Analyse harmonique sur les groupes et les espaces symétriques

Pascale Harinck[1]

1 Introduction :

Un problème important de l'analyse harmonique sur les groupes ou espaces symétriques est la formule de Plancherel. C'est une généralisation du théorème de Plancherel classique sur $\mathbb{R}$ qui dit que la transformée de Fourier s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour f une fonction de classe C^∞ à support compact, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{ixy}dy$ et on a la formule d'inversion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy$. Un rôle particulier est joué par les fonctions $x \to e^{ixy}$: d'une part, ce sont des fonctions propres pour l'action de $\frac{d}{dx}$ (qui engendre l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}$ invariants par translation), d'autre part ce sont les morphismes de groupe continus de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de $\mathbb{C}^*$ (de tels morphismes s'appellent des caractères unitaires ou des représentations de dimension 1 unitaires).

La généralisation de cette théorie sur les groupes de Lie ou espaces symétriques est liée à la théorie des représentations et à la décomposition spectrale des opérateurs différentiels.

Après avoir posé le problème dans sa généralité, j'expliquerai comment la méthode des orbites permet d'obtenir la formule d'inversion de Fourier sur $SL(2,\mathbb{R})$.

2 Préliminaires :

Un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variété analytique pour laquelle l'application $(x,y) \to xy^{-1}$ est analytique. L'espace tangent $\mathfrak{g}$ en l'élément neutre e de G s'appelle l'algèbre de Lie de G.

Le groupe G agit sur lui-même par les automorphismes $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. La différentielle $Ad(g) \in End(\mathfrak{g})$ de φ_g en e est appelée l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ et la différentielle $ad(X)$ de Ad en e est un morphisme de $\mathfrak{g}$ dans $End(\mathfrak{g})$ appelé action adjointe de $\mathfrak{g}$. On note $[X,Y] = ad(X)(Y)$. Le crochet $[\ ,\ ]$ est une forme antisymétrique qui satisfait l'identité de Jacobi : $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] = 0$.

Exemple : Le groupe $Sl(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $sl(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}); trace(X) = 0\}$. Pour $g \in Sl(n,\mathbb{R})$ et pour X, Y dans $\mathfrak{g}$, on a : $Ad(g)X = gXg^{-1}$ et $[X,Y] = XY - YX$.

On définit la forme de Killing sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par $\kappa(X,Y) = trace(ad(X)ad(Y))$. Le groupe G et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont dits semi-simples si la forme κ est non dégénérée et réductifs si $\mathfrak{g}$ est le produit d'une algèbre abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple.

On appelle espace symétrique réductif le quotient $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif réel muni d'une involution σ et H est un sous-groupe ouvert du groupe des points de G fixés par σ. Dans ce cas H est une groupe de Lie réductif.

On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H, on note encore par σ la différentielle de σ. Elle induit une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ où $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$.

[1]CNRS-UMR 7586, Université Paris VII,France, harinck@math.jussieu.fr

Un élément $gH \in \mathbb{X}$ est dit régulier si le centralisateur dans $\mathfrak{q}$ de $g\sigma(g)^{-1}$ est abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour ces propriétés. On note $\mathbb{X}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}$. Si x est un élément régulier, son orbite $\Omega = H.x$ sous l'action à gauche de H possède une mesure invariante ν_Ω.

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : on cherche une normalisation des ν_Ω et un ensemble mesuré (Ξ, m) tels que pour presque tout $\xi \in \Xi$, il existe une distribution sphérique Θ_ξ (c'est-à-dire une distribution H-invariante et solution propre de l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$) et une fonction F_ξ de classe C^∞, H-invariante sur $\mathbb{X}_{reg}$, solution propre des opérateurs de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ telles que

$$\nu_{H.x} = \int_\Xi F_\xi(x)\Theta_\xi dm(\xi) \qquad (*)$$

La formule d'inversion est une formule du type (*) pour $x = e_{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire $f(e_{\mathbb{X}}) = \int_\Xi c_\xi \Theta_\xi(f) dm(\xi)$ où les c_ξ sont des constantes.

Pour $G = \mathbb{R}$, on a $\Xi = \mathbb{R}$ et les $< \Theta_\xi, f >$ correspondent à la transformée de Fourier de f.

