Bull. Soc. math. France
133 (4), 2005, p. 619–639

SOMMES DE CARRÉS DE FONCTIONS DÉRIVABLES

PAR JEAN-MICHEL BONY

RÉSUMÉ. — On montre que toute fonction positive de classe C^{2m} définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés de fonctions de classe C^m. En dimension 2, toute fonction positive f de classe C^4 est somme d'un nombre fini de carrés de fonctions de classe C^2, pourvu que ses dérivées d'ordre 4 s'annulent aux points où f et $\nabla^2 f$ s'annulent.

ABSTRACT (*Sum of squares of derivable functions*). — We prove that any nonnegative function of class C^{2m} defined in an interval is the sum of two squares of functions of class C^m. In dimension 2, any nonnegative function f of class C^4 is a finite sum of squares of functions of class C^2, provided that $\nabla^4 f$ vanishes at points x satisfying $f(x) = \nabla^2 f(x) = 0$.

1. Introduction

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction positive et de classe C^{2m} définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Il existe alors g et h appartenant à $C^m(I)$ telles que $f = g^2 + h^2$.*

Texte reçu le 19 février 2004, accepté le 1er octobre 2004.

JEAN-MICHEL BONY, École polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex (France) • *E-mail :* `bony@math.polytechnique.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 26A24, 26B05.

Mots clefs. — Fonctions positives, fonctions différentiables, sommes de carrés.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2005/619/$ 5.00

La régularité de g et h ne peut pas en général être améliorée : si f est la primitive d'ordre $2m$, plate à l'origine, de $(-\log|x|)^{-1}$, elle ne peut pas être somme de carrés de fonctions de classe C^{m+1}, ni même $C^{m+\alpha}$, ce qui exigerait $f(x) = O(|x|^{2m+2\alpha})$.

Dans le cas où f est positive et de classe C^∞, notre résultat permet pour chaque m d'écrire $f = g_m^2 + h_m^2$ avec g_m et $h_m \in C^m$, mais ces fonctions dépendent de m et il ne s'ensuit pas que f puisse s'écrire comme somme de carrés de fonctions C^∞. Les ouvrages [1] et [4] font état de contre-exemples de P. Cohen et D. Epstein. À notre connaissance, ces contre-exemples n'ont pas été publiés.

En notant $C^{k,1}$ (resp. $C^{k+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) l'espace des fonctions de classe C^k dont les dérivées d'ordre k sont lipschitziennes (resp. höldériennes d'exposant α), on peut démontrer la variante suivante du théorème 1 (voir le n° 5.1) : sous l'hypothèse $f \in C^{2m+2\alpha}$ [resp. $C^{2m,1}$, $C^{2m+1,1}$], il existe g et h appartenant à $C^{m+\alpha}$ [resp. $C^{m+1/2}$, $C^{m,1}$] avec $f = g^2 + h^2$.

Il est bien connu [6] qu'une fonction f positive n'est pas en général le carré d'une fonction de classe C^2, même si f est de classe C^∞, ne s'annule qu'en un point, et est infiniment plate en ce point.

Le cas $m = 2$ du théorème 1 est très directement relié à l'inégalité de Fefferman-Phong et amène à examiner le même problème en dimension quelconque. Cette inégalité assure qu'un opérateur pseudo-différentiel A est semiborné inférieurement (i.e. $\operatorname{Re}\int \overline{u(x)}Au(x)\,\mathrm{d}x \geq -C^{\mathrm{te}}\,\|u\|_{L^2}^2$) lorsque son symbole $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est positif et vérifie l'une des deux estimations suivantes

$$\big|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\big| \leq C_{\alpha,\beta}\big(1+|\xi|\big)^{2-|\alpha|} \qquad \text{pour } \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n,$$

ou

$$\big|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\big| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \text{pour } \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha|+|\beta| \geq 4.$$

Ces résultats, démontrés respectivement dans [5] et [2], s'étendent (voir [8, Section 18.6], [2]) aux autres classes de symboles pseudo-différentiels.

L'idée essentielle de C. Fefferman et D.H. Phong est d'écrire localement le symbole sous la forme $a = b^2 + a_1$, en faisant apparaître la somme d'un carré et d'une fonction positive dépendant d'une variable de moins, les dérivées d'ordre 2 de b et celles d'ordre 4 de a_1 s'estimant à l'aide des dérivées d'ordre 4 de a. Cette même idée a conduit au résultat suivant (voir [7], [10]) : si f est une fonction positive de classe $C^{3,1}$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut l'écrire comme somme d'un nombre fini (bornable en fonction de n) de carrés de fonctions de classe $C^{1,1}$.

Il n'est pas vrai en toute dimension qu'une fonction positive de classe C^4, ou même C^∞, soit somme de carrés de fonctions de classe C^2. Des contre-exemples (voir [3]) existent à partir de la dimension 4 et proviennent d'obstructions algébriques à la décomposition en somme de carrés des polynômes positifs. En dimension 2, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction positive et de classe C^4 définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant*

$$\{f(x) = \nabla^2 f(x) = 0\} \implies \nabla^4 f(x) = 0. \tag{1}$$

Il existe alors un nombre fini ($N = 78$ convient) de fonctions $g_j \in C^2(\Omega)$ telles que $f = \sum_1^N g_j^2$.

La section 2 ramène la démonstration du théorème 1 au cas où, dans un intervalle, la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2m$ ne s'annulent pas simultanément. C'est dans la section 4 qu'apparaissent les idées essentielles de la démonstration. Il faut distinguer, au voisinage de chaque point x_0, les cas où une des dérivées paires $f^{2p}(x_0)$ est strictement positive et domine les autres, et celui où $f(x_0)$ n'est « pas trop petit ». Dans ce dernier cas, f pourra s'écrire directement comme un carré. Dans les autres, on construira un polynôme P de degré $p-1$ tel que la fonction $f-P^2$ soit positive et possède p zéros doubles ξ_j au voisinage de x_0. On pourra alors écrire $f-P^2 = \prod(x-\xi_j)^2\theta(x)$ et c'est cette fois-ci la décomposition $f = P^2 + h^2$, avec $h = \prod(x-\xi_j)\sqrt{\theta}$ qui conviendra localement.

On pourra remarquer que, pour p grand, les fonctions P et h changent de signe plusieurs fois au voisinage de x_0. Dans le cas $p = 1$, le polynôme se réduit à une constante dont le carré est la valeur de f en son minimum local, et notre décomposition est exactement celle de Fefferman et Phong.

À elle seule, la décomposition locale ci-dessus permettrait d'obtenir facilement une expression de f en somme de quatre carrés. Pour descendre à deux carrés, il nous faut dans la section 5 montrer l'existence d'une suite d'intervalles nettement séparés dans lesquels on doit écrire f comme somme de deux carrés, et telle qu'entre deux intervalles consécutifs, f soit un carré.

La section 6 reprend la première étape de la récurrence classique de [5] (mais avec une perte d'information qui ne permet pas de poursuivre en dimension supérieure) pour déduire le théorème 2 du théorème 1.

2. Premières réductions

Toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles. On notera $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $[a]^+ = \max(a, 0)$ et $[a]^- = \max(-a, 0)$.

Tous les intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ étant difféomorphes, on peut supposer que f est définie sur $]0, 1[$. Nous allons d'abord nous ramener au cas d'une fonction appartenant à $C^{2m}(\mathbb{R})$ et à support dans $[0, 1]$ à l'aide du lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.1. — *Soit p une fonction continue > 0 définie sur un ouvert borné U de $\mathbb{R}^d$. Il existe alors une fonction $\widetilde{p} \in C^\infty(U)$, strictement positive et telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $(D^\alpha \widetilde{p})/p$ tende vers 0 à la frontière de U.*

En notant $\delta(x)$ la distance de x au complémentaire de U, il suffit de poser, pour $x \in U$,

$$p_1(x) = \inf_{|x-y| \leq \frac{1}{2}\delta(x)} p(y)\,, \quad \widetilde{p}(x) = \int p_1(z)\,\chi\Big(\frac{x-z}{\delta(z)}\Big)\,\mathrm{e}^{-1/\delta(z)}\mathrm{d}z,$$

où χ est de classe C^∞, positive et à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{3}$. Le domaine d'intégration étant contenu dans la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\delta(x)$, l'expression des dérivées de $\widetilde{p}$ ne fait apparaître que des valeurs de $p_1(z)$ en des points où $p_1(z) \leq p(x)$ et l'estimation résulte facilement du fait que $\delta(z)^{-k}\mathrm{e}^{-1/\delta(z)}$ tend vers 0 à la frontière.

