Ecole Polytechnique
Formation préparatoire - Mathématiques

Topologie d'un espace métrique

1 Vocabulaire.

Définition.

Soit X un ensemble. Une **distance** est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, symétrique ($d(x,y) = d(y,x)$) vérifiant :

1) Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

2) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$

On dit que X muni d'une distance est un **espace métrique**.

Exemple fondamental :

Soit E un espace vectoriel défini sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ **de dimension quelconque**. On appelle **norme** sur E toute application $\| \,.\, \| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $v \in E$ alors $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$.

(ii) pour $v \in E$ et $\lambda \in k$ alors $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(iii) pour tout v, w dans E, alors $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Toute partie $X \subset E$ d'un espace vectoriel normé muni de la distance $d(x,y) = \|x - y\|$ est un espace métrique.

Exemples de normes.

• La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$, les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$: on pose $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\mathbb{N}_\infty = max(\mid x_1 \mid, \ldots \mid, x_n \mid) \qquad N_1(x) = \mid x_1 \mid + \ldots \mid x_n \mid \qquad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

• Soit E l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_n$ d'éléments de k. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \qquad \|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \qquad \|u\|_2 = \big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 \big)^{1/2}$$

Bien sûr, les valeurs obtenues ainsi peuvent être infinies. On pose alors :

• $l^\infty = \{u \in E; \|u\|_\infty$ est fini $\}$ l'ensemble des suites bornées

• $l^1 = \{u \in E; \|u\|_1$ est fini $\}$ l'ensemble des suites absolument convergentes

• $l^2 = \{u \in E; \|u\|_2$ est fini $\}$ l'ensemble des suites de carré sommable

Alors pour $j = 1, 2$ ou ∞, l'application $\| \, \|_j$ est une norme sur l^j.

On fixe X un espace métrique dont on note d la distance.

Définitions.

1. On appelle **boule ouverte** de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) = \{y \in X; d(x,y) < r\}$.
2. Un sous-ensemble $U \subset X$ est dit **ouvert** si, soit il est vide, soit pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. (Exemple : tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$)
3. Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit **fermé** si son complémentaire est ouvert.
   Attention un ensemble peut-être ni ouvert ni fermé (par exemple $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$), un ensemble peut-être à la fois ouvert et fermé (par exemple $\mathbb{R}$).

4. Soit $A \subset X$. On appelle **adhérence de** A le plus petit fermé de E qui contient A. L'adhérence de A est notée $\bar{A}$.
5. Soit $A \subset X$. On dit que A est **dense** dans X si $\bar{A} = X$.
6. Soit $A \subset X$. On appelle **intérieur de** A le plus grand ouvert de X contenu dans A. L'intérieur de A est notée $\overset{\circ}{A}$.
7. Un ensemble $V \subset X$ est un **voisinage** de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $U \subset V$.
8. Un ensemble $A \subset X$ est dit **borné** s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset \overline{B(0,R)}$.

Propriété. Un espace métrique est toujours **séparé** c'est-à-dire qu' il vérifie la propriété suivante : pour tout $x \neq y$ dans X il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$. (Cette propriété assure l'unicité de la limite d'une suite convergente).

On retrouve les propriétés suivantes bien connues sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Propriétés. Soit I un ensemble, une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et une famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$.
• $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert **si I est fini** alors $\bigcap_{i\in I} U_i$ est un ouvert,
• $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé **si I est fini** alors $\bigcup_{i\in I}$ est un fermé.

Définition (topologie induite). Soit $A \subset Y \subset X$.
La partie A est ouverte dans Y s'il existe U un ouvert de X tel que $A = U \cap Y$.
La partie A est fermée dans Y s'il existe F un fermé de E tel que $A = F \cap Y$.
Exemples. l'intervalle $[0,1[$ est ouvert dans $[0,+\infty[$ mais pas dans $\mathbb{R}$, il est fermé dans $]-1,1[$.

2 Suites.

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X et $u \in X$.

La suite $(u_n)_n$ **converge** vers u si la suite de nombres réels $\big(d(u_n,u)\big)_n$ converge vers 0.
La suite $(u_n)_n$ a une **valeur d'adhérence** u si pour tout $\epsilon > 0$ la boule ouverte $B(u,\epsilon)$ contient une infinité de u_n. Ceci est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ qui converge vers u (φ est ici une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). On dit également qu'on peut extraire une sous-suite de u_n (ou encore qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$) qui converge vers u.

Propriétés. 1) Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, c'est sa limite. (Une suite qui a plusieurs valeurs d'adhérence est donc divergente).
2) $A \subset X$ est fermé si et seulement si toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge dans X a sa limite dans A.
Contre-exemple $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$, la suite des nombres $(1+\frac{1}{n})^n \in \mathbb{Q}$ converge vers $e \notin \mathbb{Q}$.

