

Transport et diffusion

Cours no. 2 — le 16/1/2013

L'équation de transport libre

- Prototype des EDP linéaires du 1er ordre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

où $v \in \mathbf{R}^N$ est un vecteur donné (vitesse de transport)

- **Inconnue** : $f \equiv f(t, x) \in \mathbf{R}$, avec $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ (densité)

- **Notation** :

$$v \cdot \nabla_x f = \sum_{i=1}^N v_i \partial_{x_i} f$$

La méthode des caractéristiques

• Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv \in \mathbf{R}^N$; alors

$$\gamma \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^N), \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(t) = v \\ \gamma(0) = y$$

Notation :

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$$

L'ensemble $\{(t, \gamma(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est une droite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, appelée “**courbe caractéristique issue de y** ” associée à l'équation de transport.

● **Observation fondamentale :**

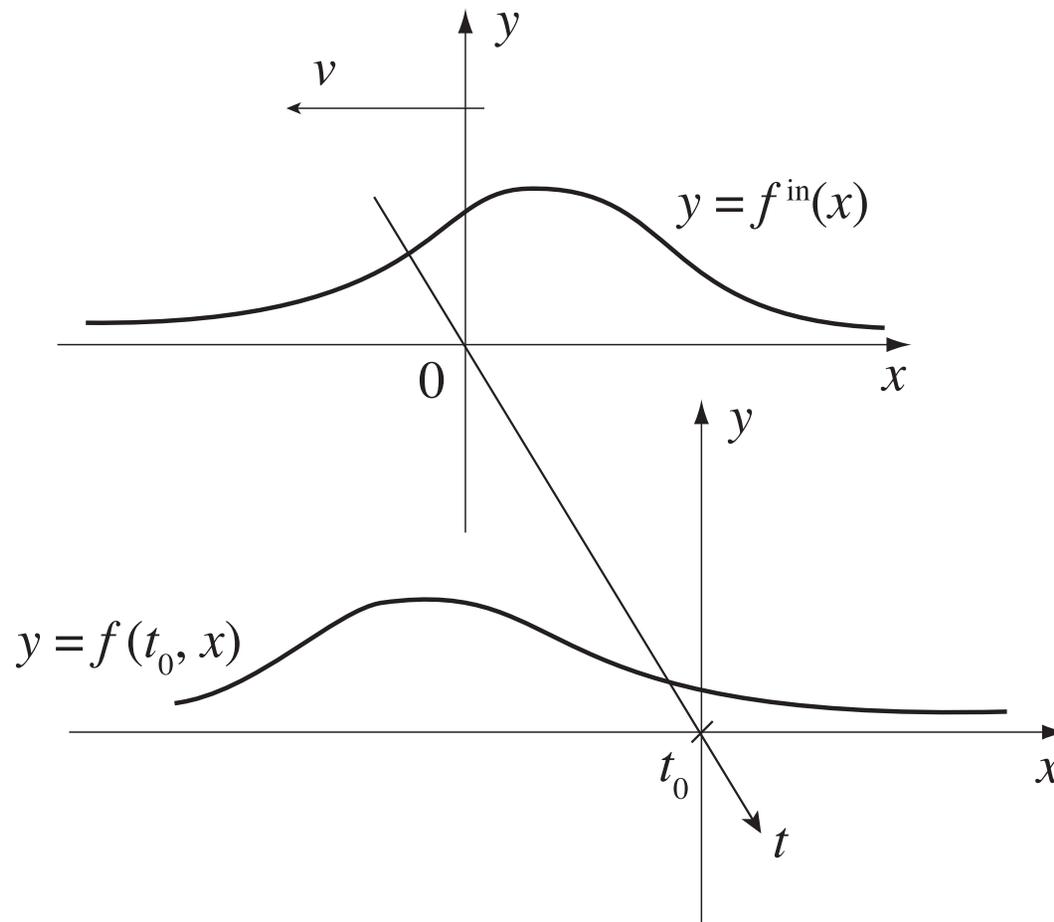
Toute solution de classe C^1 de l'équation de transport est constante le long des courbes caractéristiques

