Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

Corrigé 3- Topologie

Exercice 1. Si $B \subset X$, on note $X - B$ le complémentaire de B dans X.
1) Soit U un ouvert. On a alors $U \cap A = \emptyset \iff A \subset X - U \iff \overline{A} \subset X - U$ puisque $X - U$ est un fermé contenant A. On obtient donc

$$U \cap A = \emptyset \iff U \cap \overline{A} = \emptyset$$

ce qui est équivalent à

$$U \cap A \neq \emptyset \iff U \cap \overline{A} \neq \emptyset.$$

a) Montrons tout d'abord $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $a \in \overline{A}$ alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a $B(a, \epsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ et donc $B(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ par la remarque précédente, ce qui donne (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $a \notin \overline{A}$ alors $a \in X - \overline{A}$ qui est ouvert. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset X - \overline{A}$ c'est-à-dire $B(a, \epsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$. Ceci donne donc $(ii) \Rightarrow (i)$.

b) Montrons maintenant $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Pour $\epsilon = \frac{1}{n}$, il existe $a_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$ et donc $d(a, a_n) \leq \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_n$ converge alors vers a ce qui donne (iii)

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Si $a \in E$ est la limite d'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ l'on ait $a_n \in B(a, \epsilon)$ et donc $A \cap B(a, \epsilon) \neq \emptyset$.

Exercice 2. Les hypothèses sont : Xest compact et $(x_n)_n$ est une suite de X avec une unique valeur d'adhérence x_0. Il faut montrer que $(x_n)_n$ converge. La seule valeur possible pour la limite est alors x_0.
On veut donc montrer : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ alors $x_n \in B(x0, \epsilon)$. Il suffit de montrer qu'il existe un nombre fini de n tel que $x_n \in X - B(x_0, \epsilon)$. En effet, si ceci est vrai, on note $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}, x_n \in X - B(x_0, \epsilon)\} + 1$ (qui est un nombre fini puisque $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in X - B(x_0, \epsilon)\}$ est fini). Alors, pour $n \geq n_0$ on aura $x_n \in X - B(x_0, \epsilon)$ et donc $x_n \in B(x_0, \epsilon)$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une infinité de n tels que $x_n \in X - B(x_0, \epsilon)$. On obtient une sous-suite $y_n = x_{\varphi(n,)}$ de x_n dont tous les éléments sont dans $X - B(x_0, \epsilon)$.

Comme $B(x_0, \epsilon)$ est ouvert, on a $X - B(x_0, \epsilon)$ est un fermé de X qui compact. On obtient donc que $X - B(x_0, \epsilon)$ est compact. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite y_n admet une valeur d'adhérence $y_0 \in X - B(x_0, \epsilon)$. Mais y_0 est également une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Comme $y_0 \in X - B(x_0, \epsilon)$, on a $x_0 \neq y_0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On a donc bien montré qu'il existe un nombre fini de n tel que $x_n \in X - B(x_0, \epsilon)$

Exercice 3. (i) Si $x_1, x_2 \in X$ alors, on a $d(x_1, F) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$ pour tout $y \in F$ (inégalité triangulaire). En prenant la borne inférieure sur $y \in F$ dans le membre de droite, on obtient $d(x_1, F) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, F)$. En échangeant les rôles de x_1 et x_2, on a $d(x_2, F) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, F)$ et donc $|d(x_1, F) - d(x_2, F)| \leq d(x_1, x_2)$. Ainsi, $x \mapsto d(x, F)$ est 1-lipschitzienne.

(ii) Par définition de la borne inférieure, on a $d(x, F) = 0$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $0 \leq d(x, y) \leq \epsilon$, c'est-à-dire $B(x, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$. Ceci est équivalent à $x \in \overline{F}$ par l'exercice 1.

(iii) La fonction $f(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2)$ est continue sur X. Ainsi $U_1 = f^{-1}(]0 + \infty[)$ et $U_2 = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ sont deux ouverts (images réciproques d'ouverts par une fonction continue), d'intersection vide tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

(iv) La fonction $g(x) = d(x, F_1)$ est continue et F_2 est compact, donc il existe $x_2 \in F_2$ tel que $d(x_2, F_1) = d(F_2, F_1)$. Comme $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, on a $d(x_2, F_1) \neq 0$ par la question 2.

(v) Dans $\mathbb{R}$, on peut prendre $F_1 = \mathbb{N}$ et $F_2 = \{n + 2^{-n-1}\}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut prendre $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 1\}$ et $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 0$

Exercice 4. c'est l'exercice 6.6 page 56 du polycopié corrigé page 100.

Exercice 5. Pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$N_\infty(u) \leq N_2(u) \leq N_1(u) \leq 2N_\infty(u).$$

Exercice 6. On écrit $A = (a_{i,j})_{i,j}$, $B = (b_{i,j})_{i,j}$ et $AB = (c_{i,j})_{i,j}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ ce qui donne $N(AB) \leq nN(A)N(B)$.