En revenant à la fonction $f \in C^{2m}(]0,1[)$ et en définissant p par

$$\frac{1}{p(x)} = 1 + \sum_{0 \leq k \leq 2m} \big|D^k f(x)\big|\,,$$

on voit que la fonction $\widetilde{f} = \widetilde{p}^2 f$ se prolonge par 0 en une fonction de $C^{2m}(\mathbb{R})$. Une décomposition $\widetilde{f} = \widetilde{g}^2 + \widetilde{h}^2$ permettra d'écrire $f = (\widetilde{g}/\widetilde{p})^2 + (\widetilde{h}/\widetilde{p})^2$.

Réduction au cas d'un intervalle où f n'est jamais plate. — On suppose donc f à support compact dans $[0,1]$; on pose

$$F = \big\{x \,\big|\, f(x){=}f'(x) = \cdots = D^{2m}f(x) = 0\big\}\,, \quad U = \complement F = \bigcup_\nu\,]a_\nu, b_\nu[,$$

en écrivant U comme réunion dénombrable d'intervalles disjoints dont les extrémités appartiennent à F.

Soit ω un module de continuité uniforme de $D^{2m}f$. Il est bien connu que l'on peut supposer la fonction ω croissante, concave et de classe C^∞ sur $]0,\infty[$, avec

$$\big|D^k\omega(t)\big| \leq C_k t^{-k}\omega(t).$$

On peut également régulariser la fonction $d(x)$ égale à la distance de x à F : il existe une fonction $\overline{d}$ de classe C^∞ dans U vérifiant

$$\big(d(x)/\overline{d}(x)\big)^{\pm 1} \leq 2 \quad \text{et} \quad \big|D^k\overline{d}(x)\big| \leq C'_k\overline{d}(x)^{1-k}.$$

En posant $\Omega(x) = \omega(\overline{d}(x))$ pour $x \in U$, on en déduit que l'on a, avec des constantes convenables,

$$\text{(2)} \quad \big|D^k\big(\Omega(x)^{-1}\big)\big| \leq C''_k\,\Omega(x)^{-1}d(x)^{-k}, \quad \big|D^k\big(\Omega(x)^{\frac{1}{2}}\big)\big| \leq C''_k\,\Omega(x)^{\frac{1}{2}}d(x)^{-k}.$$

Posons $\overline{f}(x) = f(x)\Omega(x)^{-1}$ pour $x \in U$. Cette fonction de classe C^{2m} vérifie

$$\text{(3)} \qquad \big|D^k\overline{f}(x)\big| \leq M d(x)^{2m-k}\,, \quad x \in U\,,\ 0 \leq k \leq 2m,$$

pour une certaine constante M. Si nous parvenons à écrire $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)^2 + \overline{h}(x)^2$ dans U, avec $\overline{g}$ et $\overline{h} \in C^m(U)$ et

$$\left|D^k \overline{g}(x)\right| + \left|D^k \overline{h}(x)\right| \leq M' d(x)^{m-k},$$

le théorème 1 en résulte immédiatement : la fonction g égale à $\overline{g}\,\Omega^{\frac{1}{2}}$ dans U et à 0 dans F est de classe C^m et, en définissant h de façon analogue, on a $f = g^2 + h^2$.

La construction de $\overline{g}$ et $\overline{h}$ peut se faire indépendamment, à condition que les constantes soient uniformes, dans chacun des intervalles constituant U. En divisant $\overline{f}$ par M, nous sommes donc ramenés au théorème suivant dont la démonstration est l'objet de la section 5.

Théorème 2.2. — *Soit f une fonction positive de classe C^{2m}, définie dans un intervalle $]a, b[\subset [0, 1]$, vérifiant*

$$\sum_{j=0}^{2m} \left|D^j f(x)\right| > 0 \quad et \quad \forall k \in \{0, \dots, 2m\}, \ \left|D^k f(x)\right| \leq d(x)^{2m-k},$$

en posant $d(x) = \min(x-a, b-x)$. Il existe une constante $C(m)$ ne dépendant que de m, et deux fonctions g et $h \in C^m(]a, b[)$ vérifiant

$$\left|D^k g(x)\right| + \left|D^k h(x)\right| \leq C(m) d(x)^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

telles que $f = g^2 + h^2$.

Remarque 2.3. — En dépit du caractère uniforme des estimations du théorème ci-dessus, notre méthode ne permet pas d'affirmer que, pour f parcourant un ensemble borné de $C^{2m}(I)$, on puisse choisir les fonctions g et h du théorème 1 dans un ensemble borné de $C^m(I)$. Nous avons seulement le résultat suivant

Corollaire 2.4. — *Soit (f_j) une famille bornée dans $C^{2m}(I)$ de fonctions positives, telle que la famille des fonctions $D^{2m} f_j$ soit équicontinue en tout point de I. Il existe alors un ensemble borné $\mathcal{B} \subset C^m(I)$ et, pour tout j, des fonctions g_j et $h_j \in \mathcal{B}$ telles que $f_j = g_j^2 + h_j^2$.*

On reprend les diverses étapes ci-dessus. On se ramène d'abord au cas $I =]0, 1[$, les hypothèses étant invariantes par difféomorphisme. Dire que la famille (f_j) est bornée équivaut à l'existence d'une fonction $H > 0$ définie sur $]0, 1[$ telle que

$$\forall j, \quad 1 + \sum_{0 \leq k \leq 2m} \left|D^k f_j(x)\right| \leq H(x). \tag{4}$$

On pose alors $p = 1/H$, on lui associe $\widetilde{p}$ comme ci-dessus et on pose $\widetilde{f}_j = \widetilde{p}^2 f_j$. Ces fonctions sont à support dans $[0, 1]$ et forment un ensemble borné de $C^{2m}([0, 1])$. En outre, les $D^{2m} \widetilde{f}_j$ forment une famille équicontinue en chaque point et donc uniformément équicontinue. On peut ainsi choisir un module de continuité uniforme commun ω.

Les fonctions Ω_j dépendent de l'ensemble des points où $\widetilde{f}_j$ est plate, mais les constantes C''_k de (2) sont uniformes. Les fonctions $\overline{f}_j(x) = \widetilde{f}_j(x)\Omega_j(x)^{-1}$ vérifient les estimations (3) avec une constante M uniforme, ce qui entraîne le résultat au vu du théorème 2.2.

3. Préliminaires

LEMME 3.1. — *Soit n un entier et Φ une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[-1,1]$. On peut alors trouver un polynôme P de degré n et $2n+1$ points*

$$-1 \leq \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \cdots < x_n < \xi_n \leq 1$$

vérifiant

$$|P(x)| \leq \Phi(x) \quad \textit{pour } x \in [-1,1], \tag{5}$$

$$P(x_j) = 0 \quad \textit{pour } j = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

$$|P(\xi_j)| = \Phi(\xi_j) \quad \textit{pour } j = 0,\ldots,n. \tag{7}$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de degré n, vérifiant (5) et possédant n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on notera $X_1(P) < \cdots < X_n(P)$ ces racines et on posera

$$I_0(P) = \left]-1, X_1(P)\right[, \quad I_k(P) = \left]X_k(P), X_{k+1}(P)\right[, \quad I_n(P) = \left]X_n(P), 1\right[,$$

$$\lambda_k(P) = \sup_{x \in I_k(P)} \frac{|P(x)|}{\Phi(x)}, \quad \mu(P) = \inf_{k=0,\ldots,n} \lambda_k(P).$$

Soit (P_ν) une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que la suite $\mu(P_\nu)$ converge vers $\sup_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, sur $[-1,1]$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que P_ν converge vers un certain polynôme P de degré $\leq n$. Il est impossible que la longueur de $I_k(\nu)$ tende vers 0, ce qui impliquerait $\mu(P_\nu) \to 0$, et P a donc n racines réelles distinctes. Le polynôme P appartient ainsi à $\mathcal{P}$ et réalise le maximum de μ sur cet ensemble. Il reste à montrer que $\mu(P) = 1$ ce qui entraîne l'existence de points $\xi_k \in I_k(P)$ vérifiant (7).

