ENTROPIE DES MESURES SEMI-CLASSIQUES EN DIMENSION 2

GABRIEL RIVIÈRE

Résumé. On étudie les propriétés asymptotiques des fonctions propres du Laplacien sur des surfaces riemanniennes compactes et lisses de type Anosov (par exemple à courbure strictement négative). Précisément, on répond à une question d'Anantharaman et Nonnenmacher [4] en montrant que l'entropie de Kolmogorov-Sinai d'une mesure semi-classique μ pour le flot géodésique g^t est bornée inférieurement par la moitié de la borne de Ruelle.

1. Motivations et Résultats

On considère une variété M riemannienne, compacte, lisse, sans bords et de dimension finie d. Le résultat principal que l'on va décrire concerne les propriétés asymptotiques des fonctions propres de l'opérateur de Laplace Beltrami Δ sur M pour un flot géodésique de nature chaotique.
Pour commencer, rappelons que le flot géodésique g^t sur le fibré cotangent T^*M est défini comme le flot hamiltonien correspondant à $H(x,\xi) := \|\xi\|_x^2$, où $\|.\|_x$ est la norme sur T_x^*M induite par la métrique sur M. En utilisant le calcul pseudo-différentiel à petit paramètre $\hbar > 0$ [10], l'opérateur quantique correspondant à H est $-\hbar^2\Delta$. Pour étudier les fonctions propres de Δ associées à des grandes valeurs propres, on peut de manière équivalente comprendre les fonctions propres $\psi_\hbar$ de $-\hbar^2\Delta$ associées à la valeur propre[1] 1 dans la limite semi-classique $\hbar \to 0$, i.e.

$$-\hbar^2\Delta\psi_\hbar = \psi_\hbar.$$

En utilisant de nouveau le calcul $\hbar$-pseudo-différentiel, on peut associer à tout a dans une certaine classe de symboles un opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ agissant sur $L^2(M)$. En utilisant ces opérateurs, on définit une distribution $\mu_\hbar$ sur T^*M de la manière suivante :

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M),\ \mu_\hbar(a) = \int_{T^*M} a(x,\xi)d\mu_\hbar(x,\xi) := \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(a)\psi_\hbar\rangle_{L^2(M)}.$$

Cette distribution décrit alors l'état $\psi_\hbar$ en fonction des variables (x,ξ) de position et d'impulsion. Ce sont les propriétés asymptotiques de ces distributions que l'on va étudier. On sait que tout point d'accumulation de la suite $(\mu_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ est une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique g^t et à support dans le fibré unitaire cotangent $S^*M := \{(x,\xi) : \|\xi\|_x^2 = 1\}$ [8]. On appelle mesure semi-classique tout point d'accumulation d'une suite $(\mu_\hbar)_{\hbar\to 0}$ définie précédemment et on note $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t)$ l'ensemble des mesures semi-classiques. Du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, on a ainsi formé à partir des fonctions propres du Laplacien un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{M}(S^*M, g^t)$ des mesures de probabilité invariantes du système dynamique (S^*M, g^t) [23]. La question se pose alors de décrire la forme de ce

[1] Comme M est une variété riemannienne compacte, une suite $\hbar$ de paramètres semi-classiques vérifiant cette propriété est une sous-suite discrète qui tend vers 0.

sous-ensemble $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t)$ en fonction des propriétés de la variété M. Nos résultats se focaliseront sur le cas où la dynamique induite par le flot géodésique g^t sur S^*M est de nature chaotique. Une hypothèse standard est de supposer que la désintégration L de la mesure de Liouville sur S^*M est ergodique pour le flot géodésique, i.e.

$$\forall a \in \mathcal{C}^0(S^*M),\ L \text{ p.p.},\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a\circ g^s(\rho)ds = \int_{S^*M} adL.$$

Cette hypothèse nous dit que presque sûrement, la moyenne temporelle d'une observable le long d'une orbite du flot géodésique est égale à la moyenne spatiale de l'observable. Cette hypothèse est en particulier vérifiée si M est à courbure strictement négative (ou plus généralement si le flot géodésique est de type Anosov sur S^*M [13]). Sous l'hypothèse d'ergodicité du flot géodésique, on peut démontrer le théorème de Shnirelman-Zelditch-Colin de Verdière [22], [24], [9]. Celui-ci dit que pour une base orthonormée donnée de fonctions propres, *la plupart* des distributions associées converge vers la mesure de Liouville sur S^*M. Ce théorème soulève la question de savoir si la mesure de Liouville est le seul élément de $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t)$. Plus précisément, Rudnick et Sarnak ont conjecturé qu'en courbure strictement négative, L est la seule mesure semi-classique[2] [19].
Cette conjecture reste encore très largement ouverte et le but de cet exposé sera plutôt de donner des propriétés quantitatives sur les éléments de $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t)$. Toutefois, avant de décrire ces résultats, on voudrait souligner que cette conjecture est bien propre aux variétés de courbure strictement négative. Par exemple, pour un symplectomorphisme linéaire A du tore $\mathbb{T}^2$, on peut construire un sous-ensemble $\mathcal{M}_{sc}(\mathbb{T}^2, A)$ de mesures semi-classiques dans l'ensemble des mesures de probabilité A-invariantes sur le tore [6]. Dans ce contexte, on peut démontrer un analogue du théorème de Shnirelman si la mesure de Lebesgue Leb sur $\mathbb{T}^2$ est ergodique pour A. Par contre, de Bièvre, Faure et Nonnenmacher ont démontré que l'on n'a pas unique ergodicité quantique [11] et en particulier que $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\text{Leb}$ (avec δ_0 la mesure de Dirac supportée par $(0,0)$) est une mesure semi-classique pour $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci nous fournit donc un système dynamique de type Anosov pour lequel on n'a pas Unique Ergodicité Quantique. D'autres contre-exemples ont été construits dans [14] et [12] pour des systèmes dynamiques symplectiques de type Anosov.