Thm : Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \quad f(0, x) = f^{in}(x)$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv)$$



Résolution de l'équation de transport. Le graphe de la donnée initiale est translaté de tv pour donner celui de la solution à l'instant t

L'équation de transport libre avec absorption et terme source

Données $a \equiv a(t, x)$ et $S \equiv S(t, x)$ de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$

Inconnue $f \equiv f(t, x) \in \mathbf{R}$, avec $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ (densité)

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x)f(t, x) = -a(t, x)f(t, x) + S(t, x)$$

Méthode étudier la variation de f le long des courbes caractéristiques de l'équation sans absorption ni terme source

Soit $\gamma(t) = y + tv$, alors dire que $f \in C^1$ est solution de l'équation ci-dessus équivaut à

$$\frac{d}{dt}f(t, \gamma(t)) = -a(t, \gamma(t))f(t, \gamma(t)) + S(t, \gamma(t))$$

que l'on résoud par la méthode de variation de la constante

Thm : Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x) = -a(t, x) f(t, x) + S(t, x) & x \in \mathbf{R}^N, t > 0 \\ f(0, x) = f^{in}(x) \end{cases}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$\begin{aligned} f(t, x) = & f^{in}(x - tv) \exp\left(-\int_0^t (a(s, x + (s-t)v) ds)\right) \\ & + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t (a(\tau, x + (\tau-t)v) d\tau)\right) S(s, x + (s-t)v) ds \end{aligned}$$

Problème aux limites pour l'équation de transport

- Le cas monodimensionnel on suppose que $x \in [x_L, x_R]$ et que $v > 0$

Thm : Soient $f_0 \in C^1([x_L, x_R])$ et $f_L \in C^1(\mathbf{R}_+)$. Le problème

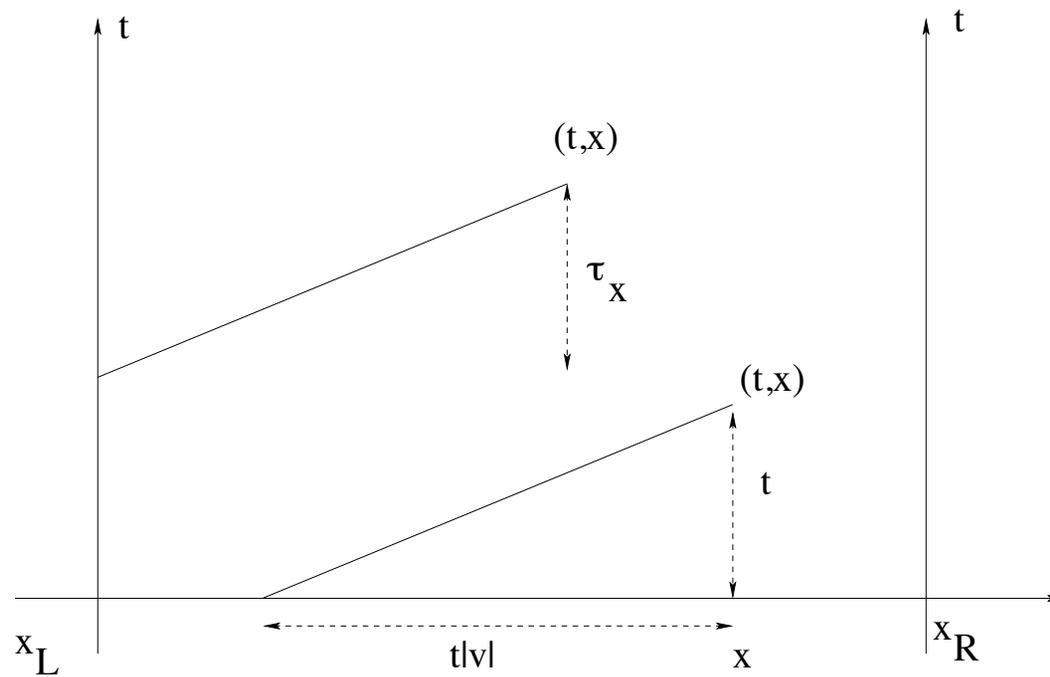
$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f = 0, & x_L < x < x_R, t > 0 \\ f(t, x_L) = f_L(t), \\ f(0, x) = f_0(x), \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times [x_L, x_R]$ donnée par