Supposons $\mu(P) < 1$ et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des indices $k \in \{0,\ldots,n\}$ tels que $\lambda_k(P) = 1$. Il est non vide car, dans le cas contraire, le polynôme θP avec $\theta > 1$ proche de 1 appartiendrait encore à $\mathcal{P}$ et on aurait $\mu(\theta P) > \mu(P)$. Regroupons ceux des intervalles I_k, $k \in \mathcal{K}$ qui sont contigus pour former un ou plusieurs intervalles dont les distances mutuelles sont > 0 et qui peuvent être du type suivant :

– zéro ou un intervalle $]-1, X_i(P)[$,

– zéro, un ou plusieurs intervalles du type $]X_{j_r}(P), X_{\ell_r}(P)[$,
– zéro ou un intervalle $]X_m(P), 1[$.

Posons $P(x) = Q(x)R(x)$ avec

$$R(x) = \big(x - X_i(P)\big)\big(X_m(P) - x\big)\prod_r \big(x - X_{j_r}(P)\big)\big(x - X_{\ell_r}(P)\big),$$

en convenant que les facteurs correspondant aux intervalles inexistants sont omis.

On a $R(x) < 0$ si $x \in I_k$ avec $k \in \mathcal{K}$ et on a $R(x) \geq 0$ sinon. Le polynôme $P_\varepsilon(x) = Q(x)(R(x) + \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, contredit alors la maximalité de $\mu(P)$: les $\lambda_k(P_\varepsilon)$ sont aussi voisins de 1 que l'on veut pour $k \in \mathcal{K}$ et sont strictement supérieurs à $\lambda_k(P)$ pour $k \notin \mathcal{K}$.

Remarque 3.2. — Il y a annulation de $\Phi - |P|$ et de sa dérivée(si elle existe) aux points ξ_j, à l'exception peut-être de ξ_0 et ξ_n s'ils coïncident avec ± 1. On peut donner une condition suffisante simple pour que cela ne se produise pas, à partir de la majoration classique

$$|P(x)| \leq \gamma_n \left|\frac{x}{h}\right|^n \sup_{|z|\leq h} |P(z)| \quad \text{pour } 0 < h < |x|\,, \tag{8}$$

valable pour tout polynôme de degré $\leq n$. S'il existe $h \in\ ]0, 1[$ tel que $\Phi(\pm 1) > \gamma_n h^{-n} \sup_{|z|\leq h} \Phi(z)$, on a alors $|\xi_j| < 1$ pour $j = 0, \ldots, n$.

Lorsque la fonction Φ est seulement ≥ 0, on peut trouver pour $\varepsilon > 0$ un polynôme P_ε comme ci-dessus associé à la fonction $\Phi + \varepsilon$. Ces polynômes sont uniformément bornés et admettent donc comme valeur d'adhérence un polynôme P de degré $\leq n$ vérifiant $|P(x)| \leq \Phi(x)$. Les racines de P peuvent devenir multiples et ne peuvent être dites racines multiples de $\Phi - |P|$ que si Φ est dérivable. Nous donnons ci-dessous l'énoncé qui nous sera utile.

Corollaire 3.3. — *Soit F une fonction positive et de classe C^{2m} sur $[-r, r]$ vérifiant*

$$F(x) \leq \alpha\, |x|^{2p} + \beta \quad \textit{avec } 0 < \beta < r^{1/2p}\alpha,$$

pour un entier $p \in \{1, \ldots, m\}$.

(a) *Si P est un polynôme de degré $\leq p-1$ vérifiant $P(x)^2 \leq F(x)$ dans $[-r, r]$, on a*

$$\sup_{|x|\leq r} |P(x)| \leq \widetilde{C}_r \beta^{1/2p} \alpha^{(p-1)/2p},$$

où $\widetilde{C}_r$ ne dépend que de r et (d'une borne) de p.

(b) *Soit $r_0 \leq r$ et supposons que l'on ait*

$$\inf_{r_0\leq|y|\leq r} F(y) > \widetilde{C}_r^2 \beta^{1/p} \alpha^{(p-1)/p}.$$

Il existe alors un polynôme P de degré $\le p-1$, vérifiant $P(x)^2 \le F(x)$ pour $|x| \le r$ et tel que l'équation $F(x) - P(x)^2 = 0$ ait p racines doubles, distinctes ou confondues, dans $]-r_0, r_0[$.

On applique l'estimation (8) en choisissant $h = (\beta/\alpha)^{1/2p}$. On a alors $|P(z)| \le \sqrt{2\beta}$ pour $|z| \le h$, et donc

$$\sup_{|x|\le r} \bigl|P(x)\bigr| \le \gamma_{p-1}(r/h)^{p-1}\sqrt{2\beta} = \sqrt{2}\,\gamma_{p-1} r^{p-1}\alpha^{(p-1)/2p}\beta^{1/2p}.$$

Si la fonction F a au moins p zéros doubles dans $]-r, r[$ (et donc dans $]-r_0, r_0[$), le polynôme 0 convient. Supposons donc que F ait exactement q zéros doubles $a_1, \dots, a_q$, distincts ou confondus, dans cet intervalle, avec $q < p$. La fonction Φ définie par $\Phi(x) = F(x)^{\frac{1}{2}} / \left|(x-a_1)\cdots(x-a_q)\right|$ est alors continue et strictement positive dans $[-r, r]$.

D'après le lemme 3.1, il existe un polynôme Q, de degré $p-q-1$ vérifiant $|Q(x)| \le \Phi(x)$ et tel que l'on ait $|Q(\xi_j)| = \Phi(\xi_j)$ en $(p-q)$ points distincts $\xi_1, \dots, \xi_{p-q}$ appartenant à $[-r, r]$. Le polynôme $P(x) = \prod(x-a_j)Q(x)$ vérifie $P(x)^2 \le F(x)$, la minoration de $F(x)$ pour $|x| \ge r_0$ garantit que les ξ_j, et bien sûr les a_j, appartiennent à $]-r_0, r_0[$. La fonction $F - P^2$ y admet donc p racines doubles $a_1, \dots, a_q, \xi_1, \dots, \xi_{p-q}$, où certains des a_j peuvent être confondus.

Lemme 3.4. — *Soit f de classe C^{n+p}, $p \ge 0$, sur un intervalle $[a, b]$ s'annulant en n points $\xi_1, \dots, \xi_n$ distincts ou confondus. Alors*

$$f(x) = \prod_1^n (x-\xi_j) \int_{[0,1]^n} t_1^{n-1} t_2^{n-2} \cdots t_{n-1} D^n f(\Theta_{x,t_1,\dots,t_n})\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n, \tag{9}$$

en notant $\Theta_{x,t_1,\dots,t_n}$ le barycentre de $x, \xi_1, \dots, \xi_n$ défini par

$$(1-t_1)\xi_1 + t_1(1-t_2)\xi_2 + \cdots + t_1\cdots t_{n-1}(1-t_n)\xi_n + t_1\cdots t_n\, x.$$

On écrit

$f(x) = (x-\xi_1)f_1(x)$ avec $f_1(x) = \int_0^1 Df\bigl((1-t_1)\xi_1 + t_1 x\bigr)\,\mathrm{d}t_1$, puis

$f_1(x) = (x-\xi_2)f_2(x)$ avec $f_2(x) = \int_0^1 Df_1\bigl((1-t_2)\xi_2 + t_2 x\bigr)\,\mathrm{d}t_2$

et on poursuit par récurrence.

Corollaire 3.5. — *Sous ces hypothèses,*

$$f(x) = \prod_1^n (x-\xi_j) g(x),$$

avec

- *g est de classe C^p ;*
- *pour $0 \le k \le p$, $\displaystyle\inf_{x\in I} D^{n+k} f(x) \le \frac{(n+k)!}{k!} D^k g(x) \le \sup_{x\in I} D^{n+k} f(x)$.*

• *Soit J un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ dont on note $|J|$ le nombre d'éléments. Pour $k+|J|\le n+p$, la fonction $\prod_{j\in J}(x-\xi_j)D^kg(x)$, bien définie en dehors des ξ_j, se prolonge en une fonction de classe $C^{n+p-k-|J|}$ et on a*

$$\sup_{\substack{k+|J|\le n+p\\ x\in[a,b]}}\Big|\prod_{j\in J}(x-\xi_j)D^kg(x)\Big|\le C(n,p)\sup_{\substack{\ell\le n+p\\ x\in[a,b]}}\big|D^\ell f(x)\big|.$$

On obtient une expression exacte des $D^kg(x)$ en dérivant sous le signe somme l'intégrale figurant dans (9). L'estimation en résulte directement.