La norme $N'(A) = nN(A)$ satisfait l'inégalité voulue.

Exercice 7. Sur $M_n(\mathbb{C})$, toutes les normes sont équivalentes. On choisit la norme définie pour $A = (a_{i,j})$ par $\|A\| = n \sup_{i,j} |a_{i,j}|$. Cette norme vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

1) Comme l'application det est continue l'ensemble $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{\det \neq 0\}$ est ouvert.

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Si $det(M) \neq 0$ alors $M \in Gl(n, \mathbb{C})$. Si $det(M) = 0$ alors 0 est valeur propre de M. Soit $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de M de telle sorte que $det(M - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, \lambda_1, \ldots \lambda_r\}$. La suite de matrices $A_p = M + \frac{1}{p} Id$ converge vers M et pour p tel que, pour tout $j = 1, \ldots r$, on ait $p > \dfrac{1}{|\lambda_j|}$, les matrices A_p sont inversibles.

2) Si B est inversible alors $AB = B^{-1}(BA)B$ et le résultat est immédiat. Ensuite on procède par densité. Si $B \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(B_p)_p$ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui converge vers B. En prenant la limte dans l'égalité $det(AB_p - XI_n) = det(B_p A - XI_n)$ (possible car les applications considérées sont continues), on obtient le résultat voulu.

3) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On note $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq r}$ les valeurs distinctes de M et m_j la multiplicité de λ_j. Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc il existe $P \in Gl(n, \mathbb{C})$ tel que $PMP^{-1} = D + N$ où D est diagonale dont les éléments diagonaux sont les λ_j répétés m_j fois et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & n_{1,2} & \ldots & & & n_{1,n} \\ 0 & 0 & n_{2,3} & & \ldots & n_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & n_{3,4} & \ldots & n_{3,n} \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 & n_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On cherche une matrice D_ϵ ayant des valeurs propres deux à deux distinctes telle que $\|D_\epsilon - D\| < K\epsilon$ où K est une constante ne dépendant que de D. En effet, dans ce cas la matrice $M_\epsilon = P^{-1}(D_\epsilon + N)P$ sera diagonalisable puisque ses valeurs propres sont celles de D_ϵ, donc deux à deux distinctes, et on aura $\|M_\epsilon - M\| \le \|P^{-1}\|\ \|D_\epsilon - D\|\ \|P\|$.

Maintenant, on peut choisir $\alpha \in]0,1]$ tel que les $\lambda_j + k\alpha\epsilon$ pour $j = 1,\dots r$ et $0 \le k \le m_j - 1$ soient deux à deux disctints (il suffit de prendre $\alpha\epsilon < \dfrac{\inf_{i\neq j}|\lambda_i - \lambda_j|}{\sup\{|k-k'|, 0 \le k \le m_i - 1, 0 \le k' \le m_j - 1\}}$).

La matrice D_ϵ dont les valeurs propres sont les $\lambda_j + k\alpha\epsilon$ pour $j = 1,\dots r$ et $0 \le k \le m_j - 1$ vérifie alors $\|D_\epsilon - D\| < n\epsilon$.

4)Si A est diagonalisable, notons $\lambda_1, \dots \lambda_r$ les valeurs propres de A. On a donc $C_A(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_r)^{m_r}$ et $\mathbb{C}^n = Ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus \dots Ker(A - \lambda_r I_n)$ avec $dimKer(A - \lambda_j I_n) = m_j$. Si $X \in Ker(A - \lambda_j I_n)$ alors $(A - \lambda_j)X = 0$ et donc $C_A(A)X = 0$. En prenant une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A, on obtient alors $C_A(A) = 0$.

Maintenant l'application $A \to C_A(X) = det(A - XI_n)$ est continue de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]$ et l'application $P \to P(A)$ est continue de $\mathbb{C}[X]$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Si A est quelqconque, on choisit une A_p de matrices diagonalisables qui converge vers A. En pranant la limte dans l'égalité $C_{A_p}(A_p) = 0$, on obtient le résultat voulu.

Exercice 8.

1) Comme $f \neq 0$, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. On prends $a = \dfrac{x_0}{f(x_0)}$ de telle sorte que $f(a) = 1$. Si $v \in E$, on a $v - f(v)a \in \ker(f)$ ce qui donne $\ker(f) + \mathbb{R}a = E$. Comme $\ker(f) \cap \mathbb{R}a = \{0\}$, on obtient le le résultat.

2) Si f est continue alors $ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est fermé.

