Chapitre 2

E.D.P. d'ordre un

Les équations aux dérivées partielles constituent le champ d'application le plus important de la théorie des distributions. Elles en ont d'ailleurs été, historiquement, la motivation première.

La théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre un se ramène, dans une certaine mesure, à celle des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

C'est donc par l'étude de ces équations que nous commencerons, et nous verrons sur plusieurs exemples qu'il est naturel d'avoir à considérer des solutions d'équations aux dérivées partielles qui ne soient pas forcément différentiables. Cette constatation fait sentir la nécessité de généraliser les notions usuelles du calcul différentiel.

2.1 L'équation de transport

L'équation de transport est le prototype des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Elle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

où l'inconnue $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles de classe C^1 définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, et où $v \in \mathbf{R}^N$ est un vecteur donné.

Il s'agit d'un modèle intervenant dans diverses branches de la physique (théorie cinétique des gaz ou des plasmas, optique géométrique, neutronique...) L'inconnue $f(t, x)$ désignera, selon le contexte, une densité d'énergie ou de nombre de particules au point x à l'instant t, dont le vecteur v est la vitesse de propagation.

La notation $\nabla_x f$ désignera tout au long de ce chapitre le gradient de f par rapport aux variables $x = (x_1, \ldots, x_N)$:

$$\nabla_x f(t, x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(t, x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(t, x) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$v \cdot \nabla_x f(t,x) = \sum_{k=1}^{N} v_k \partial_{x_k} f(t,x)\,.$$

Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv$; alors γ est une application de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v\,.$$

Définition 2.1.1 *L'ensemble* $\{(t,\gamma(t))\,|\,t \in \mathbf{R}\}$ *est une droite de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$*, appelée "courbe caractéristique issue de* y *pour l'opérateur de transport* $\partial_t + v \cdot \nabla_x$*".*

Soit $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$ solution de l'équation de transport. L'application $t \mapsto f(t,\gamma(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ (comme composée des applications f et $t \mapsto (t,\gamma(t))$, toutes deux de classe C^1), et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(t,\gamma(t)) &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{N} \partial_{x_k} f(t,\gamma(t)) \frac{d\gamma_k}{dt}(t) \\ &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{N} v_k \partial_{x_k} f(t,\gamma(t)) \\ &= (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t,\gamma(t)) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, toute solution de classe C^1 de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

Théorème 2.1.2 *Soit* $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$*. Le problème de Cauchy d'inconnue* f

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,,\\ f(0,x) = f^{in}(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\end{aligned}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$*, donnée par la formule*

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv) \quad \textit{pour tout } (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Cette formule explicite pour la solution de l'équation de transport en justifie le nom : le graphe de la donnée initiale f^{in} est en effet transporté par la translation de vecteur tv.

Démonstration. Si f est une solution de classe C^1 de l'équation de transport, elle est constante le long des courbes caractéristiques, donc

$$f(t, y + tv) = f(0,y) = f^{in}(y)\,, \quad \text{pour tout } t > 0\,,\ y \in \mathbf{R}^N\,.$$

En posant $y + tv = x$, on trouve donc que

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv) \quad \text{pour tout } t > 0\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,.$$

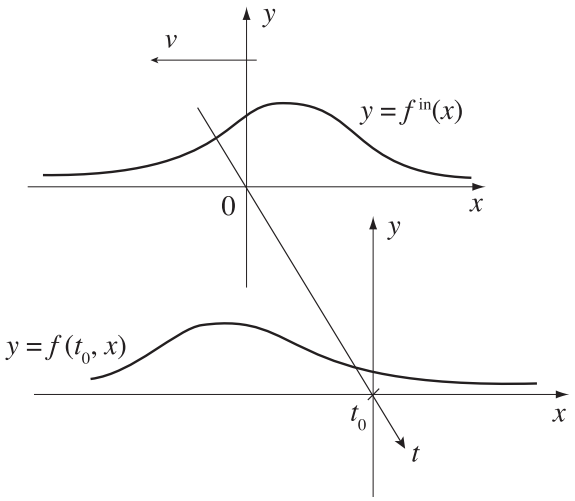

FIGURE 2.1 – Le graphe de la donnée initiale f^{in} est translaté de $t_0 v$ pour fournir le graphe de la fonction $x \mapsto f(t_0, x)$.