Ce problème reste ouvert dans ce cadre général et a été résolu pour les deux types d'espaces symétriques suivants :

(i) $\mathbb{X} = H = H \times H/diagonale(H \times H)$

(ii) $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif complexe et H est une forme réelle de G.

Les idées utilisées dans ces deux cas sont similaires, ceci est du en partie aux deux faits suivants : l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est, dans les deux cas, isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants H-invariants sur $\mathfrak{h}$ et l'espace tangent en $e_{\mathbb{X}}$ dans (ii) est égal à $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$.

Je vais expliquer les résultats et les méthodes employées sur l'exemple $H = Sl(2, \mathbb{R})$.

3 Formule d'inversion pour $Sl(2, \mathbb{R})$

On considère donc $H = Sl(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; x_j \in \mathbb{R} \right\}$

On considère dans $\mathfrak{h}$ les deux sous-algèbres suivantes :

$\mathfrak{t} = \left\{ Y(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ et $\mathfrak{a} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$

Ce sont des sous-algèbres de Cartan, c'est-à-dire des sous-algèbres abéliennes formées d'éléments semi-simples et maximales pour ces propriétés. Elles ne sont pas conjuguées sous l'action de H. Un élément diagonalisable avec valeurs propres distinctes (dans $\mathfrak{h}$ ou H) est dit régulier et on note $\mathfrak{h}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{h}$.

Soit $T = \left\{ y(\theta) = \begin{pmatrix} cos\ \theta & sin\ \theta \\ -sin\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ et $A = \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon\, e^t & 0 \\ 0 & \varepsilon\, e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}\ et\ \varepsilon = \pm 1 \right\}$

On a alors $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ et $H_{reg} = \cup_{h \in H}(hA_{reg}h^{-1} \cup hT_{reg}h^{-1})$.

On va utiliser l'application exponentielle exp pour lier l'analyse harmonique sur H à celle de $\mathfrak{h}$. D'autre part, on cherche à ramener la preuve de la formule d'inversion (*) à la formule d'inversion classique sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}$.

Pour cela, on introduit la mesure de Liouville sur les orbites de H dans $\mathfrak{h}_{reg}$. Soit X un élément régulier de $\mathfrak{h}$. Il est conjugué par H soit à un élément de $\mathfrak{a}$ soit à un élément $\mathfrak{t}$. On peut donc supposer $X \in \mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{t}$. L'espace tangent à l'orbite $H.X$ est isomorphe à $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} = [\mathfrak{h}, X]$. On définit alors la forme $\sigma_{H.X}$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$ par $\sigma_{H.X}([Y, X], [Z, X]) = [X, [Y, Z]]$. C'est une 2-forme alternée non dégénérée fermée sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$. Elle définit donc une mesure $\beta_{H.X} = \frac{\sigma_{H.X}}{2\pi}$ sur $H.X$ appellée mesure de Liouville. Ici, on a :

$H.X(t) = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_3 \\ x_2-x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2+x_2^2+x_3^2 = -t^2\}$ et $\beta_{H.X(t)} = \frac{dx_2\, dx_3}{|x_1|}$
$H.Y(\theta) = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_3 \\ x_2-x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \theta^2\}$ et $\beta_{H.Y(\theta)} = \frac{dx_1\, dx_2}{|x_3|}$.

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (c'est-à-dire de classe C^∞ à support compact), on définit l'intégrale orbitale de f par $\mathcal{M}(\{)(\mathcal{X}) = \in\pi\beta_{\mathcal{H}.\mathcal{X}}$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(I 1) elle est H-invariante et de classe C^∞ sur $\mathfrak{h}_{reg}$,

(I 2) sa restriction à $\mathfrak{b}_{reg}$ pour $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ ou $\mathfrak{a}$ est nulle en dehors d'un compact,

(I 3) sa restriction à $\mathfrak{a}_{reg}$ se prolonge de façon C^∞ à $\mathfrak{a}$,

(I 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{\theta\to 0^+}(\frac{id}{d\,\theta})^n(\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) + \lim_{\theta\to 0^-}(\frac{id}{d\,\theta})^n(\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = \lim_{t\to 0}(\frac{d}{d\,t})^n(\mathcal{M}(f))(X(t))$ (relation de sauts).