$$f(t, x) = \begin{cases} f_0(x - tv) & \text{si } x - tv > x_L \\ f_L(t - \frac{x-x_L}{v}) & \text{si } x - tv < x_L \end{cases}$$

ssi

$$f_L(0) = f_0(x_L) \quad \text{et} \quad f_L'(0) + v f_0'(x_L) = 0$$



Résolution du problème aux limites 1D

Rmqs : 1) si $v < 0$, c'est le problème

$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f = 0, & x_L < x < x_R, t > 0 \\ f(t, x_R) = f_R(t), \\ f(0, x) = f_0(x), \end{cases}$$

qui admet une unique solution de classe C^1 ssi

$$f_0(x_R) = f_R(0) \quad \text{et} \quad f'_R(0) + vf'_0(x_R) = 0$$

2) si $v > 0$, le problème ci-dessus n'admet de solution de classe C^1 que si f_0 et f_R vérifient la relation de compatibilité

$$f_R(t) = f_0(x_R - tv) \quad \text{pour} \quad 0 < t < \frac{x_R - x_L}{v}$$

Exo : cette condition est-elle suffisante pour assurer l'existence d'une solution de classe C^1 au problème aux limites ci-dessus ?

• Soient Ω ouvert **convexe** de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 , et $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Notons n_x le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$ au point x dirigé vers l'extérieur de Ω , et

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega \mid v \cdot n_x < 0\}.$$

Thm : Soient $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$ et $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$. Le problème

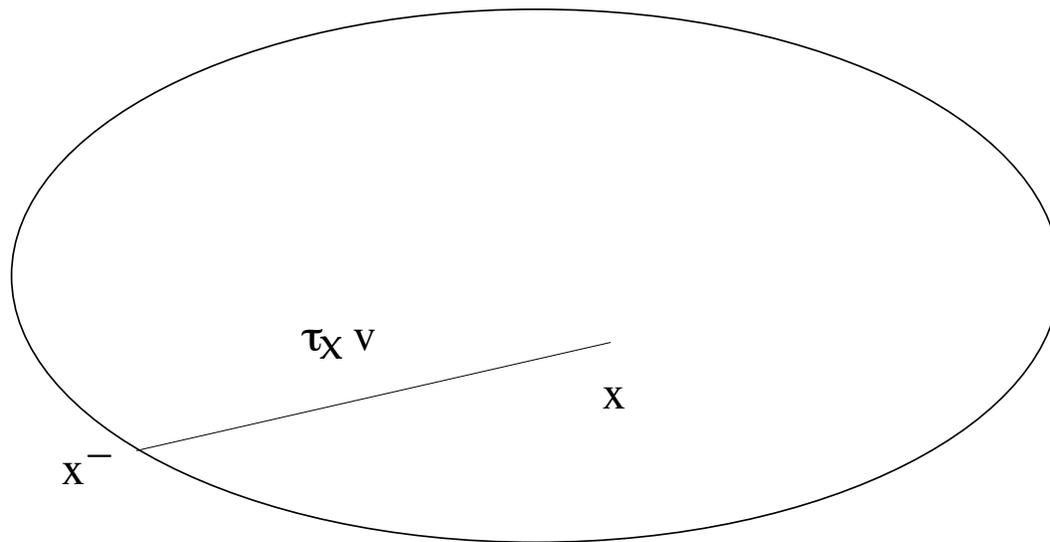
$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ f|_{\partial\Omega^-} = f_b^-, & f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$, donnée par la formule