Réciproquement, pour $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$, l'application $(t,x) \mapsto f^{in}(x-tv)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ (comme composée des applications f^{in} et $(t,x) \mapsto x-tv$ qui sont toutes deux de classe C^1). D'autre part on a

$$\nabla_x(f^{in}(x-tv)) = (\nabla f^{in})(x-tv)\,,$$

tandis que

$$\begin{aligned}\partial_t(f^{in}(x-tv)) &= -\sum_{i=1}^{N} v_i(\partial_{x_i} f^{in})(x-tv)\\ &= -v\cdot(\nabla f^{in})(x-tv) = -v\cdot\nabla_x(f^{in}(x-tv))\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $f:\ (t,x) \mapsto f^{in}(x-tv)$ est bien une solution de l'équation de transport. ■

Même si f^{in} n'est pas dérivable, la formule

$$f(t,x) = f^{in}(x-tv)$$

garde un sens, et on souhaiterait pouvoir dire qu'elle définit encore une solution de l'équation de transport.

Exemple : pour $N=1$, prendre f^{in} en escalier, par exemple

$$f^{in}(x) = 1 \text{ si } x \le 0\,, \quad f(x) = 0 \text{ si } x > 0$$

La solution de l'équation de transport modélise alors une onde de choc se propageant à la vitesse v.

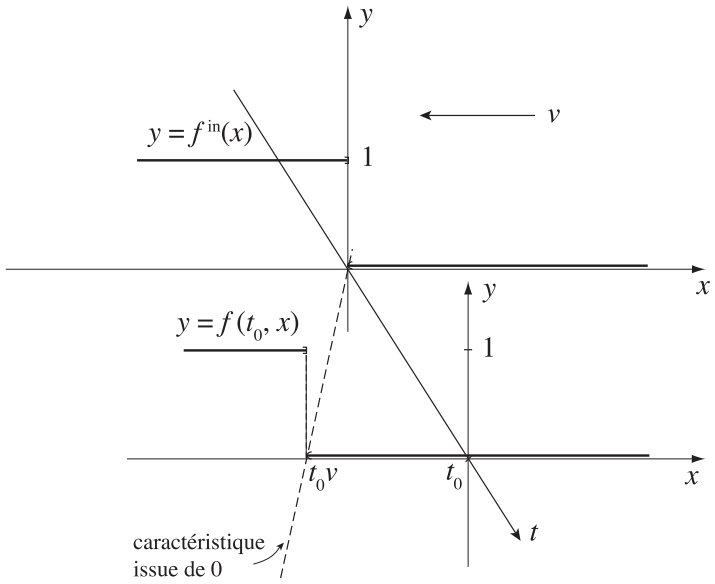

FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de transport présentant une discontinuité de première espèce (saut).

Pour l'analyse des équations aux dérivées partielles, il est donc souvent très naturel de devoir "dériver des fonctions non dérivables".

Le bon cadre pour cela, comme on le verra dans la suite de ce cours, est la théorie des distributions.

2.2 Equations de transport à coefficients variables

Dans de nombreuses situations, la vitesse de propagation v n'est pas constante, mais peut varier avec la position ou même avec le temps. (Pensons par exemple à la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable : la vitesse de la lumière est inversement proportionnelle à l'indice du milieu, et les rayons lumineux sont alors courbés.)

