

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Topologie des espaces métriques et le théorème de Picard</b>	<b>17</b>
1 Introduction . . . . .	17
2 Préliminaires sur les espaces métriques . . . . .	18
2.1 Distances, espaces métriques . . . . .	18
2.2 Topologie . . . . .	19
2.3 Espaces complets . . . . .	21
3 Le théorème de Picard . . . . .	23
4 Fonctions implicites et inversion locale . . . . .	27
5 Connexité, compacité . . . . .	28
5.1 Connexité . . . . .	29
5.2 Compacité . . . . .	30
6 Appendice : Calcul différentiel et espaces de Banach . . . . .	34
6.1 Différentielles dans les espaces de Banach . . . . .	34
6.2 Quelques démonstrations de complétude . . . . .	38
7 Exercices . . . . .	41
<b>2 Équations différentielles : Théorie générale, théorèmes d'existence et unicité</b>	<b>49</b>
1 Remarques générales sur les équations différentielles . . . . .	49
2 Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	50
3 Compléments : Equations intégrales et équations de Sturm-Liouville . . . . .	55
3.1 Équations de Fredholm et Volterra . . . . .	55
3.2 Application aux équations de Sturm-Liouville . . . . .	59
4 Exercices . . . . .	61
<b>3 Équations différentielles linéaires</b>	<b>65</b>
1 Équations linéaires à coefficients constants . . . . .	66
1.1 Méthodes pratiques . . . . .	67
1.2 Portraits de phase des équations linéaires du plan . . . . .	68
1.3 Stabilité de l'origine. . . . .	72
2 Équations linéaires à coefficients variables. . . . .	73

2.1	Théorie générale . . . . .	73
2.2	Équations affines : variation de la constante. . . . .	75
3	Théorie élémentaire des perturbations. . . . .	76
4	Théorie de Floquet . . . . .	79
4.1	Complément : phénomène de résonance . . . . .	83
5	Compléments : Étude de l'équation de Hill . . . . .	85
5.1	Un exemple : l'équation de Mathieu . . . . .	87
5.2	Balançoire, pendule inversé . . . . .	91
6	Appendice 1 : Décomposition $D + N$ des matrices. Résolution de $e^A = M$ .	93
7	Appendice 2 : Étude de $\ddot{u} + k^2u = v$ . . . . .	95
8	Appendice 3 : Programmes Maple . . . . .	96
9	Appendice 4 : Représentation graphique des zones de stabilité de l'équation de Mathieu . . . . .	99
10	Exercices . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Équations différentielles non-linéaires I</b>	<b>109</b>
1	Introduction . . . . .	109
2	Temps de vie des solutions . . . . .	109
3	Estimation de l'intervalle d'existence . . . . .	112
3.1	Conditions géométriques . . . . .	113
3.2	Conditions analytiques : le lemme de Gronwall . . . . .	115
4	Applications du lemme de Gronwall . . . . .	117
4.1	Équations à temps de vie infini . . . . .	117
4.2	Estimations de la divergence des solutions. Tube des solutions . . .	118
5	Exercices . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Équations différentielles non-linéaires II</b>	<b>125</b>
1	Flots, portrait de phase, redressement . . . . .	126
1.1	Notions de base . . . . .	126
1.2	Portraits de phase en dimension 2 . . . . .	128
1.3	Conjugaison et changement de coordonnées. . . . .	129
1.4	Redressement et application de Poincaré : premières notions géo- métriques. . . . .	131
2	Linéarisation et théorie des perturbations pour un flot . . . . .	135
2.1	Application . . . . .	139
3	Compléments : Aspects topologiques, théorème de Poincaré-Bendixson . .	139
4	Appendice : Théorème de Jordan . . . . .	143
5	Exercices . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Stabilité des solutions d'équations différentielles</b>	<b>149</b>
1	Introduction . . . . .	149
2	Fonctions de Liapounov et critère de Routh . . . . .	150
3	Stabilité des orbites périodiques . . . . .	155

3.1	Cas des systèmes autonomes . . . . .	157
3.2	Stabilité pour les systèmes conservatifs et Hamiltoniens . . . . .	159
4	Conclusion . . . . .	161
5	Exercices . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Quelques exemples d'étude de stabilité</b>	<b>167</b>
1	Le régulateur de Watt et ses successeurs . . . . .	167
1.1	Maxwell et le régulateur de Watt . . . . .	167
1.2	Les régulateurs de Porter et Pickering . . . . .	171
2	Balancoire et pendule renversé . . . . .	175
3	Le solide en rotation . . . . .	177
	Appendice : Condition pour qu'un polynôme de degré 3 ait toutes ses racines de partie réelle négative . . . . .	178
<b>8</b>	<b>Sous-variétés</b>	<b>181</b>
1	Définition, premières propriétés. . . . .	182
2	Espaces tangents . . . . .	186
2.1	Classification des variétés . . . . .	188
3	Applications . . . . .	188
3.1	Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété . . . . .	188
3.2	Champs de vecteurs sur les sous-variétés . . . . .	192
4	Exercices . . . . .	193
<b>9</b>	<b>Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications</b>	<b>199</b>
1	Préambule : les variétés . . . . .	199
2	Formes différentielles . . . . .	200
2.1	Algèbre extérieure . . . . .	200
2.2	Formes différentielles sur les variétés . . . . .	204
2.3	Différentielle extérieure . . . . .	205
3	Variétés à bord, orientation, Formule de Stokes . . . . .	208
3.1	Variétés à bord, variétés orientées . . . . .	208
3.2	Intégration des formes différentielles, formule de Stokes . . . . .	212
4	Applications de la formule de Stokes . . . . .	215
4.1	Formules intégrales . . . . .	215
4.2	Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer . . . . .	216
4.3	Appendice : définition abstraite des variétés . . . . .	218
5	Exercices . . . . .	218
<b>10</b>	<b>Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle, Calcul de Lie</b>	<b>221</b>
1	Lemme de Poincaré, théorie du degré . . . . .	221
1.1	Lemme de Poincaré . . . . .	221
1.2	Théorie du degré, applications . . . . .	223

1.3	Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé . . . . .	226
2	Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf . . . . .	227
3	Calcul différentiel de Lie . . . . .	234
3.1	Crochets de Lie . . . . .	234
3.2	Dérivée de Lie . . . . .	238
4	Exercices . . . . .	240
<b>11</b>	<b>Quelques propriétés des champs de sous-espaces</b>	<b>247</b>
1	Théorème de Frobenius . . . . .	248
2	Les théorèmes de Chow et Sussmann . . . . .	251
3	Exercices . . . . .	258
	<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>
	<b>Index</b>	<b>267</b>

# Table des figures

1.1	Ensemble étoilé, donc connexe . . . . .	29
1.2	Ensemble non connexe . . . . .	30
3.1	Portraits de phase de systèmes à coefficients constants dans le plan . . . . .	71
3.2	Théorème de Liouville . . . . .	75
3.3	Le pendule rigide . . . . .	91
3.4	Tracé numérique des zones d'instabilité de l'équation de Mathieu . . . . .	99
3.5	Tracé théorique des zones d'instabilité de l'équation de Mathieu . . . . .	100
3.6	Tracé des courbes séparant les zones de stabilité et instabilité, en utilisant la méthode de l'exercice (Y) . . . . .	108
4.1	Équation différentielle dont les solutions de condition initiale à l'intérieur de la courbe sont définies sur $[a, +\infty]$ . . . . .	114
5.1	Portrait de phase du pendule libre $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ . . . . .	128
5.2	En vert : Trajectoire du pendule avec frottement. En rouge : niveaux de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$ . . . . .	129
5.3	Redressement d'un champ de vecteurs . . . . .	132
5.4	Application de premier retour . . . . .	133
5.5	Illustration du lemme 5.16 . . . . .	141
5.6	Cas où $L_\omega(x)$ est réunion de points singuliers et de trajectoires hétéroclines	142
6.1	Trajectoires d'un champ de vecteurs et niveaux d'une fonction de Liapounov du champ . . . . .	152
7.1	Régulateur de Watt . . . . .	168
7.2	Régulateur de Porter . . . . .	171
7.3	Régulateur de Pickering . . . . .	173
7.4	Régulateur de Pickering d'un phonographe Edison . . . . .	174
7.5	Phonographe Edison . . . . .	175
7.6	Dynamique du solide en rotation . . . . .	177
8.1	Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan . . . . .	182
8.2	Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété . . . . .	185

8.3	Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété . . . . .	186
8.4	Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes . . . . .	191
8.5	Isothermes annuelles du Canada. . . . .	195
8.6	Exercice (K) . . . . .	195
9.1	Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius . . . . .	211
10.1	L'application de Gauss . . . . .	228
10.2	L'application $F_\nu$ envoyant $(x, h)$ sur $(\nu(x), h)$ . . . . .	228
11.1	Monocycle . . . . .	247
11.2	Démonstration du théorème de Sussmann . . . . .	252
11.3	Champ de plans non-intégrable et courbe tangente . . . . .	255
11.4	Boule roulant sans glisser sur un plan . . . . .	257

# Introduction

Data Aequatione quocumque, fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa

Sir Isaac Newton

Depuis Isaac Newton, les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques et une part prépondérante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles.<sup>1</sup>

Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations différentielles ordinaires. De telles équations apparaissent chaque fois que l'on veut décrire l'évolution déterministe d'un système au cours du temps : systèmes de points matériels, réactions chimiques, problèmes d'évolution de population, de diffusion d'épidémies, bref chaque fois que l'on étudie la dépendance d'un système par rapport à une variable. Dans d'autres circonstances, la modélisation aboutit à des équations faisant intervenir les dérivées de fonctions de plusieurs variables : c'est le cas pour l'équation de Schrödinger, l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, l'équation de Navier et Stokes<sup>2</sup>. On parle alors d'équations aux dérivées partielles. Mais, ces équations aux dérivées partielles dans des situations « très symétriques » se ramènent à des équations différentielles ordinaires : ainsi l'équation de Schrödinger décrivant l'atome d'hydrogène se ramène, grâce à sa symétrie sphérique, à une équation différentielle ordinaire.

Le premier objectif de ce cours est l'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Le terme « système dynamique » est apparu au début du XXème siècle entre la publication du traité fondateur de Poincaré « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste » (cf. [Poincaré])<sup>3</sup> en 1892, et celle, en 1927, de la monographie de Birkhoff (cf. [Birkhoff]) justement intitulée « Dynamical systems ». On cesse alors de mettre l'accent sur les méthodes explicites de résolution, dont Poincaré avait montré qu'elles ne permettaient pas de comprendre les systèmes les

---

<sup>1</sup>En fait, outre la modélisation par des équations différentielles, il existe essentiellement deux autres types de modélisation, la modélisation discrète ou combinatoire, et la modélisation probabiliste.

<sup>2</sup>qui décrit l'évolution d'un fluide.

<sup>3</sup>les noms entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'ouvrage.

plus intéressants, comme le problème des trois corps<sup>4</sup>. Délaissant les formules exactes, et les développements en série, les mathématiciens se concentrèrent alors sur les propriétés qualitatives, géométriques ou probabilistes de ces équations. Ce n'est plus une seule solution, mais toutes les solutions à la fois que l'on considère dans ce nouveau cadre. Des questions considérées comme importantes perdent leur attrait, alors que de nouvelles questions viennent naturellement au premier plan. On peut par exemple chercher l'allure des solutions au voisinage d'un point, les quantités invariantes par le mouvement, les points d'équilibre, leur stabilité, et aussi, comme avait commencé à le faire Poincaré, découvrir le chaos ... et y mettre de l'ordre.

Peu après avoir acquis son nouveau nom, la théorie des systèmes dynamiques fut utilisée pour la première fois pour la modélisation de systèmes biologiques. Il s'agissait de comprendre les fluctuations dans la répartition des espèces pêchées dans l'Adriatique. Le mathématicien italien Vito Volterra mit au point le modèle « proie-prédateur », expliquant les modifications de l'équilibre des différentes espèces pêchées par la diminution de la pêche durant la première guerre mondiale (cf. [Israel]).

La théorie des systèmes dynamiques reste depuis cette époque un domaine très vivant des mathématiques dont le champ des application n'a cessé de se développer.

Présentons maintenant quelques unes des questions abordées dans ce cours.

Le mathématicien confronté à une équation différentielle se pose d'abord la question de l'existence et l'unicité des solutions. Le théorème de Cauchy-Lipschitz répond dans les cas simples à cette question. On sourit souvent de ces « problèmes existentiels » des mathématiciens! « Votre équation modélise le mouvement d'une particule » lui dit-on, « or ce mouvement existe et il est unique, donc votre équation a une solution! » Mais l'équation modélise-t-elle correctement le phénomène réel que l'on étudie? Et jusqu'à quelle limite ce modèle est-il valable? Tout modèle néglige certains aspects de la réalité en l'idéalisant, et si pour certaines valeurs du paramètre l'équation n'a pas de solution, c'est que le modèle ne reflète pas la réalité. Il est donc raisonnable, avant d'étudier les solutions, de s'assurer de leur existence!

Après les questions d'existence et d'unicité, ce sont les questions de stabilité qui apparaissent naturellement. Le cas le plus simple de stabilité, avec lequel nous sommes tous familiers, est celui des positions d'équilibre du pendule rigide. La position usuelle, « masse en bas » est stable, celle « renversée », ou « masse en haut » est instable. Cela signifie que si l'on déplace légèrement un pendule « masse en bas », il reste près de sa position d'équilibre, alors que même si vous réussissez à mettre un pendule « masse en haut », le moindre courant d'air l'éloignera de cette position. Voici comment Laplace dans l'Exposition du Système du Monde expose le problème<sup>5</sup> :

*Il existe deux états d'équilibre, très distincts. Dans l'un, si l'on trouble un*

---

<sup>4</sup>Dont les équations décrivent les trajectoires de trois corps, soumis à l'attraction mutuelle d'une force de gravitation.

<sup>5</sup>[Laplace] page 218.

*peu l'équilibre, tous les corps du système ne font que des petites oscillations autour de leur position d'équilibre ; et alors l'équilibre est ferme ou stable. Cette stabilité est absolue, si elle a lieu quelles que soient les oscillations du système : elle n'est que relative si elle n'a lieu que par rapport aux oscillations d'une certaine espèce. Dans l'autre état d'équilibre, les corps s'éloignent de plus en plus de leur position d'équilibre lorsqu'on les en écarte. On aura une juste idée de ces deux états en plaçant une ellipse placée verticalement sur un plan horizontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, il est clair qu'en l'écartant un peu de cette situation, par un petit mouvement sur elle-même, elle tend à y revenir en faisant des oscillations que les frottements et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe ; une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe.*

Si le problème de la stabilité s'est d'abord posé naturellement pour le système solaire, dans les travaux de Laplace et Lagrange, c'était dans un problème trop ardu et aujourd'hui encore, mal compris, celui de la stabilité des systèmes conservatifs. Ce n'est que quarante ans plus tard, que face à des questions plus abordables, une théorie élémentaire de la stabilité vit le jour. En effet, parmi les perfectionnements apportés vers 1770 par James Watt à la machine à vapeur, le « régulateur à boules » (flyball governor) tient une place essentielle. Cet appareil, dont vous pouvez voir un schéma sur la figure 7.1, a pour but de garantir un régime constant du moteur. Or, ce type de régulateur, qui donnait toute satisfaction jusque vers le milieu du siècle, se mit soudain à ne plus remplir son rôle. C'est pour d'autres raisons que Lord Maxwell<sup>6</sup>, s'intéressa à cette question, mais le problème de la régulation des machines à vapeur fut étudié à partir des années 1860, par Airy et Routh en Angleterre, Vichnégradski et Liapounov en Russie qui contribuèrent à expliquer ce phénomène.

Le modèle mathématique du régulateur est une équation différentielle du second ordre, dont la stabilité de la solution, c'est-à-dire sa propension à retourner vers la position d'équilibre si on s'en écarte légèrement, dépend des caractéristiques du système. En particulier le frottement favorise la stabilité : paradoxalement ce sont les progrès de la technique, qui, en permettant un usinage plus précis des pièces et diminuant le frottement, ont rendu ces systèmes instables : dans ce cas le régulateur, au lieu de ramener la soupape vers sa position d'équilibre, se met à osciller de manière erratique, pouvant aller jusqu'à la rupture.

L'étude mathématique de la stabilité permet aussi de comprendre pourquoi les nouveaux régulateurs apparus vers le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle étaient plus stables, comme on le verra au chapitre 7.

Un autre exemple de stabilité est celui de la rotation d'un solide autour de ses axes d'inertie. Lancer une boîte parallélépipédique avec un mouvement de rotation autour d'un de ses axes d'inertie, ne résulte en un mouvement stable que si l'axe correspond soit au

---

<sup>6</sup>James Clerk Maxwell, « On Governors », Proceedings of the Royal Society, no. 100 (1868).

plus petit soit au plus grand moment d'inertie. Cela résulte, comme on le verra au chapitre 7, de la forme des courbes découpées par une sphère sur un ellipsoïde !

Mais revenons au pendule, pour lequel l'étude d'un phénomène en apparence très simple donne des résultats surprenants. Tout d'abord si la longueur du pendule varie périodiquement avec une fréquence double de sa fréquence propre, la position « masse en bas » devient instable. Tous les enfants du monde l'apprennent vers l'âge de 6 ans : c'est ainsi que l'on démarre une balançoire ; en effectuant des flexions avec la bonne fréquence, ce qui rend instable la position d'équilibre : la balançoire se met alors à osciller loin de son équilibre instable de départ. Cela s'appelle la résonance paramétrique, et vraiment, cela ne marche que si vous montez et descendez avec la bonne fréquence. Elle diffère de la résonance « usuelle » en ce que ce n'est pas une force extérieure qui fait osciller la balançoire (comme lorsque les parents poussent la balançoire). Plus surprenant, le physicien P.L. Kapitsa a découvert qu'en faisant osciller avec une fréquence suffisante la base du pendule, la position masse en haut peut devenir stable, comme on peut le vérifier expérimentalement en montant un pendule rigide sur une scie sauteuse. Or ceci n'est pas seulement une expérience de « mécanique amusante » : ce principe est à la base de diverses techniques modernes de capture d'ions, et en particulier celle inventée par Wolfgang Paul <sup>7</sup>, pour laquelle le champ gravitationnel oscillant est remplacé par un champ électrique oscillant. Cette méthode est encore exploitée dans les horloges atomiques les plus modernes, pour lesquelles il est indispensable de piéger des ions pendant de « longues périodes ».

Enfin les trois derniers chapitres constituent une introduction à la géométrie différentielle. Si les sous-variétés ont été introduites au chapitre 6, on n'en aborde sérieusement l'étude qu'au chapitre 9, 10 et 11. La géométrie différentielle joue un rôle de plus en plus important en physique. C'est un outil de base de la théorie de la relativité à la théorie des cordes, sans oublier les applications en mécanique pour la théorie des coques<sup>8</sup>, en traitement d'image et même en économie<sup>9</sup>. Nous avons essayé à la fois de conserver le fil directeur, des champs de vecteurs et équations différentielles, tout en introduisant les aspects topologiques qui sont la principale nouveauté que l'on rencontre dans ce domaine : théorème de Poincaré-Hopf sur les zéros des champs de vecteurs, théorème du point fixe de Brouwer, dont la version en dimension infinie a de puissantes applications à l'étude des équations aux dérivées partielles, théorème de Gauss-Bonnet liant courbure et topologie. Tous ces aspects sont des conséquences plus ou moins directes de la formule de Stokes, dont il est essentiel de comprendre que sa signification va bien au-delà des formules intégrales classiques qui se rencontrent dans les formulaires, et que nous présentons dans son cadre naturel celui des formes différentielles, outil de base de la géométrie différentielle.

---

<sup>7</sup>invention pour laquelle il obtint le prix Nobel de physique en 1989.

<sup>8</sup>Philippe G. Ciarlet, Introduction to linear shell theory. Series in Applied Mathematics (Paris), 1. Gauthier-Villars, Elsevier, Amsterdam, 1998.

<sup>9</sup>voir par exemple P.A. Chiappori and I. Ekeland, Aggregation and market demand : an exterior differential calculus viewpoint. *Econometrica* 67 (1999), no. 6, 1435–1457.

## Guide Pratique

Cet ouvrage sert de référence pour la première partie du cours de dix-huit blocs de Mathématiques de deuxième année.

Le lecteur est encouragé à faire des calculs. Tout d'abord à la main, pour s'assurer d'avoir bien compris ce qu'il fait, puis, pour des exemples plus compliqués mais plus réalistes, avec un logiciel de calcul (Maple, Scilab, Mathematica).

On trouvera quelques exemples pour le logiciel Maple 6 sur le site web :

<http://math.polytechnique.fr/cmat/viterbo/Enseigt.html>

Contrairement à une tradition solidement ancrée, nous avons préféré ne pas décourager le lecteur curieux en lui infligeant un test d'acuité visuelle. On ne trouvera donc pas de passages en petits caractères. Nous avons par contre essayé, au début de chaque chapitre, de distinguer ce qui était essentiel et ce qui pouvait être laissé pour une deuxième lecture. Certaines sections ou exercices sont des compléments plus particulièrement destinés au cours de Majeure.

Si les exercices donnés dans le corps du texte sont en général de simples applications du cours, ceux donnés en fin de chapitres sont plutôt des exercices d'approfondissement, souvent difficiles. On recommande de ne les aborder qu'après avoir épuisé les feuilles de PC.

L'ouvrage commence par des rappels sur les espaces métriques, et le calcul différentiel, ainsi qu'une démonstration du théorème du point fixe de Picard à paramètres. Les principales applications, théorème d'inversion locale, des fonctions implicites, et théorème de Cauchy-Lipschitz seront démontrées dans les chapitres suivants.

Parmi les autres applications du théorème de Picard, nous esquissons l'étude des équations de Volterra, et des équations de Sturm-Liouville.

Le second chapitre aborde les généralités sur les équations différentielles, centré sur le théorème de Cauchy-Lipschitz, établi ici dans sa version à paramètres.

Nous abordons ensuite l'étude des systèmes linéaires et nous abordons la théorie de la stabilité. . Malgré leur simplicité, les phénomènes de résonance ou de résonance paramétrique, comme dans la balançoire ou le pendule de Kapitsa apparaissent déjà.

Nous introduisons ensuite la théorie des perturbations, qui permet, connaissant les solutions d'une équation, de comprendre les solutions des équations voisines.

Dans les deux chapitres suivants, nous introduisons à la fois le langage géométrique, flots, sous-variétés, formes différentielles, culminant avec l'énoncé général de la formule de Stokes et ses premières applications topologiques. En particulier nous démontrons la formule de Gauss-Bonnet, qui montre que l'intégrale de la courbure de Gauss d'une

surface est un multiple entier de  $2\pi$  ne dépendant que de la topologie de la surface. Ce théorème est à l'origine d'une partie essentielle des développements récents de la géométrie différentielle des 60 dernières années. Nous n'avons malheureusement ni la place d'évoquer ces développements ni de montrer le lien avec la physique. Nous revenons ensuite à la dynamique par l'étude approfondie de la stabilité. Le chapitre 9 traite l'étude complète de la stabilité sur un certain nombre d'exemples parmi ceux décrits plus haut.

Enfin le chapitre 11 est consacré à l'étude de systèmes gouvernés par des contraintes différentielles linéaires, laissant disponibles quelques degrés de libertés. C'est le cas des bras articulés, du déplacement d'un véhicule, d'un semi-remorque, d'une balle roulant sans glisser sur un plan. La question qui est abordée est celle de l'accessibilité : quelles sont les positions que l'on peut atteindre en partant d'une position donnée ? C'est un problème essentiel en théorie du contrôle. L'étape suivante, que nous n'aborderons pas, consiste à trouver le chemin optimal permettant de passer d'une position à une autre. On réfère à [Bellaïche-Risler] et [Bellaïche-Jean-Risler] pour des résultats récents sur ces questions.

Signalons parmi les nombreuses lacunes de ce texte, l'absence totale de méthodes numériques<sup>10</sup>, ainsi que de théorie ergodique, c'est-à-dire l'approche probabiliste des systèmes dynamiques.

Concluons en encourageant le lecteur qui a acquis les techniques de calcul et de raisonnement à aborder les mathématiques avec un esprit frais, laissant libre cours à sa curiosité naturelle. Si la technique ne doit pas être un obstacle, elle doit encore moins être un but en soi. Les mathématiques sont et seront un sujet vaste riche et multiforme, dans lequel chacun peut trouver matière pour mieux comprendre le monde.

## Remerciements

Ma gratitude va tout d'abord à François Laudenbach, dont le cours m'a très fortement inspiré. C'est en faisant un enseignement basé sur son texte (cf. [Laudenbach]), que j'ai eu envie de continuer, avec quelques modifications, sur le même thème. Enfin tous les ouvrages cités dans la bibliographie m'ont, dans une moindre mesure été utiles pour la rédaction de ce texte. Mon premier contact avec les systèmes dynamiques, fut par le cours de Daniel Bennequin. Son enseignement reste à la fois un modèle et un excellent souvenir. Outre ce premier contact, je remercie encore Daniel pour ses remarques concernant ce texte.

Ivar Ekeland, a encouragé ce goût pour la dynamique, et a su me faire sentir à quel point mathématiques et culture restent intimement liées. Il m'a suggéré de nombreux exemples et références bibliographiques.

Enfin, de nombreux collègues ont fait des critiques et suggestions, en particulier N. Anantharaman, G. Besson, N. Berline, P. Biane, G. Courtois, D. Gaboriau, R. Krikorian, J. Lannes, C. Margerin, Y. Martel, O. Rey et E. Zuazua, ont fait la chasse aux innombrables

---

<sup>10</sup>Pour lesquelles on réfère à [Demailly, Iserles].

erreurs des différentes versions. Ma gratitude envers les anonymes n'en est pas moindre.

Je remercie aussi les élèves des promotions X99 à X2005 pour leurs critiques et commentaires.

Cet ouvrage doit beaucoup à Madame Claudine Harmide du CMLS, ainsi que Madame Martine Maguer de l'Imprimerie pour leurs talents de composition LaTeX, Alain Royer du CMAT et Madame Dominique Toustou de l'imprimerie ont subi mes caprices pour la réalisation des figures. Madame Thooris m'a permis plusieurs visites à la précieuse collection d'instruments anciens de l'École Polytechnique, et Jean-Luc Déniel a photographié le gramophone Edison. Que toutes ces personnes trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur compétence et leur gentillesse.



# Chapitre 1

## Topologie des espaces métriques et le théorème de Picard

### 1 Introduction

Ce chapitre présente le théorème du point fixe de Picard qui nous permettra de démontrer les principaux théorèmes utiles pour la suite du cours : théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles, théorème des fonctions implicites et d'inversion locale. Le théorème de Picard reste l'un des outils de base en Analyse, y compris dans les travaux de recherche récents. Nous le démontrons ici dans une version à paramètres différentiables.

Que le lecteur n'oublie pas qu'il a fallu longtemps pour arriver à la version moderne de ces théorèmes, leur élaboration ayant duré une bonne partie du 19<sup>ème</sup> siècle, et ne se décourage donc pas, s'il a l'impression que quelques heures ne lui suffisent pas pour en saisir toutes les subtilités. Le manque d'illustration de ces théorèmes dans ce chapitre n'est que temporaire. Le reste du cours les utilise sans relâche : la théorie des systèmes dynamiques utilise sans cesse le théorème de Cauchy-Lipschitz, et la théorie des sous-variétés est basée sur le contenu géométrique des théorèmes de fonctions implicites et d'inversion locale.

La seconde partie de ce chapitre donne des applications du théorème de Picard aux équations intégrales. Leur théorie commencée par Volterra, fut achevée par Fredholm. Nous nous contentons des résultats de Volterra, et n'avons malheureusement pas la place de poursuivre plus avant la théorie de Fredholm, dont la version abstraite joue un grand rôle dans l'analyse non-linéaire moderne.

Une introduction à l'étude des équations de Sturm-Liouville sera l'occasion d'une première application de ces méthodes dans le cadre des équations différentielles.

Enfin un appendice est consacré à des résultats de référence sur les applications diffé-

rentiables dans les espaces de Banach.

Nous suggérons au lecteur rebuté par les difficultés des démonstrations et l'aspect un peu aride des énoncés, de considérer ce chapitre comme un chapitre de référence, sur lequel il peut revenir ultérieurement. On pourra se concentrer en première lecture sur la démonstration de la continuité dans Picard à paramètres, laissant pour une deuxième lecture la démonstration de la différentiabilité. Nous avons opté pour une approche la plus concise possible, concentrant toutes les difficultés techniques sur la version à paramètres du théorème de Picard, contrairement à l'approche classique, dans laquelle la différentiabilité de l'application réciproque dans le théorème d'inversion locale, comme la différentiabilité en fonction des paramètres dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, sont traitées séparément, souvent de manière plus compliquée.

Enfin le cadre des espaces métriques que nous avons adopté a été introduit au début du siècle dernier par Maurice Fréchet, qui dégagait l'importance des notions de complétude et de compacité. Ce cadre semblera sans doute trop restrictif aux amateurs d'espaces topologiques, filtres et ultrafiltres, et trop général à ceux qui sont habitués aux espaces normés. À l'intention de ces derniers, précisons qu'une bonne partie du cours peut être lu en remplaçant espaces métriques par sous-ensembles d'un espace vectoriel normé.

## 2 Préliminaires sur les espaces métriques

### 2.1 Distances, espaces métriques

**Définition 1.1.** Une distance sur un espace  $X$  est une application  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les trois propriétés

- 1) (non-dégénérescence)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

- 2) (symétrie)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$

- 3) (inégalité triangulaire)

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

On dit que  $(X, d)$  est un espace métrique.

On note  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$  la boule ouverte de rayon  $r$  centrée en  $x$ .

*Exemples 2.1.* L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de la distance naturelle  $d(x, y) = |x - y|$  est une espace métrique. Plus généralement, si  $\|\bullet\|$  est une norme sur un espace vectoriel, alors  $d(x, y) = \|x - y\|$  est une distance.

## 2.2 Topologie

Les résultats de cette sous-section sont contenus dans la section 5 du polycopié de P. Colmez. Nous regroupons pour la commodité du lecteur ceux qui nous sont immédiatement utiles.

**Définition 1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1) On dit qu'une suite  $(x_n)$  est convergente de limite  $x$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .

2) Un sous-ensemble  $U$  de  $X$  est ouvert si pour tout  $x$  dans  $U$ , il existe une boule centrée en  $x$ , de rayon strictement positif, contenue dans  $U$ .

3) Un sous-ensemble  $F$  de  $X$  est fermé si  $X - F$  est ouvert, ou encore si toute suite de points de  $F$  convergeant dans  $X$  a sa limite dans  $F$ .

4) Soit  $A \subset X$ , on définit l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$  dans  $X$  par

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A}} U$$

et l'adhérence de  $A$  dans  $X$  par

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F$$

L'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$ , est aussi l'ensemble des limites de suites de  $A$ .

5) On appelle voisinage d'un point ou d'un ensemble tout ensemble contenant un ouvert contenant ce point ou cet ensemble.

Il résulte immédiatement des définitions, qu'une réunion d'ouverts (resp. intersection de fermés) est un ouvert, (resp. fermé) et une intersection finie d'ouverts (resp. réunion finie de fermés) est un ouvert (resp. fermé).

On appelle **topologie** associée à la métrique  $d$  la donnée de l'ensemble des ouverts<sup>1</sup> de  $(X, d)$  (ou de l'ensemble des fermés).

**Définition 1.3.** Une application  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \delta)$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $\alpha$  strictement positif tel que

$$d(x_0, x) < \alpha \implies d(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon$$

---

<sup>1</sup>En général, une topologie sur un ensemble  $X$  est la donnée d'un ensemble de parties de  $X$  appelés ouverts, tel que  $\emptyset$  et  $X$  soient ouverts et qu'une intersection finie et une réunion quelconque d'ouverts soient des ouverts.

On dit que  $f$  est continue si elle est continue en chaque point.

La continuité de  $f$  équivaut à dire que pour toute suite  $(x_n)_n$  convergente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ , ou encore que pour tout ouvert (resp. fermé)  $A$  de  $X$ ,  $f^{-1}(A)$  est un ouvert (resp. fermé).

**Définition 1.4.** On dit que  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$  est lipschitzienne de rapport  $k$  si

$$\forall x, x' \in X \quad \delta(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')$$

**Définition 1.5.** On dit que  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$  est localement lipschitzienne si tout point possède un voisinage sur laquelle  $f$  est Lipschitz.

Toute application localement lipschitzienne est continue.

*Remarque 2.1.* Soit  $A \subset X$  muni de la distance restriction de  $d$  à  $A$ . La restriction d'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  à  $A$  est continue. La restriction d'une application lipschitzienne est lipschitzienne.

*Exemples 2.2.* (A) Le produit  $X \times X$  étant muni de la distance  $d_2$  donnée par  $d_2((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)$ , l'application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, puisque d'après l'inégalité triangulaire

$$|d(x_1, y_1) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) = d_2((x_1, y_1), (x_0, y_0))$$

L'application  $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$  est aussi continue, comme restriction de la fonction continue  $d_2$  à  $X \times \{x_0\}$ .

- (B) Tout ensemble défini par des inégalités strictes sur des fonctions continues est ouvert. Tout ensemble défini par des inégalités larges sur des fonctions continues est fermé. La distance étant continue, la boule ouverte est bien ouverte, et la boule fermée  $\bar{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$  est bien fermée (image réciproque par  $d$  d'un fermé).
- (C) Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable, elle est localement Lipschitzienne. Si sa dérivée est bornée sur  $\mathbb{R}$ , elle est Lipschitzienne, de rapport  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ .

*Remarque 2.2. Attention :* l'adhérence de la boule ouverte de rayon  $r$  n'est pas nécessairement la boule fermée de rayon  $r$ . Par exemple sur  $\mathbb{Z}$  muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$  la boule ouverte de rayon 1 centrée en 0 se réduit à  $\{0\}$ , et donc son adhérence aussi, mais la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est l'ensemble  $\{-1, 0, 1\}$ .

Le plus souvent les espaces métriques que l'on considérera seront des espaces vectoriels normés. Le cas le plus simple est celui des espaces euclidiens de dimension finie pour lesquels la norme s'écrit dans une base orthonormée

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$$

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (voir la démonstration dans [Colmez]).

Ce qu'il faut retenir c'est que lorsqu'on parle d'espaces métriques :

- la principale propriété est l'inégalité triangulaire,
- la propriété d'être ouvert, fermé, dans l'adhérence d'un ensemble, peut se vérifier en prenant des suites.

Note : Il est légitime de se demander pourquoi on s'encombre de la notion de métrique, alors que la plupart du temps, on n'utilise que des parties d'espaces vectoriels normés. Les espaces métriques constituent un cadre à la fois souple et commode, et il n'est pas plus difficile de manier une métrique qu'une norme.

## 2.3 Espaces complets

La complétude est une notion de première importance en Analyse, qui permet par exemple de distinguer les ensembles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$ .

**Définition 1.6.** Une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \quad \forall n, m \geq N ; \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Définition 1.7 (Espace complet).** Un espace métrique  $(X, d)$  est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.

On vérifie sans mal que si  $F$  est fermé dans un espace métrique complet, alors  $F$  est complet (appliquer la définition de la fermeture utilisant les suites).

*Remarque 2.3. Attention :* la complétude est une propriété qui dépend de la métrique, et pas seulement de la topologie sur  $X$ . Par exemple,  $\mathbb{R}$  muni de la métrique  $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$  n'est pas complet. En effet la suite  $x_n = n$  est de Cauchy pour cette métrique, mais ne converge pas (exercice). Pourtant un ensemble est ouvert pour cette métrique si et seulement s'il l'est pour la métrique usuelle : chaque boule pour l'une de ces deux métriques contient une boule de l'autre.

Par contre, deux métriques équivalentes  $d_1, d_2$ , c'est à dire telles qu'il existe deux réels  $k, K$  strictement positifs tels que  $kd_1 \leq d_2 \leq Kd_1$ , ont mêmes suites de Cauchy, et sont donc simultanément complètes ou non complètes.

*Exercice 2.1.* Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est convergente.

*Exemples 2.3.* (A)  $\mathbb{Q}$  (muni de  $d(x, y) = |x - y|$ ) n'est pas complet, car la suite  $x_n$  définie par  $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$  est de Cauchy, mais n'a pas de limite dans  $\mathbb{Q}$  (exercice : trouver sa limite dans  $\mathbb{R}$ ).

(B) L'ensemble  $\mathbb{R}$  est complet<sup>2</sup>, tout espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est complet. Un espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach .

---

<sup>2</sup>il est parfois défini comme le complété de  $\mathbb{Q}$  auquel cas notre assertion est tautologique!

- (C) Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques et si  $Y$  est complet, alors  $C^0(X, Y)$ , ensemble des fonctions continues sur  $X$  à valeurs dans  $Y$ , muni de la distance  $d_0$  définie par

$$d_0(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))\}$$

est un espace métrique complet. Une suite  $(f_k)$  converge pour  $d_0$  si et seulement si elle converge uniformément. La complétude de cet espace traduit le fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (voir Proposition 1.29 de l'appendice). Dans la suite, sauf mention du contraire,  $C^0(X, Y)$  sera toujours supposé muni de cette métrique.

Notons que si  $X$  est compact, toute fonction réelle continue sur  $X$  atteint ses bornes<sup>3</sup>, et donc la quantité

$$\tilde{d}_0(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

est finie. Elle définit une distance, que l'on utilise souvent de préférence à  $d_0$ . Si  $Y$  est un espace de Banach,  $\tilde{d}_0$  est en fait défini par une norme, notée  $\|\bullet\|_\infty$  (pour  $Y = \mathbb{R}$ , c'est bien la restriction de la norme  $L^\infty$ ).

- (D) L'espace des suites réelles,

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n) = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$$

muni de la métrique

$$d(x, y) = \min\{1, \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|\}$$

n'est rien d'autre<sup>4</sup> que  $C^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  muni de la distance  $d_0$ . C'est donc un espace complet d'après (C).

- (E) On pose

$$\mathfrak{b}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n) = \{x = (x_k)_{k \geq 0} \mid \sup |x_k| < \infty\}$$

muni de la norme naturelle

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

Vérifions que  $\mathfrak{b}$  est un espace de Banach, c'est-à-dire que  $(\mathfrak{b}, \|\bullet\|)$  est complet.

En effet, si  $x^\nu = (x_k^\nu)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $\mathfrak{b}$ , on aura

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_0 \quad \text{tel que pour } \mu, \nu \geq \nu_0 \quad \sup_k |x_k^\nu - x_k^\mu| \leq \varepsilon$$

Mais cela entraîne que pour chaque  $k$  la suite  $\nu \rightarrow x_k^\nu$  est de Cauchy, et donc par complétude de  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $z_k$  tel que  $\lim_\nu x_k^\nu = z_k$ . Si  $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on a  $\lim_\nu x^\nu = z$ . En effet pour  $\nu, \mu \geq \nu_0$  et tout  $k$ , on a  $|x_k^\nu - x_k^\mu| \leq \varepsilon$  et donc par passage à la limite en  $\mu$ , on aura  $|x_k^\nu - z_k| \leq \varepsilon$ . Donc pour  $\nu \geq \nu_0$ , on aura  $\|x^\nu - z\| \leq \varepsilon$ , et donc  $x^\nu$  converge vers  $z$ .

<sup>3</sup>voir le corollaire 1.22 de la section 5.2.

<sup>4</sup>vu que toute application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  est continue.

De même, l'espace  $\mathfrak{b}_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n) = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathfrak{b}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n)$ . En effet,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  se réécrit «  $\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  et  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  », mais l'application de  $\mathfrak{b}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $x \longrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k$  est continue (et il en est de même pour  $x \longrightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k$ ). L'espace  $\mathfrak{b}_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n)$  est donc aussi un espace de Banach.

(F) On définit la norme d'une application  $k$ -linéaire symétrique<sup>5</sup>,  $A$  par  $|A| = \sup_{|x| \leq 1} \{|A(x, \dots, x)|\}$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont des ouverts dans des espaces de Banach et si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$ , on note  $D^k f$  la différentielle  $k$ -ème de  $f$ , lorsqu'elle est définie (cf. l'appendice de ce chapitre). L'espace des applications,  $k$  fois continûment différentiables,  $C^k(X, Y)$ , muni de la distance  $d_k$  définie par

$$d_k(f, g) = \|f - g\|_k = \sum_{j=0}^k \min\{1, \sup_{x \in X} |D^j f(x) - D^j g(x)|\}$$

est un espace métrique complet. Cela traduit simplement le fait, que si  $f_n$  est une suite de fonctions qui converge uniformément ainsi que ses  $k$  premières différentielles, alors sa limite est une fonction  $f$  de classe  $C^k$  et  $D^j f_n$  converge uniformément vers  $D^j f$ , pour  $0 \leq j \leq k$ . La démonstration dans le cas de Banach est en tout point semblable à celle du cas de la dimension finie (voir Proposition 1.30 de l'appendice).

(G)

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)^2 < +\infty \right\}$$

muni de la norme  $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^2$  est complet.

(H) Considérons trois espaces métriques  $X, Y, Z$  et l'espace des applications  $C^0(X, C^0(Y, Z))$ . Alors cet espace s'envoie naturellement dans  $C^0(X \times Y, Z)$  par l'application  $J : u \longrightarrow \bar{u}$  définie par

$$\bar{u}(x, y) = u(x)(y)$$

On vérifie aisément que cette application est continue et injective. Elle n'est pas nécessairement surjective, par exemple l'application  $u$  de  $C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  donnée par  $u(x)(y) = x \cdot y$  n'est pas dans l'image de  $J$ , car quels que soient  $x_0 \neq x_1$ ,  $d(u(x_0), u(x_1)) = 1$

### 3 Le théorème de Picard

Soit  $T$  une application de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$ ,

**Définition 1.8.** On dit que  $T$  est contractante si elle est lipschitzienne de rapport  $k < 1$ , c'est-à-dire qu'il existe  $k < 1$  tel que

$$\forall x, y \in X \quad \delta(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

<sup>5</sup>c'est-à-dire que  $A(x_1, \dots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$ , pour toute permutation  $\sigma$ .

*Remarque 3.1.* Une application contractante est lipschitzienne et donc évidemment continue!

**Théorème 1.9 (Théorème de Picard).** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet non-vide. Si  $T : X \rightarrow X$  est contractante, elle possède un unique point fixe.*

**Corollaire 1.10 (Théorème de Picard « astucieux »).** *S'il existe  $n$  tel que  $T^n$  soit contractante, alors  $T$  a un unique point fixe.*

*Démonstration de Picard :* Soit  $x_0 \in X$ . Montrons que la suite  $(T^n x_0)_{n \geq 1}$  est de Cauchy, donc convergente, puis que la limite est le point fixe cherché.

Pour  $n \geq m$  nous pouvons estimer

$$d(T^n x_0, T^m x_0) = d(T^m(T^{n-m} x_0), T^m x_0) \leq k^m d(T^{n-m} x_0, x_0)$$

puis majorer

$$\begin{aligned} d(T^{n-m} x_0, x_0) &\leq \sum_{j=0}^{n-m-1} d(T^{j+1} x_0, T^j x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-m-1} k^j d(T x_0, x_0) \leq \frac{1 - k^{(n-m)}}{1 - k} d(T x_0, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1 - k} d(T x_0, x_0). \end{aligned}$$

Donc  $d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(T x_0, x_0)$  et la suite  $(T^n x_0)$  est bien de Cauchy.

Notons donc  $x_\infty$  la limite de  $T^n x_0$ . Par continuité de  $T$  on a

$$T x_\infty = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x_0\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{n+1} x_0 = x_\infty.$$

et  $x_\infty$  est donc un point fixe de  $T$ . L'unicité du point fixe résulte immédiatement de la propriété de contraction : si  $x, y$  sont deux points fixes on a

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

et puisque  $k < 1$ , on doit avoir  $d(x, y) = 0$ , i.e.  $x = y$ . □

*Démonstration du Corollaire.* Soit  $x$  un point fixe de  $T^n$ . Alors  $Tx$  est aussi un point fixe de  $T^n$ , car

$$T^n(Tx) = T(T^n x) = Tx$$

Par unicité du point fixe de  $T^n$ ,  $Tx = x$ . Comme tout point fixe de  $T$  est point fixe de  $T^n$ , l'unicité du point fixe de  $T^n$  entraîne celle du point fixe de  $T$ . □

*Remarque 3.2.* Notons que sous les hypothèses du corollaire, on a encore  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} T^k(x_0)$ . En effet  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{kn}(x_0)$  d'après la démonstration du théorème de Picard appliquée à  $T^n$ , donc pour  $0 \leq r \leq n - 1$ ,

$$x = T^r x = \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{kn+r}(x_0)$$

Il est alors classique que si les suites  $(T^{kn+r}(x_0))_{k \geq 1}$  pour  $0 \leq r \leq n-1$  convergent vers une même limite, la suite  $(T^p(x_0))_{p \geq 1}$  converge aussi vers cette limite.

Passons maintenant à une version à paramètres.

Dans la suite si  $p = 0$ ,  $X$  et  $\Lambda$  seront des espaces métriques. Si  $p \geq 1$   $X$  sera un fermé d'un espace de Banach  $\Lambda$  un ouvert d'un espace de Banach. On dira qu'une application sur un sous-ensemble d'un espace de Banach est de classe  $C^p$ , si elle est la restriction d'une fonction de classe  $C^p$  définie sur un voisinage de cet ensemble. De même pour une application Lipschitzienne.

**Théorème 1.11 (Picard, version à paramètres).** *Soit  $p \geq 0$  et  $(\lambda, x) \mapsto T_\lambda(x)$  une application de classe  $C^p$ . Si pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $T_\lambda$  est contractante de rapport  $k$  ( $k < 1$ ), et si  $x(\lambda)$  est l'unique point fixe de  $T_\lambda$ , alors  $\lambda \mapsto x(\lambda)$  est  $C^p$ .*

*Démonstration de la version à paramètres :* Soit  $x(\lambda)$  le point fixe unique de  $T_\lambda$  dont l'existence résulte du théorème de Picard.. Pour  $\lambda, \mu$  dans un voisinage de  $\lambda_0$ , on a

$$\begin{aligned} d(x(\lambda), x(\mu)) &= d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\mu))) \leq \\ &d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\lambda))) + d(T_\mu(x(\lambda)), T_\mu(x(\mu))) \leq \\ &d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\lambda))) + kd(x(\lambda), x(\mu)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1 - k)d(x(\lambda), x(\mu)) \leq d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\lambda)))$$

De la continuité de  $\mu \rightarrow T_\mu(x(\lambda))$ , on tire celle de  $\mu \rightarrow x(\mu)$  en  $\mu = \lambda$ .

Pour montrer que  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  est différentiable si  $(\lambda, x) \rightarrow T(\lambda, x)$  l'est, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.12.** *Soit  $\lambda \rightarrow L(\lambda)$  une application de classe  $C^p$  de  $\Lambda$  dans  $\mathcal{L}(E, E)$  ensemble des endomorphismes continus de  $E$ , telle que  $\|L(\lambda)\| < k < 1$ . Alors  $\lambda \rightarrow (I - L(\lambda))^{-1}$  est de classe  $C^p$ .*

*Démonstration.* En utilisant que la composée de fonctions de classe  $C^p$  est  $C^p$ , il suffit de montrer que  $\varphi : L \rightarrow (I - L)^{-1}$  est  $C^\infty$  sur  $U = \{L \mid \|L\| < k\}$ . Or  $(I - L)^{-1}$  est somme de la série  $\sum_{j=0}^{\infty} L^j$  qui est normalement donc uniformément convergente sur  $U$ . Sa

différentielle terme à terme est  $H \rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j-1} L^i H L^{j-i-1}$ , qui est encore normalement (donc uniformément) convergente, car  $\|\sum_{i=0}^{j-1} L^i H L^{j-i-1}\| \leq j k^{j-1} \|H\|$ , donc  $\varphi$  est de classe  $C^1$  (d'après la proposition 1.30 de l'appendice).

Mais  $(I - L)\varphi(L) = I$  donc en différentiant,  $(I - L)d\varphi(L)H - H\varphi(L) = 0$ , soit

$$d\varphi(L)H = (I - L)^{-1}H(I - L)^{-1}.$$

L'application  $L \rightarrow d\varphi(L)$  est alors  $C^1$ , vu que  $(I - L)^{-1}$  l'est, et donc  $\varphi$  est de classe  $C^2$ . Par récurrence, on montre que si  $\varphi$  est de classe  $C^r$ , elle est  $C^{r+1}$ , elle est donc  $C^\infty$ .  $\square$

Écrivons maintenant, en utilisant le fait que  $T$  est de classe  $C^1$  :

$$\begin{aligned} x(\mu) - x(\lambda) &= T(\mu, x(\mu)) - T(\lambda, x(\lambda)) = \\ &\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}T\right)(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + \left(\frac{\partial}{\partial x}T\right)(\lambda, x(\lambda))(x(\mu) - x(\lambda)) + o(\|x(\mu) - x(\lambda)\| + \|\mu - \lambda\|) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right](x(\mu) - x(\lambda)) + o(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) = \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + o(\|\mu - \lambda\|) \end{aligned}$$

et en utilisant d'une part que  $T(\lambda, x)$  étant Lipschitz de rapport  $k$  en  $x$ , on a  $\|\frac{\partial T}{\partial x}\| \leq k < 1$ , et d'autre part le lemme, on en déduit que

$$\begin{aligned} x(\mu) - x(\lambda) + o(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) = \\ \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + o(\|\mu - \lambda\|) \end{aligned}$$

Alors,  $\lambda$  étant fixé, posant  $C = \|[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))\|$  on aura

$$x(\mu) - x(\lambda) + o(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) \leq C|\mu - \lambda| + o(|\mu - \lambda|)$$

Puisque  $\mu \rightarrow x(\mu)$  est continue, le terme de gauche est minoré par  $\frac{1}{2}\|x(\mu) - x(\lambda)\|$  pour  $\mu$  assez proche de  $\lambda$ , d'où, pour  $\mu$  au voisinage de  $\lambda$ ,

$$\|x(\mu) - x(\lambda)\| \leq 2C \cdot |\mu - \lambda|$$

Nous pouvons alors conclure que

$$x(\mu) - x(\lambda) = \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + o(|\mu - \lambda|)$$

ce qui signifie précisément que  $\mu \rightarrow x(\mu)$  est différentiable en  $\lambda$ , de différentielle

$$\left[ I - \frac{\partial}{\partial x} T(\lambda, x(\lambda)) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} T(\lambda, x(\lambda))$$

D'après notre lemme, et le fait que  $T$  est de classe  $C^p$ , on déduit que

$$(\lambda, x) \rightarrow \left[ I - \frac{\partial}{\partial x} T(\lambda, x) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} T(\lambda, x)$$

est de classe  $C^{p-1}$ , nous pouvons alors conclure par un argument dit de « bootstrap »<sup>6</sup>. En effet si  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  est  $C^r$  pour  $r \leq p-1$ , sa différentielle, composée de fonctions de classe  $C^r$ , est aussi de classe  $C^r$ , et donc  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  est de classe  $C^{r+1}$ . Puisque  $\lambda \mapsto x(\lambda)$  est de classe  $C^0$ , l'argument ci-dessus montre par récurrence qu'elle est  $C^p$  ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Remarques 3.1.* (A) La démonstration du lemme revient à redémontrer qu'une série entière d'applications linéaires continues est  $C^\infty$  dans son domaine de convergence (comparer avec le fait qu'une série entière usuelle est  $C^\infty$  à l'intérieur du cercle de convergence).

