DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MAT 661 – M2 AAG (HIVER 2021)
DEVOIR (À RENDRE POUR LE 12 AVRIL)

CHARLES FAVRE

Exercice 1. Soit K un corps métrisé non-archimédien complet.

(A1) On suppose que K est localement compact. Montrer que $K^\circ = \{|z| \leq 1\}$ est compact puis que $K^{\circ\circ} = \{|z| < 1\}$ l'est aussi.

(A2) En déduire que $\tilde{K}$ est fini, et que $|K^*|$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

(A3) On suppose maintenant que $\tilde{K}$ est fini et que $|K^*|$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Justifier l'existence de $\pi \in K^{\circ\circ}$ tel que $|K^*| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$, et montrer que $K^{\circ\circ} = (\pi)$.

(A4) Montrer que l'anneau quotient $K^\circ/(\pi^n)$ est fini pour tout n

(A5) On note $R := \operatorname{proj\,lim}_n K^\circ/(\pi^n)$. On rappelle que cet ensemble est constitué des suites $x_n \in K^\circ/(\pi^n)$ telles que l'image de x_{n+1} dans $K^\circ/(\pi^n)$ est égale à x_n pour tout n. On le munit de la topologie produit.

Montrer que R est un anneau topologique compact.

(A6) Montrer que les morphismes $r_n\colon K^\circ \to K^\circ/(\pi^n)$ induisent un isomorphisme d'anneaux topologiques de K° sur R.

(A7) Conclure.

Exercice 2. Soit $P \in K[T]$ un polynôme de degré $d \geq 2$ dont les coefficients sont dans un corps métrisé complet $(K, |\cdot|)$.

(C1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1} \leq \frac{\max\{1, |P(z)|\}}{\max\{1, |z|^d\}} \leq C$$

(C2) En déduire que la suite de fonctions $\frac{1}{d^n} \log^+ |P^n(z)|$ converge uniformément sur K vers une fonction g_P vérifiant $g_P \circ P = d g_P$.

On suppose maintenant que K est un corps de nombre. Pour toute norme $v \in M_K$, on note $g_{P,v}$ la fonction induite par P sur le complété $(K_v, |\cdot|_v)$.

(C3) On note $S \subset M_K$ l'ensemble fini des normes pour lesquelles un des coefficients non-nuls de P est de norme $\neq 1$.

Montrer que $g_{P,v}(z) = \log^+ |z|$ pour tout $v \notin S$.

(C4) On pose :

$$h_P(z) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v g_{P,v}(z)$$

Date: 23 mars 2021.

Montrer que cette fonction est bien définie, et que $\sup_K |h_P - h| < \infty$ où h dénote la fonction hauteur canonique.

(C5) En déduire que si $z \in K$ n'est pas prépériodique pour P, alors il existe une norme $v \in M_K$ telle que $|P^n(z)|_v \to \infty$.

(C6) On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose $P_n(z) = z^2 + \frac{1}{n}$. Trouver une norme $v \in M_{\mathbb{Q}}$ tel que 0 a une orbite non-bornée pour P_n.

Exercice 3. On rappelle que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ des polynômes complexes en 2 variables. On suppose que l'on peut écrire $P_i = \bar{P}_i + O(x^{d-1})$ où

a) $\bar{P}_i$ sont des polynômes homogènes de même degré $d \geq 1$;

b) $\cap \bar{P}_i^{-1}(0) = (0)$.

(D1) Montrer que l'application $F(x_1, x_2) := (P_1, P_2)$ de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ s'étend en une application holomorphe de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

(D2) On suppose $\bar{P}_1 = x_1^d$ et $\bar{P}_1 = x_2^\delta$ avec $d > \delta$ de telle sorte que la condition a) n'est pas vérifiée. Montrer que F ne s'étend pas continûment à l'espace projectif.

Pour ce faire, on écrira l'extension de F à l'espace projectif en coordonnées homogènes, et on analysera la situation dans une carte au voisinage du point $[0 : 1 : 0]$ (difficile).