On va donc étudier l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad 0 < t < T\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,,$$

où $V : [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, N$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

(**H1**) V et $\nabla_x V$ sont continues sur $[0,T] \times \mathbf{R}^N$,

et il existe $\kappa > 0$ tel que

(**H2**) $$|V(t,x)| \leq \kappa(1+|x|)\,, \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N\,.$$

La notation $\nabla_x V$ désigne, pour le champ de vecteurs V, la matrice

$$\nabla_x V(t,x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} V_1(t,x) & \dots & \partial_{x_N} V_1(t,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} V_N(t,x) & \dots & \partial_{x_N} V_N(t,x) \end{pmatrix}\,.$$

Autrement dit, le j-ème vecteur colonne de la matrice $\nabla_x V$ est $\partial_{x_j} V$, dérivée partielle du champ de vecteurs V par rapport à la j-ième coordonnée de x, ce qui se traduit encore par la formule

$$(\nabla_x V(t,x))_{ij} = \partial_{x_j} V_i(t,x)\,, \quad i,j = 1,\dots,N\,.$$

Comme le champ de vecteurs vérifie l'hypothèse (**H1**), le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une unique courbe intégrale de V passant par le point x à l'instant t. (Voir [17], Théorème 2.1.)

Définition 2.2.1 *Soit γ la courbe intégrale de V passant par x à l'instant t, c'est-à-dire la solution de*

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s) &= V(s,\gamma(s))\,, \\ \gamma(t) &= x\,. \end{aligned}$$

On appellera la courbe de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ paramétrée par s et définie par

$$s \mapsto (s, \gamma(s))$$

"courbe caractéristique de l'opérateur $\partial_t + V \cdot \nabla_x$ passant par x à l'instant t".

On veut exploiter la notion de courbe caractéristique pour l'opérateur de transport à coefficients variables $\partial_t + V(t,x) \cdot \nabla_x$ afin d'aboutir à une formule semi-explicite pour les solutions de l'équation

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,,$$

comme dans le cas où $V = $ Const. étudié plus haut. Pour ce faire, on aura besoin de quelques propriétés fondamentales de ces courbes caractéristiques, résumées dans la proposition suivante. (Dans le cas où $V = $ Const. ces propriétés sont vérifiées trivialement car l'équation différentielle donnant les courbes caractéristiques est résolue de manière explicite.)

Proposition 2.2.2 (Flot caractéristique) *Supposons que le champ de vecteurs V satisfait aux hypothèses (**H1**)-(**H2**).*

Alors, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$*, la courbe intégrale* $s \mapsto \gamma(s)$ *de* V *passant par* x *à l'instant* t *est définie pour tout* $s \in [0,T]$*. Dans toute la suite, on notera* $s \mapsto X(s,t,x)$ *cette courbe intégrale, c'est-à-dire la solution de*

$$\begin{aligned} \partial_s X(s,t,x) &= V(s, X(s,t,x))\,, \\ X(t,t,x) &= x\,. \end{aligned}$$

L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ *ainsi définie, appelée flot caractéristique de l'opérateur* $\partial_t + V \cdot \nabla_x$*, vérifie les propriétés suivantes :*
(a) pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ *et* $x \in \mathbf{R}^3$

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)\,;$$

(b) pour tout $j = 1, \dots, N$*, les dérivées partielles secondes* $\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ *et* $\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x)$ *existent pour tout* $(s,t,x) \in]0,T[\times]0,T[\times \mathbf{R}^N$ *et se prolongent en des fonctions continues sur* $[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$ *; de plus, pour tout* $j = 1, \dots, N$*, on a*

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x) \text{ pour tout } (s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N\,;$$

(c) pour tous $s, t \in [0,T]$ *l'application*

$$X(s,t,\cdot) : \ x \mapsto X(s,t,x)$$

est un C^1*-difféomorphisme de* $\mathbf{R}^N$ *sur lui-même préservant l'orientation ;*
(d) le flot X *appartient à* $C^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$*.*

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons le rôle de l'hypothèse (**H2**). Considérons le cas où $N = 1$ et où $V(t,x) = x^2$: cet exemple ne vérifie évidemment pas (**H2**). Alors le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2 \partial_x$ vérifie

$$\begin{aligned} \partial_s X(s,t,x) &= X(s,t,x)^2\,, \\ X(t,t,x) &= x\,. \end{aligned}$$