1.1. **Résultat principal.** On vient de voir qu'en faisant uniquement des hypothèses de nature dynamique, on ne peut pas espérer répondre à la conjecture de Rudnick et Sarnak. Par contre, on peut essayer de voir quelles propriétés quantitatives on obtient sur l'ensemble des mesures semi-classiques en faisant seulement des hypothèses sur le système dynamique (S^*M, g^t). Dans la suite de l'exposé (sauf au paragraphe 1.3), on supposera que le flot géodésique vérifie la propriété d'Anosov, ce qui est le cas pour des variétés à courbure strictement négative. Ceci signifie que pour tout ρ dans S^*M :

$$T_\rho S^*M = E^u(\rho) \oplus E^s(\rho) \oplus \mathbb{R}X_H(\rho),$$

où X_H est le champ de vecteurs hamiltonien associé à H, E^u l'espace instable et E^s l'espace stable [13]. On souligne tout de suite que ces trois sous-espaces sont stables par $d_\rho g^t$ et que dans le cas des surfaces, ces trois sous-espaces sont de dimension 1. Pour caractériser une mesure de probabilité invariante, on peut se servir de l'entropie de Kolmogorov-Sinai [23]. Cette quantité associe à une mesure μ invariante par g^t un nombre réel positif (ou nul) et noté

[2]Cette conjecture est appelée propriété d'Unique Ergodicité Quantique.

$h_{KS}(\mu, g)$. L'entropie estime ce que la mesure μ voit de la séparation des points de S^*M par le flot géodésique g^t (voir paragraphe 2.1 pour une définition précise) : plus l'entropie est élevée, plus la mesure voit bien la séparation des points par g^t. Le résultat principal de cet exposé donne une borne inférieure sur l'entropie des mesures semi-classiques en dimension 2 [17] :

Théorème 1.1. *Soit M une* surface *riemannienne $\mathcal{C}^\infty$, compacte et sans bords. On suppose que le flot géodésique $(g^t)_t$ vérifie la propriété d'Anosov. Alors,*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t),\ h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho), \tag{1}$$

où $J^u(\rho)$ est le Jacobien instable (pour la forme volume induite) au point ρ, i.e. $J^u(\rho) := \det\left(d_\rho g^1_{|E^u(\rho)}\right)$.

1.2. **Commentaires.** Ce résultat s'inscrit dans la continuité de travaux d'Anantharaman et Nonnenmacher [4]. Dans [2], Anantharaman a démontré que l'entropie de Kolmogorov-Sinai d'une mesure semi-classique est strictement positive sous l'hypothèse d'Anosov sur le flot géodésique. Son résultat interdit en particulier que les fonctions propres se concentrent sur des géodésiques fermées du flot. Afin de commenter notre résultat, commençons par rappeler que Ruelle a prouvé que pour toute mesure μ dans $\mathcal{M}(S^*M, g^t)$, on a [20]

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho),$$

avec égalité si et seulement si $\mu = L$ [15]. Ainsi, démontrer la conjecture d'Unique Ergodicité Quantique reviendrait à se débarrasser du facteur 1/2 dans l'inégalité de notre théorème. On peut aussi noter que la borne (1) est saturée par les contre-exemples de [11], [14], [12]. Cette inégalité est donc optimale si l'on n'utilise que des propriétés de nature dynamique. On peut aussi remarquer que le théorème 1.1 (combiné à l'inégalité de Ruelle et au caractère affine de l'entropie [23]) permet de démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 1.2. *On suppose que les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées. Si μ appartient à $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, (g^t))$ et si μ est de la forme $tL + (1-t)\mu_\gamma$ (avec μ_γ une mesure de probabilité portée par une géodésique fermée γ), alors on a*

$$t \geq \frac{\mu_\gamma(\log J^u)}{\mu_\gamma(\log J^u) + L(\log J^u)}.$$

Pour finir, on souligne que le théorème 1.1 répond à une question posée par Anantharaman et Nonnenmacher dans [4]. En effet, pour une variété de dimension d, ils ont prouvé (avec Koch [3]) que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{sc}(S^*M, g^t),\ h_{KS}(\mu, g) \geq \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho) - \frac{(d-1)\lambda_{\max}}{2}, \tag{2}$$

où $\lambda_{\max} := \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho\in S^*M} |d_\rho g^t|$ est le taux d'expansion maximal du flot. Le terme $(d-1)\lambda_{\max}$ majore la quantité $\log J^u$ sur S^*M et vient du fait que la validité de l'approximation semi-classique est donnée par des échelles de temps de l'ordre du temps d'Ehrenfest $|\log \hbar|/(2\lambda_{\max})$ [5], [7]. On peut noter que si $\lambda_{\max}$ est très grand, alors la borne obtenue par Anantharaman, Koch et Nonnenmacher est éventuellement négative (ce qui n'est pas totalement satisfaisant puisque l'entropie est a priori positive). Ils ont donc formulé la conjecture que l'inégalité du théorème 1.1 serait en fait l'inégalié optimale [4]. Notre résultat répond donc positivement à leur question en dimension $d = 2$.

1.3. **Extension des résultats en courbure négative ou nulle.** Dans [18], on donne aussi une preuve du théorème 1.1 dans le cas des surfaces à courbure négative ou nulle. Pour cela, on peut utiliser un analogue du jacobien instable J^u pour les surfaces à courbure négative ou nulle et se servir du fait que ces surfaces ont une structure très proche des surfaces de type Anosov (existence d'un feuilletage stable et instable par exemple) [21]. Ces propriétés permettent de démontrer l'inégalité (1) dans une situation aux propriétés chaotiques plus faibles. En effet, la mesure de Liouville n'est pas a priori ergodique pour le flot géodésique dans ce cas (même si le genre de la surface est supérieur ou égal à 2).

