École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Devoir no. 1 (à rendre en PC le 25 mai 2010)

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une forme linéaire non nulle et $H_\varphi := \mathrm{Ker}(\varphi)$ l'hyperplan correspondant.

1) Montrer que deux formes linéaires non nulles définissent les mêmes hyperplans si et seulement si elles sont proportionnelles.

2) Montrer que $E - H_\varphi$ est dense dans E et que H_φ est connexe.

3) Montrer que φ est continue si et seulement si H_φ est fermé dans E. Montrer dans ce cas que $E - H_\varphi$ a exactement deux composantes connexes.

3) Montrer qu'il existe toujours des formes linéaires non continues [On admettra que E admet une base algébrique].

4) Supposons φ non continue.

a) Montrer que H_φ est dense. En déduire que

$$\{x \in E \text{ tels que } \varphi(x) = 1\}$$

est dense.

b) Montrer que $E - H_\varphi$ est connexe.

Exercice 2. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans le cercle S^1 des nombres complexes de module 1. Pour tout segment $I \subset [0,1]$, on appelle relèvement de f sur I une application continue $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = e^{i\varphi(x)}$$

pour tout $x \in I$.

a) Montrer qu'un relèvement φ de f sur $[a,b] \subset [0,1]$ est uniquement déterminé par la donnée de $\varphi(a)$.

b) Montrer que f admet des relèvements sur tout segment de longueur assez petite.

c) Montrer que f admet un relèvement sur $[0,1]$ (Indication: considérer les segments $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ pour n assez grand et construire φ sur $[0, \frac{k}{n}]$ par récurrence sur k).

Exercice 3. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$.

a) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\Omega |f(x)| \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|x|) dx = 0\,.$$

b) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\Omega |f(x)| \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|) dx = 0\,.$$

c) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable

$$|A| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)| dx < \epsilon\,.$$

Exercice 4. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide tel que $|\Omega| < +\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$.

a) Supposons que

$$(1) \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega |f_n(x)| \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x)|)dx \to 0 \quad \text{lorsque } R \to +\infty\,.$$

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable, l'on ait

$$(2) \qquad |A| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_A |f_n(x)|dx < \epsilon\,.$$

b) Etablir la réciproque de l'énoncé a).

c) Supposons que $f_n(x) \to f(x)$ p.p. en $x \in \Omega$ lorsque $n \to +\infty$, et que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie l'une des deux hypothèses équivalentes (1) ou (2). Montrer que

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

et qu'en particulier

$$\int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx \quad \text{lorsque } n \to +\infty\,.$$

d) Les énoncés a)-c) demeurent-ils vrais sans l'hypothèse $|\Omega| < +\infty$?