Cette équation différentielle s'intègre explicitement : on trouve que

$$X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}\,.$$

Ainsi, lorsque $x > 0$, la fonction $X(s,t,x)$ n'est définie que pour $s < t + \frac{1}{x}$, tandis que, pour $x < 0$, elle n'est définie que pour $s > t - \frac{1}{x}$. Donc l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ n'est définie sur aucun voisinage de (t,x) de la forme $[a,b]\times\mathbf{R}$. Autrement dit, l'hypothèse (**H2**) sert à définir le flot X de façon globale — c'est-à-dire pour tout t tel que le champ $V(t,\cdot)$ soit défini et de classe C^1.
Démonstration. Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$ et soit γ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s) &= V(s, \gamma(s))\,, \\ \gamma(t) &= x\,. \end{aligned}$$

On notera $I \subset [0,T]$ l'intervalle de définition de γ, qui est évidemment un voisinage de t.

D'après l'hypothèse (**H2**), pour tous $s,t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$

$$\begin{aligned}|\gamma(s)| &\leq |x| + \left| \int_t^s |V(\tau,\gamma(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq |x| + \kappa T + \kappa \left| \int_t^s |\gamma(\tau)| d\tau \right| .\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall [1] implique alors que

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T) e^{\kappa |s-t|} \leq (|x| + \kappa T) e^{\kappa T} \text{ pour tout } s \in I .$$

Supposons que $I \neq [0,T]$: d'après le "lemme des bouts" (voir [17], Proposition 4.2), on aurait

$$|\gamma(s)| \to +\infty \text{ pour } s \to \inf(I)^+ \text{ ou pour } s \to \sup(I)^- .$$

Or ceci est exclu par l'inégalité précédente : donc la solution maximale γ est définie sur $I = [0,T]$.

(a) Remarquons que, pour tous $t_1, t_2 \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \text{ et } t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2,t_1,x)$ pour $t_3 = t_2$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles coïncident donc sur leur intervalle maximal de définition, c'est à dire pour tout $t_3 \in [0,T]$, d'où l'égalité annoncée.

1. **Inégalité de Gronwall.** Soient $A, B > 0$ et $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continue telle que

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds , \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors

$$\phi(t) \leq A e^{Bt} , \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. La fonction ψ définie par

$$\psi(t) = A + B \int_0^t \phi(s) ds , \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $[A, +\infty[$ puisque ϕ est continue et positive ou nulle sur $\mathbf{R}_+$. L'hypothèse faite sur ϕ s'écrit

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{B\phi(t)}{A + B\int_0^t \phi(s) ds} \leq B , \quad t \geq 0 .$$

En intégrant sur $[0,t]$ chaque membre de cette inégalité, on trouve que

$$\ln \psi(t) - \ln \psi(0) = \ln \psi(t) - \ln A \leq Bt$$

d'où

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq A e^{Bt} , \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

(b) D'après le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la condition initiale (cf. [17] Théorème 2.2, et Proposition 5.6), pour tout instant initial $t \in [0,T]$ fixé l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s,t,x)$ pour tout $(s,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^N$ et tout $j = 1,\dots,N$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour tout $s \in [0,T]$ de l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) &= \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x)\,, \\ \partial_{x_j} X(t,t,x) &= e_j \end{aligned}$$

où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^N$. Enfin la dérivée partielle $(s,x) \mapsto \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T]\times\mathbf{R}^N$ pour tout $j = 1,\dots,N$.

On déduit alors de l'équation différentielle linéaire ci-dessus que, pour tout $j = 1,\dots,N$, la dérivée partielle seconde

$$(s,x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) \text{ est continue sur } [0,T]\times\mathbf{R}^N\,.$$

D'après (**H1**) l'application partielle $V(s,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, ainsi que l'application $X(s,t,\cdot)$, dont on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s,t,\cdot)$ continues sur $\mathbf{R}^N$ pour tout $j = 1,\dots,N$. Ainsi le membre de droite de l'équation

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x))\,, \quad (s,x) \in]0,T[\times\mathbf{R}^N\,.$$

est-il de classe C^1 en la variable x et le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que, pour tout $j = 1,\dots,N$,

$$\partial_{x_j}\partial_s X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$$

pour tout $(s,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^N$ — la deuxième égalité ci-dessus étant précisément l'équation différentielle linéaire vérifiée par la dérivée partielle $\partial_{x_j} X$.