(B) Si  $\lambda \rightarrow T_\lambda$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , il en est de même pour  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  (voir exercice (D)).

## 4 Fonctions implicites et inversion locale

Parmi les applications du théorème de Picard, nous allons tout de suite démontrer les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale. Ces deux théorèmes sont à la base de la théorie des sous-variétés exposée au chapitre 8. Une autre application du théorème de Picard, le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles, sera démontré dans la section suivante.

**Théorème 1.13 (Fonctions implicites).** *Soient  $E_1, E_2, F$  des espaces de Banach  $U, V$  des ouverts respectivement dans  $E_1, E_2$ , et  $f : U \times V \rightarrow F$  une application  $C^k$  où  $k \geq 1$ . On suppose  $f(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$  inversible dans  $\mathcal{L}(E_2, F)$  d'inverse continue. Alors il existe des voisinages  $U'$  de  $x_0$  et  $V'$  de  $y_0$  et une application  $\varphi \in C^k(U', V')$  tels que*

$$\forall (x, y) \in U' \times V' \quad , \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) \quad .$$

*Démonstration.* On considère pour  $x \in B(x_0, r), y \in B(y_0, r')$  l'application

$$T_x(y) = y - \left[ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right]^{-1} f(x, y)$$

---

<sup>6</sup>Expression évoquant des tire-bottes permettant d'enfiler celles-ci sans aide, et signifiant par extension « par ses propres moyens », et au figuré, un « processus auto-entretenu ».

Si on choisit  $r$  et  $r'$  suffisamment petits, cette application envoie  $\overline{B(y_0, r')}$  dans lui-même, car

d'une part pour  $x, y$  dans  $B(x_0, r) \times B(y_0, r')$  on a

$$|T_x(y) - T_{x_0}(y_0)| < \frac{1}{2}$$

d'autre part

$$dT_x(y) = Id - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

s'annule pour  $x = x_0, y = y_0$  et par continuité on aura pour tout  $x$  dans  $D(x_0, r)$  et  $y$  dans  $D(y_0, r')$  l'inégalité

$$|dT_x(y)| < \frac{1}{2}$$

Comme  $|T_x(y_0) - y_0| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)^{-1} f(x, y_0) \right| \leq \frac{r'}{2}$  si  $r$  et  $r'$  sont assez petits, on a  $T_x(\overline{B(y_0, r')}) \subset \overline{B(T_x(y_0), r'/2)} \subset \overline{B(y_0, r')}$ .

Enfin,  $T_x : \overline{B(y_0, r')} \rightarrow \overline{B(y_0, r')}$  étant contractante, et d'après les hypothèses, de classe  $C^k$ ,  $T_x$  possède d'après le théorème de Picard à paramètres, un unique point fixe dans  $B(x, r')$ ,  $\varphi(x)$ , et  $\varphi$  est de classe  $C^k$ .  $\square$

**Théorème 1.14 (Théorème d'inversion locale).** *Si  $\varphi : U \rightarrow V$  est  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et  $d\varphi(x_0)$  est un isomorphisme, il existe des ouverts  $U'$  et  $V'$  contenant  $x_0$  et  $y_0 = \varphi(x_0)$  et une application  $\psi \in C^k(V', U')$  telle que  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$ . L'application  $\varphi$  est donc un difféomorphisme de  $U'$  sur  $V'$ .*

*Démonstration.* On applique le théorème des fonctions implicites en la variable  $v$  à  $f(u, v) = v - \varphi(u)$ . On obtient alors une fonction  $\psi$  de classe  $C^k$ , définie dans un voisinage  $V'$  de  $v_0$ , telle que si  $(u, v) \in U' \times V'$

$$v = \varphi(u) \iff u = \psi(v)$$

Donc  $\psi$  et  $\varphi$  sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

## 5 Connexité, compacité

Les trois notions fondamentales en topologie sont complétude, **compacité** et **connexité**.

Nous avons déjà abordé la complétude. Nous étudions ici brièvement les deux autres notions.

## 5.1 Connexité

Intuitivement, un espace connexe est « fait d'un seul tenant ».

**Définition 1.15.** Un espace métrique  $X$ , est dit connexe, s'il n'existe pas de sous-ensembles de  $X$  autres que  $\emptyset$  et  $X$  qui soient à la fois ouverts et fermés.

La connexité de  $X$  s'exprime aussi en disant qu'il n'existe pas de fonction continue non constante à valeurs dans  $\{0, 1\}$  : en effet si on pouvait écrire  $X = U \cup V$  avec  $U, V$  ouverts disjoints non vides, la fonction caractéristique de  $U$  serait continue et non constante. Inversement, si  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  est continue les ensembles  $U = f^{-1}(0), V = f^{-1}(1)$  sont des ouverts dont la réunion est  $X$ , non vides si et seulement si  $f$  est non constante.

La propriété fondamentale de la connexité est d'être héréditaire par image directe.

**Proposition 1.16.** Si  $f$  est continue de  $X$  dans  $Y$  et si  $X$  est connexe, alors  $f(X)$  est connexe.

*Démonstration.* Il suffit de l'écrire!! Si  $f(X) = A \cup B$  avec  $A, B$  ouverts disjoints non vides, alors  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$  sont ouverts, disjoints et non vides, et leur réunion est  $X$ . Par connexité de  $X$ , l'un des deux ensembles  $f^{-1}(A)$  ou  $f^{-1}(B)$  est vide, et puisque  $A$  et  $B$  sont contenus dans l'image de  $X$  par  $f$ , nécessairement  $A$  ou  $B$  est vide.  $\square$

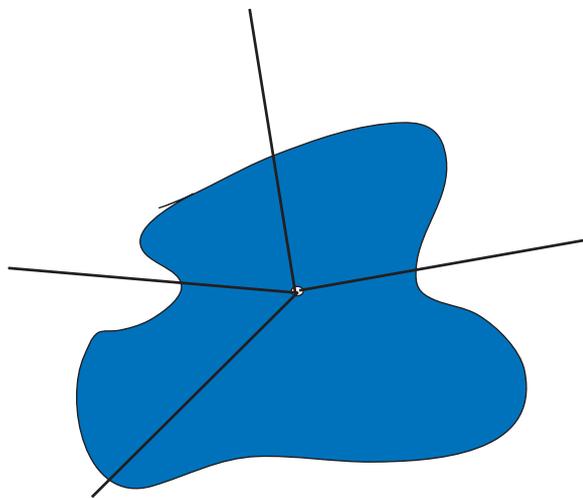


FIG. 1.1 – Ensemble étoilé, donc connexe

Une propriété plus intuitive est la **connexité par arcs**. Tous les espaces connexes de cet ouvrage seront connexes par arcs.

**Définition 1.17.** Un espace métrique  $(X, d)$  est connexe par arcs, si deux points quelconques peuvent être reliés par un arc continu :

$$\forall x, y \in X \quad \exists \gamma \in C^0([0, 1], X) \text{ tel que } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

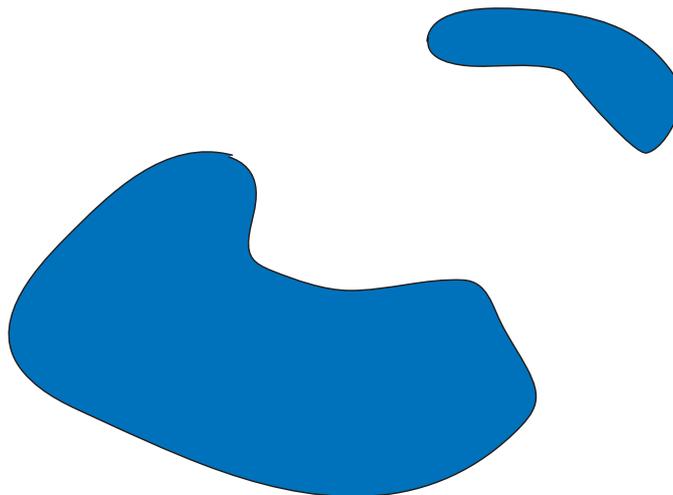


FIG. 1.2 – Ensemble non connexe

La connexité par arcs entraîne de manière évidente la connexité. En effet, si  $f$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , et si  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin, le théorème des valeurs intermédiaires impose à  $f$  de prendre la même valeur en  $x$  et  $y$ . Donc  $f$  est constante.

*Exemple 5.1.* Un espace vectoriel, un convexe, un ensemble étoilé <sup>7</sup> sont connexes. Le cercle, la sphère, le tore sont connexes.

## 5.2 Compacité

**Définition 1.18.** Un espace métrique est **compact** s'il est non-vide et si tout recouvrement de  $X$  par des ouverts possède un sous-recouvrement fini. On dira qu'un espace métrique est **précompact** si pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un recouvrement de l'espace par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ .

Le résultat suivant est parfois connu sous le nom de Borel-Lebesgue.

**Théorème 1.19.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (A)  $(X, d)$  est compact.
- (B) Si une famille  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  de fermés est telle que les intersections finies des éléments de la famille sont non-vides, alors l'intersection de tous les fermés de la famille est non vide.
- (C) Toute suite possède une valeur d'adhérence.
- (D)  $(X, d)$  est complet et précompact.

*Démonstration.* Tout d'abord par passage au complémentaire, on voit que les propriétés (A) et (B) sont équivalentes. Montrons que (A) entraîne (C). Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite sans

---

<sup>7</sup>i.e. tel qu'il existe un point tel que tout segment entre ce point et un autre point de  $X$  est contenu dans  $X$ .

valeur d'adhérence. Il existe pour tout  $x \in X$  un ouvert  $U_x$  contenant  $x$  et seulement un nombre fini de termes de la suite. Mais comme

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

$X$  est la réunion finie d'un nombre fini de  $U_x$ , ne contenant chacun qu'un nombre fini de termes de la suite, ce qui est absurde.

Montrons que (C) entraîne (D). En effet si toute suite possède une valeur d'adhérence, puisque toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente, l'espace est complet.

Montrons que l'espace est précompact. Raisonnons par l'absurde. Soit  $\varepsilon$  strictement positif tel qu'il n'existe pas de recouvrement par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ . On pourrait alors construire une suite  $x_j$  telle que  $x_{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon)$

La suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  ne peut avoir de sous-suite convergente, car par hypothèse  $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ , elle n'a donc pas de valeur d'adhérence pour  $(x_k)_{k \geq 1}$ .

Enfin montrons que (D) entraîne (A).

Si  $X$  est précompact, l'inégalité triangulaire entraîne que  $X$  est contenu dans une boule de rayon fini, que l'on peut supposer égal à 1. Soit maintenant un recouvrement

$$X = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$$

ne possédant pas de sous-recouvrement fini.

Définissons par récurrence une suite de boules  $B_k = B(x_k, \frac{1}{2^k})$ . Supposons que pour  $0 \leq k \leq n-1$ , il n'y ait pas de sous-recouvrement fini de  $B_k$  par les  $U_{\lambda}$ . Alors d'un recouvrement fini de  $X$  par des boules de rayon  $\frac{1}{2^n}$ , on tire un recouvrement fini de  $B_{n-1}$  par des boules de rayon  $\frac{1}{2^n}$ , et donc au moins une de ces boules ne possède pas de recouvrement par un nombre fini de  $U_{\lambda}$ . Notons  $B_n = B(x_n, \frac{1}{2^n})$  une de ces boules. On peut toujours choisir  $B_{n-1}$  et  $B_n$  non-disjointes (car on peut enlever du recouvrement de  $B_{n-1}$  les boules ne la rencontrant pas), et donc  $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ . On a donc construit une suite de boules,  $B(x_n, \frac{1}{2^n})$  dont aucune n'est recouverte par un nombre fini d'ouverts  $U_{\lambda}$  et telles que  $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n}$ . On en déduit par récurrence que pour  $j \leq k$ , on a  $d(x_j, x_k) \leq \frac{1}{2^j}$  et la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  qui est de Cauchy est donc convergente. Si  $x$  est sa limite, il existe  $\lambda_0$  tel que  $x \in U_{\lambda_0}$  et donc pour  $\varepsilon$  assez petit,  $B(x, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ . Comme pour  $k$  assez grand  $d(x_k, x) < \varepsilon - \frac{1}{2^k}$ , on aura  $B(x_k, \frac{1}{2^k}) \subset B(x, \varepsilon)$ , et  $B_k$  est contenu dans  $U_{\lambda_0}$  ce qui contredit l'hypothèse que  $B_k$  n'est pas recouvert par un nombre fini de  $U_{\lambda}$ .  $\square$

*Remarque 5.1.* Le théorème ci-dessus n'est valable que dans un espace métrique. Dans un espace topologique général, on dit que  $X$  est compact si

- a) tout recouvrement de  $X$  par des ouverts possède un sous-recouvrement fini.

b)  $X$  est **séparé**, c'est -à-dire que deux points distincts sont contenus dans des ouverts disjoints (bien évidemment tout espace métrique est séparé).

On distingue alors la compacité, définie ci-dessus de la « compacité séquentielle », définie par l'existence pour toute suite d'une valeur d'adhérence. Si la compacité entraîne la compacité séquentielle, l'inverse n'est pas toujours vrai. Nous ne considérerons dans le cours aucun espace topologique autre que les espaces métriques, et ce phénomène n'interviendra donc pas.

Le lemme suivant est souvent utilisé, en particulier pour établir directement le lien entre compacité et compacité séquentielle (cf. Exercice (M)). Notons que l'hypothèse de compacité est utilisée sous la forme de compacité séquentielle.

**Lemme 1.20** (Lemme de recouvrement de Lebesgue). *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact, et  $(U)_{\alpha \in A}$  un recouvrement de  $X$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que toute boule de rayon  $\delta$  est contenue dans un ouvert du recouvrement.*

*Démonstration.* Elle est analogue à la démonstration de « (D) entraîne (A) » du théorème ci-dessus. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite  $B(x_n, \frac{1}{n})$  de boules qui ne sont contenues dans aucun  $U_\alpha$ . Soit  $x$  une valeur d'adhérence de cette suite, il existe donc  $\alpha_0$  tel que  $x \in U_{\alpha_0}$ , et donc pour  $\varepsilon$  assez petit,  $B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ . Mais alors pour  $n$  assez grand, on aura  $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et si en outre,  $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ,

$$B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$$

ce qui contredit notre hypothèse. □

*Exemple 5.2.* Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit que les compacts de  $\mathbb{R}$  sont les ensembles fermés et bornés. Il en est de même dans  $\mathbb{R}^n$  en vertu du fait qu'un produit d'espaces compacts est compact : en effet si  $(x_k, y_k)$  est une suite de  $X \times Y$ , on peut extraire une sous-suite  $\phi(k)$  telle que  $x_{\phi(k)}$  converge, puis de la suite  $(x_{\phi(k)}, y_{\phi(k)})$  une sous-suite telle que  $y_{\phi\psi(k)}$  converge. Mais alors  $(x_{\phi\psi(k)}, y_{\phi\psi(k)})$  converge.

Attention : dans un Banach de dimension infinie, la boule unité n'est pas compacte (théorème de Riesz).

On voit aisément d'après la définition que les sous-espaces compacts d'un compact sont exactement les sous-ensembles fermés, et d'après le théorème, qu'un espace compact est complet.

Enfin, comme la connexité, la compacité s'hérite par image directe :

**Proposition 1.21.** *Soit  $f$  continue et  $X$  compact. Alors  $f(X)$  est compact.*

*Démonstration.* Si  $(U_\alpha)$  est un recouvrement de  $f(X)$  par des ouverts,  $f^{-1}(U_\alpha)$  est un recouvrement de  $X$ . L'image d'un sous-recouvrement fini de ce recouvrement sera un sous-recouvrement fini de  $f(X)$ . □

Les compacts de  $\mathbb{R}$  étant les fermés bornés, on en déduit le

**Corollaire 1.22.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue définie sur un espace compact,  $X$ . Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.*

Enfin, associée à la notion de compacité, nous avons la notion d'application propre.

**Définition 1.23.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est propre, si et seulement si l'image réciproque d'un compact est compacte.

*Exemples 5.1.* (A) Une application continue  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est propre si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = \infty$ . Comme la continuité nous garantit que l'image réciproque d'un fermé est fermée, il suffit, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de montrer que l'image réciproque d'un borné est bornée.

(B) Une application polynomiale de  $\mathbb{C}$  dans lui-même est toujours propre. L'application  $\exp : z \mapsto e^z$  n'est pas propre puisque  $\exp(2ki\pi) = 1$  et donc l'ensemble  $\exp^{-1}(1) = 2i\pi\mathbb{Z}$  n'est pas compact.

## 6 Appendice : Calcul différentiel et espaces de Banach

### 6.1 Différentielles dans les espaces de Banach

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues<sup>8</sup> de  $E$  dans  $F$ . C'est aussi l'espace des applications telles que

$$\|L\| = \sup\{|Lx| \mid |x|_E \leq 1\} < \infty$$

L'espace  $\mathcal{L}(E, F)$ , muni de la norme  $\|\bullet\|$  est de nouveau un espace de Banach.

Soit  $X$  un ouvert d'un espace de Banach. Les applications  $C^k(X, F)$ , sont définies comme suit :

$f : X \rightarrow F$  est différentiable en  $x$  si il existe  $L : E \rightarrow F$  linéaire continue, telle que

$$f(x+h) = f(x) + Lh + o(h)$$

où  $o(h)$  est une fonction telle que  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0$

On pose alors  $df(x) = L$ . On note  $df$  l'application de  $X$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .

*Exemple 6.1.* Une application linéaire continue est évidemment de classe  $C^\infty$ . Elle est égale à sa différentielle. Ses différentielles d'ordre supérieur sont nulles.

**Définition 1.24.** On dit que  $f$  est  $C^1$  sur  $X$  si elle est différentiable en tout point de  $X$  et si  $x \rightarrow df(x)$  est continue en  $x$ . Enfin on définit les fonctions de classe  $C^k$  par récurrence : l'application  $f$  est de classe  $C^k$  si  $x \rightarrow df(x)$  est  $C^{k-1}$ .

La définition a bien un sens puisque  $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$  qui est lui-même un espace de Banach. Sa différentielle est donc une application linéaire de  $E$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , ou encore une application bilinéaire de  $E$  dans  $F$ .

Pour une fonction  $f$  de deux variables,  $(x, y)$ , un résultat classique nous dit qu'elle est différentiable si et seulement si les fonctions  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sont définies et continues. Ceci se généralise à un espace de Banach.

**Proposition 1.25.** Si  $E, F$  sont des espaces de Banach,  $E \oplus F$  est un espace de Banach, muni de la norme  $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ . L'application  $f : E \oplus F \rightarrow G$  est de classe  $C^1$  si et seulement si  $x \rightarrow f(x, y)$  et  $y \rightarrow f(x, y)$  sont de classe  $C^1$ , et leurs différentielles  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sont continues. On a alors  $df(x, y)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$ .

---

<sup>8</sup>Attention, contrairement au cas de la dimension finie, les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues!

*Démonstration.* En effet,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x+th, y+k)h dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+tk)k dt = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x+th, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] h dt + \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+tk) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] k dt \end{aligned}$$

La continuité de  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et de  $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  entraîne que les deux derniers termes sont  $o(|h|)$  et  $o(|k|)$ , et donc que

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + o(|h|) + o(|k|)$$

□

Nous allons montrer que sous les hypothèses adéquates, les dérivées partielles commutent.

**Proposition 1.26** (Lemme de Schwarz). *Soient  $X, Y, Z$  trois espaces de Banach, et soit  $f \in C^1(X \times Y, Z)$  une application telle que*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

*soit définie et continue sur un ouvert  $V$  de  $X \times Y$ . Alors*

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

*existe sur  $V$  et égale à*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

*Remarque 6.1.* Notons que l'existence de la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

n'est pas dans les hypothèses, mais l'existence et la continuité de  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  sont nécessaires. En effet, la fonction  $f(x, y) = |x|$  est telle que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \equiv 0$$

alors que

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

n'est pas définie.

*Démonstration.* On considère

$$\varphi(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y)$$

et on écrit

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + tk) \cdot k dt$$

$$\begin{aligned} \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + sh, y) \cdot h ds \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x + sh, y + tk) \cdot k dt \right) h ds \end{aligned}$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, cela se réécrit

$$\begin{aligned} \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x + sh, y + tk) \cdot k \cdot h dt ds \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k \cdot h + o(|h||k|) \end{aligned}$$

par continuité de  $(x, y) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

L'égalité précédente se réécrit

$$(\star) \quad f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k \cdot h + o(|h||k|)$$

mais le terme de gauche est égal à

$$\begin{aligned} &f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y) = \\ &\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x + sh, y + k) \cdot h ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x + sh, y) \cdot h ds \end{aligned}$$

et comme

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x + sh, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = o_h(1)$$

où  $o_h(1)$  désigne une quantité tendant vers 0 avec  $|h|$ .

La quantité précédente égale

$$\begin{aligned} &\left[ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y + k) ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) ds + o_h(1) \right] \cdot h = \\ &\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o_h(1) \right] \cdot h \end{aligned}$$

On en déduit en prenant la partie du premier ordre en  $h$  de chaque membre de  $(\star)$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k + o(|k|)$$

ce qui signifie exactement que  $(x, y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  est différentiable et que

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

□

**Corollaire 1.27.** *Si  $f$  est de classe  $C^2$ , l'application  $(h, k) \rightarrow d(df(x)h) \cdot k$  est bilinéaire symétrique.*

*Démonstration.* En effet, si  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $g(s, t) = f(x+sk+th)$ ,  $g$  est de classe  $C^2$  comme composée de fonctions de classe  $C^2$ , et on a  $\frac{\partial}{\partial t}g(s, t)|_{t=0} = df(x+sk) \cdot h$ , et

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} g(s, t)|_{t=0, s=0} = (d^2 f(x) \cdot k) \cdot h$$

De manière analogue,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} g(s, t)|_{t=0, s=0} = (d^2 f(x) \cdot h) \cdot k$$

et le lemme de Schwarz montre que

$$(d^2 f(x) \cdot h) \cdot k = (d^2 f(x) \cdot k) \cdot h$$

ce qui signifie que  $d^2 f(x)$  est symétrique. □

**Corollaire 1.28.** *Soit  $f$  une application de classe  $C^k$ . Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  tel que  $|\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_j = k$  si*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$$

*est définie et continue, alors*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

*Démonstration.* En effet, il suffit de montrer que l'on peut échanger l'ordre des deux dérivées "extérieures". Supposons, quitte à permuter les variables que  $j = 2$  et que  $\alpha_1 \geq 1$ .

Soit alors  $g(x) = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x)$  où  $\beta_1 = \alpha_1 - 1, \beta_j = \alpha_j, j \geq 2$ . Alors  $g$  est de classe  $C^1$ , et par hypothèse,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$$

est définie et continue, et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x)$$

Comme  $f$  est  $C^k$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$  ce qui termine la démonstration. □

Par récurrence on voit que si  $f$  est de classe  $C^k$ , l'application  $(h_1, \dots, h_r) \rightarrow D^r f(x)(h_1, \dots, h_r)$  est multilinéaire symétrique. On définit la norme d'une application  $r$ -linéaire symétrique<sup>9</sup>,  $A$  par  $|A| = \sup_{|h| \leq 1} \{|A(h, \dots, h)|\}$ .

## 6.2 Quelques démonstrations de complétude

Le résultat suivant concerne les espaces métriques, mais il nous sera utile.

**Proposition 1.29** (Complétude de l'espace des fonctions continues pour la convergence uniforme). *Soient  $X, Y$  des espaces métriques. Alors si  $Y$  est complet,  $C^0(X, Y)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* En effet, soit  $f_n \in C^0(X, Y)$  une suite de Cauchy, alors pour tout  $x \in X$  la suite des  $f_n(x)$  est de Cauchy dans  $Y$ , vu que

$$\min\{1, d(f_n(x), f_m(x))\} \leq d_0(f_n, f_m)$$

Soit alors  $f(x)$  la valeur obtenue comme limite des  $f_n(x)$ .

Montrons que  $f$  est continue.

Pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $N(\varepsilon)$  tel que pour tout  $y$ ,

$$n, m \geq N(\varepsilon) \implies d(f_n(y), f_m(y)) \leq \varepsilon/3$$

La continuité de  $f_{N(\varepsilon)}$  en  $x$  entraîne l'existence d'un  $\eta$  tel que

$$d(x, y) \leq \eta \implies d(f_{N(\varepsilon)}(x), f_{N(\varepsilon)}(y)) \leq \varepsilon/3$$

---

<sup>9</sup>c'est-à-dire que  $A(h_1, \dots, h_k) = A(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(r)})$ , pour toute permutation  $\sigma$ .

L'inégalité

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y))$$

appliquée à  $m = N(\varepsilon)$  et  $n \geq N(\varepsilon)$  permet d'affirmer que si  $d(x, y) \leq \eta$  alors  $d(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon$  d'où par passage à la limite,  $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ .

L'application  $f$  est donc continue, et  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ , car pour  $n, m \geq N(\varepsilon)$ ,  $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$  et donc par passage à la limite en  $m$ ,  $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ .  $\square$

*Remarque 6.2.* On peut aussi munir  $C^0(X, Y)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Si  $X$  est réunion dénombrable croissante de compacts, tels que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  cette topologie est induite par la métrique

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} d_{K_j}(f, g)$$

où  $X = \bigcup K_n$  et  $d_{K_n}(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in K_n} d(f(x), g(x))\}$ . Une suite de fonctions continues converge uniformément sur les compacts si pour tout compact  $K$  de  $X$ , la suite des restrictions  $f_n|_K$  converge uniformément vers  $f|_K$ . Par restriction, il est clair que si  $X$  est localement compact (i.e. tout point a un voisinage compact), une telle suite a une limite continue.

- (A) L'espace  $C^0(X, Y)$  étant muni de la distance  $d_\infty$ , soit  $a$  un point de  $X$ , et  $e_a : C^0(X, Y) \rightarrow Y$  l'application d'évaluation définie par  $e_a(f) = f(a)$ . Alors  $e_a$  est linéaire, continue, puisque  $|f - g| = \inf\{1, \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|\} \leq \varepsilon$  entraîne si  $\varepsilon < 1$  que  $|e_a(f) - e_a(g)| = |f(a) - g(a)| \leq \varepsilon$ .
- (B) Si  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en les deux variables  $x, y$  et si  $X$  et  $Y$  sont compacts, alors

$$\tilde{f} : X \rightarrow C^0(Y, \mathbb{R})$$

donnée par  $\tilde{f}(x) = f(x, \bullet)$  est continue.

En effet,  $X \times Y$  est compact, donc  $f$  est uniformément continue, et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall y \in Y \quad \forall x \in X \quad d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x, y), f(x_0, y)) < \varepsilon$$

ce qui se réécrit

$$\forall x \in X \quad d(x, x_0) < \eta \implies d_0(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des ouverts dans des espaces de Banach et si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$ , on note  $D^k f$  la différentielle  $k$ -ème de  $f$ , lorsqu'elle est définie.

La complétude de l'espace des fonctions de classe  $C^k$  repose sur la proposition suivante

Montrons maintenant que

**Proposition 1.30.** *Soient  $X, Y$  des espaces de Banach, et  $(f_n)$  une suite de fonctions dans  $C^1(X, Y)$ . Supposons que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  et que  $(df_n(x))$  converge uniformément vers  $x \rightarrow L(x)$  dans  $C^0(X, \mathcal{L}(X, Y))$ . Alors  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la topologie  $C^1$  et  $df(x) = L(x)$ .*

*Démonstration.* Comme en dimension finie, on écrit que

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_0^1 Df_n(x+th) \cdot h dt$$

et donc si  $Df_n$  converge uniformément vers  $L$ , on aura

$$|f_n(x+h) - f_n(x) - L \cdot h| = \left| \int_0^1 (Df_n(x+th) - L(x)) \cdot h dt \right|$$

Comme

$$|Df_n(x+th) - L(x+th)| \leq \varepsilon_n |h|$$

où  $\varepsilon_n$  tend vers 0 avec  $n$ , et que la continuité de  $x \rightarrow L(x)$  entraîne que  $|L(x+th) - L(x)| \leq \varepsilon(|h|)$  où  $\varepsilon$  est continue et s'annule en 0, le terme de droite est majoré par

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |Df_n(x+th) - L(x+th)| \cdot |h| dt \leq \varepsilon_n |h| \\ & \int_0^1 |(L(x+th) - L(x)) \cdot h| dt \leq \varepsilon(|h|) |h| \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $f_n(x+h) - f_n(x) - L \cdot h$  tend vers  $f(x+h) - f(x) - L \cdot h$  et celui de droite est majoré par  $\varepsilon(|h|)|h|$ . Donc

$$|f(x+h) - f(x) - L(x) \cdot h| \leq \varepsilon(|h|)|h|$$

d'où il résulte que  $f$  est différentiable de différentielle  $Df(x) = L(x)$ . On en déduit que  $f$  est de classe  $C^1$ , puisque par hypothèse  $x \rightarrow L(x)$  est continue. Le reste de l'énoncé est laissé au lecteur.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer

**Proposition 1.31.** *Si  $X, Y$  sont des espaces de Banach, l'espace des applications  $k$  fois continûment différentiables,  $C^k(X, Y)$ , muni de la distance  $d_k$  définie par*

$$d_k(f, g) = \|f - g\|_k = \sum_{j=0}^k \min\{1, \sup_{x \in X} |D^j f(x) - D^j g(x)|\}$$

*est un espace métrique complet.*

*Démonstration.* Cela traduit simplement le fait, que si  $f_n$  est une suite de fonctions qui converge uniformément ainsi que ses  $k$  premières différentielles, alors sa limite est une fonction  $f$  de classe  $C^k$  et  $D^j f_n$  converge uniformément vers  $D^j f$ , pour  $0 \leq j \leq k$ . La démonstration utilise la Proposition 1.30 de la manière suivante :

Raisonnons par récurrence. Pour  $k = 1$  c'est la Proposition 1.30. Supposons la proposition démontrée à l'ordre  $k - 1$ , et démontrons la à l'ordre  $k$ .

Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy pour  $d_k$ ,  $(Df_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $C^{k-1}(X, \mathcal{L}(X, Y))$  pour  $d_{k-1}$ . On en déduit que  $x \rightarrow df_n(x)$  converge vers  $x \rightarrow L(x) Df_n$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k - 1$ . Appliquant la proposition Proposition 1.30) à  $(f_n)_{n \geq 1}$  (puisque si une suite est de Cauchy pour  $d_k$ ,  $k \geq 1$  elle est de Cauchy pour  $d_1$ ) on en déduit que  $f_n$  converge vers  $f$  et que  $df(x) = L(x)$ .

Mais alors  $f$  est bien dans  $C^k$ , vu qu'elle possède une différentielle  $x \rightarrow L(x)$  de classe  $C^{k-1}$  et  $D^j f_n$  converge uniformément vers  $D^j f$  pour tout  $j$  inférieur à  $k$ . On en conclut que  $f_n$  converge vers  $f$  pour la métrique  $d_k$ .  $\square$

L'un des résultats fondamentaux en dimension finie, la formule de Taylor, est encore vérifiée ici

**Théorème 1.32 (Formule de Taylor).** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application de classe  $C^p$  sur un domaine  $\Omega$  contenant le segment  $[x_0, x_1]$ . On a alors

$$f((1-t)x_0 + tx_1) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{D^j f(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \left( \int_0^1 \frac{D^p f((1-t)x_0 + tx_1)}{p!} t^p dt \right) (x - x_0)^p$$

## 7 Exercices

### Topologie, espaces métriques

- (A) Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence de suites de  $Y$  est fermé (et donc égal à l'adhérence de  $Y$ ).
- (B) Soit  $\mathfrak{b}$  l'espace de Banach défini dans l'exemple (E).
- (a) Soit  $S$  l'endomorphisme de "shift" sur  $\mathfrak{b}$  donné par  $(S(x))_k = x_{k+1}$ . Montrez que l'application  $S$  est continue (vérifier que  $\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|$ ). Montrez que  $S$  est de classe  $C^\infty$ .
- (b) Soit maintenant  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $F$  l'endomorphisme de  $\mathfrak{b}$  obtenu en appliquant  $f : (F(x))_k = f(x_k)$ . Montrez que l'application  $F$  est continue. (Indication : On pourra utiliser l'uniforme continuité de  $f$  sur une boule de  $\mathbb{R}^n$  pour montrer que si  $x, y$  sont dans une boule de  $\mathfrak{b}$ , alors  $x_k, y_k$  sont dans une boule de même rayon, et donc pour tout  $\varepsilon$  il existe  $\eta$  tel que si  $|x_k - y_k| \leq \eta$  on a  $\|f(x_k) - f(y_k)\| \leq \varepsilon$ ). Montrez que si  $f$  est de classe  $C^k$  alors  $F$  aussi.

(C) Soit  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  et considérons l'ensemble

$$L_\omega(x) = \{z \in X \mid \exists t_n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty, \lim x(t_n) = z\}$$

Montrer que  $L_\omega(x)$  est fermé.

Lorsque  $x$  est solution d'une équation différentielle, on appelle  $L_\omega(x)$  l'ensemble  $\omega$ -limite de la trajectoire  $x$  (voir section 3 du chapitre 5).

(D) Soit  $\mathcal{H}$  l'espace des fonctions holomorphes<sup>10</sup> sur le disque ouvert  $D(0, 1)$ .

On pose  $p_j(f) = \sup\{|f(z)| \mid z \in D(0, 1 - 1/j)\}$

et  $d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \min(p_j(f - g), 1)$ .

(a) Montrer que  $d$  est une distance

Soit  $u_n$  une suite de fonctions développables en série entière sur le disque de rayon  $r$  du plan complexe,  $D(r)$ . On suppose que  $u_n$  converge uniformément vers une fonction  $u$ , dont on veut montrer qu'elle est développable en série entière sur  $D(r)$ .

(b) En utilisant la formule de Cauchy,

$$f^k(0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{S^1(\rho)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

où  $S^1(\rho)$  est le cercle de rayon  $\rho < r$ , montrer que pour tout  $\rho < r$  il existe  $M_\rho$  telle que  $|f^k(0)| \leq k! \frac{M_\rho}{\rho^k}$ .

(c) En déduire que les  $u_n^{(k)}(0)$  convergent vers une limite  $a_k$  et montrer que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$  converge sur le disque de rayon  $\rho$  et est égale à  $u(z)$ .

(d) Montrer que la série converge sur le disque de rayon  $r$ , et conclure.

Montrer que  $u_n$  converge uniformément vers  $u$  sur tout compact de  $D$  si et seulement si pour tout  $k \geq 1$ ,  $p_k(u - u_n)$  tend vers 0.

En déduire que la métrique  $d$  induit sur  $\mathcal{H}$  la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

(e)  $(\mathcal{H}, d)$  est-il complet ?

## Applications Lipschitziennes, autour de Picard

(E) Montrer que si  $f$  est  $C^1$  sur un espace vectoriel normé, et  $U$  un ouvert convexe,  $f$  est contractante sur  $U$  si et seulement si  $|Df(x)| \leq k < 1$  sur  $U$ .

(F) (a) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $f \in C^1(B(0, 1), \mathbb{R}^n)$  vérifie  $\sup |df(x)| \leq \delta$ , alors  $f$  s'étend en une application  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitzienne de rapport  $\varepsilon$ .

<sup>10</sup> $f$  est analytique (ou holomorphe) dans un ouvert  $U$ , c'est dire qu'elle possède un développement en série entière convergeant au voisinage de chaque point de  $U$ . Pour les définitions et les propriétés des fonctions holomorphes, on réfère au cours de Tronc commun de P. Colmez ([Colmez]).

- (b) Peut-on améliorer le résultat précédent pour avoir  $\varepsilon = \delta$  ?
- (G) Montrer que si  $E$  est un espace vectoriel normé et  $f : E \rightarrow E$ , est telle que  $f(0) = 0$  et  $|df(0)| < 1$ , il existe un voisinage de 0 tel que

$$\forall x \in U, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$$

- (H) Montrer que si  $f$  est contractante de rapport  $k$  sur la boule de rayon  $r$  et si  $|f(0)| \leq r(1 - k)$  alors  $f$  a un point fixe dans la boule de rayon  $r$ .

(I) **Méthode de Newton**

Soit  $f$  une application  $C^2$  définie sur une boule  $B(0, r)$  d'un espace de Banach  $E$  et  $f : B(0, r) \rightarrow E$ . On suppose que  $|D^2f(x)| \leq C$  et  $|(Df(x))^{-1}| \leq C$  sur  $B(0, r)$ .

- (a) On considère la suite définie par  $x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n)$ .

Montrer que  $|x_{n+1} - x_n| \leq C|f(x_n)|$  et que  $|f(x_{n+1})| \leq C|x_{n+1} - x_n|^2$

- (b) En déduire que si  $|f(x_0)| < \delta$  avec  $\delta$  convenablement choisi, on a

$$|f(x_n)| \leq C^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n} \text{ et } |x_{n+1} - x_n| \leq CC^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n}$$

- (c) En déduire que si  $\delta < 1/C^3$ , la suite  $x_n$  converge vers une solution de  $f(x) = 0$ . On a donc obtenu une solution de  $f(x) = 0$  en partant d'une solution approchée,  $x_0$ . C'est souvent plus utile numériquement que ce que fournit le théorème d'inversion locale (qui lui part d'une solution exacte pour en construire d'autres)

- (d) En déduire que si  $f(x_0) = 0$  alors  $f(x) = y$  a une solution pour tout  $y$  dans  $B(0, C^{-3})$ .

Cela fournit une estimation de la taille de l'image de  $f(B(x_0, r))$  dans le théorème d'inversion locale.

- (e) Montrer que si  $x$  est la limite de la suite ci dessus, on a  $|x_n - x| \leq K\rho^{2^n}$  avec  $\rho < 1$ . Comparer avec la vitesse d'approximation donnée par le théorème de Picard.

- (f) Ecrire la méthode de Newton pour calculer  $\sqrt{a}$ , (i.e. pour  $f(x) = x^2$ ) où  $a$  est un réel positif. Pour quelles valeurs initiales converge-t-il ?

- (g) Comparer la suite  $x_n$  avec celle obtenue en itérant  $T_y(x)$  où  $T_y$  est l'application définie dans la démonstration du théorème des fonctions implicites appliquée à  $f(x, y) = y - f(x)$ .

- (J) Soit  $T : \Lambda \times X \rightarrow X$  contractante sur un espace métrique complet, dépendant continûment d'un paramètre  $\lambda$ .

- (a) Montrer que si on note  $\tau : C^0(\Lambda, X) \rightarrow C^0(\Lambda, X)$  l'application qui associe à  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  la fonction  $\lambda \rightarrow T(\lambda, x(\lambda))$ , celle-ci est contractante pour la métrique  $d_0$  de la convergence uniforme sur  $\Lambda$ . En déduire une nouvelle démonstration de la continuité en  $\lambda$  du point fixe  $x(\lambda)$  de  $T(\lambda, x)$ .

- (b) Montrer que la suite de fonctions définie par  $x_k(\lambda) = T(\lambda, x_{k-1}(\lambda))$  converge uniformément vers  $x(\lambda)$ , où  $x(\lambda)$  est le point fixe de  $T(\lambda, x)$ .

- (c) Montrer que si  $T$  est lipschitzienne en  $\lambda$ , alors  $x(\lambda)$  l'est aussi.

(K) On désire montrer que dans le théorème de Picard, si la dépendance en  $\lambda$  est analytique<sup>11</sup>, le point fixe dépend analytiquement de  $\lambda$ .

On part d'un point fixe  $x_0$  de  $T(\lambda_0, x)$ , et on veut montrer que la solution de  $T(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$  admet un développement en série entière convergent dans un disque de rayon non nul autour de  $\lambda_0$ .

On suppose pour simplifier que  $x_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ .

On suppose, outre le fait que  $T$  est contractante que

$$T(\lambda, x) = \sum_{j,k=0}^{\infty} T_{j,k} \lambda^j x^k \text{ avec}$$

$$\|T\|_{\rho,R} = \sum_{j,k=0}^{\infty} |T_{j,k}| \rho^j R^k < \infty$$

pour un certain couple de réels strictement positifs  $(\rho, R)$ .

(a) Montrer que si  $x$  est somme d'une série entière convergente sur le disque de rayon  $\rho$ , alors  $\lambda \rightarrow T(\lambda, x(\lambda))$  converge sur ce même disque, pourvu que  $\forall \lambda \in D(0, \rho), |x(\lambda)| < R' < R$

(b) Montrer que quel que soit  $R' > 0$  il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$|\lambda| < \sigma \implies |x(\lambda)| < R'$$

En déduire, en utilisant l'exercice (J) que pour  $\sigma$  assez petit,

$$|\lambda| < \sigma \implies \forall k |x_k(\lambda)| < R'$$

(c) en utilisant l'exercice (J) et le fait qu'une limite uniforme de fonctions analytiques sur le disque **complexe** de rayon  $\sigma$  est analytique sur ce même disque (cf. exercice (D)), montrer que  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  est holomorphe sur le disque de rayon  $\sigma$ .

*Remarques 7.1.*

1) On sait que l'on a un point fixe unique continu. Il suffit de montrer sa dépendance analytique. Notons que cela n'est possible que tant que  $x(\lambda)$  est dans le disque de rayon  $R$ , sinon, on ne sait rien de l'analyticité de  $T$  dans ce domaine.

Cependant si  $R = +\infty$ , on a évidemment que  $x$  est analytique sur tout disque.

2) une limite uniforme de fonctions analytiques sur  $] -\rho, \rho[$  n'est pas, en général, analytique. En effet, le théorème de Stone-Weierstrass dit que toute fonction continue est limite uniforme de polynômes (qui sont bien sûr analytiques!). En général cette suite de polynômes ne converge pas uniformément sur le disque complexe de rayon  $r$ . Bien que la démonstration ci-dessus exige le passage au complexe, la conclusion reste vraie en réel, car si  $T(\lambda, x)$  est analytique en  $(\lambda, x)$  sur l'intervalle  $] -\rho, \rho[ \times ] -R, R[$  alors la série qui la définit converge sur le produit des disques complexes  $D(\rho) \times D(R)$

## Connexité, compacité

(L) Montrer qu'une application localement lipschitzienne définie sur un espace métrique compact est lipschitzienne.

---

<sup>11</sup>cf. note précédente.

(M) Montrer que le Lemme de Lebesgue permet de démontrer directement que dans un espace métrique, la compacité séquentielle entraîne la compacité usuelle.

a) Montrer que si  $(X, d)$  est séquentiellement compact, il est précompact (i.e. quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe un recouvrement de  $X$  par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ ).

Étant donné un recouvrement de  $X$  par des ouverts,

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

et  $\delta$  le nombre de Lebesgue du recouvrement (i.e. le nombre donné par le Lemme de Lebesgue, 1.20).

b) Montrer que si  $X = \bigcup_{j=1}^N B(x_j, \delta)$  et pour chaque  $j$ , notons  $\alpha(j)$  l'indice tel que  $B(x_j, \delta) \subset U_{\alpha(j)}$ , alors

$$X \subset \bigcup_{j \in \{1, \dots, N\}} U_{\alpha(j)}$$

(N) **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Soit  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale. Soit  $K = \{P(x) \mid dP(x) = 0\}$ .

(a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'application  $\nu : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{N}$  donnée par  $\nu(z) = \text{card}(P^{-1}(z))$  est localement constante.

(b) Montrer que  $\mathbb{C} - K$  est connexe par arcs. En utilisant que  $\nu$  ne peut être partout égale à zéro, montrer que  $P$  est surjective.

(c) En déduire que tout polynôme sur  $\mathbb{C}$  possède au moins une racine complexe. (Théorème de d'Alembert-Gauss)

(d) Quelle est la partie de la démonstration qui ne marche pas sur  $\mathbb{R}$  ?

(O) **Théorème de relèvement**

(a) Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans le cercle unité. Montrer qu'il existe  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(t) = e^{i\varphi(t)}$ , et que  $\varphi$  est unique une fois fixé  $\varphi(0)$ .

Indication : On découpera  $[0, 1]$  en intervalles assez petits sur lesquels  $\varphi$  est définie facilement, et on recollera convenablement sur l'intersection de ces intervalles.

(b) Montrer qu'il en est de même pour  $[0, 1]^2$  au lieu de  $[0, 1]$

Indication : Utiliser a) pour le faire sur  $[0, 1] \times \{y\}$  puis étendre aux bandes  $[0, 1] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$ . Terminer en recouvrant  $\{0\} \times [0, 1]$  par compacité, et en utilisant le a) pour les intersections des bandes.

(c) De même pour  $[0, 1]^k$  pour  $k$  quelconque

(d) Montrer que si  $f$  est de classe  $C^k$  alors  $\phi$  est de classe  $C^k$ .

(P) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $S^1$  continue (ou de classe  $C^\infty$  si on préfère) et périodique de période  $2\pi$  (i.e.  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ).

- (a) Montrer que le relèvement  $\phi(t)$  défini à l'exercice précédent vérifie  $\frac{1}{2\pi} (\phi(t + 2\pi) - \phi(t))$  est un entier appelé degré de  $f$  et noté  $\deg(f)$ . Montrer que cet entier ne dépend pas du choix de  $\phi$ .
- (b) Montrer que si  $f_s$  est une famille continue de telles applications,  $\deg(f_s)$  ne dépend pas de  $s$ .
- (c) Calculer le degré d'une application constante. De  $f(x) = e^{2ix}$
- (Q) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application différentiable telle que
- $df(x)$  est inversible pour tout  $x$
  - $f$  est propre c'est-à-dire que l'image réciproque d'un compact est compacte.
- (a) Montrer que  $f$  est alors surjective.  
On pourra noter  $\nu(x) = \text{card}(f^{-1}(x))$ , et montrer que l'ensemble  $E_k = \{x \mid \nu(x) = k\}$  est à la fois ouvert (utiliser le théorème d'inversion locale) et fermé (utiliser la propriété). En déduire qu'il existe  $k > 0$  tel que  $E_k = \mathbb{R}^n$  (et donc  $f$  est surjective).
- (b) En déduire que si de plus  $f$  est injective, c'est un difféomorphisme.
- (R) Soit  $\mathcal{H}$  le cube de Hilbert, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall n, |x_n| \leq 1/n\}$$

Montrer que  $\mathcal{H}$  est compact. Même question pour

$$\mathcal{K} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + n^2) |x_n|^2 \leq 1\}$$

(S) **(Ascoli)**

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces vectoriels de dimension finie. Pour  $U$  ouvert de  $X$ , on considère  $C^0(U, Y)$  muni de la métrique  $d_0$ . Soit  $\mathcal{G}$  un sous-ensemble de  $C^0(U, Y)$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{G} \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On dit que  $\mathcal{G}$  est **équicontinu**.

- (a) Montrer que si  $Q$  est l'ensemble des points à coordonnées rationnelles de  $U$ , alors  $Q$  est dénombrable.  
On suppose de plus qu'il existe  $x_0$  dans  $U$  et une constante  $C$  telle que  $\forall f \in \mathcal{G} \quad |f(x_0)| \leq C$ .
- (b) En utilisant la méthode de la suite diagonale, montrer que si  $f_j$  est une suite dans  $\mathcal{G}$ , on peut en extraire une sous-suite  $f_{j_n}$  qui converge en chaque point de  $Q$  (i.e. si  $x \in Q$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{j_n}(x)$  existe).
- (c) En notant  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{j_n}(x)$ , on définit une fonction sur  $Q$ . Montrer que cette fonction s'étend à l'espace tout entier, et qu'elle est limite uniforme sur les compacts d'une sous-suite de  $f_j$ .
- (d) Caractériser les sous-ensembles compacts de  $C^0(U, Y)$ .
- (e) Généraliser (seule l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense est importante).

## Calcul différentiel

- (T) Soit l'application définie sur  $M_n(\mathbb{R})$  par  $f(A) = \det(A)$ . Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle.
- (U) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et  $F : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$  donnée par  $F(x)(t) = f(x(t))$ . Montrer que  $F$  est de classe  $C^k$  et calculer sa différentielle.
- (V) Soit une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{b}$  l'espace défini dans l'exemple (E). Soit  $F : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$  définie par  $F((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ . Montrer que si  $f$  est de classe  $C^k$ ,  $F$  est de classe  $C^k$ . Calculer sa différentielle.
- (W) Soit  $f$  une application de  $[0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ . Alors l'application  $F : u \rightarrow \int_0^1 f(t, u(t)) dt$  définie sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  est de classe  $C^p$ , sa différentielle  $k$ -ième étant donnée par

$$(v, \dots, v) \longrightarrow \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial u^k} f(t, u(t)) v(t)^k dt$$

- (X) Soit  $f(x, y)$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $f(0, y) = 0$ . Montrer que l'on peut écrire  $f(x, y) = xg(x, y)$ , où  $g$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Que dire de  $g$  si  $f$  est de classe  $C^p$  ?

Indication : Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 (accroissements finis).



# Chapitre 2

## Équations différentielles : Théorie générale, théorèmes d'existence et unicité

Ce chapitre a pour objet d'énoncer et de démontrer le théorème de Cauchy-Lipshcitz y compris dans ses versions à paramètres. Le reste du cours utilise de manière essentielle les résultats de ce chapitre. En guise de complément nous montrons comment le théorème de Picard à paramètres, permet de résoudre des équations intégrales non-linéaires (équations de Volterra) et un problème au bord pour des équations différentielles du second ordre (équation de Sturm-Liouville).

### 1 Remarques générales sur les équations différentielles

Un système d'équations différentielles d'ordre quelconque se ramène toujours à un système d'équations d'ordre un. En effet l'équation

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right) \quad x \in \mathbb{R}^k$$

se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_{k-1} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \end{cases}$$

Cette remarque banale permet d'éviter de répéter les mêmes énoncés pour les équations de degré 2, puis 3, etc. Cela ne signifie pas que les équations de degré  $k$  ne puissent avoir des spécificités que ne possèdent pas les systèmes de degré un.

Plus généralement, un système d'équations de degrés différents se réduira par le même procédé à un système de degré un, défini sur un espace de dimension plus grande, que l'on écrira en toute généralité :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

et de manière abrégée, sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ , et  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$  est au moins continue.

On peut même supposer que  $\mathbf{f}$  est une application de  $\mathbb{R} \times E$  dans  $E$  où  $E$  est un espace de Banach

*Remarque 1.1.* Il est important de noter que les équations différentielles implicites, c'est à dire de la forme  $f(t, x, \dot{x}) = 0$ , présentent des difficultés qui n'apparaissent pas dans l'étude des équations « ordinaires ». On peut, lorsque  $\frac{\partial}{\partial v} f(t, x, v)$  est inversible en un point  $(t_0, x_0, v_0)$  annulant  $f$ , utiliser le théorème des fonctions implicites (voir chapitre 1, théorème 1.13) pour se ramener au voisinage de ce point aux théorèmes du cours. Nous ne ferons pas ici la théorie générale de telles équations.

