

Dans tout ce qui suit, il est nécessaire de faire des dessins dans le plan (x, t) pour visualiser les caractéristiques.

Exercice I. Faisons nos gammes

Soit l'équation du transport

$$\partial_t f + v \partial_x f + \sigma f = S(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On notera f_0 la donnée initiale.

1. On prend $\sigma = 0$ est une constante. Montrer que

$$f(x, t, v) = f_0(x - tv, v) + \int_0^t S(x - v(t - s), s) ds.$$

2. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t > 0, \forall v \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq R \Rightarrow f_0(x, v) = S(x, t) = 0.$$

Démontrer que pour tout $t > 0$ et pour tout v , f est à support compact en x .

3. A présent $\sigma \neq 0$ constant. Montrer que

$$f(x, t; v) = e^{-\sigma t} f_0(x - tv, v) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} S(x - v(t - s), s) ds.$$

Exercice II. Cas σ non constant

Soit l'équation

$$\partial_t f + v \partial_x f + \sigma(x, t) f = S(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$f(x, t; v) = e^{-A(x, t; v, t)} f_0(x - tv, v) + \int_0^t e^{-A(x, t; v, s)} S(x - vs, t - s) ds$$

avec une fonction A à déterminer.

Exercice III. Cas "stationnaire"

Soit l'équation précédente pour $x \in \mathbb{R}$ et σ constant. On cherche une solution "stationnaire"

$$\widehat{f}(x, t, v) = e^{\lambda t} f(x, v).$$

1. Montrer que S doit être de la forme $S(x, t) = s(x)e^{\lambda t}$.

2. Quelle est l'équation satisfaite par f ? Montrer, en supposant f bornée, que

$$f(x, v) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^x e^{-(\sigma+\lambda)\frac{x-y}{v}} s(y) dy$$

ainsi que

$$f(x, v) = -\frac{1}{v} \int_x^{\infty} e^{(\sigma+\lambda)\frac{y-x}{v}} s(y) dy$$

suivant le signe de $(\sigma + \lambda)/v$.

3. Et en dimension supérieure ?

Exercice IV. Principe du maximum et conditions au bord

Soit l'équation du transport

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f + \sigma f = Q(f)$$

avec

$$Q(f) = \sigma \frac{\int_{|v|=1} f dv}{\int_{|v|=1} dv} = \sigma \langle f \rangle.$$

pour des particules monocinétiques $|v| = 1$ (pour simplifier). On considère un domaine $x \in \Omega$ borné.

1. On considère les conditions au bord usuelles de Dirichlet ou de réflexion. Les écrire.

2. Soit $f \mapsto \varphi(f)$ une fonction deux fois dérivables avec $\varphi''(f) \geq 0$ et $\varphi(0) = 0$. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_{|v|=1} \varphi(f) dx dv \leq 0.$$

3. Montrer que

$$\int_{\Omega} \int_{|v|=1} \varphi(f(T)) dx dv \leq \int_{\Omega} \int_{|v|=1} \varphi(f_0) dx dv$$

pour $\varphi(f) = \max(0, -f)$. En déduire que si $f_0 \geq 0$ alors $f(T)$ aussi.

4. Que dire pour la borne supérieure de f ?

Exercice V. Un modèle de population de cellules en laboratoire sans condition au bord

Soit une population de cellules avec un modèle structuré en âge. L'inconnue est $n(a, t)$. Le vieillissement se contrôle par l'ajout journalier d'une substance chimique. L'équation est

$$\partial_t n + \partial_a(v(a)n) = 0.$$

1. Interpréter les cas $v \equiv 1$ et $v \equiv 0$. Le cas général correspond alors à $0 \leq v \leq 1$.

2. Soit $N(t) = \int_0^\infty n(a, t) da$ le nombre total de cellules au temps t . Montrer que N est croissant en temps, et constant si $n(0, t) = 0$. Cela est-il normal ? Aurait-on eu un même comportement avec un modèle $\partial_t n + v(a)\partial_a n = 0$?

3. Déterminer n en fonction de n_0 le nombre de cellules par tranche d'âge à $t = 0$.

4. Montrer que si $|v(a)| \leq Ca$ pour a proche de 0, alors le modèle n'a besoin pas de condition au bord de type natalité ($n(a, 0) = \dots$) pour être bien posé.

5. On suppose $v(a) > 0$ pour $a > 0$. Montrer qu'on a le même résultat sous la condition

$$\int_0^\infty \frac{1}{v(a)} da = \infty.$$