2. Entropie de Kolmogorov-Sinai et Entropie quantique

2.1. **Entropie de Kolmogorov-Sinai.** Pour commencer, on rappelle quelques définitions et propriétés de l'entropie que l'on peut trouver par exemple dans [23]. On considère $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité, I un ensemble fini et $P := (P_\alpha)_{\alpha\in I}$ une partition mesurable finie de X, i.e. un sous-ensemble fini de sous-ensembles mesurables de X qui forment une partition de X. Chacun des P_α est appelé un atome de la partition. En prenant la convention $0\log 0 = 0$, on définit l'entropie d'une partition comme

$$H(\mu, P) := -\sum_{\alpha\in I} \mu(P_\alpha)\log\mu(P_\alpha) \geq 0. \tag{3}$$

Pour deux partitions mesurables données $P := (P_\alpha)_{\alpha\in I}$ et $Q := (Q_\beta)_{\beta\in K}$, on dit que P est un raffinement de Q si tout élément de Q peut être écrit comme la réunion d'éléments de P et on peut vérifier que $H(\mu, Q) \leq H(\mu, P)$. Sinon on note $P \vee Q := (P_\alpha \cap Q_\beta)_{\alpha\in I,\beta\in K}$ la partition raffinée et on a $H(\mu, P\vee Q) \leq H(\mu, P) + H(\mu, Q)$ (propriété de sous-additivité). On se donne T une application de X préservant μ. La partition n-raffinée $\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}P$ de P par rapport à T est alors la partition composée des atomes $(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}})_{\alpha\in I^n}$. On définit l'entropie pour cette partition raffinée

$$H_n(\mu, T, P) = -\sum_{|\alpha|=n} \mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}})\log\mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}). \tag{4}$$

En utilisant la propriété de sous-additivité, on a, pour tout couple d'entiers (n, m),

$$H_{n+m}(\mu, T, P) \leq H_n(\mu, T, P) + H_m(T^n\sharp\mu, T, P) = H_n(\mu, T, P) + H_m(\mu, T, P). \tag{5}$$

Soulignons que pour cette dernière inégalité, on a utilisé de manière cruciale l'invariance de la mesure μ par T. Un argument classique pour les suites sous-additives permet de définir :

$$h_{KS}(\mu, T, P) := \lim_{n\to\infty} \frac{H_n(\mu, T, P)}{n}. \tag{6}$$

Cette quantité s'appelle l'entropie de (T, μ) par rapport à la partition P. L'entropie de Kolmogorov-Sinai $h_{KS}(\mu, T)$ de (μ, T) est alors définie comme le supremum de $h_{KS}(\mu, T, P)$ sur toutes les partitions P de X. Notons que dans notre cas l'entropie est finie (grâce à l'inégalité de Ruelle par exemple). On peut aussi remarquer que, si pour toute famille d'indices $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$, $\mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}) \leq Ce^{-\beta n}$ avec C une constante positive, alors $h_{KS}(\mu, T) \geq \beta$: l'entropie mesure le taux de décroissance exponentielle des atomes de la partition raffinée.

2.2. **Entropie quantique.** On peut définir un analogue quantique de l'entropie. Pour cela, on se donne un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On appelle partition de l'identité $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille finie d'opérateurs qui vérifie

$$\sum_{\alpha\in I}\tau_\alpha^*\tau_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}. \tag{7}$$

On définit alors l'entropie quantique d'un vecteur normé ψ :

$$h_\tau(\psi) := -\sum_{\alpha\in I}\|\tau_\alpha\psi\|^2\log\|\tau_\alpha\psi\|^2. \tag{8}$$

Finalement, cette entropie vérifie un principe d'incertitude [16] dû à Maassen et Uffink (voir [4] pour la version plus générale présentée ici).

Théorème 2.1. *Soient O_β une famille d'opérateurs bornés et U un opérateur unitaire d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H},\|.\|)$. Soit δ' un nombre positif. On se donne deux partitions de l'identité $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ et $(\pi_\beta)_{\beta\in K}$ et ψ un vecteur de $\mathcal{H}$ de norme 1 vérifiant*

$$\|(Id-O_\beta)\pi_\beta\psi\|\leq\delta'.$$

On suppose que le cardinal des deux partitions est majorée par $\mathcal{N}$. On a alors

$$h_\tau(U\psi)+h_\pi(\psi)\geq -2\log\left(c_O(U)+\mathcal{N}\delta'\right),$$

où $c_O(U)=\max_{\alpha\in I,\beta\in K}\left(\|\tau_\alpha U\pi_\beta^* O_\beta\|\right)$ ($\|\tau_\alpha U\pi_\beta^* O_\beta\|$ est la norme de l'opérateur sur $\mathcal{H}$).

3. Schéma de la preuve

On ne donnera dans cet exposé qu'un schéma de preuve informel. On renvoie le lecteur à [17] pour les différents détails. On se donne $(\psi_{\hbar_k})$ une suite de fonctions propres normées du Laplacien associées aux valeurs propres $1/\hbar_k^{-2}\to+\infty$ de telle sorte que la suite de distributions $\mu_{\hbar_k}$ correspondante converge vers μ quand k tend vers l'infini. Pour simplifier les notations, on notera $\hbar\to 0$ le fait que k tende vers l'infini, $\psi_\hbar$ le vecteur propre et $\hbar^{-2}$ la valeur propre. On fixe $\epsilon>0$ et on définit un temps d'Ehrenfest

$$n_E(\hbar) := [(1-\epsilon)|\log\hbar|]. \tag{9}$$

Notons que le temps d'Ehrenfest que l'on vient d'introduire ne dépend pas du taux d'expansion $\lambda_{\max}$ du flot (à la différence du temps défini dans [5] ou [7]).