## 2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit  $X : I \times \Omega \rightarrow E$  est définie sur le produit d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'un ouvert  $\Omega$  d'un espace de Banach,  $E$ . On veut résoudre l'équation  $\dot{x} = X(t, x)$  avec condition initiale  $x(t_0) = x_0 \in \Omega$ .

**Théorème 2.1** (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons  $X$  continue en  $(t, x)$ , et lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tous  $\tau_0 \in I$ ,  $u_0 \in \Omega$  il existe  $\delta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $u$  est dans  $B(u_0, \delta)$  et  $t_0$  dans  $]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[$ , le système*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} & = X(t, x) \\ x(t_0) & = u \end{cases}$$

*possède une unique solution définie sur  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ .*

*Remarque 2.1.* Le domaine  $\Omega$  peut être arbitrairement restreint sans changer la conclusion du théorème <sup>1</sup>. Il suffit donc que  $X$  soit localement lipschitzien en la seconde variable (i.e. lipschitzien au voisinage de chaque point) pour pouvoir appliquer le théorème. En particulier le théorème s'applique dès que  $X$  est  $C^1$ .

On obtient donc le

**Corollaire 2.2.** *Supposons  $X$  continue, et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, les conclusions du théorème précédent s'appliquent.*

- (A) La complication apparente de l'énoncé vient de ce que l'on souhaite l'existence d'une solution dont la taille du domaine de définition,  $2\alpha$  soit indépendante de  $t_0$  et  $u$ . Cela aura son importance ultérieurement, lorsqu'on considérera les solutions de manière collective.
- (B) On veut parfois obtenir l'existence des solutions sur un intervalle de définition  $]\tau_0 - \beta, \tau_0 + \beta[$  centré en  $\tau_0$  plutôt qu'en  $t_0$ . Cela n'offre pas de difficulté supplémentaire, car si  $|t_0 - \tau_0| \leq \alpha/2$ , on aura  $]\tau_0 - \alpha/2, \tau_0 + \alpha/2[ \subset ]t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2[$ .
- (C) Un théorème de Peano (voir exercice (F)) affirme qu'il suffit que  $X$  soit continue pour qu'il existe une solution. Mais elle n'est alors pas nécessairement unique comme le montre l'exemple de  $\dot{x}(t) = 2|x(t)|^{1/2}$ ,  $x(0) = 0$  : on a alors deux solutions,  $x_1(t) = 0$  et  $x_2(t) = \text{signe}(t)t^2$ .  
Cet exemple montre aussi que le théorème n'est pas vrai pour des équations implicites  $f(t, x, \dot{x}) = 0$ , puisque l'équation  $(\dot{x}(t))^2 - 4x(t) = 0$  possède deux solutions telles que  $x(0) = 0$ .
- (D) Enfin, on étudiera au chapitre 4 les questions de la taille de l'intervalle de définition des solutions.

*Démonstration.* L'équation (1) est équivalente à

$$x(t) = u + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds$$

La résoudre revient à trouver un point fixe  $x \in C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \Omega)$  de  $x \mapsto T_u(x)$  où on a posé

$$T_u(x)(t) = u + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds .$$

L'espace  $C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \overline{B(u_0, r)})$  étant complet, nous pouvons appliquer le théorème de Picard après avoir vérifié que pour  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $r$ , suffisamment petits :

- a)  $T_u$  envoie  $C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \overline{B(u_0, r)})$  dans lui même

---

<sup>1</sup>Bien entendu,  $\alpha$  sera réduit.

b)  $T_u$  est contractante.

Pour démontrer a), fixons d'abord une boule fermée  $\overline{B(u_0, r)} \subset \Omega$  et  $M$  un majorant de  $\|X\|$  sur cette boule (l'existence de  $M$  résulte de ce que  $X$  est lipschitzien). Soit  $\delta$  un réel de l'intervalle  $]0, r[$  qui sera fixé ultérieurement, et  $x_0$  un point de  $B(u_0, \delta)$ . Si  $|t - t_0| \leq \alpha$

$$\begin{aligned} |T_u(x)(t) - u_0| &\leq \left| \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds \right| + |u - u_0| \\ &\leq \alpha M + \delta \end{aligned}$$

Donc si  $\alpha$  et  $\delta$  sont choisis assez petits pour que  $\alpha M + \delta < r$ , l'application  $T$  enverra  $C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \overline{B(u_0, r)})$  dans lui-même.

Pour montrer b), notant  $\|\bullet\|$  la norme *sup*, il suffit d'estimer,

$$\begin{aligned} \|T_u(x) - T_u(y)\| &= \sup_{|t-t_0| \leq \alpha} |T_u(x)(t) - T_u(y)(t)| \leq \left\| \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t X(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \alpha k \|x - y\| \end{aligned}$$

où  $k$  est la constante de Lipschitz de  $X$  et de choisir  $\alpha$  assez petit pour que  $\alpha k < 1$ .

Les hypothèses du théorème de Picard étant vérifiées, nous obtenons l'existence d'un unique point fixe de  $T_u$  dans cet espace.

Enfin pour l'unicité, il suffit de montrer que toute solution définie sur  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$  est à valeurs dans  $B(u_0, r)$ . Supposons que  $x$  sorte de  $B(u_0, r)$  en un temps inférieur à  $\alpha$ . Alors entre  $t_0$  et le premier instant  $t_1$  où  $x$  sort de  $B(u_0, r)$ ,  $|\dot{x}(t)|$  prend, d'après l'inégalité des accroissements finis, des valeurs supérieures à  $(r - \delta)/\alpha > M$ . Ceci est absurde puisque tant que  $x$  est dans  $B(u_0, r)$ , on a  $|\dot{x}(t)| = |X(t, x)| \leq M$ .  $\square$

*Remarques 2.1.* (A) Notons que les conditions pour que  $T_u$  vérifie les hypothèses de Picard sont que  $k\alpha < 1$  et  $\alpha M + \delta < r$ . Lorsque  $X, t_0, u$  varient ces conditions restent vérifiées pour des valeurs voisines des conditions initiales.

(B) Un argument un peu plus fin (exercice (B)) permet de dire que la taille de l'intervalle de définition ne dépend que de  $r$  et  $M$  et non de la constante de Lipschitz  $k$ . En effet, pour que  $T_u$  soit définie de  $C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, B(u_0, r))$  dans lui-même il suffit de choisir  $\alpha$  et  $\delta$  vérifiant  $\alpha M + \delta < r$ . On peut par exemple prendre  $\alpha = \frac{r}{2M}$ ,  $\delta = \frac{r}{2}$  qui ne dépendent que de  $M$  et  $r$ . Alors, comme on le verra dans la démonstration du théorème 2.6,  $T_u^n$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{\alpha^n k^n}{n!}$ , donc pour  $n$  assez grand,  $T_u^n$  est contractante. D'après le corollaire 1.10 du théorème de Picard,  $T_u$  admet un point fixe unique, c'est à dire que le problème de Cauchy a une solution unique.

Le théorème de Picard à paramètres va nous permettre de montrer que si une famille  $\lambda \rightarrow X_\lambda$  d'équations différentielles dépend de manière  $C^k$  de  $\lambda$ , la solution  $x_\lambda$  dépend aussi de manière  $C^k$  de  $\lambda$ .

Nous pouvons être plus précis, en notant que la condition initiale peut aussi être considérée comme un paramètre. Rappelons que comme dans le chapitre 1, lorsqu'une famille d'applications est dite lipschitzienne il est sous-entendu que la constante de Lipschitz dépend continûment des paramètres.

Soit de nouveau  $\Lambda$  un ouvert d'un espace métrique si  $p = 0$ , d'un espace de Banach si  $p \geq 1$ , .

**Théorème 2.3 (Cauchy-Lipschitz à paramètres).** *Soit  $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$  une application de classe  $C^p$ , avec  $p \geq 0$ , définie sur  $\Lambda \times I \times \Omega$ , lipschitzienne en  $x$ . Pour tout  $(\lambda_0, \tau_0, u_0)$ , il existe  $\delta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que quel que soit  $(\lambda, t_0, u)$  dans  $B(\lambda_0, \delta) \times ]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[ \times B(u_0, \delta)$ , l'unique solution  $x_\lambda(t; t_0, u)$  de*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X_\lambda(t, x) \\ x(t_0) &= u \end{cases}$$

soit définie sur  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ . De plus l'application  $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^p$ , et de classe  $C^{p+1}$  en  $t$ .

*Remarque 2.2.* Notons que le lemme n'affirme pas que  $(t, \zeta) \rightarrow z_\zeta(t)$  est de classe  $C^p$ , ce qui sera vrai d'après le théorème, mais le mélange de dépendances en  $t$  et  $\zeta$  compliquerait la démonstration.

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas  $p = 0$ . La solution  $x$  est point fixe de  $T_{\lambda, t_0, u}(x)$  où on a posé

$$T_{\lambda, t_0, u}(x)(t) = u + \int_{t_0}^t X_\lambda(s, x(s)) ds$$

Comme cette application est continue en les paramètres  $(\lambda, t_0, u)$ , on en déduit d'après le théorème de Picard à paramètres, que l'application de  $\Lambda \times I \times \Omega$  à valeurs dans  $C^0(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, E)$  donnée par

$$(\lambda, t_0, u) \longrightarrow x_\lambda(\bullet; t_0, u)$$

est continue et donc que

$$(t, \lambda, t_0, u) \longrightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$$

est continue.

On suppose maintenant  $p \geq 1$ . On va se ramener au cas où le paramètre intervient exclusivement dans la condition initiale. Dans ce cas le lemme suivant résout notre problème :

**Lemme 2.4.** *On considère l'équation*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Z(t, z(t)) \\ z(t_0) = \zeta \end{cases}$$

où  $(t, z) \longrightarrow Z(t, z)$  est de classe  $C^p$ . Alors la solution  $z_{\zeta, t_0}(t)$  fournie par le théorème 2.1 est telle que  $(t_0, \zeta) \longrightarrow z_{\zeta, t_0}$  est de classe  $C^p$  à valeurs dans  $C^0([\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha])$ .

*Démonstration.* L'application  $z_{\zeta, t_0}$  est un point fixe de

$$T_{\zeta, t_0}(z)(t) = \zeta + \int_{t_0}^t Z(s, z(s)) ds$$

Or  $(\zeta, t_0, z) \longrightarrow T_{\zeta, t_0}(z)$  de  $\Lambda \times ]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[ \times C^0([\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha], E)$  à valeurs dans  $C^0([\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha], E)$  est de classe  $C^p$  (d'après l'exercice (W) du chapitre 1) et donc  $(t_0, \zeta) \longrightarrow z_{\zeta, t_0}(t)$  est de classe  $C^p$  d'après le théorème de Picard à paramètres.

□

Montrons maintenant que le cas général se ramène à celui où les paramètres apparaissent seulement dans le temps et la condition initiale. Pour montrer que l'application

$$(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$$

est de classe  $C^p$ , on va considérer  $y_{(\tau, \lambda, t_0, u)}(t) = x_\lambda(t - \tau + t_0; \lambda, t_0, u)$  qui satisfait l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = X_\lambda(t - \tau + t_0, y(t)) \\ y(\tau) = u \end{cases}$$

D'après le lemme,  $(\tau, \lambda, t_0, u) \longrightarrow y_{(\tau, \lambda, t_0, u)}(t)$  est de classe  $C^p$ , donc  $(\tau, \lambda, t_0, u) \longrightarrow y_{(\tau, \lambda, t_0, u)}(0) = x_\lambda(-\tau + t_0; \lambda, t_0, u)$  est de classe  $C^p$ . Comme  $(t, \lambda, t_0, u) \longrightarrow (t_0 - t, \lambda, t_0, u)$  est de classe  $C^\infty$ , on en déduit par composition que  $(t, \lambda, t_0, u) \longrightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^p$ .

Comme  $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^p$ , par composition  $t \rightarrow X_\lambda(t, x_\lambda(t; t_0, u))$  et est de classe  $C^p$  et donc  $\dot{x}_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^p$  ce qui signifie que  $t \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^{p+1}$ . □

*Remarques 2.2.* (A) Sauf la précision sur le domaine de définition de  $x$ , on peut résumer l'énoncé en disant simplement que  $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est  $C^p$ . Le théorème permet en outre d'affirmer que lorsque les paramètres varient au voisinage de valeurs fixes, il existe un intervalle d'existence commun à toutes les solutions.

(B) Notons que l'on a seulement régularité en fonction des paramètres pour la restriction de la solution à un voisinage de la condition initiale. Montrer cette régularité pour  $t$  dans un intervalle arbitraire demande un argument supplémentaire (cf. proposition 4.3 du chapitre 4.7).

- (C) Certains problèmes de régularité des solutions en fonction des paramètres ne relèvent pas exactement du théorème ci-dessus, tout en étant justiciables de méthodes analogues. Par exemple si  $a_0(t), a_1(t)$  sont des fonctions seulement continues, peut-on dire que les solutions de

$$\ddot{x}(t) + (a_0(t) + \lambda a_1(t))x(t) = 0$$

dépendent de manière  $C^\infty$  de  $\lambda$  (tout en n'étant pas mieux que  $C^2$  en  $t$ ).

Plus généralement, on peut considérer le cas où  $(\lambda, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$  est de classe  $C^p$  alors que  $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$  n'est que de classe  $C^0$ . L'application  $(\lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda$  à valeur dans  $C^0([\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta], \Omega)$  est-elle de classe  $C^p$ ? La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz (th. 2.1) et l'utilisation du théorème de Picard à paramètres (th. 1.11 du chapitre 1) montrent que l'application  $(\lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda$  à valeurs dans  $C^0([\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta], \Omega)$  est bien de classe  $C^p$ . Mais alors, on a mieux,

$$(\lambda, t_0, u) \rightarrow \dot{x}_\lambda(\bullet; t_0, u) = X_\lambda(\bullet, x_\lambda(\bullet; t_0, u))$$

est composée de  $(\lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(\bullet; t_0, u)$  et de l'application de  $C^0([\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta], \Omega)$  dans lui-même qui à  $x(\bullet)$  associe  $X_\lambda(\bullet, x(\bullet))$  qui est aussi de classe  $C^p$ . Donc

$$(\lambda, t_0, u) \rightarrow \dot{x}_\lambda(\bullet; t_0, u)$$

est de classe  $C^p$ , ce qui signifie que  $(\lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(\bullet; t_0, u)$ , comme application à valeurs dans  $C^1([\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta], \Omega)$ , est de classe  $C^p$ .

On verra dans le chapitre 5 sur la théorie des perturbations, comment calculer les différentielles de  $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$ .

## 3 Compléments : Equations intégrales et équations de Sturm-Liouville

### 3.1 Équations de Fredholm et Volterra

Nous allons appliquer le théorème de Picard à l'étude des équations intégrales dites de Fredholm. Étant données deux fonctions  $g, K$  dont on précisera le domaine de définition et la régularité, on cherche un réel  $\lambda$  et une fonction  $f$  telles que

$$f(t) + \lambda \int_a^b K(s, t)f(s)ds = g(t)$$

Pour simplifier, fixons  $a = 0, b = 1$ , et on suppose  $f$  et  $g$  continues à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{R}^n$ , les hypothèses sur  $K$  seront précisées ultérieurement<sup>2</sup>).

<sup>2</sup>Si  $f, g$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  on supposera  $K$  à valeurs dans  $M_n(\mathbb{R})$

Un cas particulier des équations de Fredholm est donné par les équations de Volterra, pour lesquelles  $K(s, t) = 0$  pour  $s > t$ . Elles s'écrivent donc

$$f(t) + \lambda \int_0^t K(s, t) f(s) ds = g(t)$$

Pour que  $t \rightarrow \int_0^t K(s, t) f(s) ds$  soit continue, il suffit, d'après la théorie de Lebesgue, que  $K$  soit mesurable, bornée, et que  $t \rightarrow K(s, t)$  soit continue<sup>3</sup> pour presque tout  $s$ . Ce sont les hypothèses que nous adopterons.

**Proposition 2.5** (V. Volterra). *Soit  $g$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , et  $(s, t) \rightarrow K(s, t)$  mesurable, bornée et telle que  $K(s, t) = 0$  pour  $s > t$ . On suppose de plus  $t \rightarrow K(s, t)$  continue pour presque tout  $s$  dans  $[0, 1]$ . Alors, quel que soit le réel  $\lambda$ , l'équation de Volterra*

$$f(t) + \lambda \int_0^t K(s, t) f(s) ds = g(t)$$

*possède une solution unique.*

*Démonstration.* On va appliquer le corollaire du théorème de Picard. Pour cela calculons  $T_g^n$  où

$$(T_g f)(t) = g(t) - \lambda \int_0^1 K(s, t) f(s) ds$$

est une application de  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  dans lui-même, en vertu de la continuité de  $g$  et du théorème de Lebesgue cité. Comme  $T_g$  est une application affine, de partie linéaire  $(T_0 f)(t) = -\lambda \int_0^1 K(s, t) f(s) ds$ ,  $T^n$  a pour partie linéaire  $T_0^n$ , et elle est contractante si et seulement si  $T_0^n$  l'est.

Posons

$$\chi(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t \\ 1 & \text{si } s \leq t \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} |(T_0^n f)(t)| &= (|\lambda|)^n \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n \text{ fois}} K(s_n, s_{n-1}) K(s_{n-1}, s_{n-2}) \cdots K(s_1, t) |f(s_1)| ds_n \cdots ds_1 \\ &\leq (|\lambda|)^n M^n \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \cdots \chi(s_1, t) |f(s_1)| ds_n \cdots ds_1 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>il suffit en fait que (a)  $t \rightarrow K(s, t)$  soit continue pour presque tout  $s$ , (b)  $s \rightarrow K(s, t)$  soit mesurable pour tout  $t$ , (c) il existe  $\varphi \in L^1$  telle que pour tout  $t$ ,  $|K(s, t)| \leq \varphi(s)$  hors d'un ensemble de mesure nulle.

On doit donc calculer

$$\int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) |f(s_1)| ds_n \dots ds_1 \leq \|f\| \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) ds_n \dots ds_1$$

En posant

$$I_n(t) = \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) ds_n \dots ds_1$$

on vérifie aisément que  $I_0(t) = 1$ , et que

$$I_{n+1}(t) = \int_0^t I_n(s) ds$$

et par récurrence que  $I_n(t) = \frac{t^n}{n!}$ . Donc

$$\|T_0^n f\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{n!} \|f\|_\infty$$

et comme pour  $n$  assez grand  $\frac{|\lambda|^n M^n}{n!}$  est strictement inférieur à 1,  $T_0^n$  sera alors contractante. Il en est de même pour  $T_g^n$  dont  $T_0^n$  est la partie linéaire, et  $T_g$  a donc, d'après le corollaire de Picard, un unique point fixe, solution de l'équation de Volterra.  $\square$

*Remarques 3.1.* (A) Si on ne suppose pas  $K(s, t) = 0$  pour  $s > t$ , on obtient seulement  $\|T_0^n f\| \leq \lambda^n M^n$ , et on trouve donc une solution de l'équation de Fredholm pour  $\lambda$  assez petit.

(B) Le même argument de convergence dominée permet de dire que si  $K_n(s, t)$  est une suite de fonctions vérifiant les hypothèses du théorème de Volterra, bornées par une constante indépendante de  $n$  et telles que

$$\lim_n K_n(s, t) = K_\infty(s, t)$$

alors les solutions de l'équation de Volterra associée à  $K_n$  convergent uniformément vers celle associée à  $K_\infty$ . En effet l'opérateur  $T_n$  associé à  $K_n$  converge vers  $T_\infty$  associé à  $K_\infty$  et la conclusion résulte de la continuité dans le théorème de Picard.

(C) Ces équations interviennent par exemple dans le calcul de la déformation d'un solide visco-élastique en fonction des contraintes appliquées. Elles interviendront aussi dans l'étude des équations de Sturm-Liouville de la sous-section suivante.

(D) Les équations de Volterra ou de Fredholm sont linéaires! On a donc simplement montré que  $I - \lambda T$  a un inverse si  $\|T^n\| \leq \frac{K^n}{n!}$ , ce qui résulte de la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n T^n$ .

Nous allons traiter maintenant le cas des équations de Volterra non-linéaires.

Considérons les conditions suivantes sur  $K(s, t, f)$  :

(V1)  $f \rightarrow K(s, t, f)$  est lipschitzienne de constante  $k$  et  $|K(s, t, f)| \leq g(|f|, s)$  où  $\forall e \in \mathbb{R} \quad g(e, \bullet) \in L^1$ .

(V2)  $(s, f) \rightarrow K(s, t, f)$  est mesurable pour tout  $t$ .

(V3)  $t \rightarrow K(s, t, f)$  est continue p.p. en  $s$ .

(V4)  $K(s, t, f) = 0$  si  $s > t$ .

**Proposition 2.6** (Volterra non-linéaire). *Sous les hypothèses (V1), (V2), (V3), (V4), l'équation*

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(s, t, f(s)) ds$$

*possède une solution unique.*

*Démonstration.* Sous la condition (V4) l'équation s'écrit

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(s, t, f(s)) ds$$

Posons encore

$$\begin{aligned} (Tf)(t) &= g(t) - \lambda \int_0^1 K(s, t, f(s)) ds \\ &= g(t) + (T_0f)(t) \end{aligned}$$

Les conditions (V1) (V2) et (V3) et le théorème de Lebesgue entraînent que l'application  $T$  envoie  $C^0([0, 1], E)$  dans lui-même. On a alors

$$\begin{aligned} |(Tf_1)(t) - (Tf_2)(t)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_0^1 K(s, t, f_1(s)) - K(s, t, f_2(s)) ds \right| \\ &\leq |\lambda| k \int_0^1 \chi(t, s) |f_1(s) - f_2(s)| ds \end{aligned}$$

où  $k$  est la constante de Lipschitz de  $K(s, t, \cdot)$ .

On en déduit que

$$|T^n f_1(t) - T^n f_2(t)| \leq |\lambda|^n k^n \int_0^1 \dots \int_0^1 \chi(t, s_1) \dots \chi(s_{n-1}, s_n) |f_1(s_n) - f_2(s_n)| ds_1 \dots ds_n$$

Comme on l'a vu dans le cas linéaire,

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \chi(t, s_1) \dots \chi(s_{n-1}, s_n) ds_1 \dots ds_n = \frac{1}{n!}$$

et donc pour  $n$  assez grand,  $T^n$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{\lambda^n k^n}{n!}$ . Elle est donc contractante pour  $n$  assez grand, et d'après le corollaire du théorème de Picard,  $T$  admet un point fixe unique.  $\square$

Notons que la démonstration de Cauchy-Lipschitz consiste à se ramener à une équation de Volterra non linéaire, car

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

se réécrit

$$x(t) = x_0 + \int_0^1 \chi(t, s) X(s, x(s)) ds .$$

### 3.2 Application aux équations de Sturm-Liouville

Les équations de Volterra permettent aussi d'aborder l'étude des **équations de de Sturm-Liouville**, c'est-à-dire d'équations du second ordre avec conditions aux limites, L'exemple type est

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{u} + q(t)u(t) = -\lambda u(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dont on cherche les solutions  $(\lambda, u)$ , avec bien entendu  $u$  de classe  $C^2$ , non identiquement nulle. On appelle alors  $\lambda$  **valeur propre** et  $u$  **fonction propre** du problème. On supposera  $q$  continue.

Pour  $v$  fixé, la solution générale de  $\ddot{u}(t) + \lambda u(t) = v(t)$  peut s'écrire<sup>4</sup>, si  $\lambda \neq 0$ ,

$$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t) + \int_0^t v(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} ds$$

Alors l'équation

$$\ddot{u}(t) + q(t)u(t) = -\lambda u(t)$$

est équivalente à

$$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t q(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} u(s) ds$$

avec  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ .

---

<sup>4</sup>Vérifier la formule, qui n'est que l'application de la méthode de variation de la constante (voir chapitre 3, section 2.2). Si  $\lambda = 0$  on a  $u(t) = \int_0^t (t-s)v(s) ds$ .

La condition  $u(0) = 0$  est équivalente à  $a = 0$ , et donc l'équation (3) se réécrit

$$(3') \quad \begin{cases} u(t) = b \sin(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t q(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} u(s) ds \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

de fonction inconnue  $u$ .

La première ligne est une équation de Volterra, qui a donc une unique solution, notée  $u_{b,\lambda}$ . Comme  $u_{b,\lambda} = bu_{1,\lambda}$ , résoudre (3) se ramène à trouver  $\lambda$  telle que  $u_{1,\lambda}(1) = 0$ .

On peut remarquer que

$$T_\lambda : y \rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t q(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} y(s) ds$$

envoie  $C^0([0, 1], [-A, A])$  dans  $C^0([0, 1], [-B, B])$  avec

$$B = 1 + \frac{A}{\sqrt{\lambda}} \max_{[0,1]} |q(s)|$$

Pour  $A$  et  $\lambda$  assez grands,  $B \leq A$  et la fonction  $u_{1,\lambda}$ , point fixe de  $T_\lambda$ , est non-nulle, et bornée par  $A$ .

On en déduit que  $u_{1,\lambda}$  est uniformément bornée indépendamment de  $\lambda$ , et donc lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ,

$$u_{1,\lambda}(1) = \sin(\sqrt{\lambda}) + O(1/\sqrt{\lambda})$$

change de signe une infinité de fois, et donc s'annulera une infinité de fois. Ceci démontre l'existence d'une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de valeurs de  $\lambda$  tendant vers l'infini, pour lesquelles notre problème a une solution.

**Proposition 2.7.** *Soit  $q$  une fonction continue. Alors l'équation de Sturm-Liouville (3) possède une suite  $(\lambda_n, u_n)_{n \geq 1}$  de solutions telle que  $u_n$  soit bornée, et  $\lambda_n$  tende vers l'infini.*

*Remarques 3.2.*

- (A) On verra une estimation plus précise de ces valeurs propres  $\lambda_n$  dans l'exercice (I) et une approche géométrique de l'équation de Sturm-Liouville dans l'exercice (W) du chapitre 3.
- (B) Il faut souligner l'importance historique des équations intégrales, et surtout de la formulation intégrale des équations différentielles. Même si les premiers résultats d'existence générale pour les équations différentielles ordinaires, concernaient des fonctions analytiques et furent démontrés par une autre méthode, l'idée de ramener une équation différentielle à une équation intégrale, développée dans la seconde

moitié du 19ème siècle, fut un progrès essentiel. En particulier la démonstration d'existence des solutions de l'équation de Laplace avec condition au bord

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

fut complètement résolue par Ivar Fredholm en utilisant la théorie des équations intégrales portant son nom.

- (C) On peut évidemment regarder des équations pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel  $E$ . La théorie est en tous points identique, et nous laissons au lecteur le soin de la développer.

## 4 Exercices

### Cauchy-Lipschitz

- (A) Soit  $F : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$  une application localement lipschitzienne, c'est-à-dire que tout point possède un voisinage sur lequel  $F$  est lipschitzienne. Montrer que si  $K$  est compact dans  $X$ , l'application  $F$  est lipschitzienne sur un voisinage de  $K$ .
- (B) Soit  $T$  l'application définie dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz. Montrer que si  $\alpha M + \delta < r$ , l'application  $T^n$  a pour constante de Lipschitz  $\alpha \frac{k^n}{n!}$  (on pourra se référer aux calculs sur les équations de Volterra). En déduire existence et unicité des solutions sur un intervalle dont la taille ne dépend que de  $r$  et  $M$  et pas de la constante de Lipschitz  $k$ .
- (C) Soit  $K \subset \Omega$  un compact. Montrer que si les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées dans  $I \times \Omega$ , pour tout  $t_0 \in I$ , il existe un  $\alpha$  strictement positif, tel que pour tout  $u_0 \in K$ , la solution de (1) soit définie sur  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$  (en d'autres termes pour toute condition initiale dans  $K$ , l'intervalle de définition est de longueur minorée par une constante strictement positive).
- (D) Le but de cet exercice est d'utiliser ce qui précède pour donner une version analytique du théorème de Cauchy-Lipschitz.

On considère  $f(t, x)$  développable en série entière en  $t, x$ , et convergeant sur le produit d'un disque de rayon  $\rho$  (en  $t$ ) et  $R$  en  $x$ . En d'autres termes,

$$f(t, x) = \sum_{j,k=0}^{\infty} f_{j,k} t^j x^k$$

avec  $\|f\|_{\rho,R} = \sum_{j,k=0}^{\infty} |f_{j,k}| \rho^j R^k < \infty$  pour  $\rho$  et  $R$  fixés.

On veut montrer que l'équation différentielle

$\dot{x} = f(t, x), x(0) = 0$  possède une solution analytique dans un disque de rayon  $\sigma$ , pour  $\sigma$  assez petit.

On note  $X_\sigma$  l'ensemble des séries entières de rayon de convergence au moins  $\sigma$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts<sup>5</sup>

<sup>5</sup>si on sait ce qu'est une suite convergente, il n'est pas indispensable d'expliciter la métrique.

- (a) Montrer que l'application  $T$  qui à  $x$  dans  $X_\sigma$  vérifiant  $\forall \lambda \quad |x(\lambda)| \leq R' < R$  ( $\sigma \leq \rho$ ) associe la primitive <sup>6</sup>  $T(x) = \int_0^z f(z, x(z))dz$  de  $f(z, x(z))$ , envoie la boule de rayon  $R$  de  $X_\sigma$  dans la boule de rayon  $\sigma\|f\|$ .
- (b) Conclure en appliquant la version analytique de Picard de l'exercice (K).
- (E) Peut-on résoudre le problème de Cauchy avec les hypothèses

$$\forall x \in \Omega |X(t, x)| \in L^1(I)$$

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, |X(t, x) - X(t, y)| \leq k(t)|x - y|$$

avec  $k \in L^1(I)$ ? En quel sens a-t-on des solutions?

(F) (**Théorème de Peano**)

Soit  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  une équation différentielle où  $X$  est seulement supposé continu. On veut montrer que cette équation a une solution pour  $x(t_0) = x_0$ .

- (a) Montrer que si  $X_n$  est une suite de fonctions  $C^1$  telle que  $\lim_n X_n = X$ , alors sur tout borné de  $I \times \mathbb{R}^n$ , les solutions  $x_n$  données par Cauchy-Lipschitz sont équicontinues (voir exercice (S) du chapitre 1) et définies sur un intervalle commun.
- (b) En déduire qu'on peut extraire de la suite  $(x_n)$  une suite de fonctions qui converge uniformément vers  $x$ .
- (c) Montrer que  $x$  est solution de  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ . La solution est-elle unique?
- (G) On considère l'équation

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x)$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Que dire des solutions lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0? Tendent-elles et en quel sens vers une solution de  $f(t, x) = 0$ ? Quel rôle jouent les conditions initiales?

On pourra traiter des exemples, comme

$$\varepsilon \dot{x} = x(e^x - 2)$$

$$\varepsilon \dot{x} = (x - t)^2$$

Le théorème de Cauchy à paramètres permet-il d'étudier la limite en  $\varepsilon = 0$  de ces équations?

- (H) (a) Utiliser le principe de Bernoulli <sup>7</sup> pour montrer que la hauteur d'eau d'un réservoir dont le fond est percé d'un orifice, vérifie une équation du type  $\dot{h}(t) = -C\sqrt{h(t)}$ , où  $C$  est une constante dépendant des paramètres physiques (densité du liquide, taille du trou, etc....).
- (b) Montrer qu'une telle équation a plusieurs solutions, et en particulier une solution telle que  $h(t) = \frac{C^2}{4}(t - T)^2$  pour  $t \leq T$  et  $h(t) = 0$  si  $t \geq T$ . Quel est le sens physique de la non-unicité de la solution? Connaissant l'état du réservoir à l'instant  $t_0$ , peut-on en déduire son état à n'importe quel autre instant?

<sup>6</sup>par primitive d'une série entière  $\sum_{j=0}^{\infty} a_n z^n$  on entend la série  $\int_0^z \sum_{j=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ .

<sup>7</sup>Ce principe affirme que pour un fluide, si  $P$  est la pression,  $\rho$  la densité,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $v$  la vitesse du fluide,  $h$  sa hauteur,  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + gh$  est la même en tous points du fluide. Il se démontre aisément en considérant que le travail effectué par la pression sur une volume infinitésimal de fluide égale la somme des variations de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

## Volterra et Sturm-Liouville

- (I) (a) Soit  $f$  une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\|f - \sin\|_0 \leq \varepsilon$  et  $\|f' - \cos\|_0 \leq 1/2$  pour  $\varepsilon$  assez petit<sup>8</sup>. Montrer que les zéros de  $f$  forment un ensemble discret, et que la distance entre deux zéros consécutifs de  $f$  est égale à  $\pi + O(\varepsilon)$ .
- (b) On considère l'équation de Sturm-Liouville de la sous-section 3.2 :

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{u} + q(t)u(t) = -\lambda u(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où la fonction  $q$  est supposée continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . En étudiant la dérivée par rapport à  $\lambda$  de  $u_{1,\lambda}$ , définie à la sous-section 3.2, démontrer que pour  $\lambda$  assez grand, l'ensemble des valeurs propres de (3) est discret, et que si on note  $\lambda_n$  la  $n$ -ième de ces valeurs propres, on a  $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O(1/\sqrt{\lambda_n})$ . En déduire que  $\lambda_n = n^2\pi^2 + O(1)$ .

- (c) On suppose maintenant  $q$  de classe  $C^1$  et normalisé de manière à ce que  $\int_0^1 q(s)ds = 0$ . En déduire que  $\lambda_n = n^2\pi^2 + O(1/n)$ .

Indication : après avoir montré que  $u_{1,\lambda}(t) = \sin(\sqrt{\lambda}t) + \frac{a(\lambda, t)}{\sqrt{\lambda}}$  où  $a(\lambda, t)$  est bornée, on substitue dans (3') pour obtenir

$$\frac{a(\lambda, t)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t q(s) \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) \left[ \sin(\sqrt{\lambda}s) + \frac{a(\lambda, s)}{\sqrt{\lambda}} \right] ds$$

soit

$$\begin{aligned} a(\lambda, t) &= \int_0^t q(s) \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) \sin(\sqrt{\lambda}s) ds + O(1/\sqrt{\lambda}) = \\ &= \cos(\sqrt{\lambda}t) \int_0^t q(s) ds - \int_0^t q(s) \sin(\sqrt{\lambda}(t-2s)) ds + O(1/\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^1 q(s) \sin(\sqrt{\lambda}(t-2s)) ds = O(1/\sqrt{\lambda})$$

d'où  $a(\lambda, 1) = O(1/\sqrt{\lambda})$  et donc  $u_{1,\lambda}(1) = 0$  s'écrit

$$\sin(\sqrt{\lambda}) + O(1/\lambda) = 0$$

soit

$$|\sqrt{\lambda_n} - n\pi| \leq O(1/n^2)$$

On en déduit

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + O(1/n)$$

- (d) Si  $q$  est de classe  $C^2$  donner les termes suivants du développement limité de  $\lambda_n$ .

---

<sup>8</sup>Rappel :  $\|\bullet\|_0$  désigne la norme  $C^0$  sur les fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$ .

(J) Soit l'équation **quasi-linéaire**

$$(4) \quad \begin{cases} \ddot{u} + q(t)\cos(u(t)) = -\lambda u(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Comme pour le cas de l'équation de Sturm-Liouville on cherche les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles il existe une solution non-nulle.

(a) Montrer que  $u$  est solution de cette équation si et seulement si elle vérifie

$$u(t) = b \sin(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} q(s) \cos(u(s)) ds$$

avec  $u(1) = 0$ .

(b) Montrer que l'équation

$$u(t) = b \sin(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s))}{\sqrt{\lambda}} q(s) \cos(u(s)) ds$$

possède une unique solution  $u_{b,\lambda}(t)$ , de classe  $C^\infty$ .

(c) Montrer que si  $\lambda \neq n^2\pi^2$ , l'application  $b \rightarrow u_{b,\lambda}(1)$  possède au moins un zéro sur  $\mathbb{R}$ . En déduire que l'équation (4) possède une solution pour tout  $\lambda \notin \{n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Chapitre 3

# Équations différentielles linéaires

Les équations différentielles **linéaires** constituent les modèles les plus simples d'équations différentielles. Celles à coefficients constants constituent la seule classe générale que l'on sache explicitement résoudre en toute dimension. Leur importance vient de ce que le plus souvent, on ne sait calculer explicitement qu'en se ramenant à des équations de ce type. De plus, d'un point de vue qualitatif, on voit déjà apparaître les propriétés essentielles des équations plus générales, en particulier sur les questions de stabilité.

Les systèmes linéaires à coefficients variables ne possèdent pas en général de solutions explicites. Ils permettent de modéliser des phénomènes plus complexes que les équations à coefficients constants, comme les propriétés les plus simples du pendule, ou de la propagation du courant électrique dans un cristal, et d'approcher les systèmes généraux avec plus de finesse que les équations à coefficients constants. Elles interviennent surtout dans la théorie des perturbations des équations non-linéaires qui sera l'objet des chapitres suivants.

Tout d'abord, mentionnons que lorsqu'on ramène un système linéaire d'ordre  $n$  à un système du premier ordre, celui-ci est encore linéaire. En effet l'équation  $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x'(t) + p_n(t)x(t) = b(t)$  se réécrit  $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ , où

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & \dots & \dots & -p_1(t) \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

*Exemple 0.1.* L'équation du second ordre scalaire  $\ddot{x} + \omega(t)x$  où  $x \in \mathbb{R}$  se ramène à l'équation du premier ordre sur le plan

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -\omega(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

# 1 Équations linéaires à coefficients constants

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients réels (resp. complexes). On considère l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ).

Cette équation se résout explicitement par

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

où on a posé

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^j}{j!}.$$

**Attention** En général, si  $A$  et  $B$  ne commutent pas  $e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$

La norme sur  $M_n(\mathbb{R})$  (resp.  $M_n(\mathbb{C})$ ) définie par

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$$

vérifie  $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$ , d'où  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  et donc la série définissant  $e^{tA}$  est convergente.

Notons que si on remplace  $A$  par une matrice équivalente (i.e. représentant la même application linéaire dans une autre base)  $A' = P^{-1}AP$ , on a  $A'^n = P^{-1}A^n P$  d'où

$$e^{tA'} = P^{-1}e^{tA}P$$

Donc si  $A$  est diagonalisable, et  $D = P^{-1}AP$  s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on aura

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

et  $e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ .

En général,  $A$  n'est pas diagonalisable mais possède d'après l'appendice 6 une décomposition (unique) de la forme

$$A = D + N$$

où

- (i)  $D$  est diagonalisable (sur  $\mathbb{C}$ )
- (ii)  $N$  est nilpotente (i.e. il existe  $k$ , tel que  $N^{k+1} = 0$ )
- (iii)  $D$  et  $N$  commutent.

Après changement de base complexe,  $D$  et  $N$  se décomposent en blocs, sur lesquels  $D$  a une seule valeur propre, donc se ramène<sup>1</sup> à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

tandis que  $N$  est constituée de blocs triangulaires supérieurs, de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors  $e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = e^{tN}e^{tD}$ , où

- $e^{tD}$  se calcule comme plus haut
- $e^{tN} = I + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kN^k$

## 1.1 Méthodes pratiques

Si on ne cherche qu'une solution de (1), la méthode la plus simple est la suivante :

- si  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{C}$ ), soient  $v_1, \dots, v_n$  les vecteurs propres de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

La solution générale de (1) s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{t\lambda_j} v_j \quad c_j \in \mathbb{R}(\text{resp. } \mathbb{C})$$

On résout (1) en calculant les  $c_j$ , solutions du système linéaire

$$x_0 = \sum_{j=1}^n c_j v_j$$

---

<sup>1</sup>Cet énoncé, légèrement moins précis que celui « de la forme normale de Jordan », lui est essentiellement équivalent. Dans la pratique c'est la décomposition triangulaire supérieure de  $N$  qui est utile, sa réduction à la forme de Jordan demandant souvent plus de travail qu'il n'en économise.

[Ceci « économise » une inversion de matrice par rapport à la diagonalisation de  $A$ , résoudre le système  $x_0 = \sum_{j=1}^n c_j v_j$  « coûte moins cher » que d'inverser la matrice dont les colonnes sont les  $v_j$ ].

- si  $A$  a des valeurs propres  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ), dont les blocs nilpotents associés sont de taille inférieure à  $\nu_j$ , la solution générale sera combinaison linéaire de termes de la forme

$$e^{t\lambda_j} (v_{j,r} + t(A - \lambda_j I)v_{j,r} + \cdots + \frac{t^{\nu_j-1}}{(\nu_j - 1)!} (A - \lambda_j I)^{\nu_j-1} v_{j,r})$$

où les  $v_{j,r}$  ( $1 \leq r \leq q$ ) forment une base de  $\ker(A - \lambda_j I)^{\nu_j}$ .

Par exemple, si  $A$  possède une valeur propre double  $\lambda_1$ , et des valeurs propres simples  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ , et n'est pas diagonalisable, on peut choisir des vecteurs  $v_1, v_2$  tels que

$$(A - \lambda_1)v_1 = 0, (A - \lambda_1)v_2 = v_1$$

et la solution générale de l'équation sera de la forme

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_2 t v_1) + \sum_{j=3}^n c_j e^{\lambda_j t} v_j$$

où les  $c_j$  sont dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Lorsqu'on recherche la forme générale d'une solution, il vaut alors la peine de procéder à la réduction de la matrice  $A$  sous la forme  $D + N$ .

Si on ne s'intéresse qu'au comportement qualitatif, un portrait de phase est parfois suffisant.

## 1.2 Portraits de phase des équations linéaires du plan

On appelle trajectoires, les courbes  $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Une équation différentielle ordinaire indépendante du temps, est dite **autonome**.

Dans ce cas, si  $x(t)$  est une solution alors  $x(t - t_0)$  est aussi solution, et par unicité, deux trajectoires distinctes ne se croisent jamais. On appelle portrait de phase le tracé des trajectoires de l'équation. Lorsque  $n = 2$  et  $k = \mathbb{R}$  on peut représenter ces courbes  $x(t)$ , dans le plan. Notons que changer  $A$  en  $-A$ , revient à changer le sens du temps. De même si on change  $A$  en  $A' = P^{-1}AP$ , où  $P$  est un isomorphisme linéaire,  $P^{-1}$  envoie une solution de  $\dot{x} = Ax$  en une solution de  $\dot{y} = A'y$ . Le portrait de phase, ne dépend donc, à isomorphisme linéaire près, que de la classe de conjugaison de la matrice  $A$ . En dimension 2, on peut décrire le portrait de phase de tous les systèmes linéaires à coefficients constants. Ils sont représentés sur la figure 3.1.

- (A) si  $A$  possède deux valeurs propres réelles distinctes, elle se ramène par changement de base à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) \\ \dot{y}(t) = \mu y(t) \end{cases}$$

Les solutions sont les courbes paramétrées  $(x(t), y(t)) = (e^{\lambda t}x_0, e^{\mu t}y_0)$ .

- (a) si les valeurs propres sont de même signe, et  $A$  est diagonalisable, le portrait s'appelle un **nœud stable** si les valeurs propres sont négatives, un **nœud instable** si elles sont positives<sup>2</sup>
- (b) Si les valeurs propres sont de signes opposés, on appelle le portrait une **selle**
- (B) Si  $A$  n'est pas diagonalisable, elle possède une valeur propre double,  $\lambda$ , nécessairement réelle, et l'équation se ramène après changement de base à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = \lambda y(t) \end{cases}$$

et les solutions sont  $y(t) = e^{\lambda t}y_0, x(t) = e^{\lambda t}(x_0 + ty_0)$ , il s'agit d'un **nœud impropre**.

- (C) Enfin si  $A$  a deux valeurs propres complexes conjuguées et distinctes,  $\rho e^{\pm i\alpha}$ , l'équation s'écrit dans une base adaptée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \rho \cos(\alpha)x(t) - \rho \sin(\alpha)y(t) \\ \dot{y}(t) = \rho \sin(\alpha)x(t) + \rho \cos(\alpha)y(t) \end{cases}$$

Il est plus commode de résoudre cette équation en passant en coordonnées polaires,  $x(t) = r(t) \cos(\theta(t)), y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ . On obtient alors

$$\dot{r}(t) = \rho \cos(\alpha)r(t), \quad \dot{\theta}(t) = -\rho \sin(\alpha)$$

Les solutions sont données par

$$r(t) = \exp(\rho \cos(\alpha)t)r_0, \quad \theta(t) = \theta_0 - \rho \sin(\alpha)t$$

Ce sont des spirales logarithmiques si  $\cos(\alpha) \neq 0$ , et on a un **foyer stable** si  $\cos(\alpha) < 0$  et un **foyer instable** si  $\cos(\alpha) > 0$ . Le sens de rotation des spirales est déterminé par le signe de  $\sin(\alpha)$  : trigonométrique si ce signe est positif. Enfin si  $\cos(\alpha) = 0$  les trajectoires sont des cercles, et on a un **centre** .

*Remarques 1.1.* (A) Les valeurs propres vérifiant  $\lambda + \mu = \text{trace}(A), \lambda\mu = \det(A)$ , les différents cas se distinguent en fonction des signes de  $\Delta = \text{trace}(A)^2 - 4 \cdot \det(A), \text{trace}(A)$  :

<sup>2</sup>La terminologie stable/instable sera justifiée à la section 1.3.

$\Delta > 0$	$\det(A) > 0$	$\text{trace}(A) > 0$	:	Noeud instable
$\Delta > 0$	$\det(A) > 0$	$\text{trace}(A) < 0$	:	Noeud stable
$\Delta > 0$	$\det(A) < 0$		:	Selle
$\Delta < 0$	$\text{trace}(A) < 0$		:	Foyer stable
$\Delta < 0$	$\text{trace}(A) > 0$		:	Foyer instable
$\Delta = 0$	$\text{trace}(A) > 0$	$A$ non diagonale	:	Noeud impropre instable
$\Delta = 0$	$\text{trace}(A) < 0$	$A$ non diagonale	:	Noeud impropre stable

(B) Attention, pour un nœud impropre le sens de la figure dépend de l'orientation de  $(v_1, v_2)$  où  $v_1$  est un vecteur propre, et  $v_2$  une solution de  $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ .

De même pour un foyer, le sens de rotation de la spirale dépend du signe de  $\sin(\alpha)$ , où  $\alpha$  est l'angle de rotation de la similitude dans une base positivement orientée.

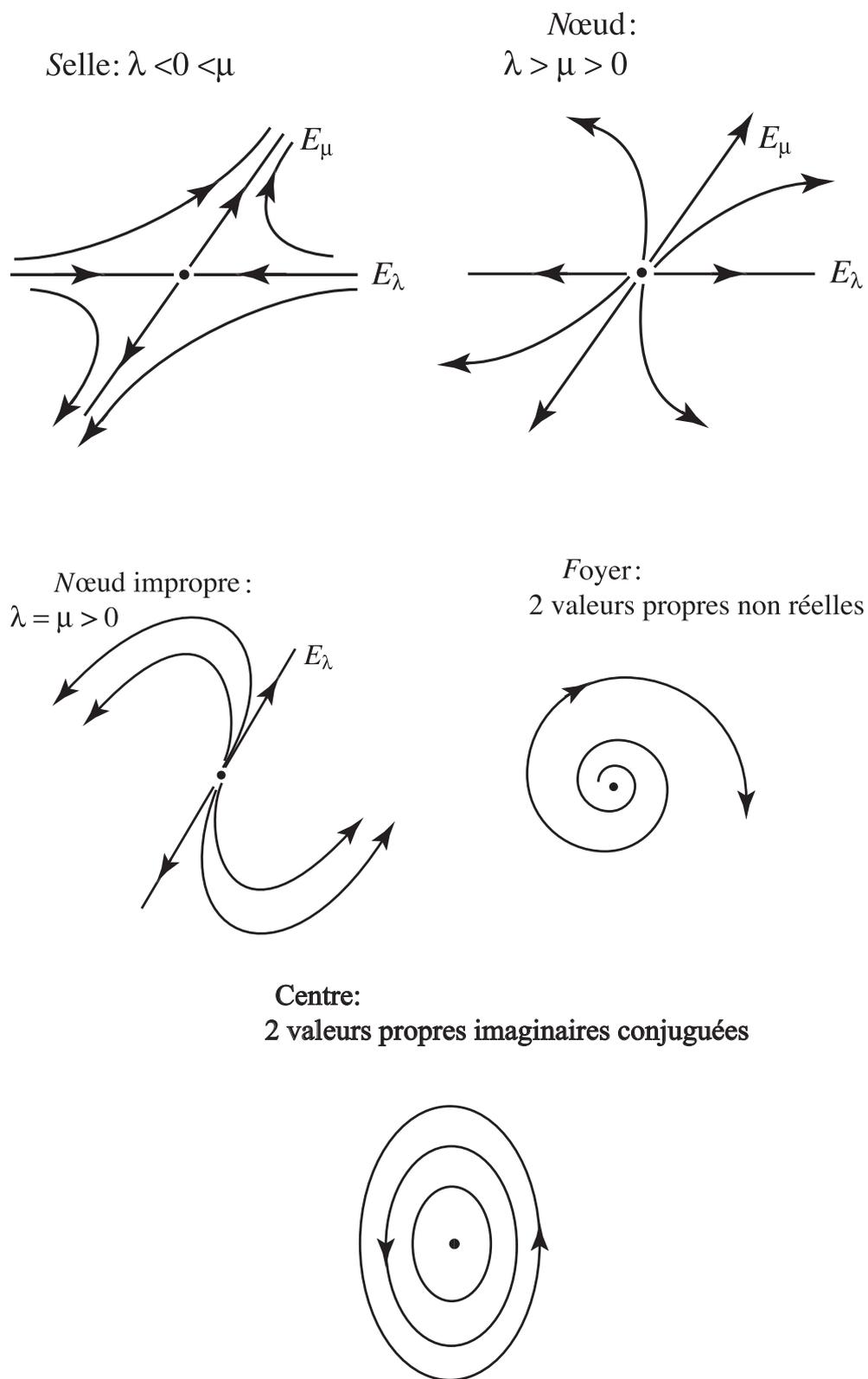


FIG. 3.1 – Portraits de phase de systèmes à coefficients constants dans le plan

### 1.3 Stabilité de l'origine.

On réfère au chapitre 6 (définition 6.1) pour une définition générale de la notion de stabilité pour des équations différentielles non-linéaires. Dans le cas linéaire, la définition suivante, plus simple, est équivalente

**Définition 3.1.** Étant donnée une équation linéaire, on dira que l'origine (ou la solution nulle) est **stable** si toute solution de cette équation reste bornée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  et **asymptotiquement stable** si toute solution vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 .$$

On dira par abus de langage que l'équation est stable (resp. asymptotiquement stable) si sa solution nulle est stable (resp. asymptotiquement stable).