$$f(t, x) = \begin{cases} f^{in}(x - tv) & \text{si } t \leq \tau_x \\ f_b^-(t - \tau_x, x^-) & \text{si } t > \tau_x \end{cases}$$

où $\tau_x := \inf\{t > 0 \mid x - tv \notin \overline{\Omega}\}$ et $x^- := x - \tau_x v$, si et seulement si

$$f_b^-(0, y) = f^{in}(y), \quad \partial_t f_b^-(0, y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega^-$$



Résolution du problème aux limites dans un convexe à bord régulier

Rmqs : 1) Notons la partie caractéristique de $\partial\Omega$

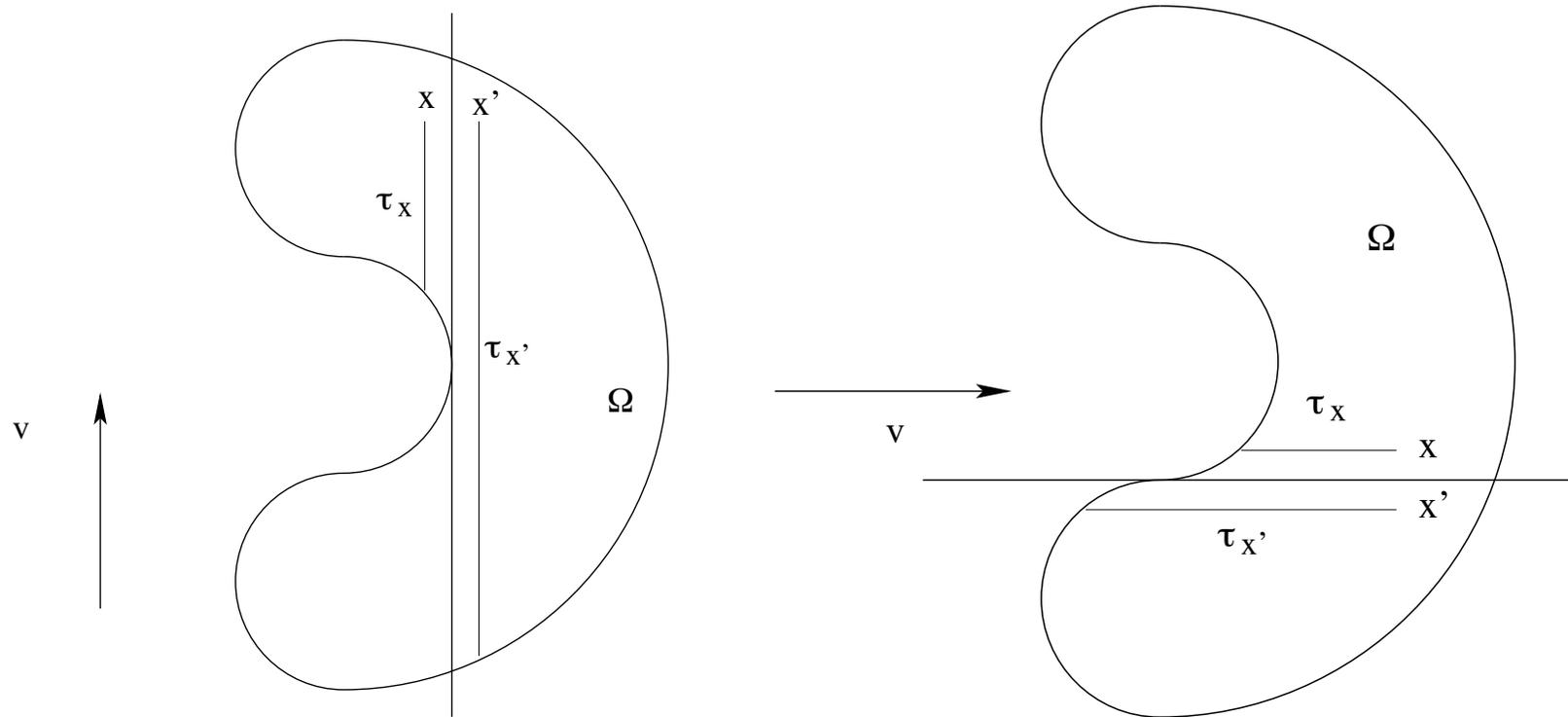
$$\partial\Omega^0 := \{x \in \partial\Omega \mid v \cdot n_x = 0\} \neq \emptyset$$