La fonction $g_J(x)=\prod_{j\in J}(x-\xi_j)g(x)$ n'est rien d'autre que la fonction g ci-dessus lorsque $\{1,\dots,n\}$ est remplacé par le complémentaire de J. Elle est donc de classe $C^{n+p-|J|}$ et on peut estimer ses dérivées par celles de f. On écrit ensuite

$$\prod_{j\in J}(x-\xi_j)D^kg(x)=D^kg_J(x)-\sum_{\substack{\ell<k,\ J'\subset J\\ |J'|=|J|-k+\ell}}c_{k,\ell}\prod_{j\in J'}(x-\xi_j)D^\ell g(x)$$

pour obtenir, par récurrence sur k, une borne du membre de gauche.

COROLLAIRE 3.6. — *Soit f une fonction de classe C^{2m} sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $p\in\{1,\dots,m\}$ et une constante $\gamma>0$ telle que $D^{2p}f(x)\ge\gamma$ dans $[a,b]$. On suppose en outre que la fonction f possède p zéros doubles, distincts ou non, dans cet intervalle. Il existe alors une fonction h de classe C^{2m-p} dans $[a,b]$ telle que $f=h^2$ et que*

$$\big|D^kh(x)\big|\le C\ \textit{pour}\ k\le 2m-p\ \textit{et}\ x\in[a,b],$$

la constante C ne dépendant que de γ et de $M=\sup\big|D^kf(x)\big|$ pour $k\le 2m$.

D'après le corollaire précédent, on peut écrire $f=\prod_1^p(x-\xi_j)^2\varphi(x)$, en notant ξ_j les zéros de f, et la fonction φ est de classe C^{2m-2p}, une borme uniforme de ses dérivées ne dépendant que de M. En outre, on a $\varphi(x)\ge\gamma/(2p)!$. On pose

$$h(x)=\prod_1^p(x-\xi_j)\sqrt{\varphi(x)}.$$

Les fonctions h et φ sont de classe C^{2m} en dehors des ξ_j et il faut montrer que, pour $k\le 2m-p$ les fonctions D^kh se prolongent continûment et sont uniformément bornées. Ces fonctions peuvent s'écrire comme combinaison linéaire explicite de termes du type suivant

$$T(x)=\prod_{j\in J}(x-\xi_j)\frac{D^{q_1}\varphi(x)\cdots D^{q_r}\varphi(x)}{\varphi(x)^{r-\frac12}}\quad\text{avec } p-|J|+\sum q_s=k.$$

Le dénominateur est continu et se minore à l'aide d'une puissance de γ.

Nous allons extraire de J des sous-ensembles J'_s, $s=1,\dots,r$, disjoints (éventuellement vides) de cardinal $[q_s-2m+2p]^+$. À chacun de ceux-ci est associé le polynôme $\prod_{j\in J'_s}(x-\xi_j)$ dont le produit par $D^{q_s}\varphi$ admet un prolongement continu à l'intervalle. Les bornes de ces produits données dans le corollaire précédent entraînent immédiatement la majoration des $D^k h$ en termes de M.

Il reste à prouver que l'on peut effectivement extraire tous ces sous-ensembles, c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{\{s\,|q_s>2m-2p\}}(q_s-2m+2p)\leq |J|\,.$$

Si le membre de gauche n'est pas nul, il est majoré par

$$-2m+2p+\sum q_s=-2m+2p+k-p+|J|\,,$$

qui est bien majoré par $|J|$ pour $k\leq 2m-p$. La preuve est complète.

4. Décomposition locale

Dans cette section, m est un entier fixé et les constantes dépendront implicitement de m. On s'intéresse à des fonctions positives f vérifiant

$$f\in C^{2m}\bigl([-1,1]\bigr),\quad \bigl|D^{2m}f(x)\bigr|\leq 1,\quad \sup_{0\leq p\leq m-1}D^{2p}f(0)=1. \tag{10}$$

Lemme 4.1. — *Soit f positive dans $[-1,1]$ vérifiant* (10).

(a) *Il existe une constante $\overline{C}>1$ telle que*

$$\bigl|D^k f(x)\bigr|\leq \overline{C}\ \textit{pour}\ |x|\leq 1\ \textit{et}\ 0\leq k\leq 2m, \tag{11}$$

$$\frac12\leq \sup_{0\leq p\leq m-1}D^{2p}f(x)\leq\frac32\ \textit{pour}\ |x|\leq\frac{3}{\overline{C}}\cdot \tag{12}$$

(b) *Soit $\alpha\in[0,1]$ et supposons que $D^{2q}f(0)\leq\alpha$ pour $0\leq q<p$. On a alors*

$$\bigl|D^k f(0)\bigr|\leq \overline{C}\alpha^{1/2p}\ \textit{pour}\ 0\leq k<2p.$$

En posant $s_k(x)=D^kf(0)x^k/k!$ et $s_k^{\pm}(x)=[D^kf(0)]^{\pm}x^k/k!$, la positivité de f et la formule de Taylor entraînent

$$\sum_0^{m-1}s_{2p}^{-}(x)-\sum_0^{m-1}s_{2p-1}(x)\leq\sum_0^{m-1}s_{2p}^{+}(x)+\frac{1}{2m!}x^{2m},$$

pour $|x|\leq 1$. L'inégalité étant aussi valide au point $-x$, on en déduit

$$\Bigl|\sum_0^{m-1}s_{2p}^{-}(x)+\sum_0^{m-1}s_{2p-1}(x)\Bigr|\leq\sum_0^{m-1}s_{2p}^{+}(x)+\frac{1}{2m!}x^{2m}.$$

Soit $h = 1/2m$. La majoration ci-dessus écrite aux points kh, $k = 1, \ldots, 2m$, fournit le système de $2m$ équations

$$\sum_0^{m-1} k^{2p} s_{2p}^-(h) + \sum_0^{m-1} k^{2p-1} s_{2p-1}(h) = B_k,$$

avec $|B_k| \leq \sum_0^{m-1} k^{2p} s_{2p}^+(h) + 1/(2m!) k^{2m} h^{2m}$.

L'inversion de la matrice de Vandermonde d'ordre $2m$ permet d'exprimer les $s_{2p}^-(h)$ et les $s_{2p+1}(h)$ comme combinaison linéaire explicite des B_k qui sont eux-même uniformément bornés. On obtient donc la majoration des $\left|D^k f(0)\right|$, $k = 0, \ldots, 2m{-}1$ par une constante universelle C_1.

Il est maintenant facile de majorer $D^k f(x)$ qui est somme de son polynôme de Taylor de degré $2m - k - 1$ et d'un reste majoré en module par $1/(2m-k)!$ pour $|x| \leq 1$, et d'en déduire (11). On remarquera que cette partie de la démonstration reste valable en supposant seulement $\sup_{0 \leq p \leq m-1} D^{2p} f(0) \leq 1$.

Si maintenant cette borne supérieure est égale à 1, en choisissant $\overline{C}$ assez grand, (12) résulte du fait que les fonctions $D^{2p} f$ sont lipschitziennes de rapport borné.

Sous les hypothèses (b), posons $\rho = \alpha^{1/2p} \leq 1$ et $g(x) = \rho^{-2p} f(\rho x)$. Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$, vérifie $D^{2\ell} g(0) \leq 1$ pour $0 \leq \ell < m$ et $\left|D^{2m} g(x)\right| \leq 1$. D'après ce qui précède, on a $\left|D^k g(0)\right| \leq \overline{C}$ pour tout k et donc $\left|D^k f(0)\right| \leq \overline{C} \rho$ pour $k < 2p$.

