DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MAT 661 – M2 AAG (HIVER 2021)
INTRODUCTION

CHARLES FAVRE

Exercice 1. Démontrer que z^2-2 est conjugué au polynôme de Tchebyshev $T_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$; et montrer que z^2-2 possède une infinité de points périodiques réels. Combien possède-t'il de points prépériodiques rationnels ?

Exercice 2. Montrer que les polynômes $P(z) = z^2 - \frac{13}{9}$ et $Q(z) = z^2 - \frac{301}{144}$ admettent exactement 6 points prépériodiques dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3. Pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ notons $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$: c'est un réseau de $\mathbb{C}$. On rappelle que le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ est muni d'une unique structure de surface de Riemann compacte telle que la projection canonique $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ est holomorphe.

(1) Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $L_\alpha(z) = \alpha z$ induit une application holomorphe sur E_Λ si et seulement si $\alpha\Lambda \subset \Lambda$.

Si cette condition est vérifiée, on note encore L_α l'application induite sur E_Λ.

(2) Montrer que les points périodiques de L_α sont denses dès que $|\alpha| \geq 2$.

Exercice 4. Montrer que $P(z) = z^2 + c$ possède une infinité de points prépériodiques réels lorsque $c < -2$. (Indication : construire deux segments disjoints I_+ and I_- tels que $P(I_\pm) \subset I_+ \cup I_-$ et utiliser des arguments de dynamique symbolique).

Exercice 5. Soit K un corps algébriquement clos et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^N$ une suite de points Zariski-dense.

(1) Montrer que pour tout sous-ensemble algébrique V, l'ensemble $\{x_n \notin V\}$ est infini.

(2) On suppose K dénombrable. Montrer qu'il existe une sous-suite $y_l = x_{n_l}$ telle que pour tout sous-ensemble algébrique V, l'ensemble $\{y_l \in V\}$ est fini.

(3) Traiter la question précédente lorsque K n'est plus supposé dénombrable.

Exercice 6. On fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$.

(1) Montrer que l'application $f(x, y) = (ay, x + y^2 + c)$ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ et calculer son inverse.

(2) Montrer que pour tout n, on peut écrire $f^n(x, y) = (P_n(x, y), y^{2^n} + Q_n(x, y))$ avec $\deg(P_n), \deg(Q_n) \leq 2^{n-1}$.

Date: 1er février 2021.

(3) Soit P un polynôme à deux variables de la forme $P(x,y) = y^k + O(|x,y|^{k-1})$. Montrer que la courbe algébrique $C = \{P(x,y) = 0\}$ n'est pas f-invariante.

(4) Montrer qu'il n'existe aucune courbe algébrique $C = \{P(x,y) = 0\}$ qui est f-invariante (très difficile).

Exercice 7. Soit $F(x_1, \cdots, x_N) = (P_1, \cdots, P_N)$ une application polynomiale de l'espace affine $\mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$ dans lui-même. Soit Z une sous-variété algébrique de $\mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$.

Montrer que pour tout point prépériodique x, la conjecture de Mordell-Lang dynamique pour les données (F, Z, x) est vérifiée. En d'autres termes montrer que $\{n \in \mathbb{N}, F^n(x) \in Z\}$ est une union finie de progressions arithmétiques.

Exercice 8. Soit K un corps quelconque, et $F(x_1, \cdots, x_N) = (P_1, \cdots, P_N)$ une application polynomiale de l'espace affine $\mathbb{A}^N_K$ dans lui-même. On suppose qu'il existe un point d'orbite Zariski dense x, et que la conjecture de Mordell-Lang dynamique pour les données (F, Z, x) est vérifiée.

Montrer que pour tout ouvert Zariski dense U, il existe un point $y \in U$ tel que $f^n(y) \in U$ pour tout n, et $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est encore Zariski dense.