Lorsque Ω n'est pas convexe, il se peut que les trajectoires issues de la partie caractéristique $\partial\Omega^0$ du bord

$$\Gamma^0 := \{x_0 + tv \mid x_0 \in \partial\Omega^0, t > 0\} \cap \Omega \neq \emptyset$$

Il se peut alors que la fonction $\Omega \ni x \mapsto \tau_x$ soit **discontinue** sur Γ^0 .

Lorsque Ω n'est pas convexe, la formule ci-dessus donnant f ne définit donc pas en général une fonction continue



Temps de sortie d'un domaine non convexe. A gauche : discontinuité du temps de sortie ; à droite : temps de sortie continu.

2) Même lorsque Ω est convexe, la fonction f donnée par le Thm ci-dessus n'est en général pas de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}$.

Contre-ex. prendre $\Omega =$ disque unité de \mathbf{R}^2 et $v = (1, 0)$, de sorte que $\tau_x < 2$ pour tout $x \in \Omega$ et $\partial\Omega^- = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$. Choisir

$$f^{in} \equiv 0 \quad \text{et} \quad f_b^-(t, \cos \theta, \sin \theta) = \chi(t)\theta$$

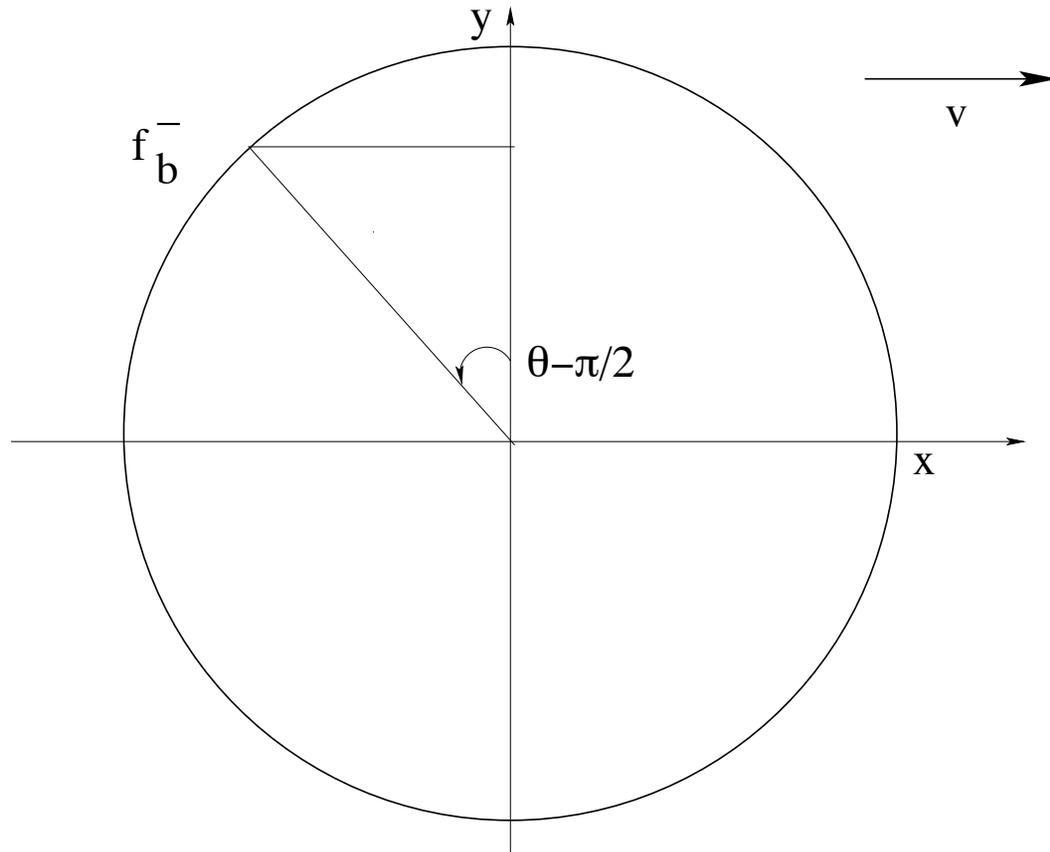
où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ est t.q. $\chi \equiv 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $\chi \equiv 1$ sur $[1, +\infty[$

La solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ f|_{\partial\Omega^-} = f_b^-, & f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie

$$f(t, 0, y) = \pi - \arcsin y, \quad t > 3.$$



Contre-exemple

Problème aux limites avec absorption et terme source

Thm : Soit Ω ouvert convexe de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 , ainsi que des fonctions $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$ et $a, S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Supposons que pour tout $y \in \partial\Omega^-$

$$\begin{cases} f_b^-(0, y) = f^{in}(y), \\ \partial_t f_b^-(0, y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = -a(0, y)f^{in}(y) + S(0, y) \end{cases}$$

Alors, le problème d'inconnue f

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)f(t, x) = -a(t, x)f(t, x) + S(t, x), & x \in \Omega, t > 0 \\ f|_{\partial\Omega^-} = f_b^-, \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)$.

... / ...

Cette solution est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
 f(t, x) = & \mathbf{1}_{t \leq \tau_x} f^{in}(x - tv) \exp\left(-\int_0^t a(s, x + (s-t)v) ds\right) \\
 & + \mathbf{1}_{t > \tau_x} f_b^-(t - \tau_x, x^-) \exp\left(-\int_{t-\tau_x}^t a(s, x + (s-t)v) ds\right) \\
 & + \int_{(t-\tau_x)_+}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau, x + (\tau-t)v) ds\right) S(s, x + (s-t)v) ds
 \end{aligned}$$

où on rappelle que $x^- = x - \tau_x v$, et que $z_+ = \max(z, 0)$.

Rmq : Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}^N$, le temps de sortie $\tau_x = +\infty$, de sorte que cette formule redonne la solution du problème de Cauchy.

Solutions généralisées

Soient Ω ouvert convexe de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 , et $a \equiv a(t, x)$,
 $S \equiv S(t, x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$.

On dit qu'une fonction mesurable f est une **solution généralisée** de

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x) + a(t, x) f(t, x) = S(t, x), \quad x \in \Omega, t > 0$$

ssi la fonction

$$s \mapsto f(t + s, x + sv) \text{ est de classe } C^1 \text{ p.p. en } (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$$

et vérifie

$$\left(\frac{d}{ds} + a(t + s, x + sv) \right) f(t + s, x + sv) = S(t + s, x + sv)$$
$$(t + s, x + sv) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$$

Prop : Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 ainsi que $a \equiv a(t, x)$, $S \equiv S(t, x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Pour toute donnée initiale $f^{in} \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ et toute donnée au bord $f_b^- \in L_{loc}^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, le problème aux limites

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x) = -a(t, x) f(t, x) + S(t, x), & x \in \Omega, t > 0 \\ f|_{\partial\Omega^-} = f_b^- \\ f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée f donnée par la même formule que dans le cas classique. En particulier, si Ω est convexe, si $a, S \in C^1(\beta_+ \times \overline{\Omega})$, si $f^{in} \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f_b^- \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$, et vérifient, pour tout $y \in \partial\Omega^-$

$$\begin{cases} f_b^-(0, y) = f^{in}(y), \\ \partial_t f_b^-(0, y) + v \cdot \nabla f^{in}(y) = -a(0, y) f^{in}(y) + S(0, y) \end{cases}$$

alors cette solution généralisée est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$.