3 Continuité.

Soit (X,d) et (Y,D) deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite **continue en** $x_0 \in X$ si pour tout $V \subset Y$ voisinage de $f(x_0)$ alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.
Elle est **continue sur** X si elle est continue en chaque point de X.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) f est continue sur X,
(b) pour tout $U \subset Y$ ouvert alors $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.
(c) pour tout $F \subset Y$ fermé alors $f^{-1}(F)$ est fermé dans X.
(d) pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X convergeant vers $x \in X$ alors la suite $\big(f(x_n)\big)_n$ converge vers $f(x)$.

Un **homéomorphisme** est une application f continue bijective telle que son inverse f^{-1} est continue.

L'application f est **uniformément continue sur A** si elle vérifie la propriété suivante :
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que $\forall x \in A$ et $\forall y \in A$ vérifiant $d(x,y) < \delta$ alors $D\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$.

4 Partie compacte.

Définition. Une partie K de X est dite **compacte** si elle possède la propriété suivante : de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

Ceci se traduit de la manière suivante : si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ alors il existe un ensemble fini $F \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i\in F} U_i$.

Théorème. Soit $A \subset X$. Alors A est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans A.

Propriétés.

1. Soit K un compact de X. Alors K est fermé et borné.
2. si K est compact et $F \subset K$ est fermé alors F est compact.
3. Une réunion finie de compact est compacte.
4. Un produit fini de compacts est compact.
5. Soit K un compact de X et (Y, D) un espace métrique. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de Y et f est uniformément continue sur K.
   En particulier, si $F = \mathbb{R}$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes (c'est-à-dire il existe $x_0 \in K$ et $y_0 \in K$ tels que $f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x)$ et $f(y_0) = \sup_{x\in K} f(x)$).

Lemme Soit $(E, \| \;\|)$ un espace vectoriel normé. **Si la dimension de E est finie** alors tout ensemble fermé et borné est compact. Ceci est **faux en dimension infinie**.

Conséquences. Soit E un espace vectoriel.

Deux **normes** N_1 et N_2 définies sur E sont dites **équivalentes** si toute boule ouverte pour N_1 contient une boule ouverte pour N_2 et réciproquement. Ceci est équivalent à la propriété suivante : il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $u \in E$, l'on ait :

$$C_1 N_1(u) \le N_2(u) \le C_2 N_1(u)$$

Lorsque E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et cet énoncé est faux si $dim\, E$ est infinie.

Ainsi, lorsque E est de dimension finie, les notions introduites ne dépendent pas du choix de la norme mais par contre, **ces notions dépendent du choix de la norme lorsque E est de dimension infinie**.

5 Espace complet.

Une suite $(u_n)_n$ est **une suite de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que si ($p \geq n_0$ et $q \geq n_0$) alors $d(u_p, u_q) < \epsilon$.

Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers $a \in A$.

Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ complet est appelé **espace de Banach**.

Propriétés.

1. Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\| \, . \, \|$ est complet.
2. Un espace compact est complet.
3. Si X est complet et $A \subset X$ est fermé alors A est complet.

Un espace vectoriel de dimension infinie peut être complet pour une norme et non complet pour une autre norme.

6 Partie connexe.

Une partie A de E est dite **connexe par arcs** si deux points a et b de A peuvent être joints par un chemin continu contenu dans A. (c'est-à-dire qu'il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continu tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$).
Une partie A de E est dite **connexe** si A ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.

La notion d'ensemble "*connexe par arcs*" est généralement plus facile à imaginer que la notion d'ensemble "*connexe*". Tout ensemble connexe par arcs est connexe, mais la réciproque est fausse en général. Cependant, **si $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert alors U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs**.

Les propriétés importantes des ensembles connexes sont les suivantes :
On munit l'ensemble $\{0,1\}$ de la topologie discrète ce que veut dire que les ouverts sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0,1\}$.

Proposition : .
1) Les propriétés suivantes suivantes sont équivalentes :
(a) A est connexe
(b) A ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux fermés non vides.
(c) si $Y \subset A$ est à la fois ouvert et fermé alors $Y = \emptyset$ ou $Y = A$.
(d) si $f : A \to \{0,1\}$ est continue alors f est constante.
(e) si F est un ensemble discret et $f : A \to F$ est continue alors f est constante.

(2) l'union de deux connexes d'intersection non vide est connexe.
(3) les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts ou fermés ou semi-ouvert avec bornes finies ou infinies).
(4) L'image d'un connexe par une application continue est connexe.
(5) l'adhérence d'un connexe est connexe.