LEMME 4.2 (décomposition locale). — *Il existe trois applications*

$$\Delta :]0,1] \longrightarrow]0,1], \;\; R :]0,1] \longrightarrow \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N};\, n \geq 3\overline{C} \right\}, \;\; C :]0,1] \longrightarrow [1, \infty[,$$

où Δ et R sont croissantes et où C est décroissante, telles que, pour toute fonction positive f vérifiant (10) *et*

$$\exists\, p \in \{1, \ldots, m{-}1\}, \quad D^{2p} f(0) = a > 0 \;\textit{ et}$$
$$\forall q \in \{0, \ldots, p{-}1\}, \quad D^{2q} f(0) \leq \Delta(a),$$

il existe g et $h \in C^{2m-p}([-3R(a), 3R(a)])$ vérifiant

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g^2(x) + h^2(x) \\ \left|D^k g(x)\right| + \left|D^k h(x)\right| &\leq C(a) \end{aligned}\right\} \quad \textit{pour } |x| \leq 3R(a);\; 0 \leq k \leq 2m{-}p,$$

$$\operatorname{Supp}(g) \subset \big[-R(a), R(a)\big],$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2(2p)!} |x|^{2p} \leq f(x) &\leq \frac{3a}{2(2p!)} |x|^{2p} \\ \operatorname{sgn}(x) f'(x) &> 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{pour } \tfrac{1}{3} R(a) \leq |x| \leq 3R(a).$$

On notera $T(x)$ le polynôme de Taylor de degré $2p{-}1$ de f à l'origine et on posera

$$\alpha=\sup_{q=0}^{p-1} D^{2q}(0),\quad \pi(x)=\sum_{0}^{2p-1}\frac{x^k}{k!}\cdot$$

Les constantes $\widetilde{C}_r$ et $\overline{C}$ sont celles du corollaire 3.3 et du lemme 4.1.

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= T(x)+\frac{ax^{2p}}{(2p)!}+\varepsilon(x)\quad \text{avec } |\varepsilon(x)|\le \overline{C}\,\frac{|x^{2p+1}|}{(2p{+}1)!},\\ |T(x)| &\le \overline{C}\alpha^{1/2p}\pi\big(|x|\big). \end{aligned}$$

Choix de R. — On définit $R(a)$ comme le plus grand nombre $r=1/n$ avec $n\ge 3\overline{C}$ qui vérifie $3\overline{C}r\le \frac14 a$. On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} \big|\varepsilon(x)\big| &\le \frac14\,\frac{ax^{2p}}{(2p)!}\\ \Big|f'(x)-T'(x)-a\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}\Big| &\le \frac14 a\frac{|x|^{2p-1}}{(2p-1)!}\\ \frac34 a\le D^{2p}f(x) &\le \frac54 a \end{aligned}\right\}\quad \text{pour } |x|\le 3R(a).$$

Il faut maintenant demander que α soit assez petit pour quatre raisons, ce qui va nous conduire à introduire des fonctions $\Delta_j(a)$, pour $j=1,2,3,4$ (elles dépendent aussi de p ce qui n'apparaît pas dans la notation). On en prendra ensuite le minimum (en j et p).

Majorations pour $|x|\ge \frac13 R(a)$. — On définit $\Delta_1(a)$ comme le plus grand α tel que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}\alpha^{1/2p}\pi\big(|x|\big) &\le \frac{a}{4}\frac{|x|^{2p}}{(2p)!}\\ \overline{C}\alpha^{1/2p}\pi'\big(|x|\big) &\le \frac{a}{4}\frac{|x|^{2p-1}}{(2p{-}1)!} \end{aligned}\right\}\quad \text{pour } \frac13 R(a)\le |x|\le 3R(a).$$

Les estimations (13) sont ainsi vérifiées pour $\alpha\le\Delta_1(a)$.

Choix d'un polynôme. — Nous allons utiliser le corollaire 3.3 pour trouver un polynôme P de degré $p{-}1$ tel que la fonction $f-P^2$ soit positive pour $|x|\le 3R(a)$ et ait p racines doubles dans l'intervalle $]-\frac13 R(a),\frac13 R(a)[$. Pour $|x|\le 3R(a)$, on a

$$f(x)\le \frac{5a}{4(2p)!}x^{2p}+\overline{C}\alpha^{1/2p}\pi\big(3R(a)\big),$$

et un tel polynôme P existe si

$$\inf_{\frac{1}{3}R(a)\leq|y|\leq 3R(a)} f(y), \quad \text{qui est supérieur à } A = \frac{a}{2(2p)!}\big(\tfrac{1}{3}R(a)\big)^{2p},$$

est strictement plus grand que

$$B = \widetilde{C}^{\,2}_{R(a)/3}\big(\overline{C}\alpha^{1/2p}\pi\big(3R(a)\big)\big)^{1/p}\left(\frac{5a}{4(2p)!}\right)^{(p-1)/p}.$$

On définit $\Delta_2(a)$ comme le plus grand α tel que $A \geq 2B$.

Troncature et choix de g. — La quantité B ci-dessus est en fait une borne de $P(x)^2$ pour $|x| \leq 3R(a)$. Sur l'espace des polynômes de degré $\leq p-1$ la norme uniforme et la norme C^{p-1} sont équivalentes, la constante décroissant avec la longueur de l'intervalle. On obtient donc

$$\sup_{\substack{k<p\\ |x|\leq 3R(a)}} \big|D^kP(x)\big| \leq C_1(a)\alpha^{1/4p^2},$$

où la fonction C_1 est décroissante.

On fixe une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1,1]$ et égale à 1 pour $|x| \leq \frac{1}{3}$. On pose

$$g(x) = \chi\Big(\frac{x}{R(a)}\Big)P(x).$$

Il est facile d'écrire une borne supérieure de $\big|D^k\chi\left(x/R(a)\right)\big|$ pour $0 \leq k \leq 2m$ ne dépendant que de $R(a)$ et décroissant avec $R(a)$. En développant la formule de Leibniz, on obtient donc

$$\sup_{\substack{0\leq k\leq 2m\\ x\in\mathbb{R}}} \big|D^kg(x)\big| \leq C_2(a)\alpha^{1/4p^2}.$$

On définit Δ_3 par $C_2(a)\Delta_3(a)^{1/4p^2} = 1$.

Estimations de h. — On a $\big|D^{2p}g^2\big| \leq 2^{2p}C_2(a)^2\alpha^{1/8p^2}$. On définit $\Delta_4(a)$ comme le plus grand α tel que le membre de droite soit égal à $\frac{1}{4}a$ et enfin $\Delta(a)$ comme le plus petit des $\Delta_j(a)$. Pour $\alpha \leq \Delta(a)$, on pose $f_1(x) = f(x) - g(x)^2$. Toutes les dérivées d'ordre $\leq 2m$ de g^2 se majorent par 2^{2m} et, en posant $C_3 = \overline{C} + 2^{2m}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \forall k \leq 2m,\ \big|D^kf_1(x)\big| &\leq C_3\\ D^{2p}f_1(x) &\geq \tfrac{1}{2}a \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x \in \big[-3R(a), R(a)\big].$$

D'autre part, la fonction f_1 a p zéros doubles dans cet intervalle. Il ne reste plus qu'à utiliser le corollaire 3.6 qui nous assure qu'il existe une fonction h et une constante $C_4(a)$ telle que $\big|D^kh(x)\big| \leq C_4(a)$ pour $k \leq 2m-p$ et que $f_1 = h^2$. Cela achève la démonstration.

Corollaire 4.3. — *Il existe un nombre fini de constantes strictement positives a_0, A_0 et $r_N < r_{N-1} < \cdots < r_1 < 1/3\overline{C}$ telles que, pour toute fonction f définie et positive dans $[-1,1]$ et y vérifiant* (10), *on ait*
— *ou bien $f(0) \geq a_0$*
— *ou bien il existe $j \in \{1,\dots,N\}$ et une décomposition*

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g(x)^2 + h(x)^2 \\ \forall k \leq m{+}1,\ \left|D^k g(x)\right| &+ \left|D^k h(x)\right| \leq A_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x \in [-3r_j, 3r_j],$$

la fonction g étant à support dans $[-r_j, r_j]$. De plus

$$f(x) \geq a_0 \ \text{ et } \ \operatorname{sgn}(x) f'(x) > 0 \ \text{pour } r_j \leq \tfrac{1}{3}|x| \leq 3r_j.$$

Par hypothèse, il existe p_1 tel que $D^{2p_1}f(0) = 1$. Si on a $D^{2q}f(0) < \Delta(1)$ pour tout $q < p_1$, le lemme précédent fournit une décomposition en somme de carrés dans $[-3R(1), 3R(1)]$. Sinon, il existe $p_2 < p_1$ tel que $D^{2p_2}(0) \geq \Delta(1)$. Si on a $D^{2q}f(0) < \Delta\circ\Delta(1)$ pour tout $q < p_2$, on a encore une décomposition en carrés dans l'intervalle de rayon $3R\circ\Delta(1)$, sinon... On poursuit par récurrence pour arriver à l'une des situations suivantes : ou bien il existe $p \in \{1,\dots,m{-}1\}$ et $k < m$ tel que $D^{2p}f(0) \geq \Delta^{(k)}(1)$ et $D^{2q}f(0) \leq \Delta^{(k+1)}(1)$ pour $0 \leq q < p$, ou bien $f(0) \geq \Delta^{(m)}(1)$. Dans le premier cas, le lemme précédent où a est borné inférieurement fournit une décomposition $f = g^2 + h^2$ dans des intervalles dont le rayon $3r$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $3r_1, \dots, 3r_N$, et les estimations des dérivées de g et h sont uniformes. La minoration (13) montre que $f(x)$ est minoré par $a_1 = \Delta^{(m-1)}(1)/(2(2p)!)r_N^{2p}$ pour $\frac{1}{3}r \leq |x| \leq 3r$. Il ne reste plus qu'à choisir $a_0 > 0$ inférieur à a_1 et à $\Delta^{(m)}(1)$ et la preuve est complète.