Principe du maximum

Thm : Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N à bord de classe C^1 ainsi que deux fonctions $a \equiv a(t, x), S \equiv S(t, x) \in L^\infty \cap C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Soient $f^{in} \in L^\infty(\Omega)$ et $f_b^- \in L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)$; alors la solution généralisée du problème

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)f(t, x) = -a(t, x)f(t, x) + S(t, x), & x \in \Omega, t > 0 \\ f|_{\partial\Omega^-} = f_b^-, \quad f|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $T > 0$, et en notant $a_-(t, x) = \max(0, -a(t, x))$

$$\|f\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega)} \leq e^{T\|a_-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)}} T \|S\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)}$$

$$+ e^{T\|a_-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)}} \max\left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)}\right)$$

De plus

$$f^{in} \geq 0, \quad f_b^- \geq 0 \text{ et } S \geq 0 \Rightarrow f \geq 0$$

Cas particuliers :

1) si $a \geq 0$ (taux d'amortissement), on a

$$\|f\|_{L^\infty([0,T] \times \Omega)} \leq T \|S\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)} + \max \left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)} \right)$$

2) si on a à la fois $a \geq 0$ et $S = 0$, alors

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \Omega)} \leq \max \left(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f_b^-\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-)} \right)$$

C'est un exemple de **principe du maximum faible** : le maximum de la (valeur absolue de la) solution est "atteint" sur le bord du domaine $\mathbf{R}_+ \times \Omega$

Problème aux limites, équation de transport stationnaire

Thm Soient Ω ouvert à bord de classe C^1 de \mathbf{R}^N , et $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$.
Supposons que A est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$A(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Soient $\lambda > 0$, $Q \in C_b(\Omega)$ et $F_b^- \in L^\infty(\partial\Omega^-)$. Alors le problème aux limites pour l'équation de transport stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x)F(\lambda, x) = Q(x), & x \in \Omega, \\ F(\lambda, \cdot)|_{\partial\Omega^-} = F_b^-, \end{cases}$$

admet une unique solution généralisée $F \in L^\infty(\Omega)$.

.../...

Cette solution est donnée par la formule

$$F(x) = \int_0^{\tau_x} \exp\left(-\lambda s - \int_0^s A(x - \tau v) d\tau\right) Q(x - sv) ds \\ + \mathbf{1}_{\tau_x < +\infty} F_b^-(x^-) \exp\left(-\lambda \tau_x - \int_0^{\tau_x} A(x - \tau v) d\tau\right)$$

p.p. en $x \in \Omega$. Elle satisfait en outre les estimations suivantes

a) si $Q \geq 0$ sur Ω et $F_b^- \geq 0$ sur $\partial\Omega^-$, alors $F(\lambda, \cdot) \geq 0$ p.p. sur Ω ;

b) de plus

$$\|F(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left(\frac{1}{\lambda} \|Q\|_{L^\infty(\Omega)}, \|F_b^-\|_{L^\infty(\partial\Omega^-)}\right)$$

Dém : la preuve est basée sur le fait que la **transformation de Laplace**

$$f(t, x) \mapsto \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t, x) dt = F(\lambda, x)$$

transforme le problème d'évolution

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x) + A(x) f(t, x) = 0 \\ f|_{\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega^-} = \lambda F_b^-, \quad f|_{t=0} = Q, \end{cases}$$

en problème stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x) F(\lambda, x) = Q(x), \quad x \in \Omega, \\ F(\lambda, \cdot)|_{\partial\Omega^-} = F_b^-, \end{cases}$$