3.1. **Interprétation symbolique des mesures semi-classiques.** Pour calculer l'entropie de μ, on commence par introduire une partition lisse[3] $\mathcal{P}=(P_i)_{i=1,..K}$ de la variété M

$$\forall x\in M,\ \sum_{i=1}^K P_i^2(x)=1.$$

On suppose que le diamètre de la partition est assez petit (dans un sens que l'on ne précisera pas ici : voir [17] pour les détails). À cette partition classique, on peut faire correspondre une

[3]La partition est lisse afin de pouvoir utiliser les outils d'analyse semi-classique.

partition de l'identité de $L^2(M)$. Si on note $\hat{P}_i$ l'opérateur de multiplication par $P_i(x)$ sur $L^2(M)$, alors, on a

$$\sum_{i=1}^{K} \hat{P}_i^* \hat{P}_i = \mathrm{Id}_{L^2(M)}. \tag{10}$$

Cette relation va nous permettre d'introduire un espace de probabilité associé à $\psi_\hbar$ et qui sera une version discrète de l'espace des phases. Pour cela, on introduit l'espace $\Sigma_+ := \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{1, \cdots, K\}$. Pour $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$ fixé dans $\{1, \cdots, K\}^n$, on définit le cylindre

$$[\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}] := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+ : \ \forall 0 \leq k \leq n-1, \ x_k = \alpha_k\}.$$

En utilisant la partition de l'identité de $L^2(M)$, on fixe $\eta > 0$ et on introduit alors la mesure d'un cylindre

$$\mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}]) := \|\hat{P}_{\alpha_{n-1}}((n-1)\eta) \cdots \hat{P}_{\alpha_0}\psi_\hbar\|^2,$$

où $\hat{A}(t) := e^{-\imath t\hbar\Delta}\hat{A}e^{\imath t\hbar\Delta}$. En utilisant la relation (10), on peut immédiatement vérifier que l'on a toutes les relations de compatibilité nécessaires pour définir un espace de probabilité [23].

Remarque. Cette interprétation symbolique est standard en théorie ergodique. En particulier, il est important de souligner que, pour n fixé, on a

$$\lim_{\hbar\to 0} \mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}]) = \mu\left(P_{\alpha_0}^2 \times P_{\alpha_1}^2 \circ g^\eta \times \cdots P_{\alpha_{n-1}}^2 \circ g^{(n-1)\eta}\right).$$

À la différence notable que l'on a une partition lisse, la quantité qui apparaît dans la limite semi-classique est donc exactement celle utilisée pour calculer l'entropie de Kolmogorov-Sinai (voir relation (4)). Notons aussi que la limite précédente nous dit que la suite de mesures $\mu_\hbar^{\Sigma_+}$ converge vaguement vers μ^{Σ_+} qui est définie sur les différents cylindres par

$$\mu^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}]) := \mu\left(P_{\alpha_0}^2 \times P_{\alpha_1}^2 \circ g^\eta \times \cdots P_{\alpha_{n-1}}^2 \circ g^{(n-1)\eta}\right).$$

Pour définir un système dynamique sur ce nouvel espace Σ_+, on introduit le décalage σ_+

$$\sigma_+((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Puisque la mesure μ est g^t-invariante, on peut vérifier immédiatement que la mesure μ^{Σ_+} est σ_+-invariante. Par contre, la mesure $\mu_\hbar^{\Sigma_+}$ n'est pas a priori Σ_+-invariante. En appliquant les résultats de composition des opérateurs $\hbar$-pseudo-différentiels et le théorème d'Egorov [10], on a toutefois, pour n et n_0 fixés,

$$\mu_\hbar^{\Sigma_+}\left(\sigma_+^{-n}[\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_0-1}]\right) = \mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_0-1}]) + \mathcal{O}_{n,n_0}(\hbar),$$

où le reste dépend de n et n_0. Ainsi, pour une échelle de temps fixée, la mesure est 'presque invariante' par σ_+, c'est-à-dire qu'elle est 'invariante' modulo des termes qui tendent vers 0 dans la limite semi-classique. Afin de faire une analyse la plus fine possible, on a besoin de comprendre pour quelle échelle de temps n et n_0 (dépendant de $\hbar$), la mesure est presque invariante modulo des termes petits en $\hbar$. Pour cela, on peut appliquer le théorème d'Egorov pour des temps longs [5], [7] et vérifier que pour $|n + n_0|\eta \leq n_E(\hbar)/\lambda_{\max}$ [4],

$$\mu_\hbar^{\Sigma_+}\left(\sigma_+^{-n}[\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_0-1}]\right) = \mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n_0-1}]) + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{\epsilon}{2}}),$$

où le reste est uniforme pour n et n_0 dans l'intervalle considéré. Ainsi, la mesure est 'invariante' (modulo des termes petits en $\hbar$) tant qu'on reste dans une échelle de temps de l'ordre de $n_E(\hbar)/\lambda_{\max}$. Autrement dit, l'approximation semi-classique est valable jusqu'au temps dit d'Ehrenfest. Le problème de cette dernière égalité est qu'elle ne prend pas vraiment en compte les variations du Jacobien instable. Tous les points de l'espace des phases sont traités de la même manière, à savoir comme si leur exposant de Lyapunov était égal à $\lambda_{\max}$. Cette limite de l'approximation semi-classique apparaissait dans [4] et [3] et c'était la raison pour laquelle on voyait apparaître un terme $-\frac{d-1}{2}\lambda_{\max}$ dans l'inégalité (2).

3.2. **Suspension de l'espace symbolique.** Afin de remédier au problème souligné précédemment, on va pouvoir, en **dimension 2**, reparamétrer l'application σ_+ (et donc implicitement le flot géodésique) afin de prendre en compte les variations du jacobien instable. En effet, dans ce cas, **la direction instable est de dimension 1** et le jacobien J^u mesure alors exactement la façon dont sont étirés les vecteurs dans la direction instable pour des temps positifs[4]. On va donc reparamétrer l'application σ_+ en se servant de cette fonction J^u. Pour cela, on commence par introduire une fonction toit sur Σ_+ en posant, pour une suite $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ (finie ou infinie),

$$f(\alpha) := \eta \sup\left\{\log J^u(\rho) : \rho \in \mathrm{supp}(P_{\alpha_0}) \cap g^{-\eta}\mathrm{supp}(P_{\alpha_1}) \cap S^*M\right\}.$$

Remarque. On a introduit un petit paramètre $\eta > 0$. L'introduction de ce paramètre est relativement importante même si les raisons pour lesquels il apparaît ne seront pas vraiment mises en avant dans cet exposé. On renvoie le lecteur à [17] pour plus de détails (sections 3 et 5). Notons aussi que l'on supposera $f(\alpha) > 0$ (on peut se ramener à ce cas : voir aussi [17]). Si l'ensemble sur lequel on prend le supremum est vide, on choisit le supremum de $\log J^u$ sur S^*M. Enfin, on note que l'on a une légère dissymétrie en prenant un pas de temps η et le jacobien de l'application au temps 1. Ce choix est fait pour avoir une dépendance de f en η plus explicite, i.e. linéaire.