5. Démonstration du théorème 2.2

La fonction positive f est donc de classe C^{2m} dans un intervalle $]a,b[\, \subset\,]0,1[$, et elle vérifie

$$\sum_{0\leq k\leq 2m} \left|D^k f(x)\right| > 0, \quad \left|D^k f(x)\right| \leq d(x)^{2m-k} \ \text{ pour } 0 \leq k \leq 2m,$$

en posant $d(x) = \min(x{-}a, b{-}x)$.

Il serait naturel d'introduire comme nous le ferons en dimension 2 la « métrique propre de f » au sens de [9], définie par $g = \mathrm{d}x^2/\widetilde{\rho}(x)^2$ avec $\widetilde{\rho}(x) = \sup_0^{2m-1} \left|D^k f(x)\right|^{1/(2m-k)}$. Grâce au lemme 4.1, la fonction $\widetilde{\rho}$ est équivalente à la fonction ρ ci-dessous. Les propriétés générales des métriques propres assurent que g vérifie la condition de lenteur de Hörmander (c'est la relation (14) ci-dessous) garantissant l'existence de bonnes partitions de l'unité, et que f est un symbole de poids $\widetilde{\rho}^{2m}$. Toutefois, l'utilisation de partitions de l'unité ne donnerait qu'une décomposition de f en somme de quatre carrés et il nous faudra procéder à un découpage plus délicat.

Posons

$$\rho(x)=\sup_{p=0}^{m-1}\big(\big[D^{2p}f(x)\big]^{+}\big)^{\frac{1}{2(m-p)}}.$$

On a $\rho(x)\leq 1$ et même $\rho(x)\leq d(x)$. Cette fonction peut s'annuler, mais uniquement en des points x tels que $f(x)=\cdots=D^{2m-1}f(x)=0$ et donc $D^{2m}f(x)>0$. L'ensemble de ces points est fermé et discret.

En chaque point z où $\rho(z)>0$, on peut considérer la fonction

$$\varphi(t)=\rho(z)^{-2m}f\big(z+\rho(z)t\big).$$

Cette fonction est définie sur $[-1,1]$ et vérifie les hypothèses du lemme 4.1 et du corollaire 4.3 ; il ne reste plus qu'à transformer leurs conclusions par le même changement d'échelle.

$$\big|D^k f(y)\big|\leq \overline{C}\rho(z)^{2m-k}\ \text{ pour }\ |y-z|\leq\rho(z)\text{ et }0\leq k\leq 2m, \tag{13}$$

$$\big(\rho(y)/\rho(z)\big)^{\pm1}\leq 2\ \text{ pour }\ |y-z|\leq 3\rho(z)/\overline{C}. \tag{14}$$

À tout point z vérifiant $f(z)<a_0\rho(z)^{2m}$ sont associés : un intervalle I_z[(1)] *centré en z et dont le rayon est l'un des $r_j\rho(z)$, une fonction g_z à support dans I_z et une fonction h_z définie dans $3I_z$ telles que $f=g^2+h^2$ dans $3I_z$ avec*

$$\forall k\leq m{+}1,\ \big|D^k g_z(x)\big|+\big|D^k h_z(x)\big|\leq A_0\rho(z)^{m-k}\text{ dans }3I_z. \tag{15}$$

En outre

$$f(x)\geq a_0\rho(z)^{2m}\text{ et }\operatorname{sgn}(f'(x))(x{-}z)>0\text{ dans }3I_z\setminus\tfrac13 I_z. \tag{16}$$

On déduit de ce dernier point que, si $\frac13 I_z$ et $\frac13 I_w$ sont disjoints, alors $3I_z$ et $3I_w$ sont disjoints : dans le cas contraire, il existerait un point de l'intersection où f' devrait être à la fois >0 et <0.

Construction d'une suite d'intervalles disjoints. — On considère une famille $\mathcal{I}_1$ de tels intervalles I_z, de rayon relatif r_1 (i.e. de rayon $r_1\rho(z)$), formée d'intervalles disjoints et maximale pour cette propriété. On y adjoint une famille $\mathcal{I}_2$ d'intervalles de rayon relatif r_2, telle que les éléments de $\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2$ soient disjoints, et qui est maximale pour cette propriété. On poursuit par récurrence et on obtient une famille $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cup\cdots\cup\mathcal{I}_N$ vérifiant

— pour $I\neq J\in\mathcal{I}$, on a $3I\cap 3J=\varnothing$,

— pour z tel que $f(z)<a_0\rho(z)^{2m}$, en notant r le rayon relatif de I_z, il existe un intervalle $I\in\mathcal{I}$, de rayon relatif $r_I\geq r$, tel que $\frac13 I_z\cap\frac13 I\neq\varnothing$. Notons z_I

[(1)] Si I est un intervalle de longueur L, on note λI l'intervalle de même centre et de longueur λL.

le centre de I et y un point de $\frac{1}{3}I_z \cap \frac{1}{3}I$. Les rapports $\rho(y)/\rho(z_I)$ et $\rho(y)/\rho(z)$ sont majorés, ainsi que leurs inverses par 2. On a $\rho(z) \leq 4\rho(z_I)$ et donc

$$\frac{|z-z_I|}{r_I\rho(z_I)} \leq \frac{|y-z_I|}{r_I\rho(z_I)} + \frac{|y-z|}{r_I\rho(z_I)} \leq \frac{1}{3} + \frac{4\,|y-z|}{r_I\rho(z)} \leq \frac{1}{3} + \frac{4\,|y-z|}{r\rho(z)} \leq \frac{5}{3}\cdot$$

On a donc $f(x) \geq a_0\rho(x)^{2m}$ hors de $\bigcup_{I\in\mathcal{I}} \frac{5}{3}I$. On sait de plus, grâce à (16), que $f(x) \geq a_0\rho(z_I)^{2m} \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m}$ pour $x \in 3I \setminus \frac{1}{3}I$ et on a donc

$$f(x) \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m} \quad \text{hors de} \quad \bigcup_{I\in\mathcal{I}} \tfrac{1}{3}I.$$

Les intervalles $I \in \mathcal{I}$ ne peuvent pas s'accumuler en un point $x_0 \in \,]a,b[$. On devrait en effet avoir $\rho(x_0) = 0$, c'est-à-dire que l'on aurait

$$f(x) \sim \gamma(x-x_0)^{2m}/(2m)!$$

près de x_0, avec $0 < \gamma \leq 1$. On aurait alors $\rho(x) \sim \sup_p(\gamma/(2p)!)^{1/2p}(x-x_0) \leq \gamma^{1/2m}(x-x_0)$ et donc $\lim f(x)/\rho(x)^{2m} \geq 1/(2m)!$. Si l'on a eu la précaution de choisir $a_0 < 1/(2m)!$, ce que nous supposerons désormais, il existe un voisinage de x_0 ne contenant le centre d'aucun $I \in \mathcal{I}$.

Il est donc possible de ranger les $I \in \mathcal{I}$ par ordre croissant en une suite I_ν indexée par un intervalle de $\mathbb{Z}$. On notera z_ν le centre de I_ν et J_ν l'intervalle séparant I_ν de $I_{\nu+1}$. S'il existe un indice minimum (resp. maximum) ν, on notera $J_{\nu-1}$ (resp. J_ν] l'intervalle séparant I_ν de a [resp. b).