Nous aurons besoin de la définition suivante :

**Définition 3.2.** Soit  $A$  un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe  $E$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable en  $\alpha$**  si pour tout  $q \geq 1$ , on a  $\ker(A - \alpha I)^q = \ker(A - \alpha I)$ , ou encore si le bloc nilpotent correspondant à la valeur propre  $\alpha$  est nul. Pour un endomorphisme réel, on dira qu'il est **diagonalisable en  $\alpha$**  si son complexifié l'est.

On déduit facilement de l'expression explicite des solutions et de la définition précédente la

**Proposition 3.3** (Critère de Routh). *L'origine est asymptotiquement stable pour l'équation à coefficients constants (1) si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.*

*L'origine est stable si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative, et  $A$  est diagonalisable en les valeurs propres de partie réelle nulle.*

*Démonstration.* On voit que si  $A = D + N$  est la décomposition de  $A$  mentionnée précédemment, les coefficients de  $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$  sont combinaisons linéaires de termes de la forme  $t^\nu e^{\lambda_j t}$ , où  $\lambda_j$  est une valeur propre de  $A$ , et  $\nu$  est inférieur à la taille du bloc nilpotent de valeur propre  $\lambda_j$ . Si  $\Re(\lambda_j) < 0$ , toutes les solutions tendent vers 0, car  $t^\nu e^{\lambda_j t}$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Si  $\Re \lambda_j = 0$ , une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions soient bornées est que le bloc nilpotent associé à la valeur propre nulle soit réduit à 0.  $\square$

On généralisera partiellement ce résultat dans le cas à coefficients variables et dans le cas non linéaire (avec certaines restrictions) dans les chapitres suivants.

*Remarque 1.1.* Pour les équations définies sur le plan, les équations pour lesquelles l'origine est stable sont le nœud stable, le nœud impropre stable, et le foyer stable.

## 2 Équations linéaires à coefficients variables.

### 2.1 Théorie générale

Considérons l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

ou  $t \mapsto A(t)$  est une application continue d'un intervalle  $I$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  (ou  $M_n(\mathbb{C})$ ),  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ), et  $t_0 \in I$ .

Cette équation ne possède pas, en général, de solution explicite. En particulier

$$x(t) \neq \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)x_0 \quad !!$$

sauf si  $A(s)$  et  $A(t)$  commutent quels que soient  $s$  et  $t$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence d'une solution au voisinage de  $t_0$ . Dans le cas linéaire, on peut dire a priori que la solution est définie pour tout  $t$ .

**Proposition 3.4 (Cauchy-Lipschitz).** *L'équation (2) possède une unique solution qui est définie sur  $I$  tout entier.*

*Démonstration.* L'équation est équivalente à l'équation intégrale linéaire

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(s)x(s)ds$$

qui admet une solution unique d'après le théorème de Volterra (chap. 2, th. 2.5).  $\square$

*Remarque 2.1.* Bien évidemment, il est tentant d'utiliser directement le théorème de Cauchy-Lipschitz pour démontrer la proposition, mais cela ne suffit pas, car nous voulons une solution définie sur  $I$  tout entier, et pas seulement sur un sous-intervalle. Il faudrait utiliser les résultats sur le temps de vie du chapitre 4.

Une conséquence facile en est, posant  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

**Proposition 3.5** (Structure de l'espace des solutions). *Si  $A(t)$  est une famille continue dans  $M_n(k)$ , les solutions de*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

*forment un espace vectoriel de dimension  $n$ , noté  $\mathcal{E}$ .*

Pour tout  $t_0 \in I$ , l'application

$$\begin{aligned} \sigma_{t_0} : \mathcal{E} &\longrightarrow k^n \\ x &\longrightarrow x(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Démonstration :** Il est évident que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel. L'existence dans Cauchy-Lipschitz signifie que  $x \mapsto x(t_0)$  est surjective, l'unicité qu'elle est injective.  $\square$

**Définition 3.6** (Résolvante). On appelle résolvante, et on note  $R_{t_0}^{t_1}$ , l'application linéaire  $\sigma_{t_1} \sigma_{t_0}^{-1}$ . Si  $x$  est une solution de (2),  $R_{t_0}^{t_1}$  envoie  $x(t_0)$  sur  $x(t_1)$ .

**Proposition 3.7.** On a  $R_{t_1}^{t_2} R_{t_0}^{t_1} = R_{t_0}^{t_2}$ . La matrice de la résolvante  $R_{t_0}^{t_1}$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  a pour vecteurs colonnes les  $x_j(t_1)$ , où  $x_j$  est solution de (2) avec  $x_j(t_0) = e_j$  ( $e_1, \dots, e_n$  sont les vecteurs d'une base de  $\mathbb{R}^n$ ).

*Démonstration.* En effet, comme  $R_t^s = \sigma_s \sigma_t^{-1}$ , on aura

$$R_{t_1}^{t_2} R_{t_0}^{t_1} = (\sigma_{t_2} \sigma_{t_1}^{-1})(\sigma_{t_1} \sigma_{t_0}^{-1}) = \sigma_{t_2} \sigma_{t_0}^{-1} = R_{t_0}^{t_2}$$

$\square$

Les  $\sigma_t$  étant des isomorphismes, il en est de même des résolvantes. Donc le déterminant de  $R_{t_0}^{t_1}$  ne s'annule jamais. Ce déterminant a de plus une expression remarquable

**Proposition 3.8** (Théorème de Liouville).

$$\det(R_{t_0}^{t_1}) = \exp \left( \int_{t_0}^{t_1} \text{tr}(A(s)) ds \right)$$

*Démonstration.* Soient  $x_j(t)$  les vecteurs colonne de  $R_{t_0}^t$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \\ &= \sum_{j=1}^n \det(x_1(t), \dots, x_{j-1}(t), x'_j(t), x_{j+1}(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(x_1(t), \dots, x_{j-1}(t), A(t)x_j(t), x_{j+1}(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

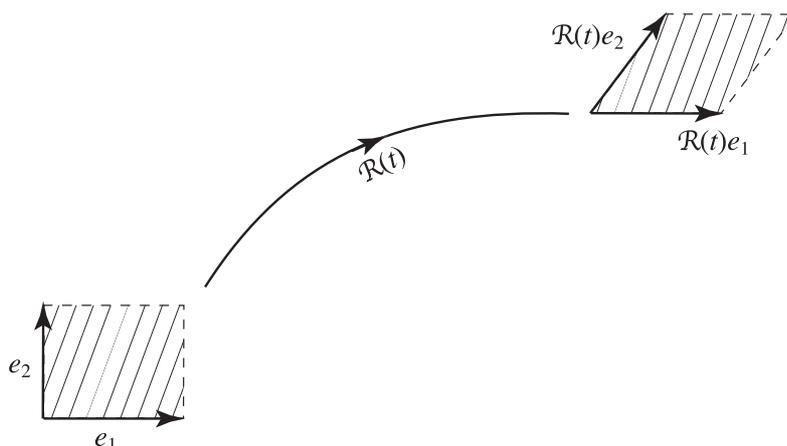


FIG. 3.2 – Théorème de Liouville

Or

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \det(u_1, \dots, u_{j-1}, Mu_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

est multilinéaire alternée donc égale à un multiple de  $\det(u_1, \dots, u_n)$ , et en prenant pour  $(u_1, \dots, u_n)$  la base canonique, on vérifie que ce coefficient est égal à la trace de  $(M)$ .

Donc

$$\frac{d}{dt} \det(R_{t_0}^t) = \text{trace}(A(t)) \det(R_{t_0}^t), \quad R_{t_0}^{t_0} = Id$$

dont la solution est l'expression donnée. □

Le théorème de Liouville a l'interprétation géométrique suivante. Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\det(u_1, \dots, u_n)$  est le volume du parallélépipède

$$P(u_1, \dots, u_n) = \{t_1 u_1 + \dots + t_n u_n \mid 0 \leq t_j \leq 1\}$$

Donc  $\det(R_{t_0}^{t_1})$  est le quotient

$$\frac{\text{vol}(P(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)))}{\text{vol}(P(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)))}$$

En particulier si  $\text{trace}(A(s)) \equiv 0$ ,  $R_{t_0}^t$  préserve le volume.

## 2.2 Équations affines : variation de la constante.

Cette méthode permet de résoudre une équation affine (aussi appelée linéaire inhomogène) à partir des solutions de l'équation linéaire associée (aussi appelée homogène).

Soit  $t \mapsto b(t)$  une application continue à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ). On considère l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 . \end{cases}$$

Posons  $R(t) = R_{t_0}^t$ , résolvante de l'équation homogène associée, (2).

Soit  $y(t) = R(t)^{-1}x(t)$ , i.e.  $x(t) = R(t)y(t)$ . Alors (2) se réécrit

$$(3a) \quad \begin{cases} \dot{R}(t)y(t) + R(t)\dot{y}(t) &= A(t)R(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Puisque  $\dot{R} = AR$ , l'équation ci-dessus devient

$$(3b) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) &= R(t)^{-1}b(t) \\ y(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

qui a pour solution  $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(s)^{-1}b(s)ds$  et donc en substituant,

**Proposition 3.9.** *Les solutions de (3) sont données par*

$$x(t) = R_{t_0}^t x_0 + \int_{t_0}^t R_s^t b(s) ds .$$

En particulier si  $A(t)$  est constante égale à  $A$ , alors

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

### 3 Théorie élémentaire des perturbations.

Il est fréquent qu'une équation puisse être considérée comme perturbation d'une équation plus simple. C'est le cas chaque fois qu'après avoir négligé un phénomène, on veut avoir une idée de son influence. On veut alors estimer la différence entre les solutions de l'équation perturbée et celles de l'équation non perturbée. Le but de ce paragraphe est de faire ce calcul lorsque toutes les équations sont linéaires. On parle alors de théorie élémentaire des perturbations. Le cas non-linéaire sera traité dans la section 2 du chapitre 5.

Soit  $A_\mu(t)$  une famille de matrices dépendant continûment de  $t$  et de manière  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) du paramètre  $\mu$ .

Elle définit une famille d'équations différentielles linéaires

$$(E_\mu) \quad \begin{cases} \dot{x}_\mu(t) &= A_\mu(t)x_\mu(t) \\ x_\mu(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

On veut étudier les solutions de  $(E_\mu)$  pour des valeurs de  $\mu$  proches de  $\mu_0$ , que l'on prendra pour simplifier égal à 0.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres et la remarque (C) qui le complète,  $x_\mu(t)$  dépend de manière  $C^k$  de  $\mu$ . Cherchons par exemple à calculer  $\frac{d}{d\mu}x_\mu(t)$  pour  $t$  fixé. En dérivant  $(E_\mu)$  par rapport<sup>3</sup> à  $\mu$ , et utilisant la commutation de  $\frac{d}{dt}$  et  $\frac{d}{d\mu}$ , on obtient que  $\xi(t) = \frac{d}{d\mu}x_\mu(t)|_{\mu=0}$  vérifie

$$(E'_0) \quad \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \left(\frac{d}{d\mu}A_\mu(t)\right)|_{\mu=0} x_0(t) + A_0(t)\xi(t) \\ \xi(t_0) = 0 \end{cases}$$

Notant  $R_{t_0}^t$  la résolvante de  $(E_0)$  et  $y_0(t) = \frac{d}{d\mu}A_\mu(t)|_{\mu=0}x_0(t)$ , l'équation ci-dessus se résout par variation de la constante et a pour solution

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t (R_s^t)y_0(s)ds$$

En résumé :

**Proposition 3.10.** *Si  $\mu \rightarrow A_\mu(t)$  est  $C^1$ , alors  $\mu \rightarrow x_\mu(t)$  est  $C^1$ , et*

$$\frac{d}{d\mu}x_\mu(t)|_{\mu=0} = \xi(t)$$

où  $\xi(t)$  est solution de  $(E'_0)$ . Elle est donc égale à

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t R_s^t \left( \frac{d}{d\mu}A_\mu(s)|_{\mu=0}x_0(s) \right) ds$$

Le même principe permet de calculer  $\frac{d^k}{d\mu^k}x_\mu(t)|_{\mu=0}$ .

Définissons pour cela  $A_0^{(k)}(t) = \frac{d^k}{d\mu^k}A_\mu(t)|_{\mu=0}$ , et pour  $k \geq 1$ ,  $\xi_k$ , la solution de

---

<sup>3</sup>Puisque  $\dot{x}_\mu(t) = A_\mu(t)x_\mu(t)$  et que le terme de droite est  $C^k$  en  $\mu$ , on peut affirmer que  $\dot{x}_\mu(t)$  est  $C^k$  en  $\mu$ , et les calculs qui suivent sont donc légitimes d'après le lemme de Schwarz fort (Proposition 1.26 du chapitre 1). Ceux qui souhaitent se limiter à la version « standard » du lemme pourront supposer  $(t, \mu) \rightarrow A_\mu(t)$  de classe  $C^2$ .

$$(E_0^k) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_k(t) = A_0^{(k)}(t)x_0(t) + C_k^1 A_0^{(k-1)}(t)\xi_1(t) + \cdots + C_k^p A_0^{(p)}(t)\xi_{k-p} + \cdots + A_0(t)\xi_k(t) \\ \xi_k(t_0) = 0 \end{cases}$$

On a alors

**Proposition 3.11.** *Si  $\mu \rightarrow A_\mu(t)$  est  $C^k$ , alors  $\mu \rightarrow x_\mu(t)$  est  $C^k$  et on a*

$$\frac{d^k}{d\mu^k} x_\mu(t)|_{\mu=0} = \xi_k(t)$$

où  $\xi_k$  est solution de  $(E_0^k)$ .

*Démonstration :* Tout d'abord la différentiabilité de  $\mu \rightarrow x_\mu(t)$  résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres. On a bien  $\xi_0 = x_0$ , et on a vu que  $\xi_1$  est égale à  $\frac{d}{d\mu} x_\mu(t)|_{\mu=0}$ .

Plus généralement, supposons avoir démontré que  $\xi_j(t) = \frac{d^j}{d\mu^j} x_\mu(t)$  pour  $0 \leq j \leq k-1$ , et démontrons le pour  $k$ .

En dérivant  $k$  fois l'équation

$$\dot{x}_\mu(t) = A_\mu(t)x_\mu(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\mu^k} \dot{x}_\mu(t) &= \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{d^j}{d\mu^j} A_\mu(t)|_{\mu=0} \frac{d^{(k-j)}}{d\mu^{(k-j)}} x_\mu(t)|_{\mu=0} \\ &= A_0(t) \frac{d^k}{d\mu^k} x_\mu(t)|_{\mu=0} + \sum_{j=1}^k C_k^j A_0^{(j)}(t) \xi_{k-j}(t) \end{aligned}$$

Donc  $\frac{d^k}{d\mu^k} x_\mu(t)$  et  $\xi_k(t)$  vérifient la même équation, avec les mêmes conditions initiales. (vu que  $x_\mu(t_0) \equiv x_0(t_0)$ ).

Ceci démontre que  $\xi_k(t) = \frac{d^k}{d\mu^k} x_\mu(t)$ . □

*Remarques 3.1.* (A) D'un point de vue pratique, on note que l'équation homogène associée à  $(E_0^k)$  ne dépend pas de  $k$  : c'est toujours  $\dot{\xi} - A_0(t)\xi = 0$ .

Cela permet de calculer les  $\xi_k$  très rapidement de manière récursive

$$\xi_k(t) = \int_{t_0}^t R_s^{t_0} \left( \sum_{j=1}^k C_k^j A^j(s) \xi_{k-j}(s) \right) ds$$

(B) En particulier si  $A_\mu = A_0(t) + \mu A_1(t)$ ,  $\xi_k(t)$  est solution de

$$\dot{\xi}_k - A_0(t)\xi_k(t) = kA_1(t)\xi_{k-1}(t)$$

(C) Si  $\mu \mapsto A_\mu$  est  $C^\infty$ , les solutions ont un développement asymptotique

$$x_\mu(t) = x_0(t) + \mu\xi_1(t) + \cdots + \frac{\mu^k}{k!}\xi_k(t) + o(\mu^k)$$

Mais **attention**, le terme noté  $o(\mu^k)$  est une fonction de  $t$ , et il serait plus correct d'écrire le reste sous la forme  $\varepsilon(t, \mu)\mu^k$ . Pour  $t$  dans un intervalle borné  $[0, T]$ , on a  $\varepsilon(t, \mu) < \bar{\varepsilon}(T, \mu)$  avec  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(T, \mu) = 0$ . Mais il se peut très bien que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t, \mu) = +\infty$  quel que soit  $\mu > 0$  : par exemple, on pourrait avoir  $\varepsilon(t, \mu) = e^t \mu$ .

Notre développement asymptotique ne permet donc pas de comparer les comportements en temps infini des  $x_\mu(t)$ . On verra dans la section suivante que la théorie de Floquet permet de préciser ce comportement en temps infini pour les équations à coefficients périodiques.

(D) La version analytique de Cauchy à paramètres (exercice (D) du chapitre précédent) permet de montrer que si  $A_\mu$  est analytique en  $\mu$ , il en est de même pour  $\mu \mapsto x_\mu$  et donc le développement en série de puissances de  $\mu$  trouvé ci-dessus converge.

(E) Lors de calculs « à la main », la méthode qui est souvent la plus commode consiste à écrire le développement asymptotique de  $x_\mu$  comme ci-dessus et de le substituer dans l'équation, pour ensuite identifier les coefficients des différentes puissances  $\mu^k$ . Notons en particulier que si on a une équation d'ordre supérieur à 1, il est inutile, et souvent nuisible de se ramener à une équation du premier ordre. Il suffit d'écrire que la solution a un développement limité (en le justifiant) et de substituer.

## 4 Théorie de Floquet

Étudions maintenant le cas d'une équation à coefficients  $T$ -périodiques

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

où  $A(t+T) = A(t)$ . On fixe  $t_0$  et on pose pour alléger les notations  $R(t) = R_{t_0}^{t_0+t}$ , ce qui entraîne  $R(t)R(s)^{-1} = R_{t_0+s}^{t_0+t}$ .

Les solutions d'une équation à coefficients périodiques ne sont pas, en général, périodiques, cependant on a :

**Théorème 3.12** (Floquet). *Lorsque  $A$  est  $T$ -périodique, la résolvante de (1) vérifie*

$$\forall t \quad R(t+T) = R(t)R(T)$$

*On peut alors écrire  $R(t) = U(t)e^{tP}$ , où  $U(t+T) = U(t)$  et  $P$  est une matrice complexe. Si le système est réel, on peut choisir  $U(t)$  réelle, mais  $2T$ -périodique, avec  $P$  réelle.*

*Démonstration.* Posons  $S(t) = R(t+T)R(T)^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \dot{R}(t+T)R(T)^{-1} = A(t+T)R(t+T)R(T)^{-1} \\ &= A(t)S(t)\end{aligned}$$

Donc,  $S(t)$  et  $R(t)$  vérifient la même équation et puisque  $S(0) = Id = R(0)$ ,  $R(t)$  et  $S(t)$  coïncident, ce qui se réécrit  $R(t+T) = R(t)R(T)$ .

Maintenant, d'après l'appendice 6, si  $R(T)$  est une matrice inversible, il existe une matrice complexe  $P$  telle que  $e^{TP} = R(T)$ . Si de plus  $R(T)$  est réelle, alors on peut écrire  $R(2T) = e^{2TP}$  avec  $P$  réelle. Posant  $U(t) = U(t)e^{-tP}$ ,  $U$  est  $T$ -périodique car  $U(t+T) = R(t+T)e^{-(t+T)P} = R(t)(R(T)e^{-TP})e^{-tP} = R(t)e^{-tP} = U(t)$ .  $\square$

Il suffit donc de connaître  $R(t)$  sur  $0 \leq t \leq T$  pour la connaître partout.

*Remarque 4.1.*  $P$  n'est pas uniquement déterminée, mais on peut vérifier que les valeurs propres de  $P$  sont bien définies modulo  $\frac{2i\pi}{T}\mathbb{Z}$ .

Nous aurions pu vouloir écrire  $R(t) = e^{tQ}V(t)$ . Le même raisonnement permet de voir que l'on peut choisir  $P = Q$  vu que  $Q$ , comme  $P$  est défini par l'équation  $e^{TQ} = R(T)$ . Par contre en général  $V(t) \neq U(t)$ .

*Exemple 4.1.* Soit l'équation

$$\ddot{x}(t) + V(t)x(t) = 0$$

avec  $V$  une fonction  $T$ -périodique réelle.

La matrice associée à cette équation est

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -V(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Liouville,  $R(T)$  est de déterminant 1 ( car  $A(t)$  est de trace nulle) et du moins si ses valeurs propres sont différentes de  $\pm 1$ , se réduit dans une base complexe à

$$R(T) = \begin{pmatrix} e^{ikT} & 0 \\ 0 & e^{-ikT} \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$$

Le théorème de Floquet permet donc, sous cette hypothèse, d'écrire toute solution comme combinaison linéaire de deux solutions de la forme

$$x_{\pm}(t) = u_{\pm}(t)e^{\pm ikt}$$

avec  $u_{\pm}$  fonction  $T$ -périodique.

Cette décomposition est appelée, en physique du solide, « théorème de Bloch ». Notons que les solutions sont bornées si et seulement si  $k$  est réel et que  $k$  n'est déterminé que modulo  $\frac{2\pi}{T}$ . On choisira en général  $k$  dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , que les physiciens appellent « zone de Brillouin » .

*Exercice 4.1.* Faire l'analyse analogue lorsque  $R(T)$  a une valeur propre double (quelle est-elle) ?

**Lemme 3.13.** *La suite de matrices  $(A^n)_{n \geq 1}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont de module strictement inférieur à 1.*

*La suite de matrices  $(A^n)_{n \geq 1}$  reste bornée lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont de module inférieur à 1, et  $A$  est diagonalisable en les valeurs propres de module 1.*

*Démonstration.* Clairement si une valeur propre est de module supérieur à 1,  $A^n$  a une valeur propre tendant vers l'infini et ne peut rester bornée. Inversement, si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module strictement inférieur à 1,  $A = D + N$  avec  $D$  diagonale de valeurs propres strictement inférieures à 1, et

$$A^n = D^n(I + D^{-1}N)^n = D^n(I + D^{-1}N + \dots + C_n^k D^{-k} N^k)$$

qui tend vers 0. Maintenant, si les valeurs propres de  $A$  sont de module 1, on voit que si  $k$  est non nul, dans la somme

$$I + D^{-1}N + \dots + C_n^k D^{-k} N^k$$

le terme dominant est  $C_n^k D^{-k} N^k$ , qui tend vers l'infini avec  $n$ , et donc  $A^n$  tend vers l'infini. En d'autres termes,  $n \rightarrow A^n$  sera bornée si et seulement si  $N = 0$ , c'est à dire  $A$  est diagonalisable.

Dans le cas général, on décompose l'espace en somme directe de deux sous espaces,  $E_1, E_2$  tels que les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1 sur  $E_1$ , et de module égal à 1 sur  $E_2$ . Pour que  $A^n$  soit bornée, il faut et il suffit que sa restriction à  $E_2$  soit bornée, c'est à dire que  $A$  soit diagonalisable en ses valeurs propres de module 1.  $\square$

Dans le cas général, on montre

**Proposition 3.14.** *Soit une équation linéaire à coefficients  $T$ -périodiques*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

*et  $P$  une des matrices données par le théorème de Floquet.*

*Alors*

- *l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si  $P$  a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, ou encore si  $R(T)$  a ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1.*
- *l'origine est stable si et seulement si les solutions restent bornées en  $+\infty$ . Cela équivaut à ce que  $P$  ait ses valeurs propres de partie réelle négative et la multiplicité de 0 soit égale à la dimension de son noyau, ou encore que  $R(T)$  ait ses valeurs propres de module inférieur à 1 et soit diagonalisable en les valeurs propres de module 1.*

- il existe une solution bornée sur  $\mathbb{R}$  tout entier si et seulement si  $P$  a une valeur propre imaginaire pure, ou encore si  $R(T)$  a une valeur propre de module 1.
- l'existence de solutions  $T$ -périodiques (resp.  $T$ -antipériodiques) équivaut à l'existence de valeurs propres de  $P$  de la forme  $\frac{2ki\pi}{T}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (resp.  $\frac{(2k+1)i\pi}{T}$ ), ou encore à ce que 1 (resp.  $-1$ ) soit valeur propre de  $R(T)$ .

**Démonstration.** Notons que puisque  $R(T)$  et  $P$  sont liées par la relation  $R(T) = e^P$ , les conditions sur  $R(T)$  sont à chaque fois équivalentes à celles sur  $P$ .

Pour la première assertion, écrivons  $t = nT + \tau$  avec  $0 \leq \tau < T$ . Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $n$  tend vers  $+\infty$ . Vu que  $R(t) = R(\tau)R(T)^n$  et  $R(\tau)$  et  $R(\tau)^{-1}$  restent bornés pour  $0 \leq \tau < T$ , dire que  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$  revient à dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(T)^n = 0$ , c'est-à-dire, d'après le lemme précédent, que toutes ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

Pour la stabilité, il faut que  $R(T)^n$  soit borné lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , soit toujours d'après le lemme, que  $R(T)$  ait ses valeurs propres de module inférieur à 1, et soit diagonalisable (sur  $\mathbb{C}$ ) en les valeurs propres de module 1.

Pour la troisième assertion, dire que  $R(t)$  reste bornée sur  $\mathbb{R}$  revient à dire que  $R(T)^n$  reste bornée lorsque  $n$  tend vers  $\pm\infty$ . c'est encore la décomposition de  $R(T)$  en blocs qui permet de dire que  $R(T)^n$  reste bornée en  $+\infty$ , si elle est contenue dans la somme des espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de module strictement inférieur à 1, et de l'espace propre correspondant aux valeurs propres de module 1. De même une solution est bornée en  $-\infty$ , si elle est contenue dans la somme des espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de module strictement supérieur à 1, et de l'espace propre correspondant aux valeurs propres de module 1.

On en conclut qu'une solution est bornée sur  $\mathbb{R}$  tout entier, si et seulement si sa valeur initiale est dans un espace propre correspondant à une valeur propre de module 1.

Rappelons enfin qu'une solution est dite anti-périodique si  $u(t+T) = -u(t)$ . La quatrième assertion découle de ce que  $x(t+T) = \pm x(t)$  se réécrit  $R(t+T)x(0) = \pm R(t)x(0)$ , soit  $R(T)x(0) = \pm x(0)$ , ou encore que  $x(0)$  est vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\pm 1$  de  $R(T)$ .

□

*Remarques 4.1.* (A) Soit  $n = 2$ ,  $k = \mathbb{R}$  et supposons  $A(t)$  de trace nulle, d'où  $\det(R(T)) = 1$  (d'après le théorème de Liouville 3.8). Alors les valeurs propres de  $R(T)$  sont  $\lambda, \frac{1}{\lambda}$  ( $\lambda$  réel) ou  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ .

On a alors

- si  $\lambda$  est réel distinct de  $\pm 1$ ,  $|\lambda + \frac{1}{\lambda}| > 2$

- si  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \in ]-2, 2[$

On voit qu'en dimension 2, la trace de  $R(T)$  détermine le module de ses valeurs propres, et donc, sauf dans le cas où ces valeurs propres sont égales à  $\pm 1$ , détermine

la stabilité.

Plus précisément,

Soit  $n = 2$  et  $R(t)$  solution de  $\dot{R}(t) = A(t)R(t)$  avec  $\text{trace}(A(t)) = 0$ . Alors

$ \text{trace}(R(T))  < 2$ ou $R(T) = \pm Id$	$\iff$	la solution nulle est stable
$\text{trace}(R(T)) = 2$	$\iff$	il existe des solutions $T$ -périodiques
$\text{trace}(R(T)) = -2$	$\iff$	il existe des solutions $T$ -antipériodiques

En particulier si  $\mu \mapsto A_\mu(t)$  est une famille continue de matrices  $2 \times 2$ ,  $T$ -périodiques et de trace nulle,  $\mu \mapsto R_\mu(T)$  est continue en  $\mu$ . Il y aura donc « en général » des domaines de valeurs de  $\mu$ , tels que l'origine soit stable pour les valeurs de  $\mu$  dans ces intervalles, instable sinon. La frontière de ces domaines est contenue dans l'ensemble des valeurs de  $\mu$  telles qu'il existe des solutions  $T$ -périodiques (si  $\text{trace}(R(T)) = 2$ ), ou  $T$ -antipériodiques (si  $\text{trace}(R(T)) = -2$ ) de l'équation. Par exemple si  $\mu$  est dans  $\mathbb{R}$ , les valeurs de stabilité de  $\mu$  correspondront en général à des intervalles  $[\mu_j^+, \mu_j^-]$  tels que pour  $\mu = \mu_j^\pm$  il existe des solutions  $T$ -périodiques ou  $T$ -anti-périodiques.

Le cas de l'équation  $\ddot{x} + V(t)x = \lambda x$  sera étudié plus en détail dans la section suivante.

- (B) **Attention** L'analogie du critère de Routh n'est plus vrai : même si les valeurs propres de  $A(s)$  sont majorées par une constante négative, l'origine peut être un équilibre instable. C'est ce qui arrive pour la « balançoire » linéaire avec frottement

$$\ddot{x} + f\dot{x} + (1 + \varepsilon \cos(2t))x = 0, \quad f > 0$$

Les valeurs propres de  $A(t)$  sont les racines de  $\lambda^2 + f\lambda + (1 + \varepsilon \cos t) = 0$ , de partie réelle  $-f/2 < 0$  si  $f < 2\sqrt{1 - \varepsilon}$ .

Or l'origine est instable comme on le verra dans la section 5.2 de ce chapitre.

## 4.1 Complément : phénomène de résonance

Le phénomène de résonance, bien connu en physique, correspond à l'étude d'une équation linéaire non homogène à coefficients périodiques

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

le terme  $b(t)$ , en général supposé périodique, étant habituellement appelé forçage. Lorsque le système homogène est stable, ses solutions sont bornées. On peut alors se demander si les solutions du problème non-homogène sont bornées, la stabilité du système homogène

entraînant que si une solutions du système non homogène est bornée, toutes ses solutions seront bornées.

La **résonance** correspond au contraire à des fonctions de forçage rendant la solution nulle instable. D'après la sous-section 2.2, on a une solution particulière donnée par

$$x(t) = \int_0^t R(t)R(s)^{-1}b(s)ds$$

Comme d'après le théorème de Floquet (th. 3.12), on peut écrire  $R(s) = U(s)e^{sP}$  avec  $U(s)$  bornée (car périodique), on a

$$x(t) = U(t) \int_0^t e^{(t-s)P}U(s)^{-1}b(s)ds$$

On voit aisément qu'il suffit de vérifier que  $x(NT)$  reste bornée avec  $N$ , et il s'agit donc d'estimer

$$x(NT) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{(t-s)P}U(s)^{-1}b(s)ds = \sum_{j=0}^N \int_0^T e^{(N-j)TP}e^{sP}U(s)^{-1}b(s)ds$$

Si on note  $w(b)$  le vecteur  $w(b) = \int_0^T e^{-sP}U(s)^{-1}b(s)ds$ , on aura  $x(NT) = \sum_{j=0}^N e^{(N-j)TP}w(b)$ . Cette quantité tend vers l'infini avec  $N$ , si et seulement si  $w(b)$  et non nul et appartient a un espace caractéristique associé à la valeur propre 1

*Exemple 4.2.* On considère

$$\ddot{x}(t) + \omega x(t) = b(t)$$

On se ramène au système dont la matrice associée est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$  et donc  $R(t) = e^{tM}$ .

Les valeurs propres de  $M$  étant  $\pm i\sqrt{\omega}$  pour  $\omega > 0$  (et  $\pm\sqrt{\omega}$  pour  $\omega < 0$ ), on n'a stabilité que si  $\omega > 0$  et 1 sera valeur propre de  $R(T)$  si  $T = \frac{2k\pi}{\sqrt{\omega}}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . La condition sur  $b$  est alors que

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{\sqrt{\omega}}} e^{-sM}\tilde{b}(s)ds \neq 0$$

où  $\tilde{b}(s) = \begin{pmatrix} b(s) \\ 0 \end{pmatrix}$ . En d'autres termes,

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{\sqrt{\omega}}} \begin{pmatrix} \cos(s\sqrt{\omega}) & -\frac{\sin(s\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega}} \\ \sqrt{\omega} \sin(s\sqrt{\omega}) & \cos(s\sqrt{\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{T}s) \\ -\frac{T}{2k\pi} \sin(\frac{2k\pi}{T}s) \end{pmatrix} b(s)ds \neq 0$$

On a donc résonance si et seulement si dans le développement de  $b$  en série de Fourier de période  $T$ ,

$$b(s) = a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \cos(\frac{2k\pi}{T}js) + b_j \sin(\frac{2k\pi}{T}js)$$

$a_1$  ou  $b_1$  sont non nuls.

## 5 Compléments : Étude de l'équation de Hill

Cette section est consacrée à l'étude de l'équation

$$(H) \quad \ddot{u} + V(t)u = 0$$

où  $V$  est  $T$ -périodique.

Il sera commode d'écrire  $V$  sous la forme  $V(t) = x + y\varphi(t)$ , où  $\varphi$  est  $T$ -périodique de moyenne nulle.

De telles équations interviennent dans une grande variété de phénomènes :

- le problème de la stabilité d'un pendule de longueur variable, ou dont le point d'attache est oscillant. Dans ce cas  $V(t) = g/\ell$ ,  $\ell$  étant fonction périodique du temps, par exemple dans le cas d'une balançoire, ou  $g$  étant variable si c'est le point d'attache qui oscille.
- le cas d'une particule chargée de charge  $q$  dans un champ électrique oscillant  $E \cos(t)$  correspond à  $V(t) = qE \cos(t)$
- l'équation de Schrödinger d'un électron dans un cristal linéaire est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) - U(x)\psi = 0$$

où  $U$  est le potentiel (périodique) créé par les ions du réseau cristallin.

La solution s'écrit formellement comme une somme

$$\psi(t, x) = \sum_E \psi_E(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

où  $\psi_E$  est une solution bornée de

$$\psi_E''(x) + (E - U(x))\psi_E(x) = 0$$

dont l'étude a été ébauchée dans l'exemple 4.1. Nous n'entrons pas ici dans le détail de l'analyse du « spectre » de l'opérateur de Schrödinger, nous nous contenterons d'affirmer sans démonstration que ce « spectre » correspond aux valeurs de  $E$  pour lesquelles l'équation ci-dessus possède des solutions *bornées* non nulles. L'ensemble de ces valeurs de  $E$ , qui forment des "bandes" (i.e. des intervalles), correspondent physiquement à l'énergie possible d'une électron qui se propage dans le cristal. Le cristal sera conducteur si ses atomes possèdent des électrons sur la couche extérieure dont l'énergie est dans ces « bandes », et isolant dans le cas contraire.

De nombreux autres problèmes se ramènent à l'étude d'une équation de Hill. Citons les perturbations du mouvement Terre-Lune sous l'influence du Soleil, problème originellement étudié par Hill, les vibrations d'une membrane elliptique (étudiée par Mathieu et correspondant au cas  $\varphi(t) = \cos t$ ), les oscillations d'un circuit avec une inductance, et un condensateur de capacité variable, etc... (cf. [Andronov-Khaikin-Vitt], [Brillouin], [Minorsky]).

Écrivons  $V_{x,y}(t) = x + y\varphi(t)$ , avec  $\int_0^T \varphi(x)dx = 0$ . On pose

$$A_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V_{x,y}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (H) se réécrit

$$(H) \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A_{x,y}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et sa résolvante sera notée  $R_{x,y}(t)$ .

D'après le théorème de Liouville,  $A$  étant de trace nulle,  $R$  est de déterminant 1.

De plus l'équation se résout explicitement lorsque  $y = 0$  :

$$R_{x,0}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{x}t) & \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}t) \\ -\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}t) & \cos(\sqrt{x}t) \end{pmatrix} & \text{si } x > 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } x = 0 \\ \begin{pmatrix} ch(\sqrt{-x}t) & \frac{1}{\sqrt{-x}} sh(\sqrt{-x}t) \\ -\sqrt{-x} sh(\sqrt{-x}t) & ch(\sqrt{-x}t) \end{pmatrix} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et la trace de  $R_{x,0}(T)$  égale

$$\begin{cases} 2 \cos(\sqrt{x}T) & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2 \cosh(\sqrt{-x}T) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On voit donc que  $|\text{trace}(R_{x,0}(T))| \leq 2$  si et seulement si  $x \geq 0$ , et que l'inégalité est stricte si et seulement si  $x \neq \frac{k^2\pi^2}{T^2}$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ). Nous allons considérer le paramètre  $y$  comme un paramètre de perturbation.

La continuité de  $y \mapsto \text{trace}(R_{x,y}(T))$  permet alors d'énoncer :

**Proposition 3.15.** *Si  $x$  positif n'est pas de la forme  $\frac{k^2\pi^2}{T^2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), alors pour  $y$  assez petit l'origine est stable pour  $\ddot{u} + V_{x,y}(t)u = 0$ , ou encore, pour tout intervalle fermé,  $[x_-, x_+]$  ne contenant pas de réel  $\frac{k^2\pi^2}{T^2}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $|y| < \varepsilon$ ,  $x \in [x_-, x_+]$ , l'origine est solution stable de  $\ddot{u} + V_{x,y}(t)u = 0$ .*

Notre objectif est de représenter l'ensemble  $\mathcal{S}$  des couples  $(x, y)$  tels que l'origine soit stable pour  $\ddot{u} + V_{x,y}(t)u = 0$ .

On va supposer  $T = \pi$  et donc les valeurs  $x_j$  sont égales à  $j^2$ . On veut calculer  $L(x, y) = \text{trace}(R_{x,y}(T))$ . Comme nous savons que  $L(x, 0) = 2 \cos(\sqrt{x})$ , on va chercher un

développement asymptotique de  $L(x, y)$  en puissances de  $y$ . Si  $u_{x,y}, v_{x,y}$  sont les solutions de (H) de conditions initiales

$$u_{x,y}(0) = 1, \dot{u}_{x,y}(0) = 0, v_{x,y}(0) = 0, \dot{v}_{x,y}(0) = 1$$

on aura que  $L(x, y) = \text{trace}(R_{x,y}(\pi)) = u_{x,y}(\pi) + \dot{v}_{x,y}(\pi)$ .

La région de stabilité  $\mathcal{S}$  est donnée par l'inégalité  $|L(x, y)| < 2$ .

Le développement asymptotique de  $u$  et  $v$  en puissances de  $y$ , suivant la méthode des perturbations nous donnera un développement de  $L(x, y)$ .

Écrivons le développement pour  $x > 0$

$$u_{x,y}(t) = \cos(\sqrt{x}t) + y\xi_{1,x}(t) + y^2\xi_{2,x}(t) + \dots$$

$$v_{x,y}(t) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}t) + y\eta_{1,x}(t) + y^2\eta_{2,x}(t) + \dots$$

avec  $\xi_0(x) = \cos(\sqrt{x}t)$ ,  $\eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}t)$ , et on doit résoudre itérativement

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{\xi}_{k,x}(t) + x\xi_{k,x}(t) = -\varphi(t)\xi_{k-1,x}(t) \\ \ddot{\eta}_{k,x}(t) + x\eta_{k,x}(t) = -\varphi(t)\eta_{k-1,x}(t) \end{cases}$$

On obtient le développement asymptotique

$$L(x, y) = 2 \cos(\sqrt{x}t) + y[\xi_{1,x}(\pi) + \dot{\eta}_{1,x}(\pi)] + y^2[\xi_{2,x}(\pi) + \dot{\eta}_{2,x}(\pi)] + \dots$$

Le calcul explicite sera fait au prochain paragraphe dans le cas de l'équation de Mathieu où  $\varphi(t) = \cos(2t)$ .

*Remarque 5.1.* Dans toutes ces questions, on procède généralement en deux étapes : tout d'abord on montre l'existence d'un développement asymptotique : cela résulte habituellement du théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres qui garantit la différentiabilité des solutions de l'équation en fonction des paramètres. Si on souhaite montrer que le développement asymptotique est en fait un développement en série entière de la fonction, on aura besoin de Cauchy-Lipschitz analytique. La deuxième étape, est de calculer : on pose comme fonctions inconnues les coefficients du développement asymptotique, et on procède par identification des coefficients. La première étape est absolument nécessaire pour justifier la seconde.

## 5.1 Un exemple : l'équation de Mathieu

Lorsque dans l'équation de Hill on pose  $\varphi(t) = \cos(2t)$ ,  $T = \pi$  on obtient l'équation de Mathieu. Les calculs du paragraphe précédent mènent à des calculs praticables... du moins pour un ordinateur...

Les programmes Maple<sup>4</sup> utilisés sont donnés dans l'appendice 8. Pour le développement de  $L(x, y)$  on trouve<sup>5</sup> à l'ordre 2

$$L(x, y) = 2 \cos(\pi\sqrt{x}) + \frac{1}{8}y^2 \frac{\sin(\pi\sqrt{x})\pi}{((x-1)\sqrt{x})} + O(y^4)$$

et à l'ordre 4

$$L(x, y) = 2 \cos(\pi\sqrt{x}) + \frac{1}{8}y^2 \frac{\sin(\pi\sqrt{x})\pi}{((x-1)\sqrt{x})} + y^4 \left[ \frac{-1}{256} \frac{\pi^2}{x(x-1)^2} \cos(\pi\sqrt{x}) + \frac{1}{512} \frac{(15x^2 - 35x + 8)\pi}{(x-4)(x-1)^3 x \sqrt{x}} \sin(\pi\sqrt{x}) \right] + O(y^6)$$

Notons que pour les valeurs entières de  $\sqrt{x}$  les coefficients du développement de  $L$  en puissances de  $y$  donnent des formes indéterminées<sup>6</sup>. Or d'après la proposition 3.15 ce sont les points où  $\sqrt{x}$  est entier qui sont les plus intéressants. Il y a deux manières d'affronter cette difficulté.

Tout d'abord, par continuité et différentiabilité de  $(x, y) \mapsto \text{trace}(R_{x,y}(2\pi))$  on sait que le développement asymptotique de  $L(x, y)$  se prolonge par continuité en ces valeurs<sup>7</sup>.

Par exemple

– au voisinage de  $x = 0$

$$L(x, y) = 2 - \pi^2 x + \frac{\pi^4}{12} x^2 - \frac{\pi^2}{8} y^2 + \left( \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi^2}{8} \right) x y^2 - \frac{\pi^2}{2048} \left( 25 - \frac{8\pi^2}{3} \right) y^4 + o(|x|^4 + |y|^4)$$

Donc pour  $x$  assez petit, et  $y$  petit mais vérifiant  $y^2 > -8x$ , on aura  $L(x, y) < 2$  et on sera dans la zone de stabilité (effet Kapitsa). Ce phénomène se visualise sur la figure 3.4, au voisinage de  $x = 0, y = 0$ .

– au voisinage de  $x = 1$

$$L(x, y) = -2 + \frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 - \frac{\pi^2}{16}y^2 + \frac{3\pi^2}{64}y^2(x-1) - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^3 + O(|x-1|^3 + |y|^3)$$

<sup>4</sup>On utilise ici la version 6 du logiciel Maple. Nos programmes sont suffisamment simples pour que l'on puisse les adapter sans difficulté aux version postérieures.

<sup>5</sup>on adopte la convention suivante : pour  $x$  réel positif,  $\cos(\sqrt{-x}) = \cosh(\sqrt{x})$ ,  $\sin(\sqrt{-x})/(\sqrt{-x}) = \sinh(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ .

<sup>6</sup>On pourra vérifier que pour  $x$  entier de module inférieur à  $k$ , le développement jusqu'au terme  $y^{2k}$  est indéterminé.

<sup>7</sup>Car les coefficients du développement sont des dérivées partielles de  $L(x, y)$ , qui sont continues d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres.

et donc, pour des petites valeurs de  $y > 2|(x-1)|$  on arrive dans la zone d'instabilité (effet balançoire ou résonance paramétrique). Ce phénomène se visualise sur la figure 3.4, au voisinage de  $x = 1, y = 0$ . La zone de stabilité est délimitée par deux courbes tangentes aux droites  $y = \pm 2(x-1)$

– De même au voisinage de  $x = 4$

$$L(x, y) = 2 - \frac{\pi^2}{16}(x-4)^2 + \frac{\pi^2}{128}(x-4)^3 + \frac{\pi^2}{192}y^2(x-4) + \frac{25\pi^2}{9216}y^2(x-4)^2 + \left(-\frac{5\pi^2}{4096} + \frac{\pi^4}{3072}\right)(x-4)^4 + \frac{5\pi^2}{36864}y^4 + o(|x-4|^4 + |y|^4)$$

Au voisinage de  $x = 4, y = 0$  la zone de stabilité est délimitée par deux courbes, ayant un contact d'ordre 2 avec respectivement la parabole  $y^2 = 12(x-4)$ , et la droite  $x = 4$ .

On peut aussi, et c'est numériquement préférable, regarder directement un développement limité de  $L(x, y)$  au voisinage des points  $x = k^2, y = 0$ .

Fixons nous un entier  $k$ . Nous appellerons  $\xi_j$  et  $\eta_j$  les fonctions de  $t$  telles que

$$u_{k,y}(t) = \sum_{j=0}^p \xi_j(t)y^j + O(y^{p+1})$$

$$v_{k,y}(t) = \sum_{j=0}^p \eta_j(t)y^j + O(y^{p+1})$$

On vérifie que les  $\xi_j, \eta_j$  sont donnés par la relation de récurrence :

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_0 = u_{k,0}, \eta_0 = v_{k,0} \\ \ddot{\xi}_j + k^2 \xi_j = \cos(2t) \xi_{j-1} \\ \xi_j(0) = \dot{\xi}_j(0) = 0 \\ \ddot{\eta}_j + k^2 \eta_j = \cos(2t) \eta_{j-1} \\ \eta_j(0) = \dot{\eta}_j(0) = 0 \end{cases}$$

Un programme Maple donné en appendice 3 permet de résoudre ces équations. Traitons

un exemple concret,  $x_0 = 4$ . On a  $\xi_0(t) = \cos(2t)$ ,  $\eta_0(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$  D'où :

$$\xi_1(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \cos(2t) - \frac{1}{24} \cos(4t)$$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{24} \sin(2t) - \frac{1}{48} \sin(4t)$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{1536} \cos(6t) + \frac{5t}{192} \sin(2t) + \frac{29}{4608} \cos(2t) + \frac{1}{288} \cos(4t) - \frac{1}{96}$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{3072} \sin(6t) + \frac{11}{9216} \sin(2t) - \frac{1}{576} \sin(4t) + \frac{t}{384} \cos(2t)$$

$$\xi_3(t) = \frac{29}{36864} - \frac{7}{6912} \cos(4t) - \frac{1}{184320} \cos(8t) - \frac{5t}{4608} \sin(4t) - \frac{1}{18432} \cos(6t) - \frac{5t}{2304} \sin(2t) + \frac{79}{276480} \cos(2t)$$

$$\eta_3(t) = -\frac{1}{368640} \sin(8t) + \frac{1}{110592} \sin(4t) + \frac{1}{36864} \sin(6t) - \frac{169}{552960} \sin(2t) - \frac{t}{9216} \cos(4t) + \frac{t}{3072} + \frac{t}{4608} \cos(2t)$$

$$\xi_4(t) = \frac{7}{138240} \cos(4t) + \frac{1}{35389440} \cos(10t) + \frac{5t}{55296} \sin(4t) - \frac{143}{1310720} \cos(2t) + \frac{t}{27648} \sin(2t) + \frac{197}{8847360} \cos(6t) + \frac{79}{2211840} + \frac{1}{2211840} \cos(8t) + \frac{5t}{294912} \sin(6t) + \frac{5t^2}{73728} \cos(2t)$$

$$\eta_4(t) = \frac{13}{737280} \sin(4t) - \frac{1}{4423680} \sin(8t) + \frac{5t^2}{147456} \sin(2t) - \frac{13}{17694720} \sin(6t) + \frac{1}{70778880} \sin(10t) - \frac{t}{110592} \cos(4t) + \frac{t}{589824} \cos(6t) + \frac{t}{36864} + \frac{7t}{442368} \cos(2t) - \frac{3541}{70778880} \sin(2t)$$

Dans l'expression de  $L(x, y) = u_{x,y}(\pi) + \dot{v}_{x,y}(\pi)$ , chaque terme contribue de la manière suivante :

Pour le terme d'ordre 0 :  $\xi_0(\pi) + \dot{\eta}_0(\pi) = 2$

Pour les termes d'ordre supérieur, comme  $\xi_j(0) = \dot{\eta}_j(0) = 0$ , les termes périodiques ne contribuent pas à la somme (vu que leur valeur en  $\pi$  égale leur valeur en 0). Donc seuls contribuent les termes dits **séculaires**<sup>8</sup>, c'est-à-dire ceux en  $t^k \cos(kt)$  dans  $\xi_j$  ou en  $t^k \sin(kt)$  dans  $\eta_j$ , avec  $j \neq 0$ . Ici de tels termes apparaissent pour la première fois pour  $j = 4$ , et sont donnés par  $\frac{5t^2}{73728} \cos(2t)$  pour  $\xi_4(t)$  et  $\frac{5t^2}{147456} \sin(2t)$  pour  $\eta_4(t)$ . Ils contribuent par  $\frac{5\pi^2}{36864}$  et donc on obtient que  $L(4, y) = 2 - y^4 \frac{5\pi^2}{36864} + o(y^4)$ . On retrouve l'expression du paragraphe précédent dans laquelle on a posé  $x = 4$ .

<sup>8</sup>on appelle ainsi les termes qui ne sont pas périodiques.

Plus généralement on peut montrer (voir exercice (Y)) que la frontière de  $\mathcal{S}$ , donnée par  $L(x, y) = 2$  possède en  $(x_k, 0) = (k^2, 0)$  un point de rebroussement d'ordre  $k$  (i.e. comme  $x^2 - y^{2k} = 0$ ).

## 5.2 Balançoire, pendule inversé

Interprétons les résultats précédents pour un système mécanique, ici un pendule rigide, soumis à une variation périodique de ses paramètres.

L'équation d'un pendule rigide est donnée par

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \sin(\theta) = 0$$

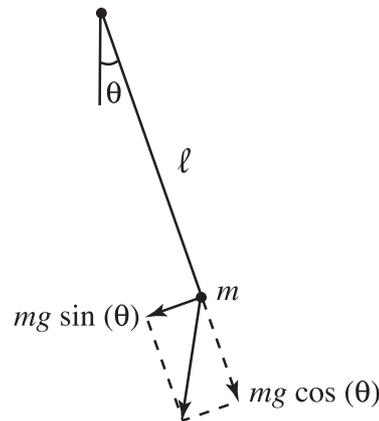


FIG. 3.3 – Le pendule rigide

où  $m$  est la masse,  $\ell$  la distance du point d'attache au centre de gravité de la tige,  $g$  la force à laquelle est soumis le pendule.

L'équation se réécrit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

et sa linéarisée est

– en  $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

– en  $\theta = \pi$ , posant  $\alpha = \theta - \pi$

$$\ddot{\alpha} - \left(\frac{g}{\ell}\right)\alpha = 0$$

On ne considère dans la suite que les équations linéarisées, sans chercher à justifier la pertinence de cette simplification. Nous renvoyons pour cela à la section 2 du chapitre 5.

a) Dans le cas d'un enfant sur une balançoire, nous partons de l'équilibre stable c'est-à-dire le cas où  $\theta = 0$  et où  $\ell$  est une fonction périodique du temps : le mouvement de l'enfant sur la balançoire a pour effet de faire osciller le centre de gravité de l'ensemble.