Maintenant que l'on introduit une fonction toit sur Σ_+, on peut utiliser un procédé classique de systèmes dynamiques pour reparamétrer l'application : on suspend le système $(\Sigma_+, \mu_\hbar^{\Sigma_+}, \sigma_+)$. On commence par définir l'ensemble suspendu

$$\overline{\Sigma}_+ := \{(x,t) \in \Sigma_+ \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t < f(x)\}.$$

Cet ensemble est naturellement muni d'une mesure de probabilité

$$\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+} := \frac{\mu_\hbar^{\Sigma_+} \times \mathrm{Leb}}{\int_{\Sigma_+} f d\mu_\hbar^{\Sigma_+}}.$$

À l'application σ_+, on peut faire correspondre un semi-flot agissant sur $\overline{\Sigma}_+$ de la manière suivante :

$$\forall s \geq 0,\ \overline{\sigma}_+^s(x,t) := \left(\sigma_+^{n-1}(x), s + t - \sum_{j=0}^{n-2} f\left(\sigma_+^j x\right)\right),$$

où n est l'unique entier tel que $\sum_{j=0}^{n-2} f\left(\sigma_+^j x\right) \leq s + t < \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\sigma_+^j x\right)$. Ce nouveau système $(\overline{\Sigma}_+, \overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+)$ reparamètre le système $(\Sigma_+, \mu_\hbar^{\Sigma_+}, \sigma_+)$ en prenant plus en compte les variations

[4]On souligne bien que ce n'est plus le cas en dimension supérieure.

de $\log J^u$. On peut souligner que la mesure $\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}$ converge faiblement vers la mesure

$$\overline{\mu}^{\Sigma_+} := \frac{\mu^{\Sigma_+} \times \text{Leb}}{\int_{\Sigma_+} f d\mu^{\Sigma_+}}.$$

De plus, cette mesure est $\overline{\sigma}_+^t$-invariante. De nouveau, la mesure $\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}$ n'est pas a priori $\overline{\sigma}_+^t$-invariante. Toutefois, à la différence de la mesure $\mu_{\hbar}^{\Sigma_+}$, on va pouvoir montrer la 'pseudo-invariance' de la mesure $\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}$ pour des échelles de temps plus longues que $n_E(\hbar)/\lambda_{\max}$. Pour observer ce phénomène, il faut commencer par construire une partition pour laquelle on pourra calculer la mesure des atomes de la partition et de ces raffinements.

3.2.1. *Construction d'une partition adaptée.* La construction de la partition est un peu technique et il faut faire des bons choix afin de pouvoir effectuer les calculs nécessaires. On ne donne ici que la forme de la partition et on renvoie le lecteur à [17] (section 5) pour des explications plus précises sur les différents choix. On commence par définir pour $t \geq 0$ (assez grand) la famille d'indices

$$I(t) := \left\{ \alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k) : k \geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f\left(\sigma_+^i \alpha\right) \leq t < \sum_{i=1}^{k-1} f\left(\sigma_+^i \alpha\right) \right\}.$$

On souligne[5] ensuite que pour $\alpha \in I(1)$ de longueur $k(\alpha) + 1$, il existe un unique entier $k'(\alpha) \leq k(\alpha)$ tel que

$$\sum_{j=0}^{k'-2} f\left(\sigma_+^j \alpha\right) \leq 1 < \sum_{j=0}^{k'-1} f\left(\sigma_+^j \alpha\right).$$

Par observation de la définition du flot suspendu, on divise l'intervalle $[0, f(\alpha)[$ de la manière suivante :

$$I_{k'(\alpha)-2}(\alpha) = \left[0, \sum_{j=0}^{k'(\alpha)-1} f\left(\sigma_+^j \alpha\right) - 1\right[, \cdots I_{p-2}(\alpha) = \left[\sum_{j=0}^{p-2} f\left(\sigma_+^j \alpha\right) - 1, \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\sigma_+^j \alpha\right) - 1\right[,$$

$$\cdots, I_{k(\alpha)-2}(\alpha) = \left[\sum_{j=0}^{k(\alpha)-2} f\left(\sigma_+^j \alpha\right) - 1, f(\alpha)\right[,$$

pour $k'(\alpha) \leq p \leq k(\alpha)$. Si $k(\alpha) = k'(\alpha)$, on pose $I_{k'(\alpha)-2}(\alpha) = I_{k(\alpha)-2}(\alpha) = [0, f(\alpha)[$. Ces découpages permettent de définir une partition de $\overline{\Sigma}_+$ en posant

$$\overline{\mathcal{C}}_+ := \left\{ \overline{\mathcal{C}}_{\alpha,p} = [\alpha_0, \cdots, \alpha_k] \times I_{p-2}(\alpha) : \alpha \in I(1), \text{ et } k'(\alpha) \leq p \leq k(\alpha) \right\}.$$

Le découpage de $[0, f(\alpha)[$ en sous-intervalles permet de savoir comment $\overline{\sigma}_+^1$ agit sur chacun des atomes de la partition.

[5]Notons que comme f est proportionnel à η, l'ensemble $I(1)$ est non vide pour η assez petit [17].