3) a) On a choisi a tel que $f(a) = 1$. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = a + \ker(f) = \{a + u; u \in Ker(f)\}$ est fermé, et son complémentaire est ouvert. Comme $0 \notin f^{-1}(\{1\})$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \cap f^{-1}\{1\} = \emptyset$.

b) Soit $x \in B(0,r)$. Si $f(x) > 1$ alors $\dfrac{\|x\|}{f(x)} < r$ avec $f(\dfrac{x}{f(x)}) = 1$ ce qui est impossible par la question a). Donc, pour tout $x \in B(0,r)$, on a $f(x) < 1$.

c) Si $x \in E$ avec $x \neq 0$ alors $\dfrac{rx}{2\|x\|} \in B(0,r)$ et donc $|f(\dfrac{rx}{2\|x\|})| < 1$. Ainsi, on a $|f(x)| < 2\|x\|/r$ ce qui implique f continue.

(iv) Soit $y \in \ker(f)$. Alors $|f(x)| = |f(x-y)| \le \|f\|\ \|x-y\|$, donc $|f(x)| \le \|f\|\, d(x, \ker(f))$.

Par ailleurs, il existe une suite x_n telle que $|f(x_n)|/\|x_n\|$ converge vers $\|f\|$, et $f(x_n) = f(x)$ (quitte à modifier x_n en $x_n f(x)/f(x_n)$). Alors, on a $d(x, \ker(f)) \le \|x - (x - x_n)\| = \|x_n\| \to |f(x)|/\|f\|$.

(v) Si f n'est pas continue alors $ker(f)$ est non fermé. Son adhérence $\overline{ker(f)} = F$ est un sous-espace vectoriel de E et il existe $x \in F$ tel que $f(x) \neq 0$. Dans ce cas, $E = ker(f) \oplus \mathbb{R}x = F$ ce qui donne le résultat.

Exercice 9.

(i) On a toujours $\ker(u - \mathrm{id}) \subset \ker(u - \mathrm{id})^2$. L'endomorphisme u préserve $\ker(u - \mathrm{id})^2$ car u commute avec $(u-\mathrm{id})^2$. Supposons que $\ker(u-\mathrm{id})$ soit strictement inclus dans $F = \ker(u-\mathrm{id})^2$. Soit $e_1 \in F \setminus \ker(u - \mathrm{id})$. Alors $u(e_1) - e_1 = e_2 \in \ker(u - \mathrm{id})$, et la restriction de u à $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\| = +\infty$ ce qui est contradictoire avec $\|u\| < 1$.

(ii) Soit $v \in \ker(u-\mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$. Alors $v = u(w) - w$ et $u(v) - v = 0$, donc $w \in \ker(u-\mathrm{id})^2$, et donc $w \in \ker(u - \mathrm{id})$, ce qui implique $v = 0$. On conclut en appliquant le théorème du rang $dim\ \ker(u - \mathrm{id}) + dim\ \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = dim\ E$.

(iii) On note $u_n = \frac{1}{n}(1 + u + ...u^{n-1})$. Soit $v \in \ker(u - \mathrm{id})$, alors $u_n(v) = v$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$, On écrit $v = u(w) - w$ avec $w \in E$. On obtient $u_n(v) = \frac{1}{n}(u^n(w) - w)$. Comme $\|u\| \leq 1$, on a $\|u_n(v)\| \leq \dfrac{2}{n}\|w\|$ qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc u_n converge vers le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 10. Les fonctions ϕ et Ψ_A sont linéaires.
1) Pour $P_n(X) = X^n$ on a $\|P\| = 1$ et $\|\phi(P)| = 2^n$ donc Φ n'est pas continue puisqu'elle n'est pas bornée sur la boule unité $\overline{B}(0,1)$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, et $A(X) = X^n$, on a $\|\Psi_A(P)\| = \|P\|$. Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient facilement $\|\Psi_A(P)\| \leq \|A\|\|P\|$ et donc Ψ_A est continue.
3) Pour la norme $\|P\| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}}\{e^{-|t|}|P(t)|\}$, on a $\|\Phi(P)\| \leq e\|P\|$ et donc Φ est continue pour cette norme.

En prenant $A(X) = X$, on a $\|\Psi_A(P_n)\| = (n+1)e^{-n-1}$ et $\|P_n\| = ne^{-n}$. Ainsi $\dfrac{\|\Psi_A(P_n)\|}{\|P_n\|}$ n'est pas bornée. Donc Ψ_A n'est pas continue pour cette nouvelle norme.

Exercice 11. 1) se vérifie facilement.

2) On a $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|dt \leq \int_{-1}^{1} \|f\|_\infty dt = 2\|f\|_\infty$.