Choix de g et h. — Dans J_ν, on sait que $f(x) \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m}$, mais ρ peut s'annuler en des points isolés. D'après le corollaire 3.6 appliqué au cas où f a m racines doubles confondues en un point y, on sait qu'il existe alors au voisinage de y une fonction u de classe C^m vérifiant $u^2 = f$, et que u est le produit de $(x-y)^m$ par une fonction continue strictement positive. On peut donc choisir u_ν globalement dans J_ν, de valeur absolue égale à $\sqrt{f}$ et gardant un signe constant si m est pair, ou au contraire changeant de signe en chaque point où ρ s'annule si m est impair. On sait que u_ν est de classe C^m et il suffit d'estimer ses dérivées aux points x tels que $\rho(x) > 0$.

$$\left|D^k u_\nu(x)\right| \leq C_1 \sum \frac{|D^{q_1}f(x)\dots D^{q_r}f(x)|}{f^{r-1/2}},$$

la somme étant étendue aux indices tels que $\sum q_s = k$. Dans chaque terme de la somme, le numérateur se majore par $\overline{C}^{\,r}\prod \rho(x)^{2m-q_s} = \overline{C}^{\,r}\rho(x)^{2mr-k}$, tandis que le dénominateur se minore par $2^{-2mr}a_0^r\rho(x)^{2mr-m}$. On a donc, avec des constantes uniformes, $\left|D^k u(x)\right| \leq C_2\rho(x)^{m-k}$ pour $k \leq m$.

On peut maintenant définir la fonction g : elle vaut 0 dans chaque J_ν et, dans chaque I_ν, elle coïncide avec la fonction à support compact g_{z_ν} dont (15) nous fournit les majorations. On a ainsi $g \in C^m(]a,b[)$ et en tout point

$$\left|D^k g(z)\right| \leq A_0\rho(z_\nu)^{m-k} \leq 2^m A_0\rho(z)^{m-k}.$$

La fonction h est connue au signe près : on la prendra égale à $\pm u_\nu$ dans J_ν et à $\pm h_{z_\nu}$ dans I_ν. Il suffit de recoller les signes puisque l'on a $h_{z_\nu} = \pm\sqrt{f}$ dans $3I_\nu \cap J_{\nu-1}$ ainsi que dans $3I_\nu \cap J_\nu$. Ayant choisi (arbitrairement) h dans I_0, le choix de h est imposé dans J_{-1} et J_0, puis dans I_{-1} et I_1 et ainsi de suite. On a $h \in C^m(]a,b[)$ et les majorations des u_ν et h_{z_ν} montrent que

$$\left|D^k h(z)\right| \leq C_3 \rho(z)^{m-k}.$$

Comme $\rho(z)$ est inférieur à $d(z)$, distance au bord de $[a,b]$, cela achève la démonstration du théorème 2.2.

5.1. Quelques indications sur le cas höldérien. — Nous ne ferons qu'esquisser la démonstration du résultat suivant :

Si la fonction f est positive et de classe $C^{2m-2+2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ (resp. $C^{2m-2,1}$, $C^{2m-1,1}$), *alors $f = g^2 + h^2$ avec g et h de classe $C^{m-1+\alpha}$* (resp. $C^{m-1/2}$, $C^{m-1,1}$).

Comme dans la section 2, on se ramène au cas où f est à support compact dans $[0,1]$. On pose $F = \left\{x \,\middle|\, f(x) = \cdots = D^{2m-2}f(x)\right\} = 0$ mais il n'est plus besoin de modifier f hors de F. On écrit $U = \complement F$ comme réunion d'intervalles disjoints et suffit de montrer que dans l'un quelconque de ceux-ci (noté $]a,b[$) on peut écrire $f = g^2 + h^2$ avec

$$\left|D^k g(x)\right| + \left|D^k h(x)\right| \leq C d(x)^{m-1-k+\alpha}, \quad [D^{m-1}g]_{\alpha,x} + [D^{m-1}h]_{\alpha,x} \leq C,$$

en posant $[\varphi]_{\alpha,x} = \limsup_{y,z\to x} |\varphi(y) - \varphi(z)| \,/\, |y-z|^\alpha$, y compris dans les cas limites. La collection des fonctions g prolongée par 0 dans F appartiendra alors à l'espace voulu.

On pose $\rho(x) = \sup([D^{2p}f(x)]^+)^{1/(2m-2-2p+2\alpha)}$. Cette fonction ne s'annule pas dans $]a,b[$ et, quitte à diviser f par une constante, on a $\rho(x) \leq d(x)$. Une modification du lemme 4.1 montre que l'on a toujours $\left|D^k f(x)\right| \leq \overline{C}\rho(x)^{2m-2-k+2\alpha}$.

Le lecteur nous pardonnera de ne pas lui infliger une réécriture du lemme 4.2, où seules les constantes doivent être modifiées, mais le principe est le même : si la dérivée d'ordre $2p$ est dominante ($p = 1,\ldots,m-1$), on peut trouver P de degré $\leq p-1$ tel que $f - P^2$ soit le produit de $\prod_1^p (x-x_j)^2$ par une fonction strictement positive de classe $C^{2m-2-2p+2\alpha}$, dont la racine carrée aura la même régularité.

La construction finale des intervalles I_ν et J_ν est essentiellement inchangée. La preuve est même légèrement simplifiée puisque l'on peut prendre h de signe constant ($f^{\frac{1}{2}}$ ou $-f^{\frac{1}{2}}$) dans les intervalles J_ν.

6. Démonstration du théorème 2

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial/\partial x_2)^{\alpha_2}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Il s'agit d'une adaptation de l'argument de [5], qui a déjà été rédigé de manière détaillée dans plusieurs ouvrages ou articles [8], [2], [10]. Nous renvoyons à ceux-ci pour les estimations et le calcul des constantes, qui ne sont pas modifiés, en nous bornant à décrire la méthode et à insister sur les points qui nécessitent des arguments nouveaux.

Le début de la démonstration reprend les arguments de la section 2. On se ramène d'abord au cas où la fonction f est de classe C^4 et à support dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$. On définit ensuite $F = \{x \mid f(x) = \nabla^2 f(x) = 0\}$ et, grâce à l'hypothèse (1), toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4 s'annulent sur F. On note encore $\widetilde{\omega}$ un module de continuité régularisé des dérivées d'ordre 4 de f, et $\widetilde{d}$ une régularisée de la distance d à F. On pose enfin

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\omega} \circ \widetilde{d}\,; \quad \widetilde{f} = f\, \widetilde{\Omega}^{-\frac{1}{2}}.$$

La fonction $\widetilde{f}$ est définie dans l'ouvert borné $U = \complement F$, et on a $|D^\alpha \widetilde{f}| \leq Md(x)^{4-|\alpha|}$ pour $0 \leq |\alpha| \leq 4$. De plus, ses dérivées d'ordre 4, qui se laissent prolonger continûment par 0 hors de U, sont uniformément continues.

Il suffit donc d'établir l'énoncé suivant qui permettra d'écrire $\widetilde{f} = \sum_1^N \widetilde{g_j}^{\,2}$ dans U. Les fonctions $\widetilde{g_j}(x)\Omega(x)^{\frac{1}{4}}$ prolongées par 0 dans F seront de classe C^2 et le théorème 2 sera démontré.

Proposition 6.1. — *Soit f une fonction positive de classe C^4 dans U, dont les dérivées d'ordre 4 sont uniformément continues, vérifiant*

$$f(x) + \left|\nabla^2 f(x)\right| > 0 \quad \textit{et} \quad |D^\alpha f(x)| \leq d(x)^{4-|\alpha|} \quad \textit{pour } 0 \leq |\alpha| \leq 4.$$

Il existe alors N fonctions $g_j \in C^2(U)$, vérifiant

$$\left|D^\alpha g_j(x)\right| \leq Cd(x)^{2-|\alpha|} \quad \textit{pour } 0 \leq |\alpha| \leq 2, \tag{17}$$

telles que $f = \sum_1^N g_j^2$. Les constantes C et N sont universelles.