3.2.2. *Invariance de la mesure jusqu'à des temps de l'ordre de $n_E(\hbar)$.* Pour ce choix de partition (on pourrait en faire d'autres), on peut prouver la proposition suivante (sections 6 et 7 dans [18]) :

Proposition 3.1. *Soient n, n_0 deux entiers positifs tels que $n+n_0 \leq n_E(\hbar)$. Pour tout atome $A := \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}_+^{-(n_0-1)} \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n_0-1},p_{n_0-1}}$ de la partition raffinée $\vee_{j=0}^{n_0-1} \overline{\sigma}_+^{-j} \overline{\mathcal{C}}_+$, on a*

$$\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}\left(\overline{\sigma}_+^{-n} A\right) = \overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}(A) + \mathcal{O}(\hbar^{(1-10\epsilon)/2}),$$

où la constante du reste est uniforme pour n_0 et n dans l'intervalle considéré.

En faisant ce choix de partition, on peut mener les calculs à bien, c'est-à-dire donner des expressions de $\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}\left(\overline{\sigma}_+^{-n} A\right)$ et $\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}(A)$ que l'on peut estimer précisément. On souligne que l'on a maintenant 'invariance' de la mesure pour des *échelles de temps qui ne dépendent plus du coefficient d'expansion maximal* $\lambda_{\max}$ du flot géodésique. Pour montrer cette proposition, on est amené à considérer des opérateurs de la forme $\hat{P}_{\alpha_n}(n\eta) \cdots \hat{P}_{\alpha_0}$ dont la longueur n est plus ou moins longue selon les valeurs de $\log J^u$ le long de la trajectoire associée au mot $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$. La preuve de la proposition repose en particulier sur le théorème suivant de calcul pseudo-différentiel [17] (section 7) :

Théorème 3.2. *Soit $(Q_i)_{i=1}^K$ une famille de fonctions lisses sur T^*M telle que, pour tout $1 \leq i \leq K$, Q_i appartient $\mathcal{C}^\infty(supp P_{\alpha_i} \cap \mathcal{E})$ (où $\mathcal{E}$ est un petit voisinage de S^*M [17]) et $0 \leq Q_i \leq 1$. Considérons une famille d'indices $(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{l-1} f(\alpha_{j+1}, \alpha_j) \leq \frac{n_E(\hbar)}{2}.$$

Alors, pour tout $1 \leq j \leq l$, $Op_\hbar(Q_{\alpha_1})(j\eta) Op_\hbar(Q_{\alpha_2})((j-1)\eta) \cdots Op_\hbar(Q_{\alpha_j})(\eta)$ est un opérateur $\hbar$-pseudo-différentiel de la classe $\Psi_\nu^{-\infty,0}(M)$ avec $\nu < 1/2$ (section 7 et annexe de [17]) et de symbole principal

$$Q_{\alpha_j} \circ g^\eta \cdots Q_{\alpha_2} \circ g^{(j-1)\eta} Q_{\alpha_1} \circ g^{j\eta}.$$

Remarque. Pour démontrer ce théorème, on utilise bien que l'on est en **dimension 2**. En effet, les restes qui apparaissent dans les différentes formules de phase stationnaire (pour la composition des opérateurs pseudo-différentiels, pour le théorème d'Egorov) font apparaître des dérivées de g^t. Par exemple, on doit estimer la norme de $d_\rho g^t$ pour ρ dans le support de $Q_{\alpha_j} \circ g^\eta \cdots Q_{\alpha_2} \circ g^{(j-1)\eta} Q_{\alpha_1} \circ g^{j\eta}$. Comme la direction instable est de dimension 1, pour $t \geq 0$, cette norme est bien contrôlée en fonction du jacobien instable (les normes étant préservées dans la direction du flot et contractées dans la direction stable). Pour la famille d'indices considérée, on vérifie que la perte de dérivées est au plus en $\hbar^{-\frac{1}{2}}$ qui est la perte maximale qu'on peut s'autoriser sur les dérivées dans les formules de phase stationnaire que l'on utilise en analyse semi-classique [10].

3.3. **Bornes inférieures sur l'entropie du système suspendu.** On vient de construire un système dynamique adapté à la dynamique. Maintenant, on peut borner son entropie inférieurement en utilisant le principe d'incertitude entropique (voir théorème 2.1). Avant d'énoncer notre estimation principale, on note que l'on a construit un système symbolique qui ne 'regarde que les temps positifs'. On aurait aussi pu introduire un système qui 'regarde les temps négatifs' (voir [17]-section 4 pour une définition précise) et que l'on note $(\overline{\Sigma}_-, \overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_-}, \overline{\sigma}_-)$. On peut alors prouver la proposition suivante :

Proposition 3.3. *En utilisant les notations du paragraphe 2.1, on a, pour $\hbar$ assez petit,*

$$\frac{1}{n_E(\hbar)}\left(H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}_+\right)+H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_-},\overline{\sigma}_-,\overline{\mathcal{C}}_-\right)\right)\geq(1-5\epsilon). \tag{11}$$

Cette estimation sur l'entropie au niveau quantique est l'inégalité fondamentale qui permet de démontrer notre théorème principal. On détaille ici les points clefs qui permettent de démontrer cette inégalité et on renvoie le lecteur à la section 5 de [17] pour les détails.

Première observation. On introduit un temps d'Ehrenfest non entier légèrement inférieur à $n_E(\hbar)$, i.e.

$$T_E(\hbar):=(1-2\epsilon)n_E(\hbar).$$

On peut remarquer que la famille suivante de sous-ensembles de $\overline{\Sigma}_+$ forme une partition :

$$\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}:=\left\{[\alpha_0,\cdots,\alpha_k]\times[0,f(\alpha)[:\alpha\in I(T_E(\hbar))\right\}.$$

Cette nouvelle partition dépend de $\hbar$ et une propriété cruciale (mais non immédiate) pour notre preuve est que **la partition $\vee_{j=0}^{n_E(\hbar)-1}\overline{\sigma}_+^{-j}\overline{\mathcal{C}}_+$ est un raffinement de la partition $\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}$**. En particulier, d'après le paragraphe 2.1, on sait que

$$H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}\right)\leq H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\vee_{j=0}^{n_E(\hbar)-1}\overline{\sigma}_+^{-j}\overline{\mathcal{C}}_+\right)=H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}_+\right).$$

C'est sur la quantité $H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_-},\overline{\mathcal{C}}_-^{\hbar}\right)+H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}\right)$ que l'on va être capable de donner une borne inférieure en utilisant le principe d'incertitude entropique.