(I 5) $\lim_{\theta\to 0}\frac{d}{d\,\theta}(sign(\theta)\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = -2f(0)$ (formule limite d'Harish-Chandra)

Soit $I(\mathfrak{h})$ l'ensemble des fonctions vérifiant les propriétés (I 1)-(I 4).

Théorème 3.1 (B1) *L'application $\mathcal{M}$ est surjective de $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ dans $I(\mathfrak{h})$ et sa transposée est une bijection entre le dual $I(\mathfrak{h})'$ de $I(\mathfrak{h})$ et l'espace des distributions H-invariantes sur $\mathfrak{h}$.*

Théorème 3.2 (H-C1) *La mesure de Liouville est tempérée (c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\int_{H.X}(1+\parallel \xi \parallel^2)^{-r}d\beta_{H.X}(\xi) < \infty$.)*

En particulier on peut définir sa transformée de Fourier $\hat{\beta}_{H.X}$.

L'algèbre $S(\mathfrak{h})^H$ des polynomes H-invariants sur $\mathfrak{h}^*$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels H-invariants à coefficients constants par l'application $X \to \partial(X)$ défini par $\partial(X)\varphi(Y) = \frac{d}{dt}(\varphi(X+tY))_{t=0}$.

On a alors $\partial(p)\hat{\beta}_{H.X} = p(iX)\hat{\beta}_{H.X}$.

Théorème 3.3 (H-C2) *La distribution $\hat{\beta}_{H.X}$ est une fonction localement intégrable et analytique sur $\mathfrak{h}_{reg}$.*

Les résultats d'Harish-Chandra et une formule dûe à Rossmann permettent de calculer les transformées de Fourier d'orbites. Ici un simple calcul permet d'obtenir :

$$\hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(Y(\theta)) = \frac{e^{-i\lambda\theta}}{2i\theta}sign(\lambda) \qquad \hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(X(t)) = \frac{e^{-|t\lambda|}}{|\ 2t\ |}sign(\lambda)$$

et

$$\hat{\beta}_{H.X(s)}(Y(\theta)) = 0 \qquad \hat{\beta}_{H.X(s)}(X(t)) = \frac{e^{ist}+e^{-ist}}{|\ 2t\ |}$$

Maintenant, pour f une fonction localement intégrable sur $\mathfrak{h}$, la décomposition $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ permet d'écrire (formule d'intégration de Weyl) :

$$\int_{\mathfrak{h}} f(X)dX = \int_{\mathbb{R}} |\ 2\theta\ |\ \mathcal{M}(f)(Y(\theta))d\theta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\ 2t\ |\ \mathcal{M}(f)(X(t))dt$$

On obtient alors

$$\mathcal{M}(f)(X) = 2\pi\beta_{H.X}(f) = 2\pi\hat{\beta}_{H.X}(\hat{\hat{f}})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\ 2\theta\ |\ \hat{\beta}_{H.X}(Y(\theta))\hat{\beta}_{H.Y(\theta)}(f)d\theta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\ 2t\ |\ \hat{\beta}_{H.X}(X(t))\hat{\beta}_{H.X(t)}(f)dt$$

C'est la formule d'inversion des intégrales orbitales sur $\mathfrak{h}$.

Le but est ensuite d'utiliser l'application exponentielle pour "remonter " les objets $\hat{\beta}_{H.X}(f)$ et $\mid 2t \mid \hat{\beta}_{H.X}(X(t))$ au niveau du groupe. Soit $j(X)$ le jacobien de l'application exponentielle en X. On a : $j(X(t))^{1/2} = \dfrac{sinh\ t}{t}$ et $j(Y(\theta))^{1/2} = \dfrac{sin\ \theta}{\theta}$. On pose :

$$\Theta_n(\varepsilon\ exp\ X) = \varepsilon^{1+n}\hat{\beta}_{H.Y(n)}(X)\ j(X)^{1/2}$$

$$\Theta_s^+(\varepsilon\ exp\ X) = \hat{\beta}_{H.X(s)}(X)\ j(X)^{1/2} \qquad \Theta_s^-(\varepsilon\ exp\ X) = \varepsilon\ \hat{\beta}_{H.X(s)}(X)\ j(X)^{1/2}$$

Théorème 3.4 *Les fonctions Θ_n et $\Theta_s^{\pm}$ sont des fonctions localement intégrables et elles définissent des distributions H-invariantes et solution propres de $\mathbb{D}(H)$.*

On pose $\Theta_0^{\pm} = \lim\limits_{n \to O^{\pm}} \Theta_n$ (limite dans l'espace des distributions).