(c) D'après le (b), pour tous $s,t \in [0,T]$, l'application $X(s,t,\cdot)$ admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_j pour $j = 1,\dots,N$, et ces dérivées partielles sont continues en tout point $x \in \mathbf{R}^N$: donc l'application $X(s,t,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$.

Appliquons d'autre part le (a) avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$, puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$: on en déduit que

$$X(s,t,\cdot) \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^N \text{ sur } \mathbf{R}^N \text{ d'inverse } X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot)\,.$$

Comme la bijection $X(s,t,\cdot)$ et son inverse $X(t,s,\cdot)$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^N$ sur lui-même.

Considérons enfin le déterminant jacobien

$$J(s,t,x) = \text{dét}(\nabla_x X(s,t,x))\,.$$

Le point (b) entraîne que l'application $s \mapsto J(s,t,x)$ est continue de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$; d'autre part $J(t,t,x) = 1$ et $J(s,t,x) \neq 0$ pour tout $s \in [0,T]$, car c'est

le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que $J(s,t,x) > 0$ pour tout $s \in [0,T]$, ce qui équivaut à dire que le difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$ préserve l'orientation de $\mathbf{R}^N$.

(d) D'après le (b), l'application $(s,t,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux variables x_j pour tout $j = 1,\dots,N$ et tout $(s,t,x) \in [0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$, ainsi évidemment que par rapport à la variable s puisque, par définition, $\partial_s X(s,t,x) = V(s,X(s,t,x))$.

Montrons que X admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à la variable t. Pour $(s,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^N$ fixé, le point $X(s,t,x)$ est l'unique solution $y(t)$ de l'équation

$$F(t,y(t)) = 0$$

où on a posé

$$F(t,y) = X(t,s,y) - x\,.$$

L'application $F : [0,T]\times\mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}^N$ est de classe C^1, et, pour tout temps $t \in [0,T]$, la matrice $\nabla_y F(t,y) = \nabla_x X(t,s,y)$ est inversible — en effet, on a déjà vu que $\det(\nabla_y F(t,y)) = J(t,s,y) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites (voir [17], Théorème 1.4), la solution $t \mapsto y(t)$ est donc dérivable et on a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= -\nabla_y F(t,y(t))^{-1}\partial_t F(t,y(t))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,X(t,s,X(s,t,x)))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,x)\,.\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est également continue sur $[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$.

Comme l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point de $[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$, elle y est de classe C^1. ■

Expliquons maintenant comment on résout le problème de Cauchy pour une équation de transport à coefficients variables grâce à la connaissance de son flot caractéristique. Ainsi, le Théorème 2.2.3 ci-dessous se spécialise en Théorème 2.1.2 lorsque $V = \text{Const}$.

Théorème 2.2.3 *Soit V un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses (**H1**) et (**H2**), et soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation de transport*

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) = 0\,, &\qquad 0<t<T\,,\ x\in\mathbf{R}^N\,,\\ f(0,x) = f^{in}(x)\,, &\qquad x\in\mathbf{R}^N\,,\end{aligned}$$

admet une unique solution $f \in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^N)$. Cette solution f est donnée par la formule

$$f(t,x) = f^{in}(X(0,t,x))$$

où X est le flot caractéristique du champ V — c'est-à-dire que $s \mapsto X(s,t,x)$ est la courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t.

Démonstration. Commençons par l'unicité, et pour cela, procédons par condition nécessaire.