On supposera pour simplifier<sup>9</sup>, que

$$\frac{g}{\ell}(t) = \frac{g}{\ell_0}(1 + a \cos(kt))$$

et on doit donc décider de la stabilité de l'équation

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell_0}\right)(1 + a \cos(kt))\theta = 0$$

Le changement de variable  $\frac{kt}{2} = s$  nous ramène à

$$k^2\ddot{\theta} + \left(\frac{4g}{\ell_0}\right)(1 + a \cos(2s))\theta = 0$$

soit

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{4g}{k^2\ell_0}\right)(1 + a \cos(2s))\theta = 0$$

Pour  $a$  suffisamment petit, et si  $\frac{4g}{k^2\ell_0}$  est proche de 1, on a instabilité de la solution nulle, à condition que  $\frac{4ag}{k^2\ell_0} > 4\pi\left|\frac{2}{k}\sqrt{\frac{g}{\ell_0}} - 1\right|$ . En d'autres termes, la moindre perturbation de la position de repos, provoquera un mouvement de la balançoire loin de sa position d'équilibre. Ce phénomène s'appelle **résonance paramétrique**

Plus généralement, on aura résonance paramétrique dès que la fréquence  $\nu = \frac{k}{2\pi}$  est proche de  $\nu_n = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{n} \sqrt{g/\ell_0} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{g/\ell_0}$ . Les  $\nu_n$  sont des multiples demi-entiers de la fréquence naturelle des oscillations du pendule.

On vérifie (exercice (Y)) que la largeur des bandes de résonance paramétrique décroît avec  $n$  : pour la  $n$ -ème bande elle est de l'ordre de  $a^n$ . Il est donc de plus en plus difficile de réaliser la résonance paramétrique lorsque  $n$  augmente, car la précision requise sur la fréquence devient inaccessible. Le lecteur est invité à tester ses capacités de synchronisation en essayant de démarrer une balançoire avec un mouvement de fréquence supérieur à celui de l'oscillation naturelle (donc  $n \geq 3$ ).

b) Un pendule inversé dont le point d'attache est muni d'un mouvement oscillatoire d'amplitude  $a$ , de fréquence  $\frac{k}{2\pi}$ , est équivalent à un même pendule placé dans un champ de pesanteur oscillant

$$g(t) = g_0 + ak^2 \cos(kt)$$

L'équation est alors

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g_0}{\ell} + \frac{ak^2}{\ell} \cos(kt)\right)\theta = 0$$

---

<sup>9</sup>La véritable équation d'un pendule de longueur variable,  $\ell(t)$ , est  $\ell(t)\ddot{\theta} + \dot{\ell}(t)\dot{\theta} + mg \sin(\theta) = 0$ . Le terme  $\dot{\theta}$  s'élimine simplement (voir exercice (I)). Nous ne traitons ici qu'une version très simplifiée, sans nous soucier de ces questions.

le changement de variable  $\frac{kt}{2} = s$  donne

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{4g_0}{\ell k^2} + \frac{4a}{\ell} \cos(2s) \right) \theta = 0$$

Lorsque  $k$  est assez grand, on est dans la zone de stabilité pourvu que  $|4a/\ell|^2 \geq 32(\frac{g_0}{\ell k^2})$ , soit  $k^2 > 2\frac{g_0\ell}{a^2}$ .

Application : pour un pendule de 10 cm et une amplitude d'oscillations de 1cm, on trouve que la position du pendule renversé devient stable si  $k > k_0 \simeq 150$  et donc  $\nu > \nu_0 \simeq 25Hz$ . On est donc dans la zone de stabilité si la fréquence est d'au moins 25Hz : des oscillations de cette amplitude et cette fréquence sont fournies par exemple par une scie sauteuse du commerce.

## 6 Appendice 1 : Décomposition $D + N$ des matrices. Résolution de $e^A = M$

Dans cet appendice  $K$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 3.16.** *Toute matrice  $A$  de  $M_n(K)$  se décompose sous la forme  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ,  $N$  est nilpotente et  $DN = ND$ .*

Pour la démonstration on réfère à un ouvrage d'algèbre.

**Proposition 3.17.** *Soit  $M$  une matrice inversible, alors il existe une matrice complexe  $A$  telle que  $e^A = M$ . Si  $M$  est réelle, il existe  $A$  réelle telle que  $e^A = M^2$ .*

*Démonstration.* En effet, écrivons  $M = D + N$  où  $D$  est diagonalisable (sur  $\mathbb{C}$ ),  $N$  est nilpotente et  $D, N$  commutent. Soient  $E_j$  les espaces propres de  $D$  de valeurs propres  $\lambda_j$ . Par commutation de  $N$  et  $D$ , la matrice  $N$  préserve les  $E_j$ . On va chercher la matrice  $A$  parmi celles préservant ces sous-espaces,  $A = \bigoplus_j A_j$ , ce qui nous ramène au cas de  $M = \lambda I + N$  avec  $N$  nilpotente.

Puisque  $M$  est inversible,  $\lambda$  est non nul et on peut trouver  $\mu$  tel que  $\exp(\mu) = \lambda$ . On peut alors poser

$$A = \mu \log\left(I + \frac{N}{\lambda}\right) = \mu \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k\lambda^k}$$

En effet cette somme est finie, vu que  $N_j$  est nilpotente. Les séries formelles  $\exp(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{X^k}{k!}$  et  $\log(1+X) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$  vérifient l'identité  $\exp(\log(1+X)) = 1+X$ , d'où  $\exp(A) = \lambda \cdot I + N$ . Ceci termine la démonstration dans le cas complexe.

Si  $M$  est réelle, les  $\lambda_j$  peuvent évidemment être complexes. Quitte à diviser par leur module (réel), on peut les supposer de module 1, et poser  $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ .

On peut écrire  $D$  sous la forme d'une diagonale de blocs  $D_j$  chaque  $D_j$  étant soit  $\pm Id$  soit une diagonale de matrices de rotations planes  $R_j$ , d'angle  $\theta_j \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ .

$$D_j = \begin{pmatrix} R_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_j & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_j \end{pmatrix}$$

Restreignons nous alors au sous-espace  $E_j$  correspondant à  $D_j$ , et considérons le cas  $R = R_j \neq \pm Id$ .

Dans une base convenable,  $N$  s'écrit

$$N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,k} \\ 0 & N_{2,2} & \dots & N_{2,k} \\ 0 & 0 & \dots & N_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{k,k} \end{pmatrix}$$

où les  $N_{i,j}$  sont des matrices  $2 \times 2$ , et la nilpotence de  $N$  entraîne en particulier celle des  $N_{j,j}$ .

Écrire alors que  $D$  et  $N$  commutent, équivaut à dire que  $R$  commute avec les  $N_{i,j}$ .

**Lemme 3.18.** *Soit  $M$  une matrice  $2 \times 2$  commutant avec une rotation  $R$  différente de  $\pm Id$  alors  $M$  est une similitude. En particulier elle commute avec toute rotation.*

*Démonstration.* En effet, si  $R$  commute avec  $M$ , il en est de même pour son adjointe,  $M^*$ , et donc pour  $M^*M$ .

Puisque  $M^*M$  est symétrique, elle est donc diagonalisable et ses espaces propres sont invariants par  $R$ , mais  $R$  n'a pas de sous-espace invariant non trivial. Il en résulte que  $M^*M$  est multiple de l'identité, et donc  $M$  est une similitude.  $\square$

Soit  $J$  la rotation d'angle  $\pi/2$  dans le plan, de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et

$$K = \theta \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix}$$

D'après le lemme ci-dessus,  $N_{i,j}$  commute avec  $R_j$ , et donc commute avec  $\theta J$ . On en déduit que  $N$ ,  $D$  et  $K$  commutent. Mais alors,  $K$  et  $\log(I + D^{-1}N)$  commutent, et donc, puisque  $e^K = D$ ,

$$\exp(K + \log(I + D^{-1}N)) = \exp(K) \cdot (I + D^{-1}N) = D(I + D^{-1}N) = M$$

Restent les cas,  $D = \pm Id$ . Si  $D = Id$  cela ne pose pas de problème : la matrice est de la forme  $I + N$  et on prend son logarithme. Si  $D = -Id$  il se peut qu'on n'ait pas de solution (voir l'exercice (6.1)), mais alors  $M^2 = Id - 2N + N^2$  qui est de la forme  $Id + N'$  avec  $N'$  nilpotente, et qui peut donc s'écrire d'après ce qui précède sous la forme  $e^C$ .  $\square$

*Exercice 6.1.*

Montrer que la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

Montrer que  $M = e^A$  a une solution réelle si et seulement si les blocs nilpotents correspondant à des valeurs propre négatives sont de dimension paire.

## 7 Appendice 2 : Étude de $\ddot{u} + k^2u = v$

On considère l'équation différentielle linéaire avec second membre

$$\begin{cases} u'' + k^2u = v \\ u(0) = \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

Si  $v$  est périodique, on peut la décomposer en série de Fourier

$$v(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} v_p e^{ipt} = v_0(t) + v_k e^{ikt} + v_{-k} e^{-ikt}$$

La solution de notre équation s'obtient en posant

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t)$$

où

$$u_0(t) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ p \neq \pm k}} \frac{v_p}{k^2 - p^2} e^{ipt}$$

$$u_1(t) = \frac{t}{2ik} v_k e^{ikt} - \frac{t}{2ik} v_{-k} e^{-ikt}$$

Le terme  $u_1(t)$  est appelé terme séculaire. Notons qu'il est le seul à contribuer à  $u(2\pi)$  ou  $\dot{u}(2\pi)$ , car  $u_0$  étant  $2\pi$  périodique

$$u_0(2\pi) = u_0(0) = 0, \quad \dot{u}_0(2\pi) = \dot{u}_0(0) = 0.$$

Donc

$$u(2\pi) = u_1(2\pi) = \frac{\pi}{ik}(v_k - v_{-k}) = \frac{-1}{k} \int_0^{2\pi} v(t) \sin(kt) dt$$

$$\dot{u}(2\pi) = \dot{u}_1(2\pi) = \pi(v_k + v_{-k}) = \int_0^{2\pi} v(t) \cos(kt) dt$$

Notons que la solution s'écrit aussi

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \sin(k(t-s))v(s) ds$$

qui rend les formules ci-dessus évidentes <sup>10</sup>.

## 8 Appendice 3 : Programmes Maple

Ces programmes, destinés au logiciel Maple6 sont disponibles à l'adresse :

<http://math.polytechnique.fr/cmat/viterbo/Enseigt.html/Enseignement02-X.html>

Ils n'ont aucune prétention d'efficacité ou d'optimalité, et nous suggérons au lecteur de les améliorer.

Tout d'abord voici une procédure pour résoudre  $\ddot{u}(t) + k^2u(t) = f(t)$  avec conditions initiales  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , selon la formule

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \sin(k(t-s))f(s) ds$$

```
> R:=proc(f,k);# procédure qui résout x''+k^2*x=f
> g:= 1/k*int(f*sin(k*(s-t)), t=0..s);
> subs(s=t,g); end ;
```

Dans les programmes qui suivent nous avons remplacé l'équation  $\ddot{u} + (x + y \cos(2t))u = 0$  par  $\ddot{u} + (x^2 + y \cos(2t))u = 0$ . Cela évite à Maple de manipuler des racines carrées, au cours des calculs. On peut toujours se ramener à la forme normale par un changement de variable, une fois les calculs effectués.

Le programme suivant calcule les termes du développement de  $L(x, y) = \text{trace}(R_{x,y}(\pi))$  à l'ordre  $n$  en  $y$ , pour l'équation de Mathieu  $\ddot{u}(t) + (x^2 + y \cos(2t))u(t) = 0$  :

<sup>10</sup>Il est sous-entendu que pour  $k = 0$ , la formule devient  $\int_0^t (t-s)v(s) ds$

```

> N:=proc(n);
> a:=t->cos(x*t);
> b:=t->1/x*sin(x*t);
> S1:=a(Pi);S2:=subs(t=Pi,diff(b(t),t));
> u[0]:=a(t); v[0]:=b(t);f[0]:=u[0];g[0]:=v[0];
> for i from 1 to n do;
> u[i]:=R2(-u[i-1]*cos(2*t),x);
> v[i]:=R2(-v[i-1]*cos(2*t),x);
> L[i]:=simplify(subs(t=Pi, u[i]),trig);
> M[i]:=simplify(subs(t=Pi,diff(v[i],t)),trig);
> S1:=S1+y^i*L[i];S2:=S2+y^i*M[i];
> f[i]:=f[i-1]+y^i*u[i];od;g[i]:=g[i-1]+y^i*v[i];S1+S2;
> end proc;

```

Enfin le développement de Taylor de  $L(x, y)$  en  $x = k, y = 0$  est obtenu par

```

> P:=proc(k,n);
> mtaylor(N(n),[x=k,y=0],n) ;
> end proc;

```

La procédure suivante, plus rapide que  $R$ , résout  $\ddot{x} + k^2x = f$  avec condition initiale  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , de manière formelle lorsque  $f$  est un polynôme de Fourier de taille au plus  $j$ , sans terme en  $\cos(kt)$  ou  $\sin(kt)$  <sup>11</sup>.

```

> W:=proc(f,j,k);
> #procédure qui résout x''+k^2*x=f ,x(0)=0, x'(0)=0
> # sans termes séculaires
> l:=array(0..j); m:=array(1..j);S:={seq(i,i=1..j)} minus {k};
> for q from 1 to j do;
> l[q]:=coeff(f,cos(q*t)); m[q]:=coeff(f,sin(q*t));od;
> l[0]:=f-add(l[r]*cos(r*t)+m[r]*sin(r*t), r=1..j);
> add(1/(k^2-r^2)*l[r]*(cos(r*t)-cos(k*t))+
> 1/(k^2-r^2)*m[r]*(sin(r*t)-sin(k*t)),r=S)+1/k^2*l[0]*(1-cos(k*t));
> end proc;

```

Les programmes  $S$  et  $T$  calculent les fonctions  $x_{c,k}(y), x_{s,k}(y)$  limitant le domaine de stabilité et le développement des fonctions de Mathieu pour  $\ddot{u} + (x^2 + y\cos(2t))u = 0$ ,  $u_{k,y}(t), v_{k,y}(t)$ , à l'ordre  $n$  en utilisant la méthode de l'exercice (Y) :

$$x_{k,c}(y) = T(k, n)[1] + O(y^{n+1}), x_{k,s}(y) = S(k, n)[1] + O(y^{n+1})$$

$$u_{k,y}(t) = T(k, n)[2] + O(y^{n+1}), v_{k,y}(t) = S(k, n)[2] + O(y^{n+1})$$

---

<sup>11</sup>C'est-à-dire un polynôme trigonométrique  $f(t) = \sum_{p=-j, p \neq k}^j a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)$ , ne contenant pas de termes en  $\cos(kt), \sin(kt)$  et donc ne donnant pas de termes séculaires.

```

> T:=proc(k,n);
> u:=array(0..n);
> x:=array(0..n);u[0]:=cos(k*t); x[0]:=k^2;
> v:=sum(u[j]*y^j, j=0..n); z:=sum(x[j]*y^j,j=0..n)+y*cos(2*t);
> P:=collect(expand(v*z),trig):
> for j from 1 to n do;
> F:=combine(coeff(P,y,j)-k^2*u[j]):
> u[j]:=W(-F,2*j*k+2,k);
> C:={coeff(F,cos(k*t)), coeff(F, sin(k*t))};
> V:=solve(C,x[j]);
> subs(V, x[j]);x[j]:=%;
> od;[eval(z-y*cos(2*t)),eval(v)];
> end proc:

> S:=proc(k,n):
> u:=array(0..n);
> x:=array(0..n);u[0]:=sin(k*t); x[0]:=k^2;
> v:=sum(u[j]*y^j, j=0..n); z:=sum(x[j]*y^j,j=0..n)+y*cos(2*t);
> P:=collect(expand(v*z),trig):
> for j from 1 to n do;
> F:=combine(coeff(P,y,j)-k^2*u[j]):
> u[j]:=W(-F,2*j*k+2,k);
> C:={coeff(F,cos(k*t)), coeff(F, sin(k*t))};
> V:=solve(C,x[j]);
> subs(V, x[j]);x[j]:=%;
> od;[eval(z-y*cos(2*t)),eval(v)];
> end proc:

```

## 9 Appendice 4 : Représentation graphique des zones de stabilité de l'équation de Mathieu

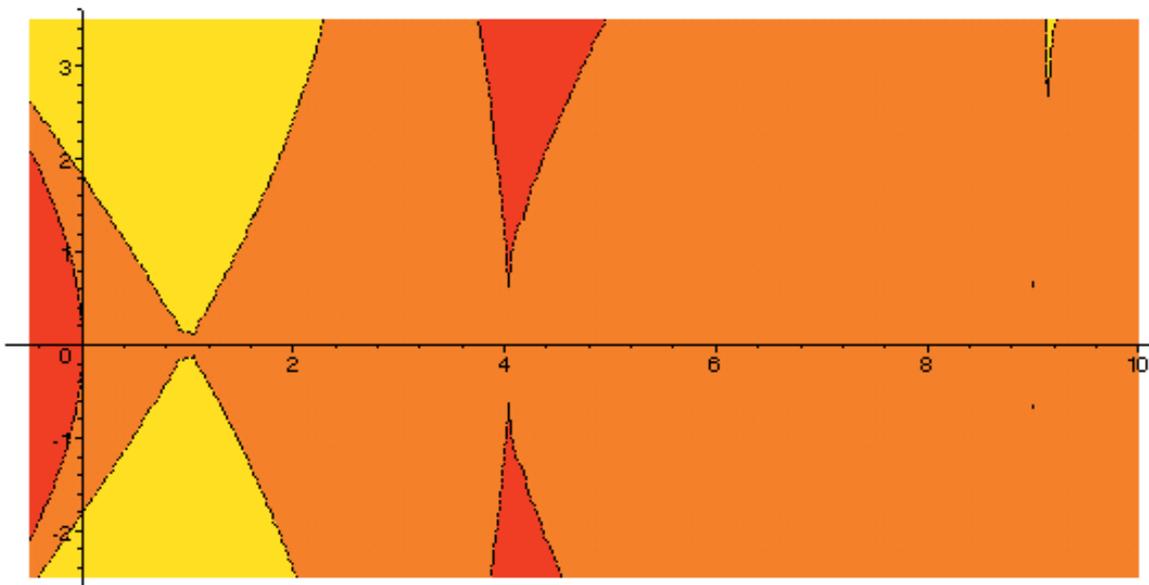


FIG. 3.4 – Tracé numérique des zones de stabilité (orange) et d'instabilité (rouge et jaune) pour l'équation de Mathieu.

On calcule simplement la trace de la résolvante et on colorie en rouge la région où elle est supérieure à 2 en jaune celle où elle est inférieure à  $-2$  et en orange le reste. Notons que les « langues » devraient arriver jusqu'à l'axe des abscisses aux points  $k^2$ . La troisième « langue » est déjà presque invisible.

Le programme Maple utilisé pour le tracé est le suivant. Le nombre de points du dessin est spécifié par l'option « `grid=[a,b]` »

```
> restart:with(plots):
> R:=proc(x,y);
> d1:={diff(u(t),t)=v(t), diff(v(t),t)=-(x+y*cos(2*t))*u(t), u(0)=1,
> v(0)=0};
> a:=dsolve(d1,{u(t),v(t)}, type=numeric, method=dverk78,
> output=listprocedure);
> d2:={diff(u(t),t)=v(t), diff(v(t),t)=-(x+y*cos(2*t))*u(t), u(0)=0,
> v(0)=1};
> b:=dsolve(d2,{u(t),v(t)}, type=numeric, method=dverk78,
> output=listprocedure);
> T:=subs(a,u(t))+subs(b,v(t)); P:=evalf(T(Pi));
> end proc;
> contourplot(R,-0.5..10,-1.5..3.5, filled=true, contours=[-2,2],
> grid=[75,75], coloring=[yellow,red]);
```

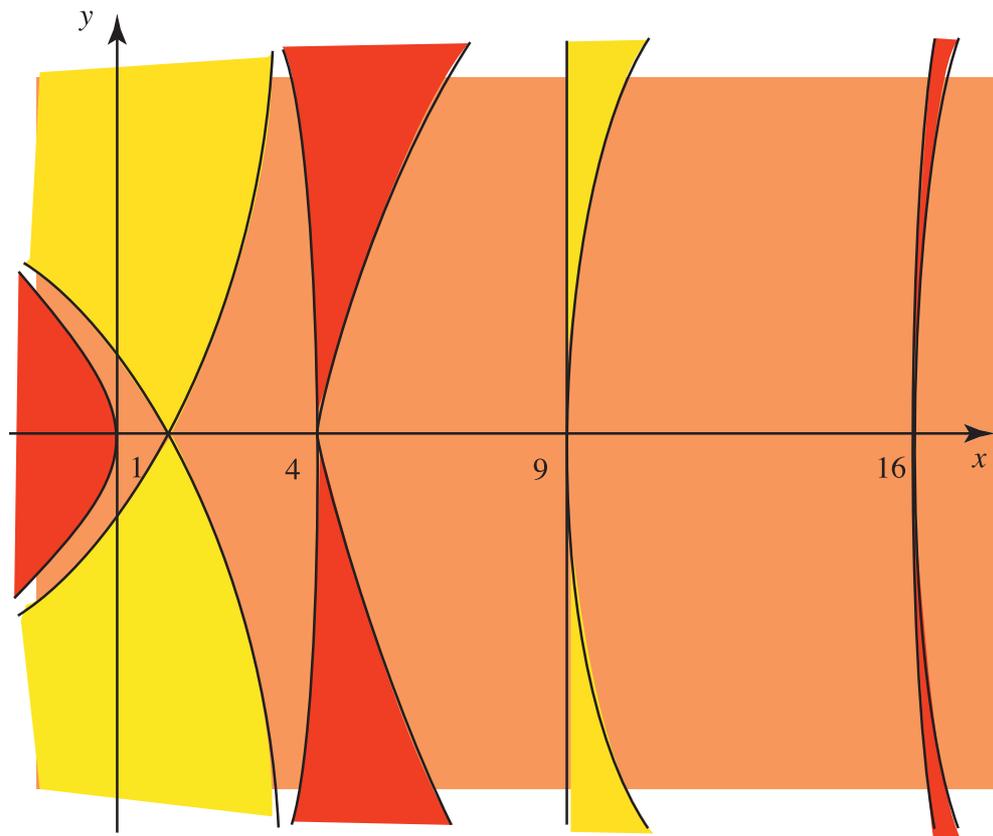


FIG. 3.5 – Représentation théorique des zones d'instabilité (rouges et jaunes) de l'équation de Mathieu

## 10 Exercices

### Équations à coefficients constants

(A) Faire le portrait de phase, et discuter la stabilité de l'équation

$$\dot{x} = Ax$$

où  $A$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$$

(B) Même question avec la matrice

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -25 & 12 \end{pmatrix}$$

(C) On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner explicitement la solution de condition initiale  $(1, 1)$ . L'origine est-elle asymptotiquement stable? Que dire de  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  suivant la solution  $x$ . Dessiner le portrait de phase de ce champ de vecteurs.

(D) Mêmes questions pour

$$\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

### Équations à coefficients variables : théorie générale

(E) Montrer que pour un système linéaire, la définition 6.1 de la stabilité du chapitre 6 est équivalente à celle donnée dans la section 1.3 de ce chapitre.

(F) Montrer que la résolvante de

$$(2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

est donnée par la formule de Trotter

$$R_0^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{t}{n}A\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{t}{n}A\left(\frac{(n-2)t}{n}\right)\right) \cdots \exp\left(\frac{t}{n}A\left(\frac{2t}{n}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{t}{n}A\left(\frac{t}{n}\right)\right)$$

Indication : On pourra utiliser la matrice  $A_n(t)$  définie sur  $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$  par

$$A_n(t) = A\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)$$

et montrer que la résolvante de  $x_n$  de  $\dot{x}(t) = A_n(t)x(t)$  converge vers celles de (2) en utilisant la remarque 3.1 (B) de la section 3 du chapitre 2.

(G) On considère sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) - 2t^{-2}x(t) = 0$$

- (a) Montrer que  $t^\alpha$  est solution pour des valeurs appropriées de  $\alpha$ .  
 (b) Montrer que sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ , l'équation

$$\ddot{x}(t) - 2t^{-2}x(t) = t^p$$

a aussi une solution du type  $C_p t^p$  pourvu que  $p \neq 0, -3$ , et du type  $C t^\alpha \log(t)$  si  $p = 0, -3$

- (c) Donner un développement limité à l'ordre 1 (i.e. avec un reste en  $o(\varepsilon)$ ) que l'on justifiera de la solution de

$$\ddot{x}(t) - (2t^{-2} + \varepsilon t)x(t) = 0$$

avec condition initiale  $x(1) = 0, \dot{x}(1) = 3$  en fonction de  $\varepsilon$ .

- (d) Montrer que la solution générale de

$$\ddot{y}(t) - 2t^{-2}y(t) = t^p \log(t)^q$$

est une combinaison linéaire de termes du type  $t^m \log(t)^n$ , et que le développement asymptotique de  $x(t)$ , solution de l'équation de la question précédente, en puissances de  $\varepsilon$  ne contient que des termes de ce type.

(H) (a) Donner un développement limité à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  de la solution  $x_\varepsilon$  de l'équation

$$\ddot{x}(t) + (1 + \varepsilon t)x(t) = 0$$

de condition initiale  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ .

- (b) Soit  $T_0$  le plus petit zéro non nul de  $x_0$ . Montrer qu'il existe une fonction continue unique,  $T(\varepsilon)$  telle que  $x_\varepsilon(T(\varepsilon)) = 0$ . Donner un développement limité au premier ordre positif non nul de la fonction  $T(\varepsilon)$ , premier zéro positif de  $x_\varepsilon(t)$ .  
 (c) (question facultative) Montrer pour  $\varepsilon$  assez petit que  $T(\varepsilon)$  est le plus petit zéro non nul de  $x_\varepsilon$ .

(I) Montrer que l'équation

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0$$

se ramène à  $\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$  par le changement de variable  $x(t) = \varphi(t)u(t)$  avec un choix approprié de  $\varphi(t)$  (ne s'annulant pas!).

(J) Montrer que l'équation de **Riccati**

$$\dot{\varphi} + a(t)\varphi(t)^2 = b(t)$$

se ramène à une équation linéaire en posant  $\varphi(t) = \rho(t) \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ .

- (K) (a) Montrer que  $n$  fonctions polynomiales d'une variable,  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[X]$  sont linéairement dépendantes sur  $\mathbb{R}$  (i.e. il existe des constantes non toutes nulles  $a_1, \dots, a_n$  telles que  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$ ) si et seulement si le déterminant

$$W(f_1, \dots, f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

est identiquement nul. On pourra montrer que les  $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$  sont solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n - 1$  (et on vérifiera que le coefficient de  $f^{(n-1)}$  dans cette équation n'est pas identiquement nul!).

- (b) Montrer que le résultat reste vrai si les  $f_j$  sont holomorphes, mais qu'il est faux si on suppose seulement les  $f_j$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$
- (L) Soit  $A(s)$  une matrice antisymétrique, c'est-à-dire telle que  ${}^t A(s) = -A(s)$ , et  $R(s)$  la résolvante du système  $\dot{R}(s) = A(s)R(s)$ . Montrer que  $R(s)$  est orthogonale (i.e.  ${}^t R(s)R(s) = Id$ ).
- (M) Soit  $A(t)$  une matrice **symétrique** dont les valeurs propres  $\lambda_j(t)$  vérifient  $\lambda_j(t) < -k < 0$ . On veut montrer que 0 est asymptotiquement stable pour l'équation définie par  $A(t)$ .

- (a) Montrer que si  $A$  est une matrice symétrique,  $\lambda_M$  sa plus grande valeur propre, on a

$$\langle Ax, x \rangle \leq \lambda_M |x|^2$$

Indication : trouver le maximum de  $\langle Ax, x \rangle$  sur  $|x| = 1$ , on pourra utiliser le théorème des extrema liés du chapitre 8, corollaire 8.8.

- (b) Montrer que pour l'équation  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  l'origine est asymptotiquement stable
- (c) Est ce que l'affirmation reste vraie si la matrice n'est pas symétrique? Justifier.

## Équations de Hill et de Mathieu

- (N) Tracer sur les figure 3.4 et 3.5 les droites correspondant au démarrage d'une balançoire, au pendule renversé, au spectre de l'équation de Schrödinger avec potentiel  $V(t) = \mu \cos(t)$ . En déduire les propriétés de stabilité et instabilité des deux premiers systèmes et la structure des valeurs propres pour le second.
- (O) Utiliser l'exercice (E) du chapitre 2 pour montrer que si  $\chi(t)$  est la fonction égale à 1 pour  $t \in [m, m + \frac{1}{2}]$  et  $-1$  pour  $t \in [m + \frac{1}{2}, m + 1[$  où  $m \in \mathbb{Z}$ , l'équation

$$\ddot{u}(t) + (x + y\chi(t))u(t) = 0$$

a une solution, dépendant continûment de  $(x, y)$ .

Calculer la trace de sa résolvante en fonction de  $x, y$ , et en déduire le diagramme de stabilité.

- (P) On considère deux courbes limitant le domaine d'instabilité pour l'équation de Mathieu, l'une issue du point de l'axe  $\lambda$  d'abscisse  $k^2$ , l'autre du point d'abscisse  $(k+1)^2$ .
- a) Ces courbes peuvent-elles se rencontrer ?  
Indication : que dire de la valeur de la trace de la résolvante le long de ces courbes ?
- b) Montrer qu'il y a deux courbes distinctes issues du même point d'abscisse  $k^2$ . Ces courbes peuvent-elles se rencontrer ailleurs ?

- (Q) Montrer que si  $p(t)$  est  $T$ -périodique et la solution nulle est stable, l'équation

$$\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$$

a une solution complexe telle que  $u(t+T) = e^{i\rho T}u(t)$  avec  $0 \leq \rho < 2\pi/T$ .

- (R) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont des solutions de  $\ddot{u} + p(t)u(t) = 0$  et  $\ddot{v} + q(t)v(t) = 0$  et si  $q(t) \leq p(t)$ , alors entre deux zéros de  $u$  il y a un zéro de  $v$ . Indication : étudier la fonction  $u(t)\dot{v}(t) - v(t)\dot{u}(t)$ .

- (S) On considère une équation  $\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$  où  $p(t)$  est  $T$ -périodique à valeurs strictement négatives.

On veut montrer que si  $R(t)$  est la résolvante,  $R(T)$  a ses valeurs propres réelles.

- a) En utilisant l'exercice R qu'une solution de l'équation s'annule au plus une fois. Supposons les valeurs propres de  $R(T)$  non-réelles. D'après l'exercice Q, il existe une solution complexe  $u = v + iw$  telle que  $u(t+T) = e^{i\rho T}u(t)$ .
- b) En considérant un intervalle,  $[a, \infty[$ , sur lequel ni  $v$  ni  $w$  ne s'annule, montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)$  existent et sont nécessairement nulles.
- c) Conclure à une contradiction.

- (T) Redémontrer le résultat ci-dessus en considérant  $\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$  comme une « perturbation » de l'équation  $\ddot{y} = 0$  par la famille  $\ddot{y} = \lambda p(t)y$  en la valeur  $\lambda = -1$  du paramètre. Indication : calculer le signe des coefficients du développement en série entière de  $\text{trace}(R(T))$  en  $\lambda$ .

- (U) Redémontrer le résultat ci-dessus en utilisant l'exercice (Q) et en montrant que si une solution de  $\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$  vérifie  $u(0) = u(T) = 0$  on a

$$-\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_0^T p(t)|u(t)|^2 dt = 0$$

- (V) On regarde à nouveau l'équation  $\ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0$ .

On suppose que  $p$  prend des valeurs positives et que  $\int_0^T p(t)dt \leq 4/T$ . On veut montrer que les valeurs propres de  $R(T)$  sont sur le cercle unité.

- (a) Montrer que si  $\ddot{u}(t) + \lambda p(t)u(t) = 0$  n'a pas de solution périodique non-triviale pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , alors les valeurs propres de  $R(T)$  sont sur le cercle unité.

- (b) Utiliser l'exercice (R) pour montrer que si  $\lambda_0$  est la plus petite valeur de  $\lambda$  telle que  $\ddot{u}(t) + \lambda p(t)u(t) = 0$  ait une solution périodique non-triviale, alors la solution  $u$  n'a pas de zéro à l'intérieur de l'intervalle  $[0, T]$ .
- (c) En utilisant que

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t sp(s)u(s)ds + \frac{t}{T} \int_t^T (T-s)p(s)u(s)ds$$

montrer en estimant  $u(t_0) = \max_{t \in [0, T]}(u(t))$  que

$$T \leq \int_0^T (T-s)sp(s)ds$$

En déduire que  $\frac{T}{4} \int_0^T p(t)dt \geq 1$

- (d) Conclure et généraliser au cas où  $p$  est de signe quelconque :  
avec  $\int_0^T p(t)dt < 4/T$  remplacé par  $\int_0^T p^+(t)dt < 4/T$ , où  $p^+(t) = \max(p(t), 0)$ .  
Indication : utiliser l'exercice (R).

**(W) Approche géométrique du problème de Sturm-Liouville.**

L'exercice suivant propose une approche géométrique au problème des valeurs propres ou des solutions périodiques.

Considérons à nouveau l'équation :

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{x} + q(t)x = -\lambda x \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

On veut montrer qu'il existe une suite  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  telle que l'équation ci-dessus ait une solution,  $x_n$  si et seulement si il existe  $n$  tel que  $\lambda = \lambda_n$ , que cette solution est unique et s'annule exactement  $n$  fois sur  $]0, 1[$ .

1) On étudie d'abord l'équation

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

a) Écrire matriciellement l'équation satisfaite par  $u(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ .

b) On note  $D_x(t)$  la droite engendrée par  $u(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ , où  $x(t)$  est solution de l'équation ci-dessus, avec  $x(0) = 0$ . On note  $\theta_q(t)$  l'angle que fait cette droite avec l'axe horizontal  $\dot{x} = 0$ . On admettra que cette fonction est de classe  $C^1$  (cf. le théorème de relèvement, chap. 1, exercice O). Montrer que la droite  $D_q(t)$  traverse l'horizontale ( $x = 0$ ) toujours dans le même sens (on prendra des conventions telles que ce sens soit le sens trigonométrique).

c) Plus généralement montrer que si  $q_1(t) < q_2(t)$ ,  $D_{q_1}(t_0) = D_{q_2}(t_0)$  alors à l'instant  $t_0$ ,  $D_{q_2}(t)$  dépasse  $D_{q_1}(t)$ .

2) On note  $D_\lambda(t)$  la droite notée précédemment  $D_{q+\lambda}(t)$ .

a) En utilisant l'exercice (O) montrer que il existe une fonction continue  $\theta_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que la droite  $D_\lambda(t)$  fasse un angle  $\theta_\lambda(t)$  avec la verticale. On dira que  $\Delta(t)_{t \in [0,1]}$  fait  $n$  tours si  $\theta_\lambda(1) - \theta_\lambda(0) \in [n, n+1[$

b) Que dire du nombre de tours que fait la droite  $D_\lambda(t)$  pour  $\lambda$  très négatif? Et pour  $\lambda$  très positif?

c) En déduire que l'on peut trouver  $\lambda_n$  unique, tel que  $D_{\lambda_n}$  fasse un nombre arbitraire (positif)  $n$  de tours, que  $D_{\lambda_n}(1)$  soit horizontale, et que cela correspond à une solution de l'équation (1).

d) En déduire le théorème annoncé.

e) Montrer que si  $q$  dépend de manière  $C^k$  d'un paramètre  $y$ , alors les  $\lambda_k(y)$  dépendent de manière  $C^k$  de  $y$ . On pourra appliquer le théorème des fonctions implicites à  $(\lambda, y) \rightarrow \theta_{\lambda,y}(1)$ . On utilisera la question 2) du A) pour montrer que  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_{\lambda,y}(1) \neq 0$ .

(X) **Critère de Sturm pour les racines réelles de polynômes.** Cet exercice n'a pas de lien direct avec les équations différentielles, mais constitue le prolongement naturel de l'exercice (W).

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ . On cherche à estimer le nombre de zéros de  $P$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . On suppose pour simplifier que  $P(a)P(b) \neq 0$  et que les zéros de  $P$  sont simples.

On note  $P(t) = a_n t^n + \dots + a_0$  et  $Z(P; a, b)$  le nombre de zéros de  $P$  sur  $[a, b]$ . Étant donnée une suite  $\alpha_j$  on note  $c(\alpha)$  le nombre de changements de signe de cette suite, c'est-à-dire

$$c(\alpha) = \#\{j \mid \alpha_j \alpha_{j+1} < 0\}$$

Par exemple si  $\alpha = (2, 3, -1, 2, 3, -5, 1)$   $c(\alpha) = 4$ . On note enfin  $c(P, a) = c(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^n(a))$ .

On veut montrer que

$$Z(P; a, b) \leq |c(P, a) - c(P, b)|$$

On considère la courbe du plan  $t \mapsto (P(t), P'(t))$  pour  $t \in [a, b]$ .

a) Montrer que cette courbe traverse toujours la verticale dans le sens antitrigonométrique.

b) Montrer que la différence entre le nombre de fois où la courbe traverse la verticale, et le nombre de fois où elle traverse l'horizontale est égal à  $Z(P; a, b) - Z(P'; a, b)$

c) Montrer qu'entre deux zéros de  $P$  il y a au moins un zéro de  $P'$  (on peut bien sûr utiliser le théorème de Rolle, mais aussi directement le dessin), et que suivant le quartier du plan où se trouvent  $(P(a), P'(a))$  et  $(P(b), P'(b))$ , on a  $Z(P; a, b) - Z(P'; a, b)$  vaut 0 ou 1, et plus précisément

- si  $P(a)P'(a) > 0$  et  $P(b)P'(b) > 0$  on a  $Z(P; a, b) \leq Z(P'; a, b)$

- si  $P(a)P'(a) > 0$  et  $P(b)P'(b) < 0$  on a  $Z(P; a, b) \leq Z(P'; a, b) + 1$

d) Montrer que

si  $P(a)P'(a) > 0$   $c(P, a) = c(P', a)$  et si  $P(a)P'(a) < 0$  on a  $c(P, a) = c(P', a) + 1$

e) Conclure la démonstration en raisonnant par récurrence sur le degré de  $P$ .

**(Y) Solutions périodiques, bornes du domaine de stabilité.**

On considère l'équation

$$\ddot{u}(t) + (x + y \cos(2t))u(t) = 0$$

a) Dire pourquoi si  $(x, y)$  est dans la frontière du domaine de stabilité, l'équation possède une solution  $2\pi$ -périodique pour cette valeur de  $(x, y)$ .

b) Montrer que si pour une valeur donnée de  $(x, y)$  l'équation possède une solution périodique, on a l'une des trois possibilités :

i) toutes les solutions sont périodiques ;

ii) la solution périodique est paire ;

iii) la solution périodique est impaire ;

On pourra regarder la transformation qui envoie  $u$  sur  $\bar{u}$  défini par  $\bar{u}(t) = u(-t)$

c) Montrer que dans le cas ii)  $\dot{u}(0) = 0$  alors que dans le cas iii) on a  $u(0) = 0$

d) On cherche des fonctions  $x_k(y), u_{k,y}(t)$  telles que

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{k,y} + (x_{k,c}(y) + y \cos(2t))u_{k,y} &= 0 \\ u_{k,y}(0) &= 1, \dot{u}_{k,y}(0) = 0 \end{aligned}$$

Montrer que l'on peut écrire  $x_{k,c}(y) = k^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{k,j} y^j$  et  $u_{k,y}(t) = \cos(kt) + \sum_{j=1}^{\infty} u_{k,j}(t) y^j$  où les  $u_k$  sont paires de période  $2\pi$  (on justifiera le développement asymptotique).

e) Montrer que l'on peut calculer récursivement les  $x_k$  et les  $u_k$ . Faire le calcul à l'ordre 3 pour  $k = 0$  et à l'ordre 5 pour  $k = 3$  (un programme Maple ou similaire est conseillé). Comparer avec les résultats obtenus dans [Lefschetz] page 340 ou [Minorsky] page 327 (attention, les calculs sont faits pour des équations légèrement différentes).

f) Faire de même pour  $x_{k,s}(y) = k^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{k,j} y^j$  et  $v_{k,y}(t) = \sin(kt) + \sum_{j=1}^{\infty} v_{k,j}(t) y^j$  où les  $v_k$  sont  $2\pi$ -périodiques et impaires.

g) Montrer que le domaine de stabilité est borné par les courbes  $x_{k,c}(y), x_{k,s}(y)$ , et qu'il existe une constante  $\gamma_k$  telle que  $x_{k,c}(y) - x_{k,s}(y) = \gamma_k y^{2k} + O(y^{2k+1})$ . Comparer la description du domaine de stabilité donnée par cette méthode à celle donnée par les autres méthodes (calcul numérique direct de la trace de  $R(T)$  et développement limité de  $\text{trace}(R_{x,y}(T))$  au voisinage de l'axe  $y = 0$ ).

Remarque : les fonctions  $u_{k,y}, v_{k,y}$  sont appelées fonctions de Mathieu.

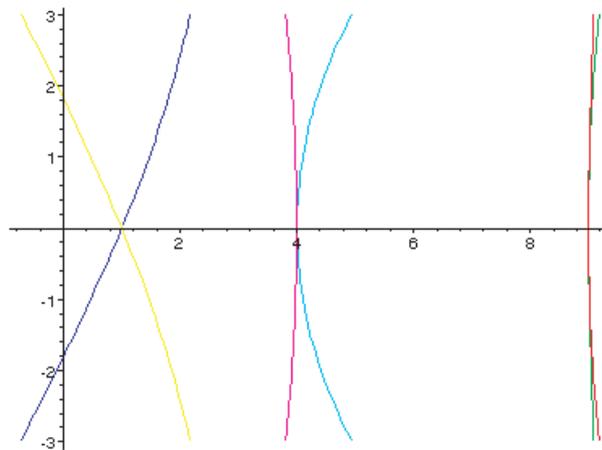


FIG. 3.6 – Tracé des courbes séparant les zones de stabilité et d'instabilité, en utilisant la méthode de l'exercice (Y)

# Chapitre 4

## Équations différentielles non-linéaires I

### 1 Introduction

Ce chapitre est la première étape dans notre étude des équations non-linéaires. Nous y traitons la question du temps de vie d'une solution, et une première estimation de la distance entre deux solutions en fonction de celle entre leurs conditions initiales. Un critère géométrique d'une part, le Lemme de Gronwall d'autre part sont les clefs de cette approche élémentaire.

### 2 Temps de vie des solutions

Soit  $I$  un intervalle ouvert,  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ , et  $X : I \times \Omega \rightarrow E$ , continue et lipschitzienne en la seconde variable.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  la solution  $x(t)$  de

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

$x$  est définie sur  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ .

Nous voulons déterminer les intervalles sur lesquels on peut définir une solution  $x$ . Notons d'abord que même lorsque  $X(t, x)$  est définie pour tout réel  $t$  et tout élément  $x$  de  $E$ , les solutions ne sont pas nécessairement définies pour tout temps.

*Exemple 2.1.*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

a pour solution

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1}$$

Son intervalle de définition est

- $] -\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$  si  $x_0 > 0$
- $]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$  si  $x_0 < 0$
- $\mathbb{R}$  si  $x_0 = 0$  (et alors  $x \equiv 0$ )

Soit  $J$  la réunion des intervalles contenant  $t_0$  sur lesquels une solution de (1) est définie.

**Proposition 4.1.** *Il existe une solution  $x$  définie sur  $J$ . Toute autre solution de (1) est la restriction de  $x$  à son intervalle de définition. On appelle  $x$  solution maximale de (1).*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que si  $x_1, x_2$  sont des solutions de notre équation définies sur  $J_1, J_2$  respectivement, alors  $x_1$  et  $x_2$  coïncident sur  $J_1 \cap J_2$ .

Nous pouvons alors définir  $x(t)$  comme la valeur en  $t$  de n'importe quelle solution de (1) définie sur  $[t_0, t]$ .

Soit  $K = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid x_1(t) = x_2(t)\}$ . Alors  $K$  est non vide, car  $t_0 \in K$ , fermé (dans  $J_1 \cap J_2$ ) par continuité de  $x_1$  et  $x_2$ . L'unicité locale de la solution donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que  $K$  est un ouvert. Comme  $J_1 \cap J_2$  est l'intersection de deux intervalles, c'est un intervalle. Il est donc connexe, et  $K$  qui en est un sous ensemble ouvert, fermé et non vide est donc égal à  $J_1 \cap J_2$  tout entier.  $\square$

*Remarques 2.1.* (A) Par abus de langage, on parlera souvent de « la solution » de l'équation pour désigner la solution maximale.

(B) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $J$  est ouvert.

On peut se demander pourquoi une solution de (1) peut ne pas être définie sur  $I$  tout entier. La proposition suivante montre que l'unique raison est le phénomène d'« explosion en temps fini » :

**Proposition 4.2.** *Soit  $X : ]t_-, t_+[ \times \Omega \rightarrow E$  vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, et  $x$  une solution maximale, définie sur  $J = ]\tau_-, \tau_+[$ . Alors si  $\tau_+ < t_+$ ,  $x(t)$  « sort de tout compact » lorsque  $t$  tend vers  $\tau_+$ . En d'autres termes : pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $t_0 \in J$ , tel que pour tout  $t \geq t_0$ ,  $t \in J$  on a  $x(t) \notin K$ .*

*Remarque 2.1.* Lorsque  $E$  est de dimension finie et  $\Omega = E$ , la conclusion est équivalente à  $\lim_{t \rightarrow \tau_+} |x(t)| = +\infty$ , car les boules de rayon  $R$  étant compactes, et  $x(t)$  sortant de toute boule, on a

$$\forall R > 0 \quad \exists \tau_R \text{ tel que } \tau_R < t < \tau_+ \Rightarrow |x(t)| \geq R$$

c'est-à-dire que  $|x(t)|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $\tau_+$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  telle que  $x(t_n) \in K$ , où  $K$  est compact, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \tau_+$ . On peut alors extraire une sous-suite, que l'on note encore  $(t_n)_{n \geq 1}$ , telle que  $x_n = x(t_n)$  converge vers  $x_\infty$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'uniformité de la taille de l'intervalle de définition au voisinage d'un point, ce qui permet d'affirmer qu'il existe  $\alpha, \delta$  strictement positifs tels que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_n) &= x_n \end{cases}$$

est définie sur  $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$  si  $d(x_n, x_\infty) < \delta$ .

Or pour  $n$  assez grand, on aura bien  $d(x_n, x_\infty) < \delta$ , et comme  $t_n$  tend vers  $\tau_+$ , on aura que  $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$  n'est plus contenu dans  $J$ . La solution  $x$  est donc définie sur un intervalle strictement plus grand que  $J$ , qui n'était donc pas maximal.  $\square$

La même démonstration permet de montrer que, sur tout leur intervalle de définition, la dépendance des solutions en les paramètres est aussi régulière que le laisse espérer le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres :

**Proposition 4.3.** *Soit  $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$  une application  $C^p$ , avec  $p \geq 0$ , définie sur  $\Lambda \times I \times \Omega$ , lipschitzienne en  $x$ . Supposons que  $x_\lambda(t; t_0, u)$  solution de*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_\lambda &= X_\lambda(t, x) \\ x_\lambda(t_0) &= u \end{cases}$$

*soit définie sur  $]t_-, t_+[$  quel que soit  $(\lambda, t_0, u)$  dans  $\Lambda \times I \times \Omega$ . Alors l'application  $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  est de classe  $C^p$ , et de classe  $C^{p+1}$  en  $t$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord il suffit de montrer l'assertion au voisinage de tout point  $(\lambda_0, \tau_0, u_0)$  de  $\Lambda \times I \times \Omega$ . Supposons qu'il existe  $t > \tau_0$  (le cas  $\tau_0 < t$  se traite de manière analogue) dans  $I$  pour lequel la solution de l'équation soit définie, mais ne soit pas de classe  $C^p$ . Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres nous dit que l'ensemble

$\{t \mid \text{il existe un voisinage de } \{\lambda_0\} \times [\tau_0, t] \times \{u_0\} \text{ sur lequel } (\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u) \text{ soit de classe } C^p\}$

est non vide et possède une borne supérieure vérifiant, par hypothèse,  $t_1 < t$ .

Pour  $z = x_{\lambda_0}(t_1; t_0, u_0)$  c'est encore le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres qui va nous fournir un réel  $\delta$  strictement positif, tel que l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{y}_\lambda &= X_\lambda(t, y) \\ y_\lambda(\tau) &= v \end{cases}$$

ait ses solutions définies sur un intervalle  $]t_1 - \alpha, t_1 + \alpha[$  pour  $\alpha > 0$  pour  $(\lambda, \tau, v)$  dans  $B(\lambda_0, \delta) \times ]t_1 - \delta, t_1 + \delta[ \times B(z, \delta)$ . De plus la solution est de classe  $C^p$  en  $(\lambda, \tau, v)$ .

La continuité de  $x_{\lambda_0}(t; \tau_0, x_0)$  en  $t$  permet<sup>1</sup> de dire qu'il existe  $\eta > 0$ , que l'on choisira inférieur à  $\alpha$ , tel que  $x_{\lambda_0}(t_1 - \eta; \tau_0, x_0)$  soit dans  $B(z, \delta)$ .

La continuité de  $(\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$  en  $(\lambda_0, t_1 - \eta, u_0)$  permet de dire qu'il existe un voisinage de  $(\lambda_0, \tau_0, u_0)$  tel que  $x_\lambda(t_1 - \eta; t_0, u)$  reste dans  $B(z, \delta)$ . De plus, puisque  $t_1 - \eta < t_1$  cette application est de classe  $C^p$ .

Mais pour  $v = x_\lambda(t_1 - \eta, t_0, u)$ ,  $\tau = t_1 - \eta$  la solution  $y_\lambda$  de (3) coïncide avec  $x_\lambda$ . Au voisinage de  $(t_1; \lambda_0, t_0, u)$  l'application

$$(t; \lambda, t_0, u) \rightarrow y_\lambda(t; t_1 - \eta, x_\lambda(t_1 - \eta, t_0, u)) = x_\lambda(t; t_0, u)$$

est composée d'applications de classe  $C^p$ . Elle est donc de classe  $C^p$   $(\lambda, t) \rightarrow x_\lambda(t)$  est la composée de  $\lambda \rightarrow x_\lambda(t_1 - \eta)$  qui est  $C^p$  et de  $(\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_1 - \eta, x_\lambda(t_1 - \eta))$

Mais alors

$$(t; \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$$

est de classe  $C^p$  au voisinage de  $\{\lambda_0\} \times [\tau_0, t_1[ \times \{u_0\}$  et de  $\{\lambda_0\} \times ]t_1 - \eta, t_1 + \eta[ \times \{u_0\}$  et donc au voisinage de  $\{\lambda_0\} \times [\tau_0, t_1 + \eta[ \times \{u_0\}$  ce qui contredit la maximalité de  $t_1$ .  $\square$

Il est bien commode de n'avoir à traiter que des équations dont les solutions sont définies pour tout temps. Dans le cas d'un champ de vecteurs, il y a un terme pour les désigner.

