 95–104

[Ma] **O. Mathieu**, *Classification des algèbres de Lie graduées simples de croissance* ≤ 1, Invent. math. **86** (1986), no. 2, 371-426.

[Mi] **K. Miki**, *Representations of quantum toroidal algebra* $U_q(\mathrm{sl}_{n+1,\mathrm{tor}})(n \geq 2)$, J. Math. Phys. **41**, no. 10, 7079–7098 (2000)

[MG] **K. McGerty**, *Langlands duality for representations and quantum groups at a root of unity*, Prépublication arXiv :0902.1485

[N1] **H. Nakajima**, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76**, no. 2, 365–416 (1994)

[N2] **H. Nakajima**, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91**, no. 3, 515–560 (1998).

[N3] **H. Nakajima**, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14**, no. 1 (2001)

[N4] **H. Nakajima**, *Geometric construction of representations of affine algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 423–438, Higher Ed. Press, Beijing (2002)

[N5] **H. Nakajima**, *Problems on quiver varieties*, The 50th Geometry Symposium, Hokkaido Univ. 2003 Aug

[N6] **H. Nakajima**, *t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7**, 259–274 (electronic) (2003)

[N7] **H. Nakajima**, *t–analogs of q–characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n*, in Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001), 141–160, Contemp. Math., **325**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003)

[N8] **H. Nakajima**, *Quiver Varieties and t-Analogs of q-Characters of Quantum Affine Algebras*, Ann. of Math. **160**, 1057 - 1097 (2004)

[NN] **W. Nakai et T. Nakanishi**, *Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras : the C_n case*, J. Phys. A **39**, no. 9, 2083–2115 (2006)

[OS] **M. Okado et A. Schilling**, *Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types*, Represent. Theory 12 (2008), 186-207

[PS] **A. Pressley et G. Segal**, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1986)

[R] **N. Reshetikhin**, *The spectrum of the transfer matrices connected with Kac-Moody algebras*, Lett. Math. Phys. **14**, no. 3, 235–246 (1987)

[VV1] **M. Varagnolo et E. Vasserot**, *Schur duality in the toroidal setting*, Comm. Math. Phys. **182** (1996), no. 2, 469–483

[VV2] **M. Varagnolo et E. Vasserot**, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), no. 1, 133–159.