Soient donc $f \in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^N)$ et $z \in \mathbf{R}^N$ fixés ; on va considérer la fonction $\phi :\ s \mapsto \phi(s) = f(s, X(s,0,z))$. Cette fonction est de classe C^1 sur $[0,T]$ comme composée de f et de l'application

$$s \mapsto (s, X(s,0,z))$$

qui est de classe C^1 d'après la Proposition 2.2.2 (d). Calculons sa dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{ds}(s) &= \partial_t f(s, X(s,0,z)) + \nabla_x f(s, X(s,0,z)) \cdot \partial_s X(s,0,z) \\ &= \partial_t f(s, X(s,0,z)) + V(s, X(s,0,z)) \cdot \nabla_x f(s, X(s,0,z))\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, si f est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad 0 < t < T\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,,$$

on a

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = 0 \text{ pour tout } s \in]0,T[\,,$$

de sorte que la fonction ϕ est constante sur l'intervalle $[0,T]$. En particulier, pour tout $s \in [0,T]$,

$$\phi(s) = f(s, X(s,0,z)) = f(0, X(0,0,z)) = f(0,z) = \phi(0) = f^{in}(z)\,.$$

Faisons le changement de variables $x = X(s,0,z)$ ce qui, d'après la Proposition 2.2.2 (a)-(c) équivaut à $z = X(0,s,x)$. On trouve alors que

$$f(s,x) = f^{in}(X(0,s,x)) \text{ pour tout } (s,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^N\,.$$

Réciproquement, montrons que la formule

$$f(t,x) = f^{in}(X(0,t,x))$$

définit une fonction de classe C^1 sur $[0,T]\times\mathbf{R}^N$, qui est solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport.

D'abord, $f \in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^N)$ comme composée de f^{in} qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, et de l'application $(t,x) \mapsto X(0,t,x)$, de classe C^1 sur $[0,T]\times\mathbf{R}^N$ d'après la Proposition 2.2.2 (d).

D'autre part, $f(0,x) = f^{in}(X(0,0,x)) = f^{in}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Enfin

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x) &= \nabla f^{in}(X(0,t,x))\cdot\partial_t X(0,t,x)\,,\\ \partial_{x_j} f(t,x) &= \nabla f^{in}(X(0,t,x))\cdot\partial_{x_j} X(0,t,x)\,,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}&\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x)\\ &\qquad = \nabla f^{in}(X(0,t,x))\cdot\left(\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^N V_j(t,x)\partial_{x_j} X(0,t,x)\right)\,.\end{aligned}$$

Le résultat annoncé découle alors du lemme suivant. ■

Lemme 2.2.4 *Le flot caractéristique X vérifie*

$$\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^{N} V_j(t,x)\partial_{x_j} X(0,t,x) = 0$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$.

Démonstration. Partons de la relation (a) de la Proposition 2.2.2 :

$$X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) = X(t_3,t_1,x)$$

pour tous $t_1,t_2,t_3 \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Dérivons chaque membre de cette égalité par rapport à t_2 : comme le flot caractéristique X est de classe C^1 sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N$, le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que [2]

$$\partial_t X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\partial_s X_j(t_2,t_1,x) = 0\,,$$

ou encore

$$\partial_t X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) + \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))V_j(t_2,X(t_2,t_1,x)) = 0\,.$$

Posant $t_3 = 0$ et $t_2 = t_1 = t$, on aboutit à la relation annoncée. ■

A nouveau, remarquons que la formule

$$f(t,x) = f^{in}(X(0,t,x))$$

garde un sens même si f^{in} n'est pas dérivable, et on aimerait pouvoir dire qu'elle définit une solution en un sens généralisé de l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) = 0\,.$$

Toutefois, pour donner un sens à un tel énoncé, on devra avoir recours à la théorie des distributions, présentée dans la suite de ce cours.

2.3 Equations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre un : étude d'un exemple

L'équation de Hopf — également appelée équation de Burgers sans viscosité — intervient dans différents contextes, comme par exemple la dynamique des

2. Dans tout ce qui suit

$\partial_s X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa première variable,

$\partial_t X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa seconde variable.