**Définition 4.4.** Soit  $X$  un champ de vecteurs. S'il vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et si ses solutions sont définies pour tout temps, on dit que le champ de vecteurs est **complet**.

### 3 Estimation de l'intervalle d'existence

On souhaite utiliser la proposition 4.2 pour trouver des conditions simples entraînant que les solutions de (1) sont définies sur  $I$  tout entier. On suppose pour simplifier que  $I = \mathbb{R}$  et  $\Omega$  de dimension finie.

<sup>1</sup>Car  $t \rightarrow x_{\lambda_0}(t)$  satisfait (2), et est donc dérivable en  $t$ .

Deux types de conditions nous permettent d'estimer la taille de l'intervalle de définition :

- (A) des conditions géométriques
- (B) des conditions analytiques

### 3.1 Conditions géométriques

Supposons par exemple  $\langle X(t, x), x \rangle = 0$ ,

$$\frac{d}{dt}(|x(t)|^2) = 2\langle \dot{x}(t), x(t) \rangle = 2\langle X(t, x), x(t) \rangle = 0$$

Donc  $|x(t)|^2 = |x_0|^2$ , et  $|x(t)|$  reste bornée.

Plus généralement on pourra utiliser le résultat suivant :

**Proposition 4.5.** *Soit  $f$  une fonction  $C^1$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = \{x \mid f(x) \leq 0\}$ , et  $X(t, x)$  une équation différentielle définie pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $x$  au voisinage de  $F$ . Supposons que  $df(x)X(t, x) < 0$  sur  $f^{-1}(0)$ . Alors les solutions de (1), qui sont dans  $F$  pour  $t = t_0$ , restent dans  $F$  pour tout temps de l'intervalle de définition supérieur à  $t_0$ .*

*Démonstration.* On suppose les solutions définies sur  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1$  pouvant être infini. Il suffit de montrer que si  $\tau = \sup\{t \mid \forall s \in [t_0, t], x(s) \in F\}$ , alors  $\tau = t_1$ . Supposons  $\tau < t_1$ , alors  $x(\tau)$  est défini et appartient à  $F$ , et  $\frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=\tau} = df(x(\tau))X(\tau, x(\tau)) < 0$ . On en déduit que  $x(t) \in F$  pour  $t$  contenu dans un petit intervalle à droite de  $\tau$ , ce qui contredit la maximalité de  $\tau$ .  $\square$

**Corollaire 4.6.** *Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, si de plus  $F$  est compact, une solution de (1) telle que  $x(t_0) = x_0$  soit dans  $F$  est définie sur  $[t_0, +\infty[$*

*Démonstration.* En effet, il ne peut y avoir explosion en temps fini, car pour tout  $t_+$  fini,  $x([t_0, t_+])$  est contenu dans le compact  $F$ . D'après la proposition 4.2 les solutions sont donc définies sur un intervalle infini à droite.  $\square$

Notons enfin que si  $X(t, x)$  satisfait notre critère géométrique, il en est de même pour  $\varphi(t)X(t, x)$  quelle que soit la fonction continue strictement positive  $\varphi$ .

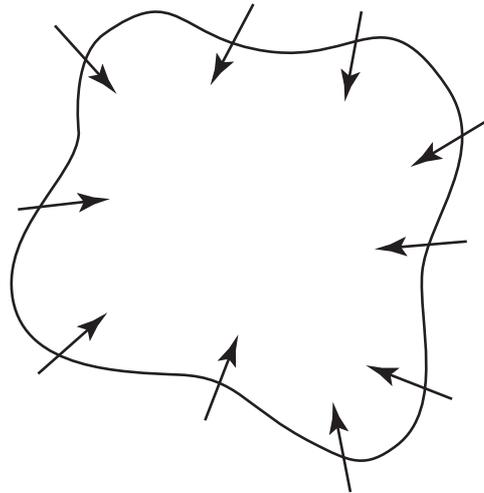


FIG. 4.1 – Équation différentielle dont les solutions de condition initiale à l'intérieur de la courbe sont définies sur  $[a, +\infty]$

*Exercice 3.1.* 1) Montrer que si dans la proposition on suppose seulement l'égalité au sens large, c'est à dire  $df(x)X(t, x) \leq 0$  pour tout  $x$  dans  $f^{-1}(0)$ , la conclusion est fautive ; [Indication : on prendra  $f(x) = (1 - |x|^2)^2$  et  $X$  quelconque.]

2) Montrer que si on suppose que  $f$  est de classe  $C^2$ ,  $df(x)X(t, x) \leq 0$  et  $df(x) \neq 0$  sur  $f^{-1}(0)$ , alors la proposition est encore vraie. [Indication : appliquer la proposition à  $X_\varepsilon(t, x) = X(t, x) - \varepsilon \nabla f(x)$  et utiliser la continuité de la solution en fonction de  $\varepsilon$ .]

3) Montrer que si on suppose  $df(x)X(t, x) \leq 0$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ , alors les conclusions de la proposition restent vraies. [Indication : Montrer que si  $x$  est une solution de (1), pour chaque  $t_1 \geq t_0$  il existe un voisinage de  $t_1$  sur lequel  $t \rightarrow f(x(t))$  est décroissante.]

L'exercice précédent permet de traiter le cas d'équations conservant une « énergie » lorsque le niveau d'énergie sur lequel évoluent les trajectoires est borné.

Pour l'équation  $\ddot{x} - \nabla V(x) = 0$ , où  $\nabla$  désigne le gradient, la quantité  $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - V(x)$  est constante, notée  $E_0$ , et donc si

$$S_{E_0} = \{(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2}|p|^2 - V(x) = E_0\}$$

est borné, toute solution de condition initiale dans  $S_{E_0}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Il est parfois utile de noter qu'une trajectoire est nécessairement contenue dans un ensemble connexe par arcs, et il suffit alors de vérifier que les ensembles connexes par arcs contenus dans  $S_{E_0}$  sont compacts.

Par exemple pour l'équation du pendule  $m\ell\ddot{\theta} - mg \sin \theta = 0$ , la conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2(t) + mg\ell \cos \theta(t) = E_0$$

et un connexe contenu dans les courbes

$$\frac{1}{2}mlp^2 + mgl \cos \theta = E_0$$

est nécessairement compact dans le plan  $(\theta, p)$  si  $E_0 < mgl$ .

Sous cette hypothèse, c'est à dire si l'énergie totale du pendule (somme de son énergie cinétique,  $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ , et de son énergie potentielle,  $-mgl \cos \theta$ ) est inférieure à l'énergie du pendule renversé au repos, les solutions seront définies pour tout temps. On verra que dans le cas du pendule, c'est encore vrai pour les autres conditions initiales.

Lorsqu'on rajoute un « terme de frottement », on peut seulement garantir que les solutions restent définies jusqu'en  $+\infty$ . Plus précisément s'il existe une fonction  $E$  telle que  $dE(x)X(x) < 0$ , et le niveau  $\{x \mid E(x) \leq E(x(t_0))\}$  est borné, alors les solutions sont définies jusqu'en  $+\infty$ . Par exemple les solutions de  $\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$  ( $f > 0$ ) de condition initiale  $(x_0, p_0)$  sont définies jusqu'en  $+\infty$  si  $\{(x, p) \mid \frac{1}{2}p^2 - V(x) = \frac{1}{2}p_0^2 - V(x_0)\}$  est compact.

### 3.2 Conditions analytiques : le lemme de Gronwall

Il s'agit d'exprimer que pour « aller à l'infini en temps fini » il faut « aller vite », c'est-à-dire que  $|X(t, x)|$  doit être suffisamment grand.

Le lemme suivant joue un rôle fondamental dans les estimations concernant les équations différentielles.

**Lemme 4.7** (Lemme de Gronwall). *Soit  $g(t, r)$  définie sur  $I \times \mathbb{R}$ , lipschitzienne en  $r$ , et  $\rho$  la solution unique, que l'on suppose définie sur  $I$ , de*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\rho} &= g(t, \rho) \\ \rho(t_0) &= \rho_0 \end{cases}$$

*Si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie  $|\dot{x}(t)| \leq g(t, |x(t)|)$ , et  $|x(t_0)| \leq \rho_0$ , on a pour tout  $t \geq t_0$  dans  $I$ , l'inégalité  $|x(t)| \leq \rho(t)$ .*

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas d'une inégalité stricte

$$|\dot{x}(t)| < g(t, |x(t)|)$$

L'ensemble  $\{t \in I \mid \forall s \in [t_0, t], |x(s)| \leq \rho(s)\}$  n'est pas vide. Soit  $\tau_+$  sa borne supérieure. Montrons que  $\tau_+$  coïncide avec la borne supérieure de  $I$ .

Tout d'abord, par continuité de  $x$  et  $\rho$ ,  $|x(\tau_+)| \leq \rho(\tau_+)$ , et puisque  $\tau_+$  est maximal, on doit avoir  $|x(\tau_+)| = \rho(\tau_+)$ . Estimons

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho(\tau_+ + \varepsilon) - |x(\tau_+ + \varepsilon)| &= \rho(\tau_+ + \varepsilon) - \rho(\tau_+) - (|x(\tau_+ + \varepsilon)| - |x(\tau_+)|) \geq \\ \rho(\tau_+ + \varepsilon) - \rho(\tau_+) - |x(\tau_+ + \varepsilon) - x(\tau_+)| &= (\dot{\rho}(\tau_+) - |\dot{x}(\tau_+)|)\varepsilon + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Maintenant l'inégalité

$$|\dot{x}(\tau_+)| < g(\tau_+, |x(\tau_+)|) = g(\tau_+, \rho(\tau_+)) = \dot{\rho}(\tau_+)$$

entraîne que  $\dot{\rho}(\tau_+) - |\dot{x}(\tau_+)| > 0$  et donc pour  $\varepsilon$  assez petit strictement positif, le terme de droite de (2) est strictement positif. On en déduit que  $\rho(\tau_+ + \varepsilon) \geq |x(\tau_+ + \varepsilon)|$  pour tout  $\varepsilon$  assez petit, ce qui contredit la maximalité de  $\tau_+$ . Cela termine la démonstration dans le cas de l'inégalité stricte.

Démontrons maintenant le lemme dans le cas général. Posons à nouveau

$$\tau_+ = \sup\{t \in I \mid \forall s \in [t_0, t], |x(s)| \leq \rho(s)\}$$

soit

$$g_\varepsilon(t, \rho) = g(t, \rho) + \varepsilon .$$

et enfin  $\rho_\varepsilon$  la solution de

$$\begin{cases} \dot{\rho}_\varepsilon(t) &= g_\varepsilon(t, \rho_\varepsilon(t)) \\ \rho_\varepsilon(\tau_+) &= \rho(\tau_+) \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres pour la famille d'équations différentielles associée à  $g_\varepsilon$  fournit un voisinage de 0 pour  $\varepsilon$  et un voisinage  $J$  de  $\tau_+$  sur lequel tous les  $\rho_\varepsilon$  sont définis. On aura donc sur  $J$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(t) = \rho(t)$$

Puisque  $|x(\tau_+)| \leq \rho(\tau_+)$  et  $|\dot{x}(t)| \leq g(t, |x(t)|) < g_\varepsilon(t, |x(t)|)$ , on doit avoir, d'après le cas d'inégalité stricte de Gronwall,

$$|x(t)| \leq \rho_\varepsilon(t) \text{ pour } t \geq \tau_+, t \in J .$$

d' où en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,

$$|x(t)| \leq \rho(t).$$

sur un voisinage de  $\tau_+$  ce qui contredit sa maximalité. □

*Remarques 3.1.* (A) Notons que si  $g$  est définie sur  $I \times \mathbb{R}$  et  $\beta \in I$  est une borne de l'intervalle de définition, la croissance de  $\rho$  et la proposition 4.2 entraînent que  $\lim_{t \rightarrow \beta} \rho(t) = +\infty$ . On pose par convention  $\rho(t) = +\infty$  si  $t \geq \beta$ . Avec cette convention, l'inégalité de Gronwall est encore vérifiée pour ces valeurs de  $t$ .

(B) La première partie de la démonstration, le cas de l'inégalité stricte, ne requiert pas que  $g$  soit Lipschitz en  $\rho$ .

Cette hypothèse est par contre nécessaire pour la seconde partie, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho^{1/2} \\ \rho(0) &= 0 \end{cases}$$

a pour solution (non unique!)  $\rho \equiv 0$ . Mais sur  $[0, 1/4]$ ,  $x(t) = t^4$  vérifie

$$|\dot{x}(t)| = 4|t|^3 \leq (t^4)^{1/2} = x(t)^{1/2},$$

bien que l'inégalité  $|t^4| \leq 0$  soit fausse !

(C) On appelle parfois lemme de Gronwall le résultat suivant pour une équation différentielle à une variable :

Si  $\dot{\rho}_1(t) \leq g(t, \rho_1(t))$ , et  $\dot{\rho}_0(t) = g(t, \rho_0(t))$  avec  $\rho_0(0) = \rho_1(0)$  alors  $\rho_1(t) \leq \rho_0(t)$  pour  $t$  positif.

La démonstration est analogue à celle du lemme de Gronwall précédent.

**Corollaire 4.8.** Soient  $X(t, x)$  défini sur  $I \times \mathbb{R}^n$ ,  $g$  définie sur  $I \times \mathbb{R}$ , vérifiant l'inégalité  $|X(t, x)| \leq g(t, |x|)$ .

Supposons que l'intervalle maximal de définition de

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t)) \\ \rho(t_0) = |x_0| \end{cases}$$

contienne  $[t_0, t_1]$ , il en est alors de même pour l'intervalle maximal de définition de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Démonstration.** L'inégalité de Gronwall est valable partout où  $\rho$  et  $x$  sont définies. On en déduit que si pour  $\tau > t_0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow \tau} |x(t)| = \infty$  on aura  $\lim_{t \rightarrow \tau} |\rho(t)| = \infty$ . Donc, en utilisant encore la proposition 4.2 la borne supérieure de l'intervalle de définition de  $x$  est inférieure à celle de l'intervalle de définition de  $\rho$ .  $\square$

## 4 Applications du lemme de Gronwall

### 4.1 Équations à temps de vie infini

Le lemme de Gronwall permet de montrer que si  $|X(t, x)|$  ne croît pas trop vite, les solutions de l'équation différentielle associée ne peuvent « exploser en temps fini ».

**Proposition 4.9.** Soit  $X : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définissant une équation différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et telle que  $|X(t, x)| \leq A|x| + B$ . Alors les solutions sont définies sur  $I$  tout entier.

*Démonstration.* L'équation  $\dot{\rho} = A\rho + B$  a pour solution

$$\begin{cases} \rho(t) = (\rho(0) + \frac{B}{A})e^{At} - \frac{B}{A} & \text{si } A \neq 0 \\ \rho(t) = Bt + \rho(0) & \text{si } A = 0 \end{cases}$$

Donc soit  $A \neq 0$  et  $|x(t)| \leq (|x(0)| + \frac{B}{A})e^{At} - \frac{B}{A}$ , soit  $A = 0$ , et  $|x(t)| \leq Bt + |x(0)|$ . Dans les deux cas,  $x(t)$  reste borné lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , et il ne peut y avoir « explosion en temps fini ». Pour  $t$  tendant vers  $-\infty$  on utilise le fait que  $y(t) = x(-t)$  vérifie  $\dot{y}(t) = -X(-t, y(t))$  et que l'on a encore  $|-X(-t, y)| \leq A|y| + B$ . la majoration de  $|y(t)|$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  donne alors une majoration de  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ .  $\square$

## 4.2 Estimations de la divergence des solutions. Tube des solutions

Soient  $x_1, x_2$  deux solutions de  $\dot{x} = X(t, x)$  de conditions initiales  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$  proches. Comment estimer  $|x_1(t) - x_2(t)|$  ?

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, on sait que si les conditions initiales sont proches, cette différence (pour  $t$  fixé) sera petite, mais on souhaite une estimation quantitative.

**Proposition 4.10.** Soit  $X$  définie sur  $I \times \Omega$ , Lipschitz de rapport  $k$  en la seconde variable, alors sur leur intervalle de définition,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)|e^{k|t-t_0|}$$

*Démonstration.* Soit  $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ . On a

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &= |X(t, x_1(t)) - X(t, x_2(t))| \\ &\leq k|x_1(t) - x_2(t)| = k|z(t)|. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall, appliqué à  $g(t, \rho) = k|\rho|$  entraîne l'inégalité  $|z(t)| \leq |z(t_0)|e^{k|t-t_0|}$ .  $\square$

*Remarque 4.1.* L'estimation n'est pas très bonne pour  $|t - t_0|$  grand, mais on ne peut, en général, faire mieux : si  $X(t, x) = kx$ , on a  $x(t) = e^{kt}x(0)$ , et notre inégalité devient une égalité.

Cette proposition permet dans le cas général de montrer que deux solutions de conditions initiales proches ont des temps de vie proches, et restent proches.

**Proposition 4.11** (Tube des solutions). *Soit  $X : I \times \Omega$  localement Lipschitz, et  $x$  une solution de (1) définie sur un intervalle contenant  $[t_-, t_+]$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $x(t_0)$  tel que si  $y(t)$  est une solution de (1) avec  $y(t_0)$  dans  $V$ , alors  $y$  est aussi définie sur  $[t_-, t_+]$ . De plus il existe une constante  $k$  dépendant de  $X$ , de  $x(t_0)$  et de  $[t_-, t_+]$  telle que*

$$\forall t \in [t_-, t_+] |y(t) - x(t)| \leq |y(t_0) - x(t_0)| e^{k|t-t_0|}$$

*Démonstration.* Soit  $W$  un voisinage fermé compact de  $x([t_-, t_+])$ , de la forme

$$W = \{x \in \Omega \mid \inf_{t \in [t_-, t_+]} d(x, x(t)) \leq \varepsilon\}$$

Par compacité, comme  $X$  est localement Lipschitz, il existe une constante  $k$  telle que  $X$  soit lipschitzienne de rapport  $k$  sur  $W$  (cf. exercice A du chap. 2).

Supposons  $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta$  et  $\delta e^{k(t_+ - t_0)} < \varepsilon$ . Alors pour tout  $t' < t_+$ , tel que les solutions soient définies sur  $[t_0, t']$ , on a comme dans la démonstration de la proposition précédente,

$$\forall s \in [t_0, t'], |y(s) - x(s)| < \delta e^{k(t' - t_0)} < \varepsilon$$

et par suite  $y([t_0, t']) \subset W$ . Comme  $W$  est compact, il ne peut y avoir explosion sur  $[t_-, t']$  pour  $t' < t_+$  et donc  $y([t_-, t_+])$  est dans  $W$ , et finalement  $y$  est définie sur  $[t_-, t_+]$ . On peut maintenant appliquer la proposition précédente sur  $[t_-, t_+]$ , pour conclure que

$$\forall t \in [t_-, t_+] |y(t) - x(t)| \leq |y(t_0) - x(t_0)| e^{k|t-t_0|}$$

□

*Remarque 4.2.* Bien entendu, il existe des équations pour lesquelles  $|y(t) - x(t)|$  croît seulement linéairement en  $t$ , voire reste borné, ou tend vers zéro : dans ce dernier cas on parle de *stabilité* (cf. les chapitres suivants).

Par exemple si  $X(t, x) = u$  est constant,

$$x(t) = tu + x(0) \text{ et } |x_1(t) - x_2(t)| = |x_1(0) - x_2(0)| .$$

Au contraire, lorsque  $|x_1(t) - x_2(t)|$  croît exponentiellement avec  $t$ , on parle de « dépendance sensible en les conditions initiales » .

C'est ce qui explique la difficulté de faire des prévisions météorologiques fiables au-delà de quelques jours. Il s'agit en effet de résoudre une équation différentielle ordinaire, dont la condition initiale - le temps aujourd'hui - n'est connue qu'avec une marge d'erreur : les erreurs de mesure sur température, pression, vitesse du vent, etc. Or une erreur de mesure à l'instant  $t = 0$ , devient une erreur de prévision  $e^{kt}$  fois plus grande au bout d'un temps  $T$ . En se fixant l'erreur maximale  $\delta$  acceptable au temps  $T$  - prédire la température à

30°C près n'intéresse personne! - on obtient que l'erreur de mesure à l'instant initial,  $\varepsilon$  doit être majoré par  $\delta e^{-kT}$ .

On voit alors que doubler l'échéance de la prévision, c'est-à-dire doubler  $T$ , remplace  $(e^{-kT})$  par  $(e^{-kT})^2$ . Par exemple si  $\delta \sim 1$ ,  $k \sim 1$ , prédire la situation en  $T = 5$  demande une précision de  $e^{-5} \simeq 6.10^{-3}$  en  $t = 0$ , mais une prévision en  $T = 10$  demande une précision à l'instant  $T = 0$  de  $e^{-10} \simeq 4.10^{-5}$  : doubler le temps de prévision exige de multiplier par 100 la précision des mesures.

Nous ne nous sommes pas inquiétés de ce que l'équation elle-même, c'est-à-dire  $X(t, x)$ , n'est connue qu'imparfaitement, mais le type d'erreur que cela induit est du même ordre :

**Proposition 4.12.** *Soient  $X_1, X_2$  des applications de  $I \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  telles que  $X_1$  soit lipschitzienne de rapport  $k$  en la seconde variable et  $\|X_1(t, x) - X_2(t, x)\| \leq \varepsilon$ . Soient  $x_1(t), x_2(t)$  des solutions de*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = X_1(t, x_1(t)) \\ x_1(t_0) = u_1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = X_2(t, x_2(t)) \\ x_2(t_0) = u_2 \end{cases}$$

Alors sur l'intervalle de définition commun à  $x_1, x_2$ , on a

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |u_1 - u_2|e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1)$$

*Démonstration.* Posant  $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$  nous avons

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &= |X_1(t, x_1(t)) - X_2(t, x_2(t))| \\ &\leq |X_1(t, x_1(t)) - X_1(t, x_2(t))| \\ &\quad + |X_1(t, x_2(t)) - X_2(t, x_2(t))| \\ &\leq k|x_1(t) - x_2(t)| + \varepsilon \leq k \cdot |z(t)| + \varepsilon \end{aligned}$$

Si  $g(t, \rho) = k\rho + \varepsilon$ , l'équation  $\dot{\rho} = g(t, \rho)$  a pour solution

$$\rho(t) = \rho(t_0)e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k(t-t_0)} - 1)$$

On conclut alors la démonstration de l'inégalité en appliquant le lemme de Gronwall à  $z(t)$  et  $\rho(t)$ .  $\square$

*Remarques 4.1.* (A) On peut aussi comme dans la proposition 4.11 montrer que les intervalles de définition de  $x_1$  et  $x_2$  sont proches.

- (B) Nous n'avons pas supposé que  $X_2$  était lipschitzienne et cela n'est pas nécessaire. Il suffit que  $x_2$  soit solution de l'équation. Il est inutile de supposer cette solution unique.

Conclusion : Nous avons montré que le seul obstacle à l'existence des solutions d'une équation différentielle pour tout temps est le phénomène d'« explosion en temps fini » (Proposition 4.2). Ce temps de vie est infini sous des conditions soit géométriques (Proposition 4.5), soit analytiques (Lemme 4.7). D'autre part, pour des équations dépendant continûment d'un paramètre, le temps d'existence dépend continûment de ce paramètre (Proposition 4.11), et la dépendance des solutions en fonction des paramètres, sur tout l'intervalle d'existence est aussi régulière que celle de l'équation (Proposition 4.3). Enfin la distance entre deux solutions de conditions initiales différentes, augmente de manière au plus exponentielle en temps, de même que celle entre deux solutions d'équations proches (Proposition 4.12).

## 5 Exercices

- (A) Soit l'équation

$$\ddot{x}(t) + x(t) + x(t)^3 = 0$$

Soit  $x(t)$  une solution telle que  $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$

- (a) Trouver une fonction  $F$  sur le plan, telle que  $(x(t), \dot{x}(t))$  reste sur la « courbe » bornée,  $F(x, y) = c$ .  
 (b) Montrer que les solutions de l'équations sont toutes périodiques.  
 (c) On considère maintenant l'équation

$$\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t)x(t)^2 + x(t)^3 = 0$$

Quelles sont ses solutions périodiques ?

- (B) Soit  $g(\rho)$  une fonction localement lipschitzienne et strictement positive. Montrer que  $\dot{\rho}(t) = g(\rho(t))$  a ses solutions définies pour tout temps si et seulement si

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{g(\rho)} d\rho = \infty$$

En déduire que si  $g(\rho) = \sup_{t \in \mathbb{R}, |x|=\rho} |f(t, x)|$  et

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{g(\rho)} d\rho = \infty$$

les solutions de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  sont définies pour tout temps.

- (C) Montrer que si  $\varphi$  est une fonction continue définie sur  $\mathbb{R}$ , et vérifie pour

$$\varphi(t) \leq f(t) + k \int_0^t \varphi(s) ds$$

alors

$$\varphi(t) \leq f(t) + k \int_0^t f(s)e^{k(t-s)} ds$$

- (D) Montrer plus généralement que si  $\phi, \psi$  sont deux fonctions continues positives et  $w$  est une fonction positive vérifiant pour  $t$  dans  $[0, a]$

$$w(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(s)w(s) ds$$

on a

$$w(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \phi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\tau) d\tau\right) ds$$

[Indication : on posera  $y(t) = \int_0^t \psi(s)w(s) ds$  et on cherchera une inégalité différentielle vérifiée par  $y$ ].

- (E) Soit  $f(t, x)$  une fonction continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  vérifiant l'inégalité

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|)$$

où on fait l'hypothèse

(\*)  $\omega$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , s'annulant en 0 et strictement positive sur  $]0, +\infty[$

On considère l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

L'existence (locale) de solutions résulte du théorème de Peano, on ne demande pas de la démontrer ; on s'intéresse ici à la question de l'unicité

- (a) Dans cette question on suppose de plus que  $\omega$  est localement lipschitzienne.

Soient  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  deux solutions de (2), on pose  $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$ . Montrer que s'il existe  $\tau \geq 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$|z(\tau)| \geq \delta,$$

alors

$$\tau \geq \int_0^\delta \frac{d\rho}{\omega(\rho)}.$$

- (b) On revient maintenant à l'hypothèse (\*). Montrer que le résultat précédent reste vrai. En déduire que si  $\int_0^1 \frac{d\rho}{\omega(\rho)} = +\infty$  on a unicité de la solution.

- (F) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(0) = 0$  et qu'il existe des constantes  $A, B$  telle que pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}^n$  la matrice  $df(z)$  satisfait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

- (a) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$   $\gamma_x(t)$ . On cherche un chemin de classe  $C^1$ ,  $\gamma_x(t), t \in [0, 1]$  tel que  $f(\gamma_x(t)) = tx$  Montrer que cela équivaut à  $df(\gamma_x(t))\dot{\gamma}_x(t) = x$ , soit

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

- (b) Montrer que sous l'hypothèse faite sur  $f$ , le flot de

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

est défini sur  $[0, 1]$ , et que  $g$  est de classe  $C^1$ .

- (c) En déduire que si  $g(x)$  est l'image de 0 par le flot au temps 1 de  $\dot{\gamma}(t) = df(\gamma(t))^{-1}x$  on a  $f(g(z)) = z$ .
- (d) Montrer que l'image de  $g$  est ouverte.
- (e) Montrer que  $z \in \text{Im}(g)$  si et seulement si  $g(f(z)) = z$ . En déduire que cette image est fermée, puis que  $g$  est surjective.
- (f) Montrer que si  $g$  vérifie  $f \circ g = Id$  on a aussi  $g \circ f = Id$ .
- (g) Démontrer le théorème suivant

**Théorème 4.13** (Hadamard). *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(0) = 0$  et qu'il existe une constante  $A$  telle que pour tout  $z$  dans  $\mathbb{R}^n$  on ait l'inégalité*

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

*Alors  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$*



## Chapitre 5

# Équations différentielles non-linéaires II

Dans ce chapitre sont mis en place les différents objets intervenant dans notre approche globale des équations différentielles ordinaires : le flot, qui permet de considérer simultanément plusieurs solutions, les orbites et leur représentation graphique, le **portrait de phase**. Enfin, nous étudions comment les flots se transforment par changement de variable, et le théorème de redressement nous permet de comprendre leur comportement au voisinage des points où le champ ne s'annule pas. Cette étude permet encore d'introduire d'autres notions, comme l'application de premier retour, afin d'étudier le comportement des solutions au voisinage d'une solution périodique.

Nous abordons ensuite la théorie classique des perturbations, qui permet de décrire les solutions proches d'une solution donnée, ou les équations proches d'une équation donnée. Apparue dans un mémoire d'Euler, présenté à l'Académie des Sciences en 1747, cette théorie a pour but d'estimer l'effet de la force d'attraction du Soleil, supposé petite, sur le mouvement Terre-Lune. En d'autres termes, il s'agit du problème dit des **trois corps** dont l'approche perturbative fut élaborée peu après par Clairaut et d'Alembert. Au cours du 19ème siècle, ce sont en particulier les difficultés créées par les **termes séculaires** de cette théorie qui occupèrent nombre de mathématiciens et d'astronomes jusqu'à Poincaré. La méthode de Lindstedt utilisées pour surmonter les difficultés liées à ces termes séculaires est présentée dans l'exercice (G).

Le point de vue géométrique et topologique introduit par Poincaré, marqua la naissance de la théorie des systèmes dynamiques. Le rôle important qu'y jouent les solutions périodiques est illustré par le célèbre théorème de Poincaré-Bendixson. On peut alors considérer des problèmes éloignés de « situations standard », c'est-à-dire d'étudier des problèmes qui ne sont plus des perturbations d'un système simple.

# 1 Flots, portrait de phase, redressement

## 1.1 Notions de base

L'une des idées de base de la théorie des systèmes dynamiques, c'est de ne pas regarder une seule solution à la fois, mais de les considérer toutes simultanément. Si ce point de vue demande initialement un important effort conceptuel, on en recueille vite les fruits.

Soit

$$(1) \quad \dot{x} = X(t, x)$$

une équation vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On suppose pour simplifier que les solutions sont définies pour tout temps.

**Définition 5.1.** Le flot de l'équation  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  est l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que  $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$  où  $x$  est la solution de (1) avec condition initiale  $x(t_0) = x_0$ .

Dans la suite on utilisera la notation  $\varphi_{t_0}^t(x)$  au lieu de  $\varphi(t, t_0, x_0)$ . Lorsque  $X$  est linéaire, le flot n'est rien d'autre que la résolvante :  $\varphi_{t_0}^t = R_{t_0}^t$ .

**Définition 5.2.** Si  $X(t, x)$  ne dépend pas de  $t$ , on dit que l'équation est **autonome**, ou encore que  $X(x)$  est un **champ de vecteurs**. Dans le cas contraire, l'équation est dite **non-autonome**.

Le flot a la propriété élémentaire suivante :

Il vérifie

$$(2) \quad \varphi_{t_1}^{t_2} \circ \varphi_{t_0}^{t_1} = \varphi_{t_0}^{t_2}$$

en particulier  $\varphi_{t_0}^t \circ \varphi_t^{t_0} = \varphi_t^t = Id$ , et le flot est inversible.

Cela permet de montrer

**Proposition 5.3.** Si  $X$  est de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) alors  $\varphi_{t_0}^t$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

*Démonstration.* L'application  $\varphi_{t_0}^t$  est de classe  $C^k$  a été déjà démontré dans la proposition 4.3 du chapitre 4.

Enfin, c'est bien un difféomorphisme, puisque son inverse,  $\varphi_{t_1}^{t_0}$  est aussi de classe  $C^k$ .

□

*Remarque 1.1.*

Si  $X(t, x) = X(x)$  est autonome, alors  $\varphi_{t_0}^t = \varphi_0^{t-t_0}$  que l'on note souvent  $\varphi^{t-t_0}$ .

La formule (2) devient alors  $\varphi^t \circ \varphi^u = \varphi^{t+u}$ . On obtient donc un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  isomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Réciproquement tout sous-groupe de classe  $C^1$  du groupe des difféomorphismes de classe<sup>1</sup>  $C^1$ , isomorphe à  $\mathbb{R}$  est engendré par un flot. En effet, si on note  $\varphi^t$  l'image de  $t$ , posant  $X(x) = \frac{d}{dt}\varphi^t(x) |_{t=0}$ , on a

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) |_{t=s} = \frac{d}{dt}\varphi^{t+s}(x) |_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi^t\varphi^s(x) |_{t=0} = X(\varphi^s(x))$$

Donc  $\varphi^t$  est solution de l'équation (1), pour le champ de vecteurs  $X(x)$ .

On appelle **groupe à un paramètre** un tel sous-groupe du groupe des difféomorphismes, et le champ  $X$  son **générateur infinitésimal**.

Pour un champ de vecteurs  $X(x)$  on appelle **orbite** de  $x$  ou trajectoire passant par  $x$ , la « courbe » :

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Deux orbites ne peuvent s'intersecter sauf à être confondues. En effet, si  $z \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ , on a  $z = \varphi^a(x) = \varphi^b(y)$ . Donc  $\varphi^{a-b}(x) = y$  et  $\varphi^t(y) = \varphi^{t+a-b}(x)$  : l'orbite de  $x$  est contenue dans celle de  $y$  et par symétrie ces orbites sont égales.

L'espace est partitionné en orbites dont la représentation est appelé **portrait de phase**. Les orbites sont de trois types topologiques, suivant que le sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$

$$G_x = \{t \mid \varphi^t(x) = x\}$$

est égal à  $\mathbb{R}$ ,  $T\mathbb{Z}$  ou  $\{0\}$  :

- (A) (cas  $G_x = \mathbb{R}$ ) des points, (ceux où  $X(x_0) = 0$ ) appelés **points singuliers**, ou **zéros** du champ de vecteurs.
- (B) (cas  $G_x = T\mathbb{Z}$ ) des **orbites périodiques** (il existe  $T > 0$  appelé période, tel que  $\varphi^T(x) = x$ ), difféomorphes à des cercles.
- (C) (cas  $G_x = \{0\}$ ) des images de  $\mathbb{R}$  par une injection continue.

On voit les trois sortes d'orbites sur le portrait de phase du pendule, en coordonnées  $(\theta, \dot{\theta})$  dans la figure 5.1.

---

<sup>1</sup>On dit que le sous-groupe est de classe  $C^k$  si  $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$  est de classe  $C^k$  en les deux variables.

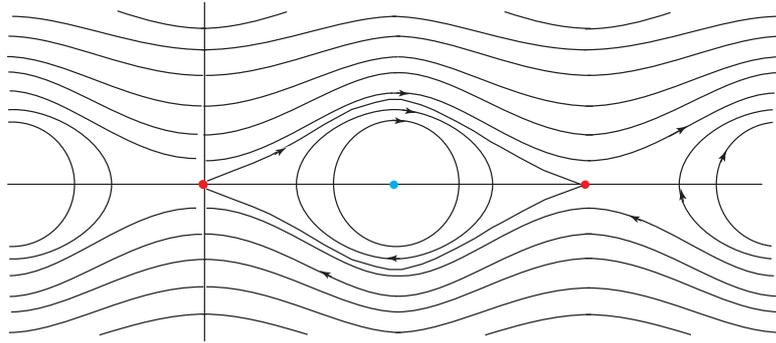


FIG. 5.1 – Portrait de phase du pendule libre  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$

Notons que les flots sont un moyen commode de construire des difféomorphismes que l'on ne sait pas « fabriquer explicitement » (cf. exercice (E)). On pourra aussi se reporter à l'exercice (M) du chapitre 8.

## 1.2 Portraits de phase en dimension 2

Un cas simple est celui des systèmes conservatifs, c'est-à-dire du type Hamiltonien

$$\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$$

ou encore du type

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(Le premier cas s'obtient en posant  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ ).

Dans ce cas la quantité  $H(x, y)$  est constante sur les trajectoires, car

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

On trace alors les courbes  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = c\}$  et les trajectoires sont contenues dans ces courbes. Le lemme suivant est alors utile pour dessiner le portrait de phase, car il permet d'affirmer que les trajectoires ne peuvent être arrêtées que par un zéro du champ de vecteurs.

**Lemme 5.4.** *Soit  $x(t)$  la solution d'une équation différentielle autonome, et supposons que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty$ . Alors  $x_\infty$  est un zéro du champ de vecteurs.*

*Démonstration.* Notons  $\phi^t$  le flot, et  $x(t) = \phi^t(x_0)$ . Alors si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0) = x_\infty$  on aura pour tout  $s$ , d'une part  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{t+s}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0) = x_\infty$ , d'autre part par continuité du flot,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{t+s}(x_0) = \phi^s(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0)) = \phi^s(x_\infty)$ . On en déduit que pour tout  $s$ ,  $\phi^s(x_\infty) = x_\infty$  et donc  $X(x_\infty) = \frac{d}{ds}\phi^s(x_\infty) = 0$ .  $\square$

Ce lemme nous permet d'affirmer que sur un niveau de  $H$  sans zéro, les trajectoires coïncident avec les composantes connexes du niveau de  $H$ .

Le portrait de phase du pendule s'obtient en prenant  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$ .

Lorsqu'on ajoute à l'équation un terme de frottement, par exemple

$$\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$$

un calcul analogue montre que

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = -fy(t)^2$$

Le flot fait donc décroître  $H$ , et les orbites se dirigent vers les valeurs décroissantes de  $H$ . Par exemple pour un pendule avec frottement, les solutions sont rentrantes par rapport aux courbes  $H^{-1}(c)$ . On verra plus précisément ce qui se passe près des équilibres dans le chapitre 6.

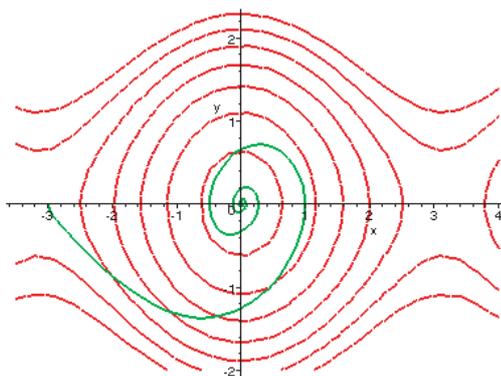


FIG. 5.2 – En vert : Trajectoire du pendule avec frottement.  
En rouge : niveaux de  $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$ .

### 1.3 Conjugaison et changement de coordonnées.

Dans cette section la régularité des champs de vecteurs est au moins de classe  $C^1$ . On souhaite décrire le portrait de phase d'un champ, et dire si deux champs de vecteurs se ressemblent, cette « ressemblance » signifiant qu'il existe un difféomorphisme conjuguant les deux flots, c'est-à-dire  $h\varphi^t h^{-1} = \psi^t$  ( $\varphi^t$  et  $\psi^t$  sont les flots,  $h$  le difféomorphisme). En particulier cela entraîne que les portraits de phase sont difféomorphes.

**Définition 5.5.** Soit  $h$  un difféomorphisme,  $X(t, x)$  un système dynamique. On note  $h_*X$  le système dynamique  $Y$  défini par

$$h_*X(t, x) = Y(t, x) = dh(h^{-1}(x))X(t, h^{-1}(x))$$

**Proposition 5.6 (Conjugaison de flots par un difféomorphisme).** Si  $\varphi_{t_0}^t$  est le flot de  $X$  et  $\psi_{t_0}^t$  celui de  $Y = h_*X$  on a

$$\psi_{t_0}^t = h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}$$

En particulier si  $X$  est autonome,  $Y$  l'est aussi, et  $h$  envoie les orbites de  $X$  sur celles de  $Y$ .

**Démonstration :** Il suffit de vérifier que  $\psi_{t_0}^t(x)$  et  $h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)$  vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale en  $t_0$ . Or en  $t = t_0$ , les deux fonctions prennent la valeur  $x$  et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)) \Big|_{t=\tau} &= dh(\varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)) \frac{d}{dt} \varphi_{t_0}^t \Big|_{t=\tau} (h^{-1}(x)) = \\ &= dh(\varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x)) X(\tau, \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x)) = \\ &= dh(h^{-1} \circ (h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1})) X(\tau, h^{-1} \circ (h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x))) = \\ &= (h_*X)(\tau, h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}) \end{aligned}$$

□

On notera la propriété  $(h \circ k)_*X = h_*(k_*X)$  qui résulte de la proposition ci-dessus.

Réécrire un champ de vecteurs dans un nouveau système de coordonnées relève de la même problématique,  $h$  étant le difféomorphisme de changement de coordonnées.

*Exemple 1.1* (Coordonnées polaires). Soit  $h : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  l'application de  $\mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[$  dans  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . C'est un difféomorphisme d'un ouvert  $U$  tel que  $\overline{U} \subset \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[$  sur son image<sup>2</sup>. Soit  $X(x, y)$  un champ de vecteurs, alors  $(h^{-1})_*(X)$  représente ce même champ en coordonnées polaires.

On utilise le fait que  $dh^{-1} \circ dh(r, \theta) = Id$  et donc puisque

$$dh(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } dh^{-1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\theta) & \frac{1}{r} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si  $(e_x, e_y)$  est une base du plan, et  $X(x, y) = X_x(x, y)e_x + X_y(x, y)e_y$ , on aura

---

<sup>2</sup>en effet l'application inverse,  $(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arcsin}(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}))$  est bien de classe  $C^1$  sur un tel ouvert.

$$\begin{aligned}
Y(r, \theta) &= dh^{-1}(h(r, \theta))(X(r, \theta)) = \\
&dh^{-1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))e_x + X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))e_y) = \\
&\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\theta) & \frac{1}{r} \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix} = (\cos(\theta)X_x + \sin(\theta)X_y, \frac{-1}{r} \sin(\theta)X_x + \frac{1}{r} \cos(\theta)X_y)
\end{aligned}$$

en d'autres termes, si  $Y(r, \theta) = Y_r(r, \theta)e_r + Y_\theta(r, \theta)e_\theta$

$$\begin{aligned}
Y_r(r, \theta) &= \cos(\theta)X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta)X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\
Y_\theta(r, \theta) &= \frac{-1}{r} \sin(\theta)X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{1}{r} \cos(\theta)X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Le même principe transforme les symétries du champ de vecteur en symétries du flot, puisque si  $h_*X = X$  on a  $h \circ \phi^t = \phi^t \circ h$ .

*Exemple 1.2.* Si  $Z(x, y)$  est le champ de vecteurs associé à l'équation du pendule  $\ddot{x} + \cos(x) = 0$ , qui se réécrit  $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin(x)$ , c'est-à-dire  $Z(x, y) = (y, -\sin(x))$ . Si  $\sigma$  est le difféomorphisme consistant en une symétrie par rapport à l'origine,  $\sigma(x, y) = (-x, -y)$  et puisque  $Z(\sigma(x, y)) = (-y, \sin(x)) = \sigma(Z(x, y))$ , on a  $\sigma_*Z = Z$  et donc son flot  $\psi^t$  vérifiera  $\psi^t(\sigma(x, y)) = \sigma\psi^t(x, y)$ . On en déduit en particulier que  $\sigma$  envoie une trajectoire sur une autre trajectoire, le portrait de phase est donc invariant par  $\sigma$ .

*Remarque 1.2.* Si  $h_*X = -X$ ,  $h$  conjugue le flot de  $X$  à celui de  $-X$ , c'est-à-dire  $\phi^{-t}$ . on dit que  $h$  renverse le temps, et que le flot est « réversible ». Dans ce cas  $h$  envoie une trajectoire sur une autre, mais renverse son sens. A l'orientation près, le portrait de phase est encore invariant.

*Exemple 1.3.* Si on considère la symétrie d'axe vertical  $\rho(x, y) = (-x, y)$ , et  $Z$  est encore l'équation du pendule,  $\rho_*Z(x, y) = (-y, \sin(x)) = -(y, -\sin(x)) = -Z(-x, y) = Z(\rho(x, y))$ . Donc la symétrie d'axe vertical retourne les trajectoires du pendule.

## 1.4 Redressement et application de Poincaré : premières notions géométriques.

Nous pouvons maintenant décrire l'allure d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point non-singulier (i.e. tel que  $X(x_0) \neq 0$ ).

**Proposition 5.7** (Théorème de redressement). *Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), tel que  $X(x_0) \neq 0$ . Alors il existe un difféomorphisme  $h$  de classe  $C^k$ , défini au voisinage de  $x_0$  tel que  $h_*X$  soit constant.*

**Démonstration.** Grâce à une translation et une permutation des variables, on peut supposer que  $x_0 = 0$  et que la première coordonnée de  $X(0)$  est non nulle.

Soit  $\varphi^t$  le flot de  $X$ , et

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ (t, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto \varphi^t(0, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Montrons que  $\rho$  est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

En effet,  $d\rho(0) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(0)dt + \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(0)dx_2 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial x_n}(0)dx_n$ . Mais  $\varphi^0 = id$  donc  $\rho(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$  et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(0) = \frac{d}{dt}\varphi^t(0)|_{t=0} = X(0), \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(0) = e_j$$

Cela entraîne que  $d\rho(0) = X(0)dt + e_2dx_2 + \dots + e_ndx_n$ , et puisque par hypothèse,  $(X(0), e_2, \dots, e_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ , on conclut que  $d\rho(0)$  est inversible. D'après le théorème d'inversion locale,  $\rho$  est un difféomorphisme local. Comme si  $Z$  est le champ de vecteurs constant  $(1, 0, \dots, 0)$ , de flot  $\psi^t$ , l'application  $\rho$  est telle que

$$\begin{aligned} \rho(\psi^t(x_1, \dots, x_n)) &= \rho(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) = \varphi^{x_1+t}(0, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \varphi^t \varphi^{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = \varphi^t(\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

On en déduit que  $h = \rho^{-1}$  est le difféomorphisme cherché. □

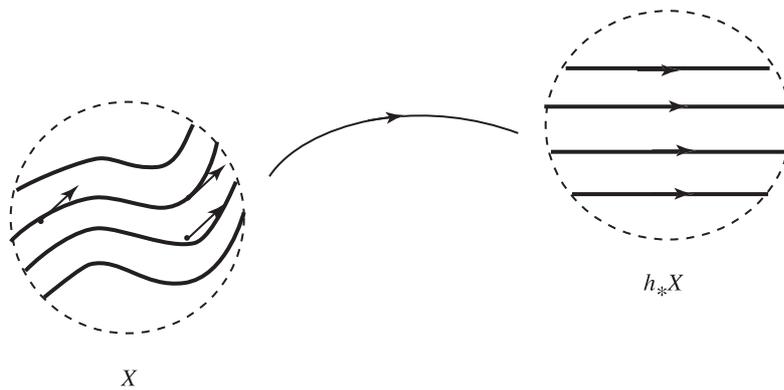


FIG. 5.3 – Redressement d'un champ de vecteurs

L'étude des champs de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre (aussi appelée **singularité**) est un sujet beaucoup plus difficile, qui est encore aujourd'hui le sujet de recherches actives.

*Remarque 1.3.* On appelle **boîte de flot** un domaine  $U$  sur lequel est défini un redressement de  $X$ , c'est à dire une difféomorphisme  $h$  tel que  $h_*X$  soit constant.

La démonstration du théorème de redressement associe à tout hyperplan  $\Sigma$ , supplémentaire de  $X(x)$ , un tel redressement qui envoie  $\Sigma$  sur  $x_1 = 0$ . Un tel morceau d'hyperplan  $\Sigma$  s'appelle **section de Poincaré** du flot<sup>3</sup>.

Nous allons maintenant définir l'**application de premier retour** ou **application de Poincaré** associée à une orbite périodique.

Soit  $x(t)$  une solution périodique de période minimale<sup>4</sup>  $T$  du flot  $\phi^t$  de  $X$  et  $\Sigma$  une section de Poincaré passant par  $u_0 = x(0)$ . On appelle application de premier retour, l'application qui à  $u$  dans  $\Sigma$  associe le premier point de rencontre de la courbe  $\{\varphi^t(u) \mid t > 0\}$  avec  $\Sigma$ . Bien entendu elle n'est définie que sur un voisinage de  $u_0$  dans  $\Sigma$ .

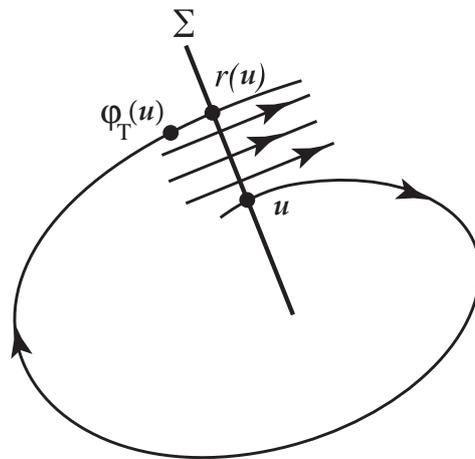


FIG. 5.4 – Application de premier retour

**Proposition 5.8.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) L'application de Poincaré  $u \rightarrow r(u)$  est alors un difféomorphisme de classe  $C^k$ , défini sur un voisinage de  $u_0$  dans  $\Sigma$ . Sa différentielle en  $u_0$ , dans une base dont le premier vecteur est égal à  $X(u_0)$ , et dont les autres sont dans  $\Sigma$  est liée à celle de  $\varphi^T(u_0)$  par*

$$d\varphi^T(u_0) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & dr(u_0) \end{pmatrix}$$

**Démonstration.** Soit  $V$  un voisinage de  $u_0$  dans  $\Sigma$ . On supposera  $\Sigma$  donnée par  $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ , et considérons la fonction  $f$  définie sur  $]T - \delta, T + \delta[ \times V$

$$f : (t, u) \rightarrow x_1(\varphi^t(u))$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, u)|_{(T, u_0)} = dx_1(\varphi^t(u)) \frac{d}{dt} (\varphi^t(u))_{t=T} = dx_1(u_0) X(u_0)$$

<sup>3</sup>Le terme est en fait utilisé pour tout morceau d'hypersurface,  $\Sigma$  tel que  $T_x \Sigma$  soit supplémentaire de  $X(x)$ , mais il faudra attendre le chapitre 8 pour une définition formelle.

<sup>4</sup>C'est-à-dire que  $T$  est le plus petit réel strictement positif tel que  $\varphi^T(u_0) = u_0$

Dire que  $\Sigma$  est une section de Poincaré signifie que  $X(u_0)$  n'est pas dans  $\Sigma$ , et donc que  $dx_1(u_0)X(u_0) \neq 0$ . Quitte à restreindre  $\delta$  et  $V$ , le théorème des fonctions implicites nous garantit l'existence d'une fonction  $T(u)$  de classe  $C^k$  définie sur  $V$ , telle que  $t = T(u)$  soit l'unique solution de  $x_1(\varphi^t(u)) = 0$  contenue dans  $]T - \delta, T + \delta[$ . En d'autres termes  $\varphi^{T(u)}(u) \in \Sigma$ .