Deuxième observation. Pour appliquer le principe d'incertitude entropique (théorème 2.1), on peut observer que la famille

$$\left(\hat{P}_{\alpha_k}(k\eta)\cdots\hat{P}_{\alpha_1}(\eta)\hat{P}_{\alpha_0}\right)_{\alpha\in I(T_E(\hbar))}$$

forme une partition de l'identité de $L^2(M)$. On peut donc essayer d'appliquer le principe d'incertitude pour cette partition (et son analogue pour les temps négatifs). En procédant de cette manière, on ne trouve pas le résultat que l'on veut, à savoir une borne sur l'entropie de la partition $\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}$. En effet, en appliquant le théorème 2.1 directement à ces partitions, on n'a pas de termes dans la somme qui correspondent à la partie Lebesgue de la mesure $\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}$. On peut toutefois remédier à ce problème en appliquant plusieurs fois le principe d'incertitude et en observant deux choses :

– les termes correspondant à la partie Lebesgue de la mesure ne dépendent que des deux premières lettres (α_0,α_1) du mot ;
– pour (γ_0,γ_1) fixé, $\left(\hat{P}_{\alpha_k}(k\eta)\cdots\hat{P}_{\alpha_3}(3\eta)\hat{P}_{\alpha_2}(2\eta)\right)$ (pour α variant dans $I(T_E(\hbar))$ et tel que $(\alpha_0,\alpha_1)=(\gamma_0,\gamma_1)$) est une partition de l'identité.

On applique le principe d'incertitude pour chacune de ces partitions de l'identité. En pondérant par des coefficients appropriés et en faisant la somme, on réussit à trouver une borne inférieure sur la quantité qui nous intéresse. On ne rentrera pas dans plus de détails ici mais ce sont les ingrédients principaux qui nous permettent d'obtenir une borne inférieure sur la quantité $H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_-},\overline{\mathcal{C}}_-^{\hbar}\right)+H\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+},\overline{\mathcal{C}}_+^{\hbar}\right)$.

Troisième observation. Dans le principe d'incertitude entropique, la borne inférieure qui apparaît est une norme d'opérateur que l'on va pouvoir estimer en utilisant les outils de [2] et [4]. On rappelle brièvement un résultat central de la preuve de [4]. Pour cela, fixons $\mathcal{K} > 0$ (assez grand). On peut construire une famille de symboles $\chi^{(n)}$ localisés dans un petit voisinage de S^*M (de taille dépendant de $\hbar$ et n) et que l'on peut quantifier en utilisant une procédure de quantification non standard (voir [4]). Anantharaman et Nonnenmacher montrent alors qu'il existe des constantes c (ne dépendant que de M) et $C_{\mathcal{K}}$ (dépendant de M et $\mathcal{K}$) telles que, pour toute famille d'indices $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ vérifiant $n\eta \leq \mathcal{K}|\log \hbar|$, on a

$$\left\|\hat{P}_{\alpha_n}(n\eta)\cdots\hat{P}_{\alpha_1}(\eta)\hat{P}_{\alpha_0}\mathrm{Op}_{\hbar}(\chi^{(n)})\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C_{\mathcal{K}}\hbar^{-\frac{1}{2}-c\delta}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma_+^j\alpha)\right)\right),$$

avec $\delta > 0$ fixé. Lorsqu'on applique le principe d'incertitude entropique avec les partitions précédentes, on voit apparaître la norme de l'opérateur $\hat{P}_{\alpha_n}(n\eta)\cdots\hat{P}_{\alpha_1}(\eta)\hat{P}_{\alpha_0}\mathrm{Op}_{\hbar}(\chi^{(n)})$ pour α appartenant à $I(\mathbf{2}T_E(\hbar))$ dans la borne inférieure. L'apparition du facteur 2 devant $T_E(\hbar)$ est importante et vient du fait que l'on a considéré à la fois les temps positifs et négatifs. Pour cette échelle de temps ($\alpha \in I(\mathbf{2}T_E(\hbar))$), on a, d'après le résultat d'Anantharaman et Nonnenmacher que l'on vient de citer,

$$\left\|\hat{P}_{\alpha_n}(n\eta)\cdots\hat{P}_{\alpha_1}(\eta)\hat{P}_{\alpha_0}\mathrm{Op}_{\hbar}(\chi^{(n)})\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C_{\mathcal{K}}\hbar^{\frac{1}{2}-2\epsilon-c\delta},$$

où $\delta > 0$ est fixé et peut être choisi arbitrairement petit. Cette borne nous dit qu'on a décroissance exponentielle de la norme de la partition quantique raffinée pour α dans $I(\mathbf{2}T_E(\hbar))$. On pourrait utiliser la borne d'Anantharaman et Nonnenmacher pour des temps plus longs et avoir un meilleur exposant mais on n'aurait plus la propriété d'invariance de la mesure qui va être nécessaire pour faire marcher la suite des arguments. Cette puissance $\frac{1}{2}$ est donc l'exposant optimal que l'on puisse espérer avec la méthode que l'on propose (et qui n'utilise que des propriétés dynamiques).