On définit l'intégrale orbitale de $f \in \mathcal{D}(H)$ sur H_{reg} par $\mathcal{M}_H(f)(\varepsilon\ exp\ X) = j(X)^{1/2}\mathcal{M}(f \circ exp)(X)$. Elle vérifie des propriétés analogues sur H à $I1-I5$.

Maintenant, on introduit les fonctions suivantes (fonctions orbitales) : pour $X \in \mathfrak{b}_{reg}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{t}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\varepsilon exp\ X) = \varepsilon\hat{\beta}_{H.X}(Y(n) \mid 2n \mid \qquad F_0^{\pm} = \lim_{n \to 0^{\pm}} F_n$$

et pour $s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$, on pose $F_{\varepsilon,s}(\varepsilon exp\ X)) = \sum\limits_{Y \in \mathfrak{b}; exp\ Y = 1} \hat{\beta}_{H.Y}(X(s)) \mid 2s \mid$ et $F_{\pm,s} = -(F_{1,s} \pm F_{-1,s})$.

Théorème 3.5 (B2) *(i) Les fonctions F_n, $F_0^{\pm}$ et $F_{\pm}$ vérifient sur H les propriétés (I1), (I3), (I4) et (I5) traduites sur le groupe H (mais pas (I2) qui correspond à la condition sur le support). Elles sont propres sous l'action de $\mathbb{D}(H)$*

(ii) Pour $f \in \mathcal{D}(H)$, on a

$$\mathcal{M}_H(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} F_n(x)\Theta_n(f) - i(\Theta_O^+(f) - \Theta_O^-(f)) + \frac{1}{2}\int_{s>0} (F_{+,s}(x)\Theta_s^+(f) + F_{-,s}(x)\Theta_s^-(f))ds$$

Corollaire 3.1 *Pour $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on a*

$$2\pi\varphi(e) =$$
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} \mid n \mid \Theta_n(\varphi) + \frac{1}{2}\int_{s>0} s\tanh(\frac{\pi\ s}{2})\ \Theta_s^+(\varphi)ds + \frac{1}{2}\int_{s>0} s\coth(\frac{\pi\ s}{2})\ \Theta_s^-(\varphi)ds$$

Remarque : Les distributions Θ_n et $\Theta_s^{\pm}$ s'interprète en terme de représentations de H de la manière suivante :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit π un morphisme de groupe de H dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ tel que les applications $(h, v) \to \pi(h)v$ soient continues. Un tel morphisme est appelé représentation unitaire de H dans $\mathcal{H}$. Lorsque $\mathcal{H}$ n'admet pas de sous-espaces propres fermés stables sous l'action de H, on dit que π est irréductible. On définit alors la trace de π de la manière suivante. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on pose $Tr(\pi(\varphi)) = \sum_{i \in I} < \pi(\varphi)e_i, e_i >$. C'est une distribution sur H qui est H-invariante et solution propre de $\mathbb{D}(H)$.

Les distributions Θ_n et $\Theta_s^{\pm}$ sont les caractères de certaines représentations unitaires et irréductibles de H.

Références

[B1] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, *Inv. Math.* **115** (1994), 163-207.

[B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs *J. Funct. Anal.* **134** (19954), 100-1827..

[D] P. Delorme, Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs, Séminaire Bourbaki, 1995-96, num. 810,

[D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics* **14** (1988), 289-336.

[HC1] Harish-Chandra, Fourier transforms on semisimple Lie algebras I-II, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 193-257, 653-686.

[HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on semisimple Lie algebras, *Inst. Hautes Etudes Publ. Math.* **27** (1965), 5-54.

[HC3] Harish-Chandra, Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38** (1952), 337-341.

[Ha1] P. Harinck, Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 1-51,

[Ha2] P. Harinck, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 52-107.

[R] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, *Invent. Math.* **48** (1978), 207-220.