3) Pour $n \in N$, on définit la fonction $f_n(x)$ par :

$$f_n(x) = f_n(-x)$$
$$f_n(x)- = -2n(xn-1)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \text{ pour } x \in [0,1]$$

Un simple calcul donne $\|f_n\|_\infty = 2n$ et $\|f_n\|_1 = 2$ ainsi, il n'existe pas de constante $A > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, l'on ait $A\|f\|_\infty < \|f\|_1$. Le deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 12. 1) Montrons que l'espace E muni de $\| \|_\infty$ est complet.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de E pour $\| \|_\infty$. On veut montrer qu'elle converge dans E pour $\| \|_\infty$ c'est-à- dire qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E pour $\| \|_\infty$ signifie

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall p \geq n_0 \;\; \forall q \geq n_0 \;\; \forall x \in [-1,1] \quad \text{on a } |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

En particulier, pour tout $x \in [-1,1]$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc elle converge. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur $[-1,1]$;

Nous allons montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Fixons $\epsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ comme dans $(*)$. Maintenant , par définition de $f(x)$, pour chaque $x \in [-1,1]$, il existe $n_1(x)$ tel que pour $q > n_1(x)$, l'on ait $|f_q(x) - f(x)| < \epsilon$.

En prenant $p > n_0$ et $q > max(n_0, n_1(x))$, on a

$$|f_p(x) - f(x)| \leq |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$$

On a donc bien $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall p > n_0 \;\; \forall x \in [0,1] \quad$ on a $|f_p(x) - f(x)| < \epsilon$, ce qui donne que $(f_n)_n$ converge vers f pour $\| \|_\infty$.

Par définition de $\| \ \|_\infty$, ceci veut dire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. Comme chaque f_n est une fonction continue, on obtient que f est continue et donc c'est un élément de E.

Ainsi E muni de $\| \ \|_\infty$ est complet.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. On écrit

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - f(x)|dx.$$

Ainsi, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - f(x)|dx = 0$ ce qui implique $f(x) = 0$ si $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 1$ si $|x| > \dfrac{1}{2}$ ce qui impossible lorsque f est continue.

Ainsi E muni de $\| \ \|_1$ n'est pas complet.

3) Pour $x \in [-1,1]$, la suite $f_n(x)$ converge vers $|x| = f(x)$.

Comme $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Comme $f \notin F$, l'espace F n'est pas complet pour $\| \ \|_\infty$.

Prenons $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour N alors, c'est une suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$ et la suite des dérivées $(f'_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$. Donc, d'après 2) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f \in E$ et la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $g \in E$. Mais dans ce cas, on a f est dérivable et $f' = g$. On obtient donc $f \in F$ et $N(f_n - f) = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - g\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. L'espace F est donc complet pour N.

Exercice 13. Cet exercice faisait partie du test, son corrigé est dans le corrigé du test.

Exercice 14. Ce théorème est démontré dans le paragraphe 8.2 page 64 du polycopié.

Exercice 15. Ce théorème est démontré dans le paragraphe 10.4 page 71 du polycopié.

Exercice 16. Notons $I_{n,p} = \|f_n - f_p\|^2$. On a $(cos(nx) - cos(px))^2 = \dfrac{cos(2nx)+1}{2} + \dfrac{cos(2px)+1}{2} - cos(n+p)x - cos(n-p)x$ et donc

$$I_{n,p} = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad n \neq p, np \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = p \\ 3\pi & \text{si} \quad np = 0, (n,p) \neq (0,0) \end{cases}$$

Par l'absurde supposons $\overline{B}(0,1)$ compacte. Comme $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, la suite $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n)_n$ est une suite de $\overline{B}(0,1)$ donc elle admet une sous-suite $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{\varphi(n)})_n$ convergente (la fonction φ est une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Cette sous-suite est en particulier une suite de Cauchy et donc on a

$$\lim_{n,p\to+\infty} \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(p)}\|_2 = 0$$

ce qui est impossible puisque pour $n \neq p$ et $np \neq 0$, le calcul précédent donne $\|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(p)}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 17. 1) est une vérification facile.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Pour $x \in [0,1]$, on a $|e^x - f_n(x)| = |\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}| \leq |e - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. Ainsi $\|e^x - f_n\|_\infty$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$, et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|e^x - f_n\|_1 = 0$, ce qui donne la convergence de $(f_n)_n$ vers e^x dans E.

b) Par l'absurde : supposons $E = F \oplus F^\perp$. On peut alors écrire $e^x = p_0(x) + g_0(x)$ avec $p_0 \in F = \mathbb{R}[x]$ et $g_0 \in F^\perp$. On a alors $\|e^x - f_n\|^2 = \|p_0 + g_0 - f_n\|^2 = \|p_0 - f_n\|^2 + \|g_0\|^2$ par Pythagore. Ceci tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ ce qui implique $\|g_0\| = 0$ et donc $g_0 = 0$ et $e^x \in F$ ce qui est impossible.

Les trois derniers exercices sont corrigés dans le paragraphe 7 du polycopié de la page 59 à la page 62.