ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 17 Mars 2010 (2 heures)

1 Schéma numérique en transport : 6 points

Soit une vitesse constante et positive $a > 0$. On considére l'équation de transport sur $\mathbf{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (t,x) \in \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction régulière sur $\mathbf{R}$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z},$$

ainsi que les points milieux

$$(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) = \big((n+1/2)\Delta t, (j+1/2)\Delta x\big) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z},$$

On note u_j^n, respectivement $u_{j+1/2}^{n+1/2}$, une approximation discrète au point (t_n, x_j), respectivement $(t_{n+1/2}, x_{j+1/2})$, de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma "saute-mouton"

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et $u_{j+1/2}^{1/2}$ calculée de manière consistante à partir de u_j^0 (par exemple, par interpolation).

1. Montrer que le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 2.
2. Vérifier que la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est satisfaite lorsque $a\Delta t/\Delta x \leq 1$.

2 M-matrice : 4 points

Soit une vitesse positive $a > 0$ et un coefficient de diffusion positif $\nu > 0$. On considère une équation de convection diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (t,x) \in \mathbf{R}_*^+ \times (0,1) \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{array} \right. \qquad (3)$$

où $u_0(x)$ est une fonction régulière sur $(0,1)$, et avec des conditions aux limites de périodicité. On discrétise cette équation sur un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ par le schéma implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Avec des conditions aux limites de périodicité ce schéma s'écrit $Au^{n+1} = u^n$ où u^n est le vecteur de composantes u_j^n. Préciser la structure de cette matrice et en déduire que ce schéma vérifie le principe du maximum discret, c'est-à-dire que si la donnée initiale est positive la solution discrète l'est aussi à tout temps t_n.

3 Equation de transport : 10 points

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert convexe à bord régulier, dont on note $\partial\Omega$ le bord et n_x la normale unitaire au point $x \in \partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. Soient $T > 0$ et $F \in C_c^\infty(]0,T[\times\Omega \times \mathbf{R}^N)$; on note f la solution du problème

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = F\,, & & (t,x,v) \in]0,T[\times\Omega \times \mathbf{R}^N\,, \\ f(t,x,v) = 0\,, & v \cdot n_x < 0\,, & (t,x,v) \in]0,T[\times\partial\Omega \times \mathbf{R}^N\,, \\ f\big|_{t=0} = 0\,. & & \end{array} \right.$$

1) Notons $w(t) = T - t$; écrire le problème aux limites vérifié par la fonction wf^2.

2) Montrer que, pour tout $v \in \mathbf{R}^N$,

$$\int_0^T \int_\Omega f(t,x,v)^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_\Omega F(t,x,v)^2 dxdt\,,$$

où C est une constante que l'on exprimera en fonction de T.

3) Soit g, solution du problème

$$
(2) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial g}{\partial t} + v \cdot \nabla_x g = F\,, & (t,x,v) \in]0,T[\times\Omega\times\mathbf{R}^N\,,\\[2ex]
g(t,x,v) = g(t,x,v-2(v\cdot n_x)n_x)\,, & (t,x,v) \in]0,T[\times\partial\Omega\times\mathbf{R}^N\,,\\[2ex]
g\big|_{t=0} = 0\,.
\end{cases}
$$

Montrer que

$$
\int_0^T \iint_{\Omega\times\mathbf{R}^N} g(t,x,v)^2 dxdvdt \le C \int_0^T \iint_{\Omega\times\mathbf{R}^N} F(t,x,v)^2 dxdvdt\,.
$$

4) Etudier la continuité dans $L^p(]0,T[\times\Omega\times\mathbf{R}^N)$ des applications linéaires $F\mapsto f$ et $F\mapsto g$, où f et g sont les solutions respectives des problèmes (1) et (2) pour $p\in[1,+\infty[$.