3.4. **Sous-additivité de l'entropie.** Fixons maintenant deux entiers n et n_0 dans $\mathbb{N}$. En utilisant les propriétés classiques de l'entropie (voir propriété (5)), on trouve que

$$H_{n+n_0}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) \leq H_n\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\sigma}^n\sharp\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right).$$

En utilisant le fait que $x \mapsto -x\log x$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ et la 'pseudo-invariance' de la mesure par $\overline{\sigma}_+$ (proposition 3.1), on sait que, pour $n + n_0 \leq n_E(\hbar)$, on a

$$H_{n_0}\left(\overline{\sigma}^n\sharp\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) = H_{n_0}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + o_{n_0}(1), \text{ quand } \hbar \to 0.$$

On écrit maintenant la division euclidienne $n_E(\hbar) = qn_0 + r$ avec $r < n_0$ (n_0 étant fixé). En appliquant les deux propriétés précédentes, on trouve que

$$H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) \leq qH_{n_0}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_r\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + o_{n_0}(q) \text{ quand } \hbar \to 0.$$

Cette dernière inégalité nous permet de vérifier que

$$\frac{H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right)}{n_E(\hbar)} \leq \frac{H_{n_0}\left(\overline{\mu}_{\hbar}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right)}{n_0} + o_{n_0}(1) \text{ quand } \hbar \to 0.$$

Ce résultat reste valable pour $(\overline{\Sigma}_-, \overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_-}, \overline{\sigma}_-)$ et combinée à l'inégalité fondamentale (11), cette propriété nous dit que, lorsque $\hbar$ tend vers 0, on a

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\Sigma_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right) + o_{n_0}(1) \geq (1-5\epsilon). \tag{12}$$

3.5. **La conclusion : application du théorème d'Abramov.** Pour conclure la preuve du théorème 1.1, on commence par faire tendre $\hbar$ vers 0 dans l'inégalité (12) et on trouve que

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\Sigma_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right) \geq (1-5\epsilon).$$

L'inégalité précédente est une inégalité sur l'entropie qui dépend d'une partition lisse de la variété M (et non pas d'une vraie partition). En prenant quelques précautions ([2], [4], [17]-section 4), on peut se ramener à une vraie partition. On suppose que l'on a fait cette transformation et on fait tendre n_0 vers l'infini. Ceci nous donne

$$h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\Sigma_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right) \geq (1-5\epsilon).$$

À ce point de la preuve apparaît *le dernier argument clef* qui fait fonctionner la preuve : le **théorème d'Abramov** [1]. Ce théorème relie l'entropie d'un système dynamique mesurable à l'entropie de ces différentes suspensions. Ici, ce théorème nous dit que

$$h_{KS}(\mu^{\Sigma_+}, \sigma_+, \mathcal{P}) = h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\Sigma_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) \times \int_{\Sigma_+} f d\mu^{\Sigma_+}.$$

On peut ensuite observer deux choses. La première est que $h_{KS}(\mu^{\Sigma_+}, \sigma_+, \mathcal{P})$ est majorée par $h_{KS}(\mu, g^\eta)$ qui est égale à $\eta h_{KS}(\mu, g)$ [1]. La seconde observation est que, si l'on fait tendre le diamètre de la partition vers 0, alors

$$\int_{\Sigma_+} f d\mu^{\Sigma_+} \to \eta \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho).$$

On vérifie finalement que l'on a

$$2\eta h_{KS}(\mu, g) = \eta(h_{KS}(\mu, g) + h_{KS}(\mu, g^{-1})) \geq (1-5\epsilon)\eta \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho).$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on peut bien conclure.□

Références

[1] L.M. Abramov *On the entropy of a flow*, Translations of AMS **49**, 167-170 (1966)

[2] N. Anantharaman *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168**, 435-475 (2008)

[3] N. Anantharaman, H. Koch, S. Nonnenmacher *Entropy of eigenfunctions*, arXiv :0704.1564, International Congress of Mathematical Physics (2007)

[4] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher *Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold*, Ann. Inst. Fourier **57**, 2465-2523 (2007)

[5] D. Bambusi, S. Graffi, T. Paul *Long time semiclassical approximation of quantum flows : A proof of the Ehrenfest time*, Asymp. Analysis **21**, 149-160 (1999)

[6] A. Bouzouina, S. de Bièvre *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Comm. in Math. Phys. **178**, 83-105 (1996)

[7] A. Bouzouina, D. Robert *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. Jour. **111**, 223-252 (2002)

[8] N. Burq *Mesures semi-classiques et mesures de défaut (d'après P.Gérard, L.Tartar et al.)* Astérisque **245**, séminaire Bourbaki, 167-196 (1997)

[9] Y. Colin de Verdière *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Comm. in Math. Phys. **102**, 497-502 (1985)

[10] M. Dimassi, J. Sjöstrand *Spectral Asymptotics in the Semiclassical Limit* Cambridge University Press (1999)

[11] F. Faure, S. Nonnenmacher, S. de Bièvre *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Comm. in Math. Phys. **239**, 449-492 (2003)

[12] B. Gutkin *Entropic bounds on semiclassical measures for quantized one-dimensional maps*, arXiv :0802.3400 (2008)

[13] B. Hasselblatt, A. B. Katok *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its applications **54** Cambridge University Press (1995)

[14] D. Kelmer *Arithmetic quantum unique ergodicity for symplectic linear maps of the multidimensional torus*, to appear in Ann. of Math.

[15] F. Ledrappier, L.-S. Young *The metric entropy of diffeomorphisms I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. **122**, 509-539 (1985)

[16] H. Maassen, J.B. Uffink *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103-1106 (1988)

[17] G. Rivière *Entropy of semiclassical measures in dimension 2*, hal-00315799 (2008)

[18] G. Rivière *Entropy of semiclassical measures for nonpositively curved surfaces*, hal-00430591 (2009)

[19] Z. Rudnick, P. Sarnak *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Comm. in Math. Phys. **161**, 195-213 (1994)

[20] D. Ruelle *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Bras. Mat. **9**, 83-87 (1978)

[21] R. O. Ruggiero *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*, Ensaios Mate. **12**, Soc. Bras. Mate. (2007)

[22] A. Shnirelman *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181-182 (1974)

[23] P. Walters *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1982)

[24] S. Zelditch *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. Jour. **55**, 919-941 (1987)

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

E-mail address: `gabriel.riviere@math.polytechnique.fr`