On définit la fonction ρ par

$$\rho(x) = \sup_{|S|=1} \left\{ f(x)^{1/4}, \left([\partial_S^2 f(x)]^+\right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

en notant $\partial_S f(x) = \langle S\,, df(x)\rangle$ la dérivée directionnelle. On a $0 < \rho(x) \leq d(x)$ dans U et on montre que $|D^\alpha f(x)| \leq C\rho(x)^{4-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq 4$.

La métrique riemannienne $g = \mathrm{d}x^2/\rho(x)^2$ vérifie la condition de lenteur de Hörmander ($|y-x| \leq C^{-1}\rho(x)$ implique $(\rho(y)/\rho(x))^{\pm 1} \leq C$) et il existe donc pour tout $r > 0$ assez petit (voir [8, Theorem 1.4.10]) :

— un recouvrement de U par une famille de boules B_ν de centre x^ν et de rayon euclidien $r\rho_\nu = r\rho(x^\nu)$, tel que chaque boule rencontre au plus N_1 autres boules (une estimation grossière assure que $N_1 = 25$ convient) ;

— une partition de l'unité

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} \Phi_\nu(x)^2 = 1 \ ; \quad \operatorname{Supp}(\Phi_\nu) \subset B_\nu, \quad \forall\alpha,\ \big|D^\alpha\Phi_\nu\big| \le C_\alpha(r)\rho_\nu^{-|\alpha|}.$$

Un premier objectif est de montrer que chaque fonction $\Phi_\nu^2 f$ est somme de trois carrés de fonctions de classe C^2 :

$$\Phi_\nu^2 f = g_{\nu,1}^2 + g_{\nu,2}^2 + g_{\nu,3}^2 \ ; \quad |D^\alpha g_{j,\nu}| \le C'(r)\rho_\nu^{2-|\alpha|} \text{ pour } |\alpha| \le 2. \tag{18}$$

En choisissant d'abord δ assez petit, puis pour r assez petit devant δ (voir [8], [2], [10]), on a l'alternative suivante.

Premier cas : $f(x^\nu) \ge \delta\rho_\nu^4$. — Un seul carré suffit alors, la fonction $g_{1,\nu} = f^{\frac12}\Phi_\nu$ est de classe C^2 et (18) est vérifié.

Second cas : $f(x^\nu) < \delta\rho_\nu^4$. *Les deux premiers carrés.* — Quitte à faire un changement de coordonnées, on a alors $\partial^2 f/\partial x_1^2(x^\nu) = \rho_\nu^2$. Pour $|x_2 - x_2^\nu| \le 2r\rho_\nu$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ admet un unique minimum dans l'intervalle de centre x_1^ν et de longueur $C\delta^{\frac12}\rho_\nu$. On note $X(x_2)$ le point où ce minimum est atteint et $F(x_2) = f(X(x_2), x_2)$ la valeur de ce minimum.

La fonction X, définie implicitement par $\partial f/\partial x_1(X(x_2), x_2) = 0$ n'est que de classe C^3, mais la fonction F est de classe C^4 (phénomène de composition rugueuse : $F'(x_2) = \partial f/\partial x_2(X(x_2), x_2)$). Elle est bien sûr positive et le théorème 1 permet de l'écrire $h_1^2 + h_2^2$ mais, pour montrer que les estimations (18) sont satisfaites, il faut contrôler les h_j uniformément en ν, et donc recourir au corollaire 2.4.

En ramenant les fonctions à un voisinage fixe de l'origine :

$$f_\nu(x) = \rho_\nu^{-4} f(x_\nu + \rho_\nu x),$$

$$X_\nu(x_2) \quad \text{défini par} \quad \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(X_\nu(x_2), x_2) = 0, \tag{19}$$

$$F_\nu(x_2) = f_\nu\big(X_\nu(x_2), x_2\big), \quad \frac{\mathrm{d}F_\nu}{\mathrm{d}x_2}(x_2) = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2}\big(X_\nu(x_2), x_2\big), \tag{20}$$

tout le problème est de montrer que les $\mathrm{d}^4 F_\nu/\mathrm{d}x_2^4$ sont équicontinues.

On sait que les f_ν et leurs dérivées premières sont majorées respectivement par δ et $C\delta^{\frac12}$, celles d'ordre 2, 3 et 4 sont uniformément bornées. En outre, pour $|\alpha| = 4$, on a

$$D^\alpha f_\nu(y) - D^\alpha f_\nu(x) = D^\alpha f(x_\nu + \rho_\nu x) - D^\alpha f(x_\nu + \rho_\nu y).$$

La fonction ρ étant bornée et $D^\alpha f$ étant uniformément continue, les $D^\alpha f_\nu$ ont un module de continuité commun.

En dérivant trois fois (19), on peut écrire

$$\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_1^2}(X_\nu(x_2), x_2)\frac{\mathrm{d}^3 X_\nu}{\mathrm{d}x_2^3}(x_2) = \cdots$$

où le membre de droite ne contient que des termes dont le module de continuité est contrôlé. Comme $\partial^2 f_\nu/\partial x_1^2$ reste proche de 1, les dérivées troisièmes des X_ν sont équicontinues. En dérivant trois fois l'égalité de droite dans (20), on obtient l'équicontinuité des $\mathrm{d}^4 F_\nu/\mathrm{d}x_2^4$.

En revenant à la boule B_ν, on peut donc écrire $F = h_1^2 + h_2^2$ et poser $g_{\nu,j} = \Phi_\nu h_j$ pour $j = 1, 2$. Ces fonctions sont de classe C^2 et vérifient les estimations (18).

Second cas ; le troisième carré. — Il reste à écrire $f(x_1, x_2) - F(x_2) = (x_1 - X(x_2))^2 H(x_1, x_2)$ avec

$$H(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \big((1-t)F(x_2) + tx_1\big)\, \mathrm{d}t.$$

La fonction $g_{\nu,3} = \Phi_\nu(x)(x_1 - X(x_2))H(x)^{\frac{1}{2}}$ est de classe C^2 et vérifie (18).

Sommation lacunaire. — On utilise maintenant l'argument de [7]. Il existe une partition de $\mathbb{N}$ en $N_1{+}1$ ensembles $J_0, \ldots, J_{N_1}$ tels que, si $\mu \neq \nu$ appartiennent au même $\mathcal{J}_\ell$, on ait $B_\mu \cap B_\nu = \varnothing$. En posant $G_{j,\ell} = \sum_{\nu \in J_\ell} g_{\nu,j}$, ces fonctions vérifient (17) et on a

$$f = \sum_{0 \le \ell \le N_1;\ 1 \le j \le 3} G_{j,\ell}^2\ ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 6.1.

Remarque 6.2. — La démonstration précédente montrerait tout aussi bien l'implication suivante : si, en dimension n, toute fonction positive C^4 est somme (contrôlée) de carrés de fonctions C^2, alors, en dimension $n{+}1$, toute fonction positive C^4 vérifiant (1) est somme de carrés de fonctions C^2.

Pour $n = 2$ et 3, la validité des prémisses, ainsi que celle des conclusions, reste une question ouverte. C'est le passage de f à F qui ne permet pas de poursuivre par récurrence. En un point où $F = F'' = 0$, les dérivées d'ordre 4 n'ont aucune raison d'être nulles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bochnak (J.), Coste (M.) & Roy (M.-F.) – *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[2] Bony (J.-M.) – *Sur l'inégalité de Fefferman-Phong*, in *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles*, École Polytechnique, Palaiseau, 1998–1999, exp. n° III.

[3] Bony (J.-M.), Broglia (F.), Colombini (F.) & Pernazza (L.) – *Nonnegative functions as squares or sums of squares*, à paraître.

[4] BRUMFIEL (G.) – *Partially ordered rings and semi-algebraic geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.

[5] FEFFERMAN (C.) & PHONG (D. H.) – *On positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, t. **75** (1978), pp. 4673–4674.

[6] GLAESER (G.) – *Racine carrée d'une fonction différentiable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **13** (1963), pp. 203–210.

[7] GUAN (P.) – C^2 *a priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations*, Duke Math. J., t. **86** (1997), pp. 323–346.

[8] HÖRMANDER (L.) – *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[9] LERNER (N.) & NOURRIGAT (J.) – *Lower bounds for pseudo-differential operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **40** (1990), pp. 657–682.

[10] TATARU (D.) – *On the Fefferman-Phong inequality and related problems*, Comm. Partial Differential Equations, t. **27** (2002), pp. 2101–2138.