Montrons que si  $V$  est choisi suffisamment petit,  $T(u)$  est bien le temps de premier retour de  $u$  sur  $\Sigma$ .

Tout d'abord, si  $u$  est sur  $\Sigma$ , on a  $\varphi^t(u) \neq u$  pour  $t$  strictement positif et inférieur à  $\delta$  et donc le temps de premier retour de  $u$  sur  $\Sigma$ , est minoré par  $\delta$ . D'autre part  $T(u)$  est l'unique solution de  $x_1(\varphi^t(u)) = 0$  dans  $t \in ]T - \delta, T + \delta[$ . Donc si pour  $t < T(u)$  on avait  $x_1(\varphi^t(u)) = 0$ , nécessairement  $\delta < t < T - \delta$ .

Nous allons sous cette hypothèse obtenir une contradiction à la minimalité de  $T$ . Supposons en effet qu'il existe une suite  $u_n$  dans  $\Sigma$  tendant vers  $u_0$ , et une suite  $T_n$  vérifiant  $\delta < T_n < T - \delta$  telles que  $\varphi^{T_n}(u) \in \Sigma$ . Quitte à remplacer  $T_n$  par une sous-suite, on peut supposer que  $T_n$  a une limite  $T_\infty$ , qui est nécessairement dans  $[\delta, T - \delta]$ .

Mais alors, puisque  $\lim_n u_n = u_0$  on a par continuité du flot, que  $\varphi^{T_\infty}(u_0) = u_0$  ce qui contredirait la minimalité de  $T$  comme période de  $u_0$ .

Calculons maintenant la différentielle de l'application de premier retour,  $r(u) = \varphi^{T(u)}(u)$  définie sur un voisinage  $W$  de  $u_0$  dans  $\Sigma$ . Cette application est bien différentiable, comme composée d'applications différentiables, puisque l'on a montré que  $u \rightarrow T(u)$  et  $(t, u) \rightarrow \varphi^t(u)$  le sont.

Considérons un système de coordonnées dont le premier vecteur est donné par  $X(u_0)$  et les autres sont dans  $\Sigma$ . toujours donnée par l'équation  $x_1 = 0$ .

La différentielle de  $r$  est alors donnée par

$$dr(u_0) = d\varphi^T(u_0) + \frac{d}{dt}\varphi^t(u_0)|_{t=T(u_0)}dT(u_0) = d\varphi^T(u_0) + X(u_0)dT(u_0)$$

La projection de cette égalité sur  $\Sigma$  parallèlement à  $X(u_0)$  donne l'égalité du bloc inférieur droit de  $d\varphi^T(u_0)$  avec  $dr(u_0)$ . La première colonne de la matrice de  $d\varphi^T(u_0)$  dans cette base s'obtient en écrivant que  $\varphi^{t+T}(u_0) = \varphi^t(u_0)$  et en différentiant cette égalité par rapport à  $t$ .

On a en effet

$$\frac{d}{dt}\varphi^{t+T}(u_0)|_{t=0} = d\varphi^T(u_0)\frac{d}{dt}\varphi^t(u_0)|_{t=0} = d\varphi^T(u_0)X(u_0)$$

Mais

$$\frac{d}{dt}\varphi^{t+T}(u_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi^t(u_0)|_{t=0} = X(u_0)$$

On en conclut  $d\varphi^T(u_0)X(u_0) = \frac{d}{dt}\varphi^{t+T}(u_0)|_{t=0} = X(u_0)$ .

Comme  $\varphi^T$  est un difféomorphisme,  $d\varphi^T$  est inversible, et donc  $dr(u_0)$  aussi. Le théorème d'inversion locale permet alors de conclure que  $r$  est un difféomorphisme local.  $\square$

*Remarques 1.1.* (A) On aurait pu voir directement que  $r$  est un difféomorphisme local en construisant son inverse, l'application de « dernier passage », qui n'est autre que l'application premier retour pour  $-X$ .

(B) On pourra aussi calculer la différentielle du temps de premier retour (cf. exercice (J)).

## 2 Linéarisation et théorie des perturbations pour un flot

Nous voulons ici déterminer de manière plus précise le comportement des solutions proches d'une solution donnée. En premier lieu, nous voulons calculer  $d\varphi_{t_0}^t(x_0)$  où  $\varphi_{t_0}^t$  est le flot de  $X(t, x)$ , que l'on supposera de classe  $C^1$ .

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $x \mapsto \varphi_{t_0}^t(x)$  est différentiable et vérifie

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t_0}^t(x) = X(t, \varphi_{t_0}^t(x))$$

En différentiant <sup>5</sup> par rapport à  $x$ , et utilisant le lemme de Schwartz (Proposition 1.26 de l'appendice du chapitre 1) on obtient, posant  $d\varphi_{t_0}^t(x) = L(t_0, t, x)$

$$\frac{d}{dt}L(t_0, t, x) = dX(t, \varphi_{t_0}^t(x))L(t_0, t, x)$$

C'est dire que  $L(t_0, t, x)$  est la résolvante de l'équation linéaire

$$\dot{v} = A(t)v$$

où  $A(t) = dX(t, \varphi_{t_0}^t(x))$ .

**Définition 5.9.** On appelle  $L(t_0, t, x)$  le linéarisé du flot en  $x$ . Comme pour la résolvante, on note  $L(t, x) = L(0, t, x)$ .

Il résulte immédiatement de ce qui précède que

**Proposition 5.10.** *La différentielle de  $u_0 \rightarrow \varphi_{t_0}^t(u_0)$  est égale à  $L(t_0, t, u_0)$ .*

Notons que pour une équation d'ordre supérieur, il est inutile de se ramener à une équation d'ordre un pour calculer le linéarisé du flot (du moins si on se contente d'avoir

---

<sup>5</sup>Si  $f$  est une fonction de  $(t, x)$  on note  $\frac{d}{dt}f(t, x)$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $t$  et  $df(t, x)$  la dérivée partielle par rapport à  $x$ .

le linéarisé sous forme de solution d'une équation d'ordre supérieur), et que la méthode la plus commode, est encore de substituer dans l'équation le développement limité de la solution, en identifiant les termes de même ordre en le petit paramètre. On peut aussi, si  $X$  est de classe  $C^k$ , calculer les différentielles d'ordre supérieur de  $\varphi_{t_0}^t$ .

*Exemple 2.1.* Considérons l'équation du pendule

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0$$

avec condition initiale  $x(0) = \varepsilon, \dot{x}(0) = 0$ .

Sa linéarisée au voisinage de la solution nulle, correspondant à  $\varepsilon = 0$  est

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = 0$$

dont les solutions sont les combinaisons linéaires de  $\cos(\omega t)$  et  $\sin(\omega t)$ .

Donc la solution avec condition initiale  $x(0) = \varepsilon, \dot{x}(0) = 0$  est donné par  $x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + O(\varepsilon^2)$  et on peut bien évidemment calculer les termes d'ordre supérieur :

Posons

$$x(t) = \varepsilon \cdot v_1(t) + \varepsilon^2 \cdot v_2(t) + \varepsilon^3 v_3(t) + O(x_0^4)$$

avec condition initiale  $x(0) = \varepsilon, \dot{x}(0) = 0$  c'est-à-dire que  $v_1(0) = 1, \dot{v}_1(0) = 0, v_2(0) = \dot{v}_2(0) = 0, v_3(0) = \dot{v}_3(0) = 0$ .

On doit donc avoir<sup>6</sup>

$$x_0 \ddot{v}_1 + x_0^2 \ddot{v}_2 + x_0^3 \ddot{v}_3 + O(x_0^4) + \omega^2 \sin(x_0 v_1 + x_0^2 v_2 + x_0^3 v_3 + O(x_0^4)) = 0$$

Utilisant le développement du sinus à l'ordre 3 on obtient

$$x_0(\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1) + x_0^2(\ddot{v}_2 + \omega^2 v_2) + x_0^3(\ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 - \frac{\omega^2}{6} v_1^3)$$

soit

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 &= 0 \\ \ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 &= 0 \\ \ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 &= \frac{\omega^2}{6} v_1^3 \end{aligned}$$

Puisque  $v_1(t) = \cos(\omega t)$ , la seconde équation est impaire de condition initiale nulle  $v_2$  est donc nulle.

---

<sup>6</sup>notons que ce ne sont pas les calculs qui justifient l'existence du développement, mais le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres. Une fois l'existence de ce développement acquise, il est facile de voir que les calculs suivants en fournissent nécessairement les coefficients.

La troisième équation est l'équation linéaire :

$$\ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 = \cos^3(\omega t)$$

qui se résout par variation de la constante, ou par la commande Maple

```
>dsolve({diff(diff(u(x),x),x)+a^2u(x)=cos(a*x)^3, u(0)=0, D(u)(0)=0},{u(x)});
```

nous donne

$$v_3(t) = \frac{1}{32} \cos(\omega t) - \frac{1}{32} \cos(3\omega t) + \frac{3}{8} \omega t \cdot \sin(\omega t)$$

En définitive on obtient

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon^3}{6} \left( \frac{1}{32} \cos(\omega t) - \frac{1}{32} \cos(3\omega t) + \frac{3}{8} \omega t \cdot \sin(\omega t) \right) + O(\varepsilon^5)$$

*Exercice 2.1.* Trouver le développement de la période des oscillations du pendule en fonction de l'amplitude des oscillations,  $\varepsilon$ .

*Remarque 2.1.* Dans la formule ci dessus on a un terme en  $t \sin(\omega t)$  qui n'est pas périodique, bien que l'on sache a priori que si  $x_0$  est assez petit,  $x(t)$  est périodique. Cela n'a rien d'absurde, une somme de termes non-périodiques peut très bien être périodique, mais cela pose le problème de l'approximation de  $x(t)$  par le développement asymptotique ci-dessus lorsque  $t$  est grand. Les termes de la forme  $t^p \cos(\omega t)$  ou  $t^p \sin(\omega t)$  pour  $p$  supérieur à un, appelés **termes séculaires**, furent considérés avec beaucoup d'attention au cours de la deuxième moitié du 19ème siècle. On verra dans l'exercice (G) une des méthodes utilisées pour s'en débarrasser.

On peut aussi lorsqu'on a une famille  $X_\mu(t, x)$  de champs de vecteurs, et  $x_\mu(t)$  une solution de condition initiale  $x_\mu(t_0) = u_0$ , calculer les différentielles de  $x_\mu(t)$  par rapport à  $\mu$ . On supposera la solution connue pour la valeur  $\mu = 0$  du paramètre, et on cherche les dérivées en  $\mu$  de  $x_\mu(t)$  en  $\mu = 0$ . Celles-ci permettent de calculer le développement limité

$$x_\mu(t) = x_0(t) + \mu \xi_1(t) + \mu^2 \xi_2(t) + \dots + \mu^k \xi_k(t) + o(\mu^k)$$

En effet, posant  $\xi(t) = \xi_1(t) = \frac{d}{d\mu} x_\mu(t)|_{\mu=0}$ , on a

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{d\mu} x_\mu(t) = \frac{d}{d\mu} \frac{d}{dt} x_\mu(t)$$

d'après le Lemme de Schwarz. Cette dernière quantité est donnée par

$$\frac{d}{d\mu} (X_\mu(t, x_\mu(t))) = \left( \frac{d}{d\mu} X_\mu \right) (t, x_\mu(t)) + dX_\mu(t, x_\mu(t)) \xi(t)$$

où on rappelle que  $d$  désigne la différentielle par rapport à la variable  $x$ . Donc

$$\frac{d}{dt}\xi(t) - \frac{\partial}{\partial x}X_0(t, x_0(t))\xi(t) = \frac{d}{d\mu}X_\mu(t, x_\mu(t))|_{\mu=0}$$

et  $\xi$  vérifie une équation linéaire inhomogène dont l'équation homogène associée est la linéarisée du flot. On peut donc écrire

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t L(s, t, x_0) \frac{d}{d\mu}X_\mu(t, x_\mu(t)) ds$$

**Proposition 5.11.** *Soit  $x_\mu$  une famille de solutions de l'équation*

$$\dot{x}_\mu = X_\mu(t, x_\mu(t)); x_\mu(0) = u_0$$

*On suppose que l'application  $(t, \mu, x) \rightarrow X_\mu(t, x)$  est de classe  $C^1$ . Alors  $\mu \rightarrow x_\mu(t)$  est différentiable de différentielle en  $\mu = 0$  égale à  $\xi(t) = \int_{t_0}^t L(s, t, x_0) \frac{d}{d\mu}X_\mu(t, x_\mu(t)) ds$ .*

On obtient de la même manière les coefficients d'ordre supérieur. Les calculs sont du même type que ceux pratiqués pour une variation de la condition initiale. La meilleure méthode est d'identifier les coefficients.

*Exemple 2.2.* Considérons l'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Pour  $\mu = 0$ , on résout  $\ddot{x} + x = 0$  dont les solutions sont  $x_0(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ .

La solution admet donc le développement limité  $x_\mu(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots$

où  $x_1(t)$  est solution de

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -(x_0^2 - 1)\dot{x}_0$$

Le calcul pour  $a, b$  quelconque est laissé en exercice (on conseille vivement l'utilisation d'un logiciel de calcul formel). Mais en partant de la solution  $x_0(t) = \cos(t)$  ( $a = 1, b = 0$ ) on obtient

$$x_1(t) = -\frac{3}{8}t \cos(t) + \frac{1}{32} \sin(3t) + \frac{9}{32} \sin(t)$$

On remarquera ici aussi la présence du terme séculaire.

Le terme  $x_2$  est solution de

$$\ddot{x}_2(t) + x_2(t) = -[2x_0(t)x_1(t)\dot{x}_1(t) + (x_0(t)^2 - 1)\dot{x}_1(t)]$$

$$x_2(t) = -\frac{5}{64}t \sin(t) + \frac{113}{3072} \cos(t) - \frac{9}{256} \cos(3t) - \frac{5}{3072} \cos(5t) - \frac{9}{256}t \sin(3t) + \frac{3}{128}t^2 \cos(t)$$

## 2.1 Application

La linéarisation permet aussi d'utiliser les propriétés infinitésimales du flot pour en déduire des propriétés globales. Par exemple, l'équation

$$\ddot{x} + \nabla V(t, x) = 0$$

se réécrit

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\nabla V(t, x)$$

son flot  $\varphi_{t_0}^t(x, y)$  préserve le volume  $n$ -dimensionnel (et donc en dimension deux  $\phi_{t_0}^t$  préserve l'aire.). En effet, le linéarisé du flot est donné par

$$\dot{\xi} = \eta, \dot{\eta} = V''(t, x(t))\eta$$

dont la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(t, x(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de trace nulle. D'après le théorème de Liouville,  $d\varphi_{t_0}^t(x)$  préserve donc le volume, ou encore  $\det(d\varphi_{t_0}^t(x)) = 1$ , et on a donc :

**Théorème 5.12** (Théorème de Liouville non-linéaire). *Soit  $\varphi_{t_0}^t$  le flot d'une équation différentielle  $X(t, x)$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\nabla \cdot X(t, x) = \text{trace}(dX(t, x)) = 0$ . Alors  $\varphi_{t_0}^t$  préserve la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Liouville linéaire, le linéarisé  $d\varphi_{t_0}^t(x)$  vérifie  $\det(d\varphi_{t_0}^t(x)) = 1$ . D'après la formule de changement de variable pour les intégrales, notant,  $\mu$  mesure de Lebesgue, on a

$$\mu(\varphi_{t_0}^t(U)) = \int_{\varphi_{t_0}^t(U)} d\mu = \int_U |\det(d\varphi_{t_0}^t(x))| d\mu = \int_U d\mu = \mu(U)$$

□

## 3 Compléments : Aspects topologiques, théorème de Poincaré-Bendixson

Une des premières applications de type topologique du théorème des sections de Poincaré est le théorème de Poincaré-Bendixson. Ce théorème permet sous certaines hypothèses de montrer l'existence d'orbites périodiques pour un champ de vecteurs du plan. L'importance des orbites périodiques vient tout d'abord de ce qu'elles correspondent à des

solutions oscillantes d'un système mécanique ou électrique. Mais ces solutions se sont avérées jouer un rôle fondamental non seulement pour les systèmes dynamiques, mais aussi dans de nombreux autres domaines, que ce soit pour l'étude des équations aux dérivées partielles, ou en géométrie différentielle.

Définissons d'abord la notion d'ensemble  $\omega$ -limite d'une orbite ;

**Définition 5.13.** Soit  $X$  un champ de vecteurs, de flot  $\varphi^t$ . On appelle ensemble  $\omega$ -limite de  $x$ , l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $\varphi^t(x)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , ou encore l'ensemble des  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(x)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ . On le note  $L_\omega(x)$ . On note  $L_\alpha(x)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $\varphi^t(x)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ . Enfin si  $Z$  est un ensemble, on note  $L_\omega(Z) = \bigcup_{z \in Z} L_\omega(z)$ ,  $L_\alpha(Z) = \bigcup_{z \in Z} L_\alpha(z)$ .

Voici quelques propriétés importantes de ces ensembles :

- (A) si  $Z \subset Y$  et  $Y$  est fermé, invariant par le flot positif (i.e.  $\varphi^t(Y) \subset Y$  pour tout  $t > 0$ ), alors  $L_\omega(Z) \subset Y$ .
- (B)  $L_\omega(z)$  est fermé (exercice (C) du chapitre 1).
- (C)  $L_\omega(Z)$  est invariant par le flot, car si  $u = \lim_n \varphi^{t_n}(z)$  on a  $\varphi^\tau(u) = \lim_n \varphi^{\tau+t_n}(z)$ .
- (D) si  $L_\omega(z)$  est borné, il est connexe (cf. exercice (I))

Il résulte en particulier des propriétés (A) et (C) que  $L_\omega(L_\omega(z)) \subset L_\omega(z)$ .

**Théorème 5.14** (Poincaré-Bendixson). *Soit  $x(t)$  une solution d'un champ de vecteurs  $X$  du plan. Si  $x(t)$  reste bornée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  alors l'adhérence de  $x(t)$  contient un point singulier de  $X$  ou une orbite périodique. Dans ce dernier cas, et si  $x(t)$  n'est pas elle-même périodique on dit que l'orbite périodique est un **cycle limite** .*

Il s'agit d'abord de comprendre comment une trajectoire peut intersecter une section de Poincaré,  $\Sigma$ , dans notre cas un segment du plan.

**Définition 5.15.** Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée injectivement par un segment  $[a, b]$ . Étant donnés trois points  $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)$  sur  $\gamma([a, b])$ , on dira que  $\gamma(t_2)$  **est entre**  $\gamma(t_1)$  **et**  $\gamma(t_3)$  **sur**  $\gamma$ , si  $t_1 < t_2 < t_3$ . Cette notion ne change pas si on inverse le sens de parcours de  $\gamma$  (i.e. si on remplace  $\gamma$  par  $\gamma^{-1}(t) = \gamma((a+b) - t)$ ). On dit par abus de langage que les points sont ordonnés.

Considérons trois points  $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$  sur  $\Sigma$ . On a alors deux notions d'ordre, la première donnée par leur position sur la trajectoire la deuxième par leur position sur  $\Sigma$ .

**Lemme 5.16.** *Les ordres de  $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$  sur la trajectoire et sur  $\Sigma$  coïncident*

**Démonstration.** D'après le théorème de redressement, la différence entre deux instants de rencontre de  $\gamma$  avec  $\Sigma$  est minoré. On peut donc se ramener au cas où les instants  $t_1, t_2, t_3$  sont trois instants consécutifs de rencontre avec  $\Sigma$ . En effet si  $t_1 = \tau_1 < \tau_2 <$

...  $< t_2 = \tau_k < \dots < \tau_n = t_3$  sont les instants de rencontre, il suffit de montrer que  $x(t_j), x(\tau_{j+1}), x(\tau_{j+2})$  sont ordonnés sur  $\Sigma$  pour conclure que  $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$  le sont.

Soit  $\gamma$  la courbe fermée constituée par  $\{x(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$  et le segment de  $\Sigma$  délimité par  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$ . On va montrer que  $x(t_3)$  ne peut être se trouver sur ce dernier segment. Dans le cas contraire, on aurait que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $x(t_2 + \varepsilon)$  et  $x(t_3 - \varepsilon)$ , qui sont dans  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ , sont dans des composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ . En effet,  $x$  traverse  $\Sigma$  dans le même sens en  $t = t_2$  et  $t = t_3$ , et donc  $x(t_2 + \varepsilon)$  et  $x(t_3 + \varepsilon)$  sont dans la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ . Comme on passe de  $x(t_3 - \varepsilon)$  à  $x(t_3 + \varepsilon)$  par un chemin qui traverse  $\gamma$  en un point unique,  $x(t_3)$ , on aura d'après le théorème de Jordan (cf. Appendice) que  $x(t_2 + \varepsilon)$  et  $x(t_3 - \varepsilon)$  sont dans des composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ . D'autre part,  $\{x(t) \mid t_2 + \varepsilon \leq t \leq t_3 - \varepsilon\}$  est un arc contenu dans le complémentaire de  $\gamma$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

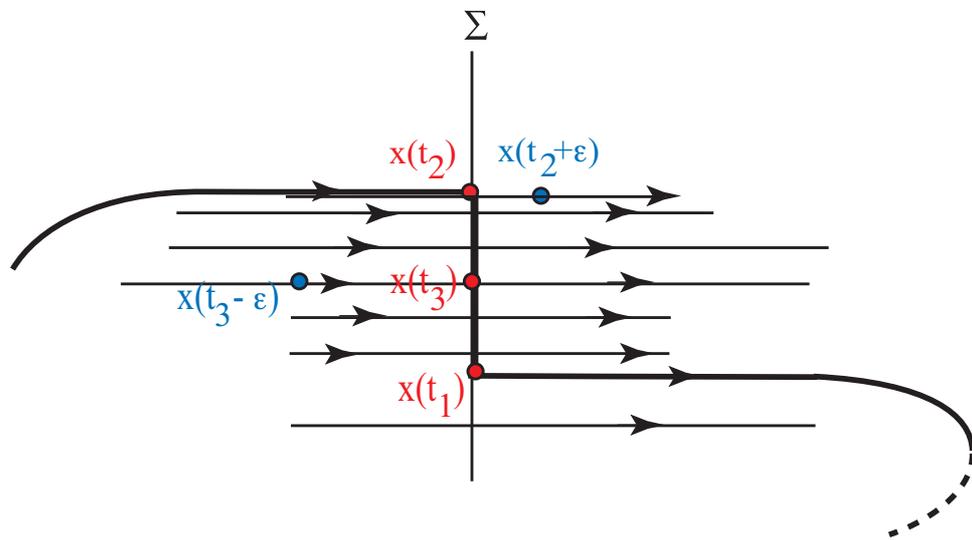


FIG. 5.5 – Illustration du Lemme 1 : dans la situation de la figure, les points bleus seraient dans la même composante connexe du complémentaire de  $\gamma$ , contredisant le théorème de Jordan

**Lemme 5.17.** *L'ensemble  $L_\omega(x)$  est une réunion d'orbites qui ne rencontre une section de Poincaré qu'en un point au plus.*

**Démonstration.** Il est clair d'après la propriété (C) que  $L_\omega(x)$  est réunion d'orbites. Soient alors  $y, z$  deux points de  $L_\omega(x) \cap \Sigma$ . Il existe deux suites,  $s_n, t_n$  tendant vers  $+\infty$ , telles que  $\lim_n x(s_n) = y$  et  $\lim_n x(t_n) = z$ .

Mais quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que  $s_n < t_n < s_{n+1} < t_{n+1}$ . Puisque pour  $n$  assez grand, les  $x(s_n)$  sont tous près de  $y$  et les  $x(t_n)$  près de  $z$ , et que d'après le lemme, sur  $\Sigma$ ,  $x(t_n)$  est entre  $x(s_n)$  et  $x(s_{n+1})$ , on a nécessairement  $y = z$ .  $\square$

*Démonstration de Poincaré-Bendixson.* Considérons  $L_\omega(x)$ , qui est non vide par hypothèse. On va montrer que si cet ensemble ne contient pas de zéro de  $X$  il est réduit à

une orbite périodique. En effet, si  $z \in L_\omega(x)$ , l'orbite de  $z$  est bornée, donc  $L_\omega(z)$  est non-vide. Soit  $u \in L_\omega(z)$  alors il existe des points de l'orbite de  $z$  arbitrairement proches de  $u$ . Si  $u$  n'est pas singulier, il existe une section de Poincaré en  $u$ , et l'orbite de  $z$  coupera cette section une infinité de fois, ce qui contredit le lemme 5.17, sauf si ces points sont confondus, auquel cas l'orbite est périodique.

On a donc montré que  $L_\omega(z)$  contient un zéro de  $X$ , ou une orbite périodique. Comme d'après la remarque précédant l'énoncé du théorème,  $L_\omega(z) \subset L_\omega(x)$ , cela termine la démonstration.  $\square$

On peut donner plus de détails sur la structure de  $L_\omega(x)$  dans le cas général. Si  $L_\omega(x)$  contient une orbite périodique, alors  $L_\omega(x)$  est égal à cette orbite, et l'orbite de  $x$  « spirale » vers cette courbe. Si  $L_\omega(x)$  contient des zéros de  $X$ , il peut alors y en avoir plusieurs, reliés par des trajectoires, l'ensemble formant une courbe fermée, et la trajectoire de  $x$  spirale vers cette réunion d'orbites <sup>7</sup>.

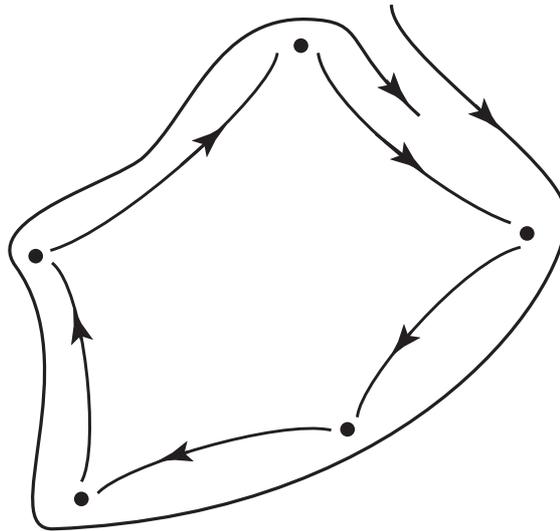


FIG. 5.6 – Cas où  $L_\omega(x)$  est réunion de points singuliers et de trajectoires hétéroclines

Notons qu'il n'y a pas vraiment d'analogue du théorème de Poincaré-Bendixson en dimension supérieure (ni même pour des champs non-autonomes).

*Remarque 3.1.* Le résultat élémentaire suivant est utile pour appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson. Soit  $X$  un champ de vecteurs et  $\Omega$  un domaine dont le bord est la sous-variété  $\Sigma = \partial\Omega$ . On dira que  $X$  est rentrant dans  $\Omega$  si au voisinage de chaque point  $\Omega$  est donné par l'équation  $f < 0$  et  $df(x)X(x) < 0$ . Comme dans ce cas  $\nabla f(x)$  est proportionnel à la normale extérieure de  $\Sigma$ , la condition se réécrit  $\langle n(x), X(x) \rangle < 0$ .

**Proposition 5.18.** *Si  $X$  est partout rentrant dans  $\Omega$ , toute solution qui est dans  $\Omega$  pour  $t = 0$  y reste pour tout  $t$  positif. En particulier si  $x \in \Omega$ , alors  $L_\omega(x) \subset \Omega$*

<sup>7</sup>On ne peut exclure le cas où  $L_\omega(x)$  serait un ensemble connexe de zéros de  $X$ .

**Démonstration.** Lorsque  $\Omega = \{x \mid f(x) \leq 0\}$ , c'est la proposition 4.5 du chapitre 4. Dans le cadre présent, elle est basée sur le même principe. Il suffit en effet de montrer que si  $\tau$  est la borne supérieure de l'ensemble des réels tel que  $x([0, t]) \subset \Omega$  alors  $\tau = \infty$ . Supposons donc  $\tau < \infty$ . Alors  $x(\tau)$  est dans  $\Omega$  car  $\Omega$  est fermé.

Ensuite, notre affirmation est évidente si  $x(\tau) \in \overset{\circ}{\Omega}$ . On peut donc supposer  $x(\tau) \in \Sigma$ . Enfin, une carte nous ramène au cas où  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$  et  $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ .

Dire que le champ est rentrant, signifie que  $X(x) = u_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$  où  $u_n(x(\tau)) < 0$ . Alors une solution vérifie  $\dot{x}_n(\tau) = u_n(x(\tau)) < 0$  et donc comme  $x_n(\tau) = 0$ , on en déduit  $x_n(\tau + t) < 0$  pour  $t$  assez petit. Mais alors  $x(\tau + t) \in \Omega$  et cela contredit la maximalité de  $\tau$ .  $\square$

## 4 Appendice : Théorème de Jordan

Ce théorème affirme que si  $\gamma$  est une courbe fermée continue plongée dans le plan, c'est-à-dire l'image par une injection continue du cercle  $S^1$ , alors son complémentaire a deux composantes connexes, l'une bornée l'autre non bornée.

**Théorème 5.19.** *Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application bijective continue du cercle dans un sous-ensemble du plan. Alors  $\mathbb{R}^2 - \gamma(S^1)$  a deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non, telles que  $\gamma(S^1)$  soit leur frontière commune.*

La démonstration de ce théorème intuitivement évident, l'est assez peu, et nous renvoyons à [Dieudonné], Appendice du chapitre 8 page 246. Il existe des nombreuses démonstrations modernes, utilisant la théorie de l'homologie, qui ont l'avantage de se généraliser en dimension supérieure (le complémentaire de l'image d'une hypersurface compacte dans  $\mathbb{R}^n$  a deux composantes connexes). La démonstration pour des courbes  $C^1$  est plus facile.

Notons que si une courbe « traverse »  $\gamma$  en un point unique, c'est-à-dire si  $\rho : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue, et  $\rho(t) = \gamma(s) \iff s = t = 0$  et  $\rho'(0)$  et  $\gamma'(0)$  sont linéairement indépendants, alors les ensembles  $\rho([-1, 0])$  et  $\rho(]0, 1])$  sont dans des composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ . En effet  $F : (s, t) \mapsto \gamma(s) + \rho(t)$  est alors un difféomorphisme local, et donc si  $A$  et  $B$  sont les deux composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 - \gamma$ ,  $F^{-1}(A)$  et  $F^{-1}(B)$  sont des ouverts au voisinage de  $(0, 0)$  ayant  $t = 0$  comme frontière commune. Nécessairement ces ouverts sont  $t < 0$  et  $t > 0$ , et donc  $\rho(t)$  est dans des composantes connexes distinctes suivant le signe de  $t$ .

Montrer que le complémentaire n'est pas connexe, est en fait nettement plus facile. Pour cela la méthode la plus simple utilise le théorème des résidus. Encore faut-il veiller à ne pas utiliser une variante de Jordan pour le démontrer !

On utilise alors que

a) si  $\gamma(z_0, r)$  est un cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ , parcouru dans le sens direct, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

b) si  $\gamma_s$  est une famille continue de lacets continus et  $C^1$  par morceaux, évitant  $z_0$ , alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_s} \frac{dz}{z - z_0}$$

ne dépend pas de  $s$ .

## 5 Exercices

(A) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $f(x) = (x^2 - 1)e^{\cos x}$ . On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$x(0) = x_0$$

(a) Montrer que si  $-1 < x_0 < 1$ , les solutions sont définies pour tout temps. Montrer que si  $x_0 < -1$  elles sont définies sur un intervalle contenant  $[0, +\infty[$ , et si  $x_0 > 1$  sur un intervalle contenant  $] -\infty, 0]$ .

(b) Lorsque  $x_0 > 1$  l'intervalle de définition contient-il  $[0, +\infty[$  ?

(B) On considère le système

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + \varepsilon(x(t)^2 + y(t)^2 - 1)x(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + \varepsilon(x(t)^2 + y(t)^2 - 1)y(t) \end{cases}$$

On suppose  $\varepsilon > 0$ .

(a) Quels sont les zéros du champ de vecteurs ?

(b) Montrer qu'une solution de condition initiale dans le disque  $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$  reste dans ce disque.

(c) Quel est le temps de vie des solutions ?

(d) Donner le développement limité de la solution de condition initiale  $x_\varepsilon(0) = 1/2, \dot{x}_\varepsilon(0) = 0$  en  $\varepsilon = 0$  à l'ordre 1.

(C) Dessiner le portrait de phase d'un pendule avec frottement. On pourra comparer le résultat avec celui fourni par Maple.

(D) Soit  $f$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  préservant l'orientation (i.e.  $\det(df(x)) > 0$ ). On veut montrer qu'il existe une équation différentielle  $X(t, x)$  dont le flot au temps un,  $\varphi^1$  soit égal à  $f$ .

a) Montrer que s'il existe une famille continue  $f_t$  de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $f_0 = Id$  et  $f_1 = f$  alors  $f_t$  est le flot d'une équation différentielle.

Montrer qu'il en est de même si on suppose simplement que  $f_0$  est flot au temps un d'un système dynamique.

b) En posant  $f_0(x) = df(0)x$  et  $f_t(x) = \frac{1}{t}f(t \cdot x)$ , montrer en utilisant a) qu'il suffit de trouver un chemin de difféomorphismes entre  $Id$  et un élément quelconque de  $GL^+(n) = \{A \in GL(n) \mid \det(A) > 0\}$

c) Que dire dans le cas où  $f$  renverse l'orientation.

(E) **Lemme de Morse.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^2$ . Supposons que pour  $a < b$ , le module du gradient de  $f$ ,  $|\nabla f(x)|$ , soit minoré par une constante strictement positive sur  $f^{-1}([a, b])$ . Alors  $f^{-1}(a)$  et  $f^{-1}(b)$  sont difféomorphes<sup>8</sup>.

On pourra montrer que le flot de  $X(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}$  est défini pour tout temps, et envoie  $f^{-1}(a)$  sur  $f^{-1}(b)$  Indication : on calculera  $f(\varphi^t(x))$  en calculant sa dérivée,  $df(x)X(x)$ .

(F) Soit  $\gamma(t)$  une orbite de période  $T$  du champ de vecteurs

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1(t), x_2(t)), \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

Montrer que les valeurs propres de  $d\phi^T(\gamma(0))$  ont pour logarithme 0 et

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\gamma(t)) \right) dt$$

(G) **Séries de Lindstedt.**<sup>9</sup>

La théorie des perturbations élémentaires appliquée à une solution périodique,  $x_0(t)$  de période  $T$ , telle que les solutions périodiques voisines soient aussi périodiques de période  $T_\mu$ , ignore cette périodicité en introduisant des termes séculaires. Ce phénomène n'a rien de surprenant : le développement de Taylor de la fonction périodique  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$  est aussi une approximation d'une fonction périodique par une série dont les termes sont non-périodiques. Bien que la série soit convergente, le nombre de termes nécessaire pour avoir une approximation sur un intervalle de longueur  $L$  augmente avec  $L$ .

a) Estimer le nombre de termes nécessaire pour calculer  $\sin(x)$  sur  $[0, L]$  à  $10^{-2}$  près. Donner une méthode plus pratique pour calculer  $\sin(100)$  à  $10^{-2}$  près.

La méthode de Lindstedt consiste à approcher la solution par des fonctions périodiques.

On va étudier cette méthode sur l'exemple de  $\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$ . On note  $x_\mu(t)$  la solution de cette équation avec condition initiale  $x_\mu(0) = a, \dot{x}_\mu(0) = 0$ . On a donc  $x_0(t) = a \cos(t)$

On pose comme nouvelle variable  $\tau = \Omega(\mu) \cdot t$  et  $z_\mu(\tau) = x_\mu(t)$ .

L'équation en  $z_\mu$  est alors

$$\Omega(\mu)^2 z_\mu''(\tau) + z_\mu(\tau) + \mu z_\mu(\tau)^3 = 0$$

<sup>8</sup>ce qui signifie ici qu'il existe un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  envoyant  $f^{-1}(a)$  sur  $f^{-1}(b)$ .

<sup>9</sup>A. Lindstedt, Mém. de l'Acad. Impér. de St Petersburg, vol 31, 1883. Voir aussi [Poincaré].

On suppose que  $z_\mu(\tau) = a \cos(\tau) + a_1 \mu z_1(\tau) + a_2 \mu^2 z_2(\tau) + \dots$  et  $\Omega(\mu) = 1 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \dots$

b) Écrire la relation entre  $\alpha_1$  et  $z_1$ , et montrer que l'on peut choisir  $\alpha_1$  pour que  $z_1$  soit périodique

c) Montrer que l'on peut choisir  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$  pour que  $z_2, \dots, z_k$  soient périodiques.

On a donc éliminé les termes séculaires.

d) Justifier les développements asymptotiques de  $z_\mu$ ,  $\Omega(\mu)$  et  $x_\mu(t) = z_\mu(\Omega(\mu)t)$  ainsi obtenus

e) Calculer un développement asymptotique de la période  $T(\mu) = \frac{2\pi}{\Omega(\mu)}$ .

f) Comment varie la période des oscillations d'un pendule en fonction de l'amplitude (on remplacera  $u$  par  $\mu x$  dans  $\ddot{u} + \sin(u) = 0$ ).

*Remarque 5.1.* Nous avons étudié un cas particulièrement simple, où les solutions sont toutes périodiques (car l'énergie  $|\dot{x}|^2 + |x|^2 + \frac{\mu}{2}|x|^4$  est constant et les lignes de niveau sont fermées). Les solutions sont alors réellement de période  $T_\mu$ . Mais la méthode s'applique dans le cas de dimension supérieure, où les différentes fréquences du système linéarisé ne sont pas, en général égales. On a alors des solutions quasi-périodiques, et si les séries de Lindstedt dans ce nouveau cadre fournissent un développement asymptotique, la question de leur convergence est un sujet difficile, commencé par Poincaré, qui les pensait généralement divergentes, poursuivi par Kolmogorov, Arnold et Moser, dont le célèbre théorème KAM, affirme au contraire qu'elles peuvent être assez souvent convergentes, dans certaines circonstances. Ces questions sont encore le thème de travaux de recherche actuels, de H. Eliasson, G. Gallavotti, etc...

(H) **D'après G.B. Schiapparelli<sup>10</sup>** : Regarder dans un ouvrage sur la science hellénistique (par exemple [Heath]) la méthode d'approximation des trajectoires des planètes par des épicycloïdes. De quel type d'approximation s'agit-il ?

(I) a) Montrer que si  $L_\omega(z)$  est borné, il est connexe.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde, et supposer qu'il existe deux ouverts disjoints  $U, V$  dans  $\mathbb{R}$  rencontrant tous les deux  $L_\omega(z)$ , tels que

$$L_\omega(z) = (U \cap L_\omega(z)) \cup (L_\omega(z) \cap V)$$

b) Donner un exemple où  $L_\omega(z)$  n'est pas connexe, et un exemple où  $L_\omega(z)$  est connexe mais pas connexe par arcs.

(J) Calculer la différentielle du temps de premier retour au voisinage d'une orbite périodique. On pourra supposer que la section de Poincaré  $\Sigma$  est donnée par  $\{x_1 = 0\}$ , et montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à

$$(t, u) \rightarrow x_1(\varphi^t(u))$$

(K) Donner un exemple où  $L_\omega(Z)$  n'est pas fermé. On pourra utiliser un segment orthogonal à un des axes du portrait de phase d'un point selle.

<sup>10</sup>cf Storia dell'Astronomia Antica, vol.1 t.2 p.11., ou l'article de G. Gallavotti, <http://141.108.20.11/page/deposito/1999/ipparcoi.ps.gz>

(L) Soit  $f$  une fonction ayant ses points critiques isolés. On pose  $X(x) = \nabla f(x)$ .

- (a) Montrer que  $X$  n'a pas d'orbites périodiques non constantes
- (b) Montrer que les seules trajectoires bornées de  $X$  sont les constantes en les points critiques de  $f$ , et les trajectoires reliant deux points critiques de  $f$ , appelées trajectoires **hétéroclines**.

(M) **Indice d'un champ de vecteurs le long d'une courbe**

Soit  $\gamma$  une courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$  paramétrée par  $[0, 2\pi]$ , et  $X$  un champ de vecteurs autonome défini sur  $\gamma$  et ne s'y annulant pas. On note  $\varphi(\theta)$  la détermination continue de l'angle que fait  $X(\gamma(\theta))$  avec l'axe  $Ox$  (voir l'exercice (O) du chapitre 1)).

On pose alors  $I(\gamma, X) = (\varphi(2\pi) - \varphi(0))/2\pi$

- a) Montrer que  $I(\gamma, X)$  est un entier
- b) Montrer que si  $X_s(x)$  est une famille continue de champs de vecteurs vérifiant les conditions de définition de  $I$  pour toutes les valeurs de  $s$ , alors  $I(\gamma, X_s)$  ne dépend pas de  $s$ .
- c) Montrer de même que si  $\gamma_s, X_s(t, x)$  sont respectivement une famille de courbes et de champ de vecteurs, pour lesquels  $I(\gamma_s, X_s(x))$  soit définie, alors ce nombre est constant.
- d) Montrer que si une courbe  $\gamma$  est le bord d'un disque qui ne contient aucun zéro du champ de vecteur  $X$ , alors  $I(\gamma, X) = 0$ .
- e) Montrer que si  $\gamma$  est le cercle unité et  $X$  pointe toujours intérieurement, alors  $I(\gamma, X) = 1$  (on peut déformer  $X|_\gamma$  en le champ  $X(e^{i\theta}) = -e^{i\theta}$ , et montrer que ce champ a indice 1)
- f) (théorème de Brouwer)

Montrer que si  $f$  est une application continue du disque fermé dans lui-même, elle possède au moins un point fixe (calculer l'indice de  $X(x) = f(x) - x$  sur le cercle unité et conclure).

- (N) (a) Soit  $X$  un champ de vecteurs défini sur un disque fermé, et  $x_0$  un point tel que  $\{\varphi^t(x) \mid t \geq 0\}$  soit contenu dans le disque. Montrer que  $X$  possède un zéro à l'intérieur du disque. On pourra regarder « le plus petit » cycle limite (au sens de l'inclusion des domaines délimités) défini par  $X$  et utiliser Poincaré-Bendixson pour contredire sa minimalité.
- (b) Que dire pour un champ de vecteurs défini sur un disque ouvert ? sur un anneau fermé ?



# Chapitre 6

## Stabilité des solutions d'équations différentielles

### 1 Introduction

Soit de nouveau l'équation différentielle

$$(1) \quad \dot{x}(t) = X(t, x(t))$$

dont le flot est noté  $\varphi_{t_0}^t$ . Comme d'habitude nous supposerons vérifiées les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, le flot défini pour tout temps, et le champ  $X$  suffisamment régulier<sup>1</sup>.

Étant donnée une condition initiale, on veut savoir si les trajectoires de conditions initiales voisines, restent proches. En d'autres termes on veut estimer  $d(\varphi_{t_0}^t(x), \varphi_{t_0}^t(x_0))$  lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ .

Précisons dans ce cadre plus général quelques définitions.

**Définition 6.1.** On dira que la solution de condition initiale  $x_0$  au temps  $t_0$  est

- **stable** si quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t > t_0$ ,  $\varphi_{t_0}^t(B(x_0, \eta)) \subset B(\varphi_{t_0}^t(x_0), \varepsilon)$ .

- **asymptotiquement stable** si elle est stable et il existe un voisinage de  $x_0$ , tel que pour tout  $x$  dans ce voisinage,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi_{t_0}^t(x), \varphi_{t_0}^t(x_0)) = 0$ .

On ne parlera d'instabilité que si le contexte est clair. Ce terme signifie généralement qu'il n'y a pas stabilité, mais parfois aussi que la trajectoire est asymptotiquement stable

---

<sup>1</sup>on le suppose  $C^\infty$  sauf mention contraire, mais en général  $C^2$  devrait suffire.

dans le passé (i.e. lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  au lieu de  $+\infty$ )<sup>2</sup>.

On se limitera au cas des équilibres et des orbites périodiques, seuls cas où la trajectoire est compacte.

*Remarque 1.1.* (A) La condition que pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi^t(x), \varphi^t(x_0)) = 0$$

n'entraîne pas la stabilité. En effet, la convergence de  $d(\varphi^t(x), \varphi^t(x_0))$  vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini n'est pas nécessairement uniforme en  $x$  (cf. exercice (C)).

*Exercice 1.1.* Montrer que la stabilité asymptotique de l'orbite  $x_0(t)$  entraîne que pour **tout**  $t_0$ , il existe un voisinage de  $x(t_0)$  tel que si  $x$  est dans ce voisinage,  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_{t_0}^t(x), \phi_{t_0}^t(x_0)) = 0$ .

Le premier critère pour démontrer la stabilité asymptotique consiste en la comparaison du flot avec son linéarisé. Pour un point d'équilibre, l'équation linéarisée est à coefficients constants. On traitera plus tard le cas d'une solution périodique, pour lequel la linéarisée est une équation à coefficients périodiques, ce qui permet d'utiliser la théorie de Floquet.

## 2 Fonctions de Liapounov et critère de Routh

Soit  $V$  une fonction sur  $\mathbb{R}^n$  et considérons le flot du gradient de  $V$ , donné par le système  $\dot{x} = -\nabla V(x)$ . Un point d'équilibre correspond à un point critique  $x_0$  de  $V$ . Il sera stable si c'est un minimum local.

En effet, étant donné un voisinage fixé  $U$  de  $x_0$ , l'ensemble  $U^c = \{x \in U \mid V(x) < c\}$  est contenu dans  $B(x_0, \varepsilon)$  pour  $c$  assez petit. Vu que  $t \mapsto V(x(t))$  est décroissante, les solutions de l'équation qui sont dans  $U^c$  en  $t = 0$  restent dans  $U^c$  pour  $t > 0$ . On en conclut que si la condition initiale est assez proche de  $x_0$ , elle sera dans  $U^c$  et la solution restera dans  $U^c$ , donc dans  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Les fonctions de Liapounov appliquent cette idée à des flots plus généraux que les gradients.

**Définition 6.2.** Soit  $x_0$  un zéro du champ de vecteurs  $X$ , et  $U$  un voisinage de  $x_0$ . Une fonction  $L$  continue et définie sur  $U$  est une **fonction de Liapounov**, si

- (A)  $L$  atteint son minimum sur  $U$  en un point unique,  $x_0$  (qui est donc un minimum strict pour  $L$ )
- (B) pour  $x \neq x_0$ ,  $t \mapsto L(\varphi^t(x))$  est strictement décroissante sur son domaine de définition.

La seconde condition est évidemment vérifiée si  $\langle \nabla L(x), X(x) \rangle < 0$  pour  $x \neq x_0$ . C'est souvent cette condition que l'on vérifie en pratique.

<sup>2</sup>Éviter en tous cas le terme ambigu : « asymptotiquement instable ».

**Théorème 6.3.** *S'il existe une fonction de Liapounov pour l'équilibre  $x_0$ , celui-ci est asymptotiquement stable.*

**Démonstration :** On suppose pour simplifier les notations que  $L(x_0) = 0$  et que  $U$  est compact (sinon on le remplace par une boule fermée plus petite). Alors, quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $c > 0$  tel que  $U^c = \{x \in U \mid L(x) < c\}$  soit contenu dans  $B(x_0, \varepsilon)$ . Sinon, il existerait une suite  $z_n$  dans le compact  $U \setminus B(x_0, \varepsilon)$ , telle que  $L(z_n)$  tende vers 0. Une valeur d'adhérence  $y$  de  $z_n$  est nécessairement distincte de  $x_0$ , on aura  $L(y) = 0$ , et  $x_0$  n'est donc pas un minimum strict.

Soit alors  $c$  tel que  $U^c = \{x \in U \mid L(x) < c\}$  ait son adhérence dans  $\overset{\circ}{U}$  (en d'autres termes,  $U^c$  ne rencontre pas la frontière de  $U$ ).

Comme la fonction  $L(\varphi^t(x))$  est strictement décroissante, si  $x$  est dans  $U^c$ ,  $\varphi^t(x)$  reste dans  $U^c$  qui est borné et donc le flot est défini pour tout  $t > 0$ . Puisque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c$  tel que  $U^c \subset B(x_0, \varepsilon)$ , et que  $U^c$  est un voisinage de  $x_0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x_0, \delta) \subset U^c$ . On aura alors pour tout  $t > 0$ ,

$$x \in B(x_0, \delta) \implies \varphi^t(x) \in U^c \subset B(x_0, \varepsilon)$$

ce qui montre que l'équilibre est stable.

De plus  $L(\varphi^t(x))$  étant décroissante, elle a pour limite 0, et alors vu que  $L^{-1}(0) = x_0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$   
- soit  $L(\varphi^t(x))$  tend vers une limite finie  $l > 0$ .

Dans le second cas, puisque  $L^{-1}(l)$  est fermé dans  $U$ , donc compact, on peut considérer  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(x)$  une valeur d'adhérence<sup>3</sup> de  $\varphi^t(x)$ . Pour  $T > 0$ , et par continuité de  $L$  (et du flot),  $L(\varphi^T(\bar{x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\varphi^{T+t_n}(x))$ . Comme  $L$  est décroissante,  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\varphi^t(x)) = L(\bar{x}) = l$ . Le point  $\bar{x}$  n'est donc pas un point de décroissance stricte de  $L$  le long de son orbite : c'est donc  $\bar{x} = x_0$ .  $\square$

Il existe des versions non-autonomes du théorème de Liapounov ([Lefschetz], p.112), ainsi que des réciproques (ibid. p.137). Contentons-nous ici de traiter un cas simple

**Proposition 6.4** (Théorème de Liapounov, version non-autonome). *Soit  $L$  une fonction  $C^1$  définie au voisinage de  $x_0$  et ayant un minimum strict en  $x_0$ . Soit  $X(t, x)$  une équation différentielle telle que*

- $X(t, x_0) = 0$  pour tout réel  $t$
- Il existe une fonction  $a$  définie au voisinage de  $x_0$ , continue, positive, et ne s'annulant qu'en  $x_0$ , telle que  $\langle \nabla L(x), X(t, x) \rangle \leq -a(x)$ .

*Alors  $x_0$  est un équilibre asymptotiquement stable pour  $X$ .*

---

<sup>3</sup>On entend par valeur d'adhérence de  $\phi^t(x)$  la limite de n'importe quelle suite  $\phi^{t_n}(x)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ .

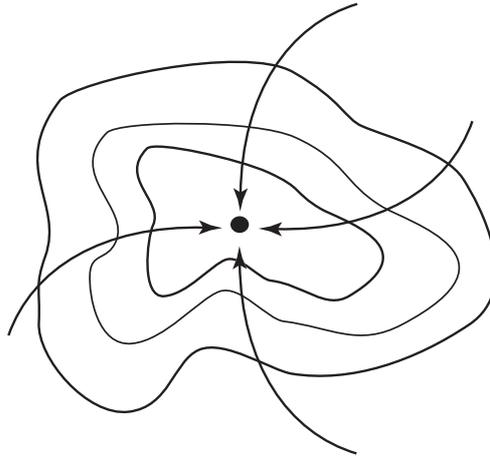


FIG. 6.1 – Trajectoires d'un champ de vecteurs et niveaux d'une fonction de Liapounov du champ

*Démonstration.* La stabilité résulte du même argument que dans le cas autonome. La stabilité asymptotique, résulte de ce que  $\frac{d}{dt}L(\phi_{t_0}^t(x)) \leq -a(\phi_{t_0}^t(x))$ . On en déduit que  $L(\phi_{t_0}^t(x))$  est strictement décroissante, et ne peut avoir une limite strictement positive, car sinon,  $\phi_{t_0}^t(x)$  resterait dans  $\{z \mid L(z) \geq l\}$  où  $a$  est minorée par une constante strictement positive,  $\varepsilon_0$ , et alors  $L(\phi_{t_0}^t(x)) \leq -\varepsilon_0(t - t_0)$  ce qui est absurde.  $\square$

*Remarques 2.1.* (A) Notons que l'on peut toujours ramener, l'étude de la stabilité d'une orbite quelconque, dans le cas non-autonome, au cas d'un équilibre,  $X(t, x_0) = 0$ . En effet, soit  $x_0(t)$  une orbite. On pose  $x(t) = y(t) + x_0(t)$ , et alors  $y(t)$  vérifie l'équation

$$\dot{y}(t) = X(t, x_0(t) + y(t)) - X(t, x_0(t)) = Y(t, y(t))$$

où  $Y(t, 0) = 0$  pour tout  $t$ . Il est clair que la stabilité de l'origine pour  $Y$  équivaut à celle de  $x_0$  pour  $X$ .

(B) On pourra appeler une fonction  $L$  vérifiant les hypothèses du théorème fonction de Liapounov pour  $X(t, x)$  (en  $x_0$ ). Si dans le cas des champs de vecteurs, la terminologie est indépendante des auteurs, ce n'est pas le cas pour une équation non-autonome.

*Exemples 2.1.* (A) Soit  $\dot{x} = -\nabla V(x)$ . Alors, si  $x_0$  est un minimum local strict de  $V$ ,  $V$  est fonction de Liapounov. Les minima locaux stricts de  $V$  sont donc asymptotiquement stables.

(B) Si la fonction  $L$  est seulement décroissante au sens large sur les trajectoires, alors on a stabilité de l'équilibre, mais pas nécessairement stabilité asymptotique. Le cas le plus intéressant est celui des systèmes conservatifs (voir la remarque suivante).

(C) Soit  $\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$  un système conservatif. Le champ de vecteurs associé est donné par  $X(x, p) = (p, -\nabla V(x))$ . Les points d'équilibre correspondent aux points  $(x_0, 0)$  tels que le gradient de  $V$  s'annule en  $x_0$ . L'équilibre est alors stable si  $x_0$  est un minimum local strict de  $V$ , que l'on supposera égal à 0 pour simplifier. Soit  $U$  un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $V$  atteint son minimum absolu en  $x_0$ . L'ensemble

$U^c = \{x \in U \mid V(x) < c\}$  est alors contenu dans  $B(x_0, \varepsilon)$  pour  $c$  assez petit (même argument que dans la démonstration du théorème).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + V(x(t)) \right) = \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle + \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = 0$$

Donc  $\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(x)$  est constante sur les trajectoires. Cela montre que  $x_0$  est stable, car un point de  $U^c$  reste dans  $U^c$ , mais n'est pas asymptotiquement stable.

- (D) Soit  $\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$  un système conservatif auquel on ajoute un terme de frottement (de coefficient  $f > 0$ ). Alors l'énergie du système décroît au cours du temps :  $\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(x)$  est strictement décroissante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + V(x(t)) \right) = \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle + \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = -f |\dot{x}(t)|^2$$

qui est bien strictement négative en dehors des points où  $\dot{x}(t) = 0$  qui sont isolés (sinon  $\ddot{x}(t) = 0$  et la solution serait nulle). Donc  $\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(x)$  est fonction de Liapounov, et l'équilibre est asymptotiquement stable. Notons qu'ici le critère plus fort  $\langle \nabla L(x), X(x) \rangle < 0$  n'est pas vérifié.

- (E) Soit  $A$  une matrice dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle négative. On construit une fonction de Liapounov pour le système  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  comme suit :

soit

$$L(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|e^{sA}x\|^2 ds$$

Cette intégrale converge, car, comme on l'a vu dans la démonstration du critère de Routh (3.3), si les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de  $A$ , les coefficients de  $e^{tA}$  sont sommes de termes de la forme  $e^{t\lambda_j t^\nu}$ , et donc ceux de  $\|e^{tA}x\|^2$  sommes finies de termes de la forme  $e^{2t\lambda_j t^\mu}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x(t)) &= dL(x(t))\dot{x}(t) = \int_0^\infty \langle e^{sA}x(t), e^{sA}\dot{x}(t) \rangle ds = \\ &= \int_0^\infty \langle e^{sA}x(t), e^{sA}Ax(t) \rangle ds = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} |e^{sA}x(t)|^2 ds = -|x(t)|^2 \end{aligned}$$

Donc si  $A$  vérifie le critère de Routh de stabilité asymptotique, il existe une fonction de Liapounov. Notons au passage que l'intérêt de cet exemple n'est certainement pas de redémontrer le critère de Routh. Nous avons en effet utilisé la stabilité asymptotique du système pour montrer la convergence de l'intégrale définissant sa fonction de Liapounov. L'intérêt d'une fonction de Liapounov, c'est qu'elle reste fonction de Liapounov pour des champs de vecteurs voisins.

*Exercice 2.1.* Montrer que si  $A$  n'a pas toutes ses valeurs propres de partie réelle négative, l'origine n'est pas asymptotiquement stable.

Si  $X$  a un équilibre en  $x_0$ , on peut écrire

$$X(x) = dX(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

On a alors

**Théorème 6.5** (Critère de Routh non-linéaire). *Soit  $x_0$  un point d'équilibre de  $X$ . Si  $dX(x_0)$  satisfait le critère de stabilité asymptotique de Routh (i.e. les valeurs propres de  $dX(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative), alors  $x_0$  est un équilibre asymptotiquement stable pour  $X$ .*

**Démonstration :** On suppose pour simplifier les notations que  $x_0 = 0$ , et on pose  $A = dX(0)$ . Alors  $X(x) = Ax + \varepsilon(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{|x|} = 0$ . Soit  $L(x)$  la fonction de Liapounov associée à  $A$ , calculons

$$dL(x)X(x) = dL(x)(Ax + \varepsilon(x)) = -|x|^2 + dL(x)\varepsilon(x)$$

Comme  $L$  est une forme quadratique, il existe une constante  $C$  telle que  $|dL(x)| \leq C|x|$  et si on prend  $|x|$  assez petit pour que  $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2C}|x|$ , on aura  $-|x|^2 + dL(x)\varepsilon(x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2$  et donc  $L$  est strictement décroissante sur les trajectoires non constantes.  $\square$

*Remarques 2.2.* (A) Si une valeur propre au moins de  $dX_0$  est de partie réelle strictement positive, alors le système est instable. (cf [Laudenbach] p. 118)

(B) Notons que la condition de Routh est souvent plus facile à vérifier sur  $R(t) = e^{tA}$  : elle équivaut alors à ce que toutes les valeurs propres de  $R(t)$  (pour  $t \neq 0$  soient de module strictement inférieur à 1.

Soit l'équation  $\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$ , avec  $f$  positif petit. Sa linéarisée est

$$\ddot{x} + f\dot{x} + D^2V(x_0)x = 0$$

Pour voir si celle-ci vérifie le critère de Routh, on peut soit se ramener à un système d'ordre 1 auquel cas on doit trouver les valeurs propres de  $\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -D^2V(x_0) & -f \cdot Id \end{pmatrix}$  où bien diagonaliser  $D^2V(x_0)$ , ce qui réduit le système à une famille de systèmes indépendants de la forme  $\ddot{u}_j + f\dot{u}_j + \lambda_j u_j = 0$  (les  $\lambda_j$  étant les valeurs propres de  $D^2V(x_0)$ ) qui a ses valeurs caractéristiques de partie réelle négative si  $f$  et les  $\lambda_j$  sont positifs.

En conclusion ce système satisfait au critère de Routh si et seulement si toutes les valeurs propres de  $D^2V(x_0)$  sont strictement positives. (On savait déjà que le système est stable dans ce cas, car  $V$  a un minimum local en  $x_0$ ).

(C) Une particule chargée dans un champ électrique ne peut, en général, avoir d'équilibre stable. En effet, elle satisfait une équation du type

$$m\ddot{x}(t) + e\nabla V(x(t)) = 0$$

où  $V$  satisfait l'équation de Laplace  $\Delta V = \text{trace}(D^2V) = 0$ . La matrice  $D^2V$  a donc nécessairement des valeurs propres négatives et des valeurs propres positives (sauf si celles-ci sont toutes nulles).

- (D) Soit un système dépendant du temps  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ . Rappelons que même si en chaque instant  $t$  la matrice  $A(t)$  a ses valeurs propres de partie réelle négative, on n'a pas nécessairement stabilité de l'origine (cf. l'exemple des équations de Mathieu au chapitre 2, section 5.1).

Par contre, si  $X(t, x)$  est de la forme  $Ax + X_1(t, x)$  avec  $X_1(t, x)$  uniformément  $o(|x|)$  en  $t$  (i.e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{X_1(t, x)}{|x|} = 0$  uniformément en  $t$ ), le critère de Routh garantit la stabilité asymptotique de l'origine, comme on le démontre en adaptant la démonstration du théorème par l'utilisation du critère de Liapounov non-autonome (proposition 6.4).

### 3 Stabilité des orbites périodiques

Soit  $X(t, x)$  périodique en  $t$  de période  $T$ , définissant le flot  $\varphi_{t_0}^t$ , et supposons que  $x_0$  soit un point d'une orbite  $T$ -périodique<sup>4</sup> c'est-à-dire que  $\varphi_{t_0}^{t_0+T}(x_0) = x_0$ . La périodicité de  $X$  en  $t$  entraîne  $\phi_{t_0+T}^{t_1+T} = \phi_{t_0}^{t_1}$ .

On veut étudier la stabilité de la solution de condition initiale  $x_0$ . En posant  $x(t) - \varphi_{t_0}^t(x_0) = y(t)$ , l'équation devient  $\dot{y}(t) = X(t, y + \varphi_{t_0}^t(x_0)) - X(t, \varphi_{t_0}^t(x_0)) = Y(t, y)$  qui est aussi à coefficients  $T$ -périodiques, et bien évidemment la solution  $\varphi_{t_0}^t(x_0)$  de (1) est stable si et seulement si la solution  $y = 0$  de notre nouvelle équation l'est aussi.

Comme  $Y(t, 0) = 0$ , écrivons  $Y(t, x) = A(t)y + Y_1(t, y)$  (où  $Y_1(t, y)$  est un  $o(|y|)$ ). On vérifie sans peine que  $A(t)$  et  $Y_1$  sont aussi  $T$ -périodiques.

La partie linéaire de cette équation est à coefficients périodiques, on peut donc lui appliquer la théorie de Floquet de la section 4 du chapitre 3.

La résolvante  $R(t)$  de  $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$  vérifie  $R(t+T) = R(t)R(T)$ . Définissons  $B$  par  $e^{TB} = R(T)$ , et<sup>5</sup> posons  $U(t) = R(t)e^{-tB}$  dont on rappelle qu'elle est périodique, et  $z(t) = U(t)^{-1}y(t) = e^{tB}R(t)^{-1}y(t)$ .

On aura

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Be^{tB}R(t)^{-1}y(t) - e^{tB}R(t)^{-1}\dot{R}(t)R(t)^{-1}y(t) + e^{tB}R(t)^{-1}\dot{y}(t) = \\ &Bz(t) - e^{tB}R(t)^{-1}A(t)y(t) + e^{tB}R(t)^{-1}\dot{y}(t) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Il est essentiel dans la suite que la période de  $t \rightarrow X(t, \bullet)$  coïncide avec celle de  $t \rightarrow x(t)$ .

<sup>5</sup>la matrice  $B$  est en général complexe, même si  $A(t)$  est réelle (cf. Appendice 1 du chap. 3). On ne peut faire ici de changement de variables complexe, car  $X$  n'est définie que pour  $x$  réel. On se souviendra que  $e^{2TB} = R(T)^2$  a toujours une solution  $B$  réelle, et que quitte à considérer notre solution comme  $2T$  périodique, on peut toujours se ramener à ce cas.

Remplaçons  $A(t)y(t)$  par  $\dot{y}(t) - Y_1(t, y(t))$ , on obtient

$$Bz(t) + e^{tB}R(t)^{-1}Y_1(t, y(t)) = Bz(t) + Z_1(t, z(t))$$

où

$$Z_1(t, z) = U(t)^{-1}Y_1(t, U(t)z)$$

Comme  $U(t)$  est  $T$ -périodique, elle est bornée et donc  $Z_1$ , qui est encore  $T$  périodique, est encore un  $o(|z|)$ , uniformément en  $t$ .

En conclusion, on a ramené l'équation (1) à la forme

$$(2) \quad \dot{z}(t) = Bz(t) + Z_1(t, z)$$

et notre problème de stabilité à celui de la stabilité de l'origine pour l'équation (2).

Il suffit alors de reprendre la fonction de Liapounov de  $B$ , et de voir qu'elle est encore fonction de Liapounov pour l'équation perturbée.

**Théorème 6.6** (Critère de Routh : cas périodique). *Si la résolvante du linéarisé  $R_{t_0}^{t_0+T}$  a ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1, alors la solution périodique  $\varphi^t(x_0)$  est asymptotiquement stable.*

**Démonstration :** On remarque tout d'abord que par périodicité de  $U$ ,

$$R(T) = U(T)e^{TB} = U(0)e^{TB} = e^{TB}$$

et que  $e^{TB}$  a ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1 si et seulement si les valeurs propres de  $B$  sont de partie réelle strictement négative.

Bien évidemment il suffit de montrer la stabilité asymptotique de l'origine pour le système de la forme  $\dot{z}(t) = Bz(t) + Z_1(t, z)$  auquel on s'est ramené. Supposons que  $B$  ait toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Nous pouvons alors appliquer la version non-autonome du théorème de Liapounov (proposition 6.4). En effet, si  $L$  est la fonction de Liapounov pour  $B$  construite dans la section précédente, comme

$$dL(x)X(x) = dL(x)(Bx) + Z_1(t, x) = -|x|^2 + dL(x)Z_1(t, x)$$

et qu'il existe une constante  $C$  telle que  $|dL(x)| < C|x|$ , la périodicité de  $Z_1$  en  $t$  nous permet d'affirmer qu'il existe  $\varepsilon$  indépendant de  $t$ , tel que pour  $|x| < \varepsilon$  on a  $|Z_1(t, x)| < \frac{1}{2C}|x|$ .

Alors

$$-|x|^2 + dL(x)Z_1(t, x) < -\frac{1}{2}|x|^2$$

au voisinage de  $x = 0$  et le théorème de Liapounov non-autonome permet de conclure à la stabilité asymptotique de l'origine.

□

### 3.1 Cas des systèmes autonomes

Il y a un cas important dans lequel le critère de Routh pour les solutions périodiques ne peut être vérifié : le cas d'un système autonome.

En effet, si  $X$  est un champ de vecteurs, et  $\varphi^T(x_0) = x_0$ , on a en dérivant en  $t = 0$  l'équation  $\varphi^{T+t}(x_0) = \varphi^t(x_0)$  que  $d\varphi^T(x_0)X(x_0) = X(x_0)$ . Le vecteur  $X(x_0)$  est donc toujours vecteur propre associé à la valeur propre 1. Pour la même raison, l'orbite ne peut être asymptotiquement stable, car si  $x_0$  et  $x_1$  sont tous deux sur l'orbite périodique, on a  $\varphi^{nT}(x_0) = x_0$  et  $\varphi^{nT}(x_1) = x_1$ , et donc on ne peut avoir  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi^t(x_0); \varphi^t(x_1)) = 0$ .

On utilise une autre notion mieux adaptée : la stabilité orbitale. On rappelle que  $\mathcal{O}_x$  est l'orbite de  $x$  par le flot.

**Définition 6.7.** On dira que la solution de condition initiale  $x_0$  est :

- **orbitalement stable** si quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que si  $d(x_1, x_0) < \eta$  et  $t > 0$  on a  $d(\varphi^t(x_1), \mathcal{O}_{x_0}) < \varepsilon$ .

- **asymptotiquement orbitalement stable** si elle est orbitalement stable et de plus, pour  $x_1$  dans un voisinage de  $x_0$  on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi^t(x_1), \mathcal{O}_{x_0}) = 0$ .

On a alors

**Théorème 6.8** (Critère de Routh : cas périodique autonome). *Soit  $\dot{x} = X(x)$  un système autonome ayant une solution périodique  $u_0$ , de période  $T$  et  $R(t)$  la linéarisée du flot en  $u_0$ . Si  $R(T)$  possède  $n - 1$  valeurs propres de module  $< 1$  alors la solution périodique est asymptotiquement orbitalement stable.*

**Démonstration :** Soit  $\Sigma$  un hyperplan, section du flot en  $u_0$  et  $r : \Sigma \rightarrow \Sigma$  l'application de premier retour de Poincaré. On a d'après la proposition 5.8 du chapitre 5

$$R(T) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & dr(u_0) \end{pmatrix}$$

Il est alors clair que sous les hypothèses du théorème, les valeurs propres de  $dr(u_0)$  sont en module strictement inférieures à 1. Cela entraîne que  $|dr(u_0)^n|$  tend vers 0 avec  $n$  et donc que pour  $n$  assez grand  $d(r^n)(u_0)$ . Quitte à remplacer  $r$  par  $r^n$  on peut donc supposer que  $|dr(u_0)| < 1$ .

**Lemme 6.9.** *Soit  $r$  une application  $C^1$  définie sur un voisinage de 0 d'un espace de Banach  $E$ . On suppose  $r(u_0) = u_0$  et que  $\|dr(u_0)\| < k < 1$ . Alors il existe un voisinage*

$U$  de  $u_0$  tel que pour tout  $n$ ,  $r^n$  soit définie sur  $U$ , et que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid n \geq N \implies \forall x \in U, |r^n(x)| \leq \varepsilon$$

**Démonstration.** Par continuité il existe une boule  $B(u_0, \alpha)$  sur laquelle  $\|dr(x)\| \leq k < 1$ . D'après le théorème des accroissements finis,  $r$  est contractante de rapport  $k$  sur cette boule. Donc  $r(B(u_0, \alpha)) \subset B(u_0, k\alpha)$  et donc  $r^n$  est bien définie. De plus  $r^n(B(u_0, \alpha)) \subset B(u_0, k^n\alpha)$  et la convergence vers  $u_0$  est bien uniforme.  $\square$

Du lemme il résulte que pour  $u$  dans un voisinage  $U$  de  $u_0$  dans  $\Sigma$ ,  $r(U) \subset U$ .

Maintenant si  $\Sigma$  est une section de Poincaré passant par  $u_0$ , il suffit, pour montrer la stabilité orbitale, de considérer les points  $u$  de  $\Sigma$ . En effet, si  $u$  est voisin de  $u_0$ , d'après le théorème de redressement il existe un  $\alpha$  proche de 0, tel que  $\varphi^\alpha(u) \in \Sigma$  (pour  $\alpha$  petit).

Soit  $T$  la période de  $u_0$ . La continuité uniforme du flot pour  $t \in [0, T + 1]$  permet de dire que pour tout  $\varepsilon$  il existe  $\delta$  tel que

$$\varphi^t(B(u_0, \delta)) \subset B(\varphi^t(u_0), \varepsilon)$$

Choisissons  $\delta$  assez petit pour que  $r^n(B(u_0, \delta) \cap \Sigma) \subset B(u_0, k^n\delta) \cap \Sigma$ , ce qui est possible puisque  $r$  est contractante près de  $u_0$ . On a alors pour  $u \in B(u_0, \delta) \cap \Sigma$  que  $r^n(u) = \varphi^{t_n(u)}(u) \in B(u_0, \delta) \cap \Sigma$  pour tout  $n \geq 0$  et donc si  $t \in [t_n(u), t_{n+1}(u)]$

$$\varphi^t(u) = \varphi^{t-t_n(u)}\varphi^{t_n(u)}(u) = \varphi^{t-t_n(u)}r^n(u) \in \varphi^{t-t_n(u)}B(u_0, \delta)$$

Or par continuité du temps de premier retour, on peut supposer que pour  $u \in B(u_0, \delta) \cap \Sigma$ , ce temps est majoré par  $T + 1$  et donc pour  $t \in [t_n(u), t_{n+1}(u)]$ ,

$$\varphi^{t-t_n(u)}B(u_0, \delta) \subset B(\varphi^{t-t_n(u)}u_0, \varepsilon)$$

En conclusion quel que soit  $t$  positif, en encadrant  $t$  par  $t_n(u), t_{n+1}(u)$  pour un  $n \geq 0$ , on voit que

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi^t(B(u_0, \delta)) \subset B(\mathcal{O}_{u_0}, \varepsilon)$$

On a donc stabilité orbitale.

Pour la stabilité asymptotique, soit  $U$  un ouvert donné par le lemme 6.9, et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\delta$  le réel associé à  $\varepsilon$  en exprimant la stabilité de l'orbite. Soit alors  $u \in U$  et  $n$  assez grand pour que  $r^n(u) \in B(u_0, \delta)$ . On a alors que pour  $t \geq t_n(u)$

$$\varphi^t(u) = \varphi^{t-t_n(u)}\varphi^{t_n(u)}(u) \in \varphi^{t-t_n(u)}(r^n(u)) \subset \varphi^{t-t_n(u)}B(u_0, \delta) \subset B(\mathcal{O}_{u_0}, \varepsilon)$$

Cela termine la démonstration de la stabilité asymptotique.  $\square$

### 3.2 Stabilité pour les systèmes conservatifs et Hamiltoniens

L'exemple le plus courant de système conservatif est celui d'une particule soumise à un champ de force dérivant du potentiel  $V$  indépendant du temps,

$$\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$$

La propriété essentielle, exprimée par le terme « conservatif » est l'invariance de l'énergie sur une trajectoire

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + V(x)$$

Les points d'équilibre du champ de vecteur associé,  $X(x, p) = (p, -\nabla V(x))$  sont de la forme  $(0, x_0)$  où  $x_0$  est un point critique de  $V$ , c'est-à-dire  $\nabla V(x_0) = 0$ .

Notons qu'un tel équilibre ne peut-être asymptotiquement stable, car si on part de  $x_0$  avec une vitesse initiale non nulle, on aura  $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + V(x) > V(x_0)$ , et cette quantité restant constante, elle ne tend pas vers  $V(x_0)$ .

Il existe une définition plus générale des flots conservatifs, les flots Hamiltoniens, que l'on découvre en ramenant les équations précédentes à des équations d'ordre un : posant  $p = \dot{x}$  l'équation devient

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\nabla V(x)$$

Posant  $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$  cela se réécrit

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p)$$

Si maintenant  $H$  est une fonction  $C^\infty$  quelconque sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , dont on note  $(x, p)$  les coordonnées, les équations ci-dessus -appelées équations de Hamilton- préservent les niveaux de la fonction  $H$ <sup>6</sup>, car

$$dH(x)X(x, p) = -\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

---

<sup>6</sup>on suppose encore que  $H$  ne dépend pas de  $t$ .

Le champ de vecteurs  $X_H(x, p) = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x})$  est dit Hamiltonien associé <sup>7</sup> à  $H$ .

Ses points d'équilibre correspondent aux points critiques de  $H$ , et on voit de nouveau que la préservation de  $H$  interdit la stabilité asymptotique d'un point critique. Il n'est cependant pas interdit d'avoir stabilité simple, comme on le voit pour une particule classique dans un puits de potentiel (i.e.  $V(x) = |x|^2$ ).

Plus généralement, si  $dH(x_0, p_0) = 0$  et  $(x_0, p_0)$  est un minimum strict de  $H$ , les ensembles  $\{(x, p) \mid H(x, p) \leq c\}$  pour  $c$  proche de  $H(x_0, p_0)$  sont des voisinages de  $(x_0, p_0)$ , et le flot préservant ces ensembles, le point d'équilibre est stable.

*Remarque 3.1.* Le système  $\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$  modélise un système sans frottement. Pour tenir compte de ces frottements, il faut remplacer l'équation  $\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$  par  $\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$  où  $f$  est un (petit) paramètre de frottement, en principe positif.

On voit qu'un système Hamiltonien ne peut vérifier le critère de Routh, mais un tel système ne modélise la réalité qu'en faisant abstraction des frottements. On peut donc se demander lorsqu'on ajoute un terme de frottement, sous quelles conditions le système devient stable, puisqu'en pratique, ce n'est pas tant la stabilité du système original qui nous intéresse, mais celle du système avec frottement.

Considérons donc le système

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) - \varepsilon F(p)$$

où  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application  $C^1$ .

Si  $(x_0, p_0)$  est un point d'équilibre, l'équation linéarisée s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(x_0, p_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}(x_0, p_0) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x}(x_0, p_0) & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}(x_0, p_0) - \varepsilon \nabla F(p_0) \end{pmatrix}$$

On peut montrer que lorsque pour  $\varepsilon = 0$  les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont toutes imaginaires pures, simples et non nulles, et sous l'hypothèse

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x_0, p_0) dF(p_0)$$

soit définie négative, ces valeurs propres se déplacent, lorsque  $\varepsilon$  augmente, vers la région de partie réelle négative.

Si par contre une des valeurs propres est nulle, sa partie réelle peut rester nulle. Cela nous amène naturellement à la

---

<sup>7</sup>On prendra garde à ce que l'on appelle encore Hamiltonien une équation associée à  $H(t, x)$ , qui sera non-autonome. Mais dans ce cas, il n'y a pas de conservation de l'énergie :  $H(t, x(t), p(t))$  n'est pas constante sur les trajectoires

**Définition 6.10** (Stabilité linéaire des systèmes Hamiltoniens).

Un point d'équilibre  $z_0$  d'un système Hamiltonien est dit linéairement stable, si les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(z_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}(z_0) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x}(z_0) & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}(z_0) \end{pmatrix}$$

sont simples et imaginaires non nulles.

Le résultat suivant est une application de la théorie des perturbations :

**Proposition 6.11** (Stabilité linéaire Hamiltonienne et critère de Routh des perturbations).

Si  $z_0 = (0, 0)$  est un équilibre linéairement stable d'un système Hamiltonien, alors pour  $\varepsilon$  strictement positif, le système

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) - \varepsilon F(x, p)$$

avec  $F(0, 0) = 0$  et les matrices  $\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(0, 0) \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(0, 0) \frac{\partial F}{\partial p}(0, 0)$  sont définies positives, vérifient le critère de Routh pour  $\varepsilon$  assez petit et sont donc asymptotiquement stables.

On verra dans le cas du pendule de Kapitsa, que l'on n'a pas stabilité asymptotique pour le système sans frottement, mais on a bien stabilité asymptotique pour le système avec frottement, ce que l'on peut constater expérimentalement.

Enfin, il y a essentiellement un cas simple de stabilité pour un équilibre de système Hamiltonien, qui généralise le cas de potentiels traité dans l'exemple 1 de la section 2.

**Proposition 6.12.** Soit  $H$  un Hamiltonien tel que  $DH(0) = 0$  et  $D^2H(0)$  soit une forme quadratique non dégénérée. Alors l'origine est stable si et seulement si  $D^2H(0)$  est définie (positive ou négative)

*Démonstration de la suffisance.* Soit  $U$  un voisinage de 0 dans lequel  $H$  a 0 pour minimum strict. Le même raisonnement que dans l'exemple 1 de la section 2 montre que les ensembles  $U^c = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) \leq c\}$  forment une base de voisinages de 0 et sont invariants par le flot, ce qui entraîne la stabilité. Lorsque  $H$  a un maximum strict en 0, on remplace  $H(x) \leq c$  par  $H(x) \geq c$ .  $\square$

On donnera une application concrète de ce résultat dans la section sur le solide en rotation du chapitre 7.

## 4 Conclusion

Nous avons vu comment, dans deux cas importants, la propriété de stabilité d'un système dynamique se lit sur sa partie linéaire. Le lecteur intéressé pourra maintenant se

tourner vers la dynamique, où apparaissent des phénomènes purement non-linéaires. Ce n'est qu'après avoir compris les situations de stabilité que l'on peut aborder les phénomènes d'instabilité, dits chaotiques.

## 5 Exercices

(A) Trouver une fonction de Liapounov pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 2xy \\ \dot{y} &= 2x^2 - y \end{cases}$$

(B) Montrer que la stabilité asymptotique de  $x_0$  pour le flot  $\varphi^t$  entraîne que pour un  $r > 0$  bien choisi, on a  $\forall \eta > 0$ , il existe  $T > 0$  tel que

$$\forall t \geq T, \quad \varphi^t(B(x_0, r)) \subset B(\varphi^t(x_0), \eta)$$

(C) Donner un exemple d'équation telle que, pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$ , on ait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi^t(x), \varphi^t(x_0)) = 0$ , mais que la solution ne soit pas asymptotiquement stable.

(D) Montrer que si  $dX(0)$  a une valeur propre de partie réelle strictement positive, l'équilibre n'est pas stable.

(E) a) Donner un exemple de champ de vecteurs  $X$  tel que  $X(0) = 0$ ,  $dX(0)$  ait toutes ses valeurs propres imaginaires pures, et l'origine soit asymptotiquement stable. b) trouver  $Y \in C^1$  proche de  $X$  ayant aussi un équilibre en l'origine, mais tel que cet équilibre ne soit pas asymptotiquement stable.

(F) a) Montrer que si  $X$  est un champ de vecteur ayant un équilibre non-dégénéré en l'origine (i.e.  $X(0) = 0$  et  $A = dX(0)$  est inversible), alors tout champ de vecteur  $Y$  tel que  $Y - X$  est petit en norme  $C^1$  possède un équilibre au voisinage de l'origine. Indication : appliquer le théorème des fonctions implicites.

b) Montrer que si l'origine vérifie le critère de Routh pour  $X$ , l'équilibre de  $Y$  voisin de l'origine est aussi asymptotiquement stable.

c) En déduire qu'il existe un voisinage de l'origine et un difféomorphisme  $\psi$  tel que  $(\psi)_*(Y) = X$

(G) Montrer que pour l'équation  $\dot{x}(t) = (A + B(t))x(t)$  où  $A$  a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0$ , alors l'origine est stable. Que dire dans le cas non-linéaire (i.e. pour  $\dot{x}(t) = (A + B(t))x(t) + X_1(t, x)$ ) ? Quelle hypothèse sur  $X_1$  est nécessaire ?

(H) Montrer que pour un système de la forme  $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial p}$ ,  $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}$ , où  $(x, p) \in \mathbb{R}^2$  toutes les solutions bornées sont soit périodiques, soit constantes, soit relient deux solutions constantes (i.e.  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$ ).

(I) Démontrer le théorème 6.11.

(J) (**Smale**)<sup>8</sup> Soit  $f : E \rightarrow E$  une application  $C^2$ , on considère l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -df(x(t))^{-1}f(x(t))$$

définie sur  $\Omega = \{x \in E \mid df(x) \text{ est inversible}\}$ .

- (a) Montrer que les zéros du champ de vecteur correspondent au zéros de  $f$  (dans le domaine  $\Omega$ ) et que  $L(x) = |f(x)|^2$  est fonction de Liapounov pour ce champ de vecteurs.
- (b) Montrer que  $\forall x \in \Omega, L_\omega(x) = x_0$  où  $x_0$  est un zéro de  $f$ .
- (c) Montrer que pour toute solution  $x_0$  de  $f(x_0) = 0$ , le bassin d'attraction de  $x_0$ , contient une composante connexe de  $\Omega$ .

(K) (d'après un sujet de contrôle de D. Bennequin)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  impaire, bornée et strictement croissante. On note  $\lambda = f'(0)$ . On se propose d'étudier le système dynamique sur  $\mathbb{R}^2$  associé au champ de vecteurs  $X$  dont les composantes en  $x = (u, v)$  sont  $(-u + f(u) + f(v), -v + f(v) - f(u))$ , c'est-à-dire l'équation différentielle

$$(1) \begin{cases} \dot{u} &= -u + f(u) + f(v) \\ \dot{v} &= -v + f(v) - f(u) \end{cases}$$

**1.** Notons  $J$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même définie par  $J(u, v) = (-v, u)$ . Démontrer que  $J_*(X) = X$ .

**2.** Démontrer que l'origine  $0 = (0, 0)$  est le seul équilibre de (1).

Indication : utiliser les symétries données par la question **1**)

**3.** Montrer que les solutions de (1) ont un temps de vie infini.

**4.** Démontrer qu'il existe  $R_0 > 0$  tel que pour tout  $x, |x| \geq R_0$ , entraîne  $X(x) \cdot x < 0$ .

**5.** On suppose  $\lambda > 1$ .

**5.a)** Démontrer que 0 est répulsif.

**5.b)** Soit  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . On note  $A$  la demi-droite ouverte  $\{x \mid x = \rho(\cos \theta_0, \sin \theta_0), \rho > 0\}$  et  $n$  le vecteur normal  $(-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$ . Démontrer que pour tout  $x \in A$ , on a  $X(x) \cdot n > 0$ , c'est-à-dire que  $X$  pointe vers la droite de  $A$ . Indication : utiliser les symétries données par la question **1**.

**5.c)** Soit  $x(t), t \in \mathbb{R}$  une trajectoire de  $X$ . On *admet* qu'il existe une fonction  $\theta$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \|x(t)\|(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  (cf. chapitre 1, exercice (O)). Démontrer que  $\theta$  est croissante.

**6.** On reprend l'hypothèse de la question **5** :  $\lambda > 1$ .

**6.a)** Soit  $A$  comme au **4.b)** et  $x_0 \in A$ ; on note  $x(t)$ , la solution maximale de (1) telle que  $x(0) = x_0$ . Démontrer qu'il existe  $s > 0$  tels que  $x(s) \in A$ .

On notera  $\Phi(x_0) = x(t_0)$  pour le plus petit  $t_0 > 0$ , tel que  $x(t_0) \in A$ .

**6.b)** Établir que  $\Phi$  est continue de  $A$  dans  $A$ .

---

<sup>8</sup>Je remercie F. Cardin de m'avoir signalé cet exercice.

**6.c)** Établir que  $\Phi$  possède un point fixe et en déduire l'existence d'une solution périodique de (1).

**7.** Étudier la dynamique de (1) lorsque  $\lambda < 1$ . Indication : chercher une fonction de Liapounov.

(L) (théorème d'invariance de Lassalle) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définissant un flot complet, et soit  $V$  une fonction telle que  $V$  soit continue, strictement positive sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  et  $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ . Supposons que le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\{x \mid V(x) = 0\}$  soit réduit à 0. Alors 0 est asymptotiquement stable pour  $\dot{x} = f(x)$ .

(M) On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \ddot{x}(t) - \varepsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

pour des petites valeurs de  $\varepsilon$  (i.e. chaque fois qu'on le souhaite, on pourra supposer  $\varepsilon$  petit).

(a) Quels sont les équilibres de l'équation ? Discuter leur stabilité.

**On prend désormais  $\varepsilon > 0$ .**

(b) Montrer qu'un changement de variables (coordonnées polaires) permet de se ramener au système

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon(1 - \rho^2 \cos(\theta)^2)\rho \sin(\theta)^2 \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - \rho^2 \cos(\theta)^2) \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Montrer que les solutions sont définies pour tout temps positifs.

On note  $\varphi_\varepsilon^t$  le flot de l'équation dans le plan  $(x, y)$ .

(c) Soit  $I_{a,b} = ]a, b[ \times \{0\}$  un intervalle borné du demi-axe  $\mathbb{R}_x^+ = \{y = 0, x > 0\}$ . On suppose dans cette question  $a > 0$ . Montrer que l'application de premier retour, notée  $R_\varepsilon(x)$ , de  $I_{a,b}$  dans  $\mathbb{R}_x^+$  est bien définie pour  $\varepsilon$  assez petit : il existe  $T(\varepsilon, x) > 0$  tel que

$$\varphi_\varepsilon^{T(\varepsilon, x)}(x, 0) = (R_\varepsilon(x), 0)$$

et que  $(R_\varepsilon(x), 0)$  est le premier passage de l'orbite de  $(x, 0)$  sur le demi-axe  $y = 0, x > 0$ .

Montrer que  $x \mapsto R_\varepsilon(x)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]a, b[$ .

(d) On suppose maintenant  $a = 0$ . Montrer que  $R_\varepsilon$  est une injection de classe  $C^\infty$  de  $]0, b[$  dans  $]0, +\infty[$ , qui se prolonge par continuité en 0.

(e) Notons  $\rho_\varepsilon$  la solution du système vérifiant  $\rho_\varepsilon(0) = r_0, \theta_\varepsilon(0) = 0$ .

Montrer qu'il existe un développement limité quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de  $\rho_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ , et calculer les termes d'ordre 1.

(f) Montrer que l'application  $S(\varepsilon, x) = \frac{R_\varepsilon(x) - x}{\varepsilon}$  possède une limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Calculer cette limite.

On note désormais  $S(\varepsilon, x)$  la fonction convenablement étendue pour  $\varepsilon = 0$ .

- (g) En déduire que l'équation (1) possède au moins une solution périodique non constante pour  $\varepsilon > 0$  assez petit.
- (h) En utilisant la formule des accroissements finis sous la forme

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \int_0^1 f'(t\varepsilon) dt,$$

montrer que  $S$  est de classe  $C^1$  comme fonction de  $(\varepsilon, x)$  et calculer  $\frac{\partial S}{\partial x}(x, 0)$ .

- (i) Montrer que pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, et  $b$  suffisamment grand, que l'équation (1) possède une unique solution périodique de période proche de  $2\pi$  coupant  $I_{\frac{1}{b}, b}$ . Pour cette solution périodique, quelle est la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\rho_\varepsilon(t)$  ?



# Chapitre 7

## Quelques exemples d'étude de stabilité

Les études avaient agi étrangement sur Ivan Ilitch : pour lui il y avait un abîme entre la science et la vie, qu'il n'essayait pas de franchir. La vie était d'un côté, la science de l'autre.

I. Gontcharov, *Oblomov*.

Ce chapitre a pour but de donner des exemples d'études de stabilité pour des systèmes importants d'un point de vue physique et historique. Autant que la question de la stabilité d'un équilibre, c'est la compréhension de l'influence des paramètres d'un système sur sa stabilité qui sont utiles dans la pratique.

Nous commençons par l'exemple historique du régulateur de Watt et de ses successeurs, et traitons ensuite la stabilité d'un système conservatif, la rotation d'une toupie. Il faut souligner que des phénomènes mathématiques assez simples ont une grande multiplicité de manifestations physiques, mécaniques, électriques, biologiques etc. . . Si nous n'avons en général considéré que l'aspect mécanique, c'est parce qu'il nous semble plus parlant dans ses illustrations.

Que l'évolution historique du régulateur ne puisse se comprendre sans son étude mathématique, illustre une fois de plus à quel point les mathématiques nous sont indispensables pour expliquer le monde qui nous entoure.

### 1 Le régulateur de Watt et ses successeurs

#### 1.1 Maxwell et le régulateur de Watt

La théorie de la stabilité que nous avons exposée au chapitre précédent est apparue vers le milieu du 19ème siècle, lors de l'étude par Maxwell du régulateur de Watt. Ce

régulateur, dont un schéma est représenté sur la figure 7.1, fut utilisé par Watt au début de la révolution industrielle, pour contrôler le fonctionnement des machines à vapeur. Son fonctionnement se décrit en quelques mots. Lorsque la machine tourne, elle entraîne l'axe  $a$  à la vitesse  $\omega$ , ce dernier transmet le mouvement de rotation à l'axe  $b$  par les cardans, avec un coefficient de démultiplication  $n$ . Le cadre est solidaire de l'axe, et tourne donc à la vitesse,  $\theta = n\omega$  ce qui fait monter les boules de masse  $m$  par la force centrifuge, et donc le collier  $c$  qui est libre de coulisser sur l'axe  $b$ . Lorsque la vitesse augmente, les boules montent plus haut, soulevant le point  $d$ , qui repousse la tige  $i$  laquelle va fermer une soupape contrôlant l'arrivée de vapeur, ralentissant ainsi le moteur. Si au contraire la vitesse diminue, le système ramène la tige  $i$ , ce qui ouvre la soupape, et augmente la vitesse.

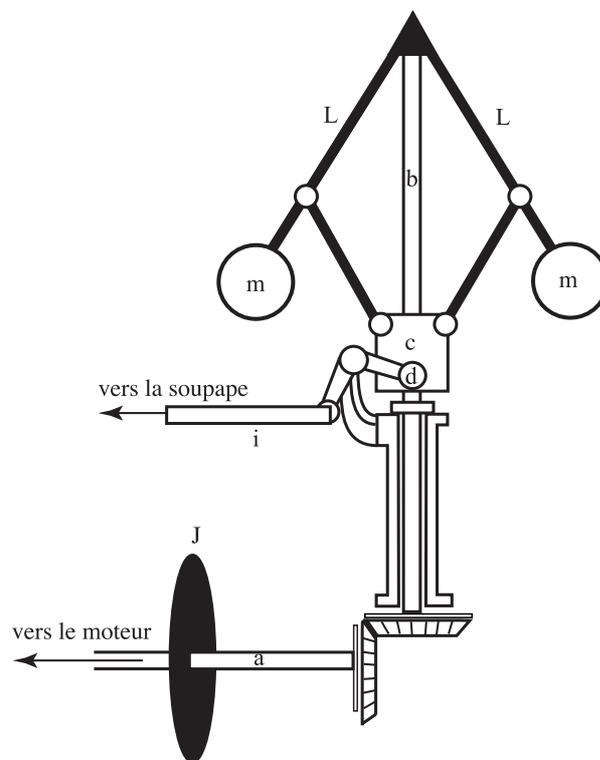


FIG. 7.1 – Régulateur de Watt

Il semblerait donc naturel que ce système tende à stabiliser sa vitesse autour d'une valeur fixée.

Or vers les années 1840, ce régulateur donnait parfois des signes de « folie ». Ce comportement erratique, appelé **hunting** en anglais<sup>1</sup>, se manifestait par des oscillations de plus en plus grandes du système et menaçait de détruire la machine, rendant le mécanisme inutilisable. Cela n'apparaissait que dans certains cas, mais surtout sur les nouvelles machines plus rapides et puissantes.

<sup>1</sup>J'ignore la traduction française.

Lord Maxwell, étudia ce phénomène mathématiquement et comprit que le régulateur pouvait dans certaines circonstances avoir un comportement instable. Ce fut le début de la théorie de la stabilité.

Essayons de décrire par un modèle mathématique simplifié le fonctionnement de ce régulateur. Le travail fourni par la machine sera transmis par un volant de moment d'inertie  $J$  relié à l'axe  $a$ .

On note

$m$  la masse des boules

$L$  la longueur des bras

$\theta$  la vitesse de rotation de l'axe  $a$ ,  $\omega$  celle des boules de masse  $m$ , et  $n$  le rapport  $\theta/\omega$

$f$  le coefficient de frottement le long de l'axe  $b$

$\phi$  l'angle que font les bras avec la verticale.

Les équations du mouvement sont alors

$$mL\ddot{\phi} = mL\theta^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - mg \sin(\phi) - f\dot{\phi}$$

Le terme de gauche est égal à  $m$  fois la projection de l'accélération des boules sur la direction orthogonale à l'axe  $b$ , le terme de droite à la projection des différentes forces sur cette même direction. Enfin, il faut une deuxième équation, pour modéliser le fonctionnement du moteur et l'action de la soupape sur l'arrivée de vapeur.

Si  $P_1$  est le moment de la force fournie par le moteur, et  $P$  le moment de celle utilisée pour effectuer le travail, la différence entre ces deux quantités est stockée par le volant  $J$  sous forme d'énergie cinétique.

$$J\dot{\omega} = P_1 - P$$

Enfin la soupape contrôle la puissance délivrée par le moteur, par  $P_1 = F^* + k(\cos(\phi) - \cos(\phi^*))$  où  $F^*$  et  $\phi^*$  sont des valeurs moyennes au voisinage desquelles on veut maintenir  $(P_1, \phi)$  (et pour  $\phi = \phi^*$ , le moment de la force fournie par le moteur est  $F^*$ ).

En conclusion le système s'écrit, posant  $F = P - F^* - k \cos(\phi^*)$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi \\ \dot{\psi} = n^2\omega^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - \frac{g}{L} \sin(\phi) - \frac{f}{Lm} \psi \\ \dot{\omega} = \frac{k}{J} \cos(\phi) - \frac{F}{J} \end{cases}$$

Le point d'équilibre est donné par  $\psi^0 = 0$ ,  $\cos(\phi_0) = F/k$ ,  $n^2\omega_0^2 = \frac{g}{L \cos(\phi_0)}$ .

Le système linéarisé en ce point est

$$\begin{cases} \delta\dot{\varphi} = \delta\psi \\ \delta\dot{\psi} = [n^2\omega_0^2 \cos(2\varphi_0) - \frac{g}{L} \cos(\varphi_0)]\delta\varphi - \frac{f}{Lm}\delta\psi + 2n^2\omega_0 \sin(\varphi_0) \cos(\varphi_0)\delta\omega \\ \delta\dot{\omega} = -\frac{k}{J} \sin(\varphi_0)\delta\varphi \end{cases}$$

Étudions la stabilité en appliquant le critère de Routh.

Après avoir remplacé  $n^2\omega_0^2$  par sa valeur on trouve que le polynôme caractéristique du système linéarisé est

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin^2(\varphi_0)}{L \cos(\varphi_0)} & -\frac{f}{Lm} - X & \frac{2g \sin(\varphi_0)}{L\omega_0} \\ -\frac{k}{J} \sin(\varphi_0) & 0 & -X \end{pmatrix} =$$

$$-[X^3 + \frac{f}{Lm}X^2 + \frac{g \sin^2(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}X + \frac{2kg \sin^2(\varphi_0)}{LJ\omega_0}]$$

Or pour qu'un polynôme  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$  ait ses racines de partie réelle négative il faut et il suffit<sup>2</sup> que  $a > 0, b > 0$  et  $ab > c > 0$ . La condition de stabilité est donc

$$\frac{fJ}{Lm} > \frac{2k \cos(\varphi_0)}{\omega_0} = \frac{2F}{\omega_0}$$

On voit en particulier que

- La stabilité s'améliore si on augmente le frottement. Donc un usinage **trop précis** des pièces **diminue la stabilité** ...
- **L'augmentation de la taille des sphères**, donc de leur masse, et de la longueur des bras  $L$  va aussi **à l'encontre de la stabilité** et on doit augmenter ces quantités lorsque la puissance de la machine augmente. En effet, la soupape est commandée directement par le collier  $c$ , qui doit donc exercer une force minimale  $T$  pour compenser la pression de la vapeur, d'autant plus grande que l'on a des machines puissantes et fonctionnant à haute pression. Mais la force exercée par les boules du régulateur sur  $c$  est de l'ordre<sup>3</sup> de  $mL$  qui doit donc être minoré par  $T$ .
- La **diminution du moment d'inertie du volant**, que l'on va rechercher sur des machines plus rapides et légères, **nuit à la stabilité**.

<sup>2</sup>voir Appendice 3.

<sup>3</sup> $m \cdot L \cdot \cos(\varphi) \sin(\varphi)\theta^2$  pour être précis.

## 1.2 Les régulateurs de Porter et Pickering

Ce sont deux parmi les successeurs les plus populaires des régulateurs de Watt, inventés vers 1855 dans le but de remédier aux problèmes de ce dernier<sup>4</sup>

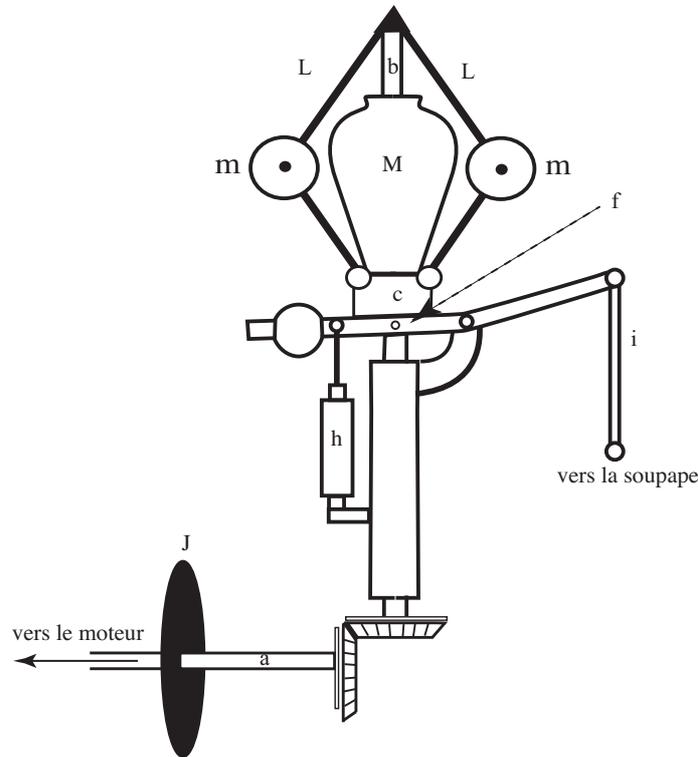


FIG. 7.2 – Régulateur de Porter

Commençons par l'appareil inventé par l'ingénieur américain Charles. T. Porter vers 1860 pour les machines à grande vitesse, dont la figure 7.2 schématise le fonctionnement.

Elle est basée sur le même principe que le régulateur de Watt : les boules de masse  $m$  qui en montant et descendant actionnent via  $d$  un levier relié à une soupape. Les principales différences sont que :

- on a rajouté un réservoir d'huile,  $h$ , la viscosité de l'huile ralentit le mouvement vertical de  $c$  le long de l'axe  $b$ . En pratique il augmente le terme  $f$  de frottement de l'équation de Watt.

- on a rajouté un solide de masse  $M$ , solidaire de l'axe  $b$ . L'effet d'une telle masse est de rajouter un terme  $-\frac{Mg}{2} \sin(\varphi)$  dans la première équation<sup>5</sup> qui devient :

$$mL\ddot{\varphi} = mL\theta^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - mg \sin(\varphi) - \frac{Mg}{2} \sin(\varphi) - f\dot{\varphi}$$

<sup>4</sup>voir [Bennett] chapitre 2 et [Daumas] vol. 4 pp. 13-16.

<sup>5</sup>on ne compte que la moitié de la masse, car on regarde l'équation d'une seule boule et l'effet de  $M$  se répartit également sur les deux boules.

Cela revient à remplacer  $g$  par  $g(1 + \frac{M}{2m})$ . Quel est alors l'effet d'une variation de  $g$  sur le régulateur <sup>6</sup> ? On voit qu'augmenter  $g$  augmente  $\omega_0$  et diminue la quantité  $\frac{2F}{\omega_0}$ , ce qui augmente donc la stabilité<sup>7</sup>. En outre, le fait que la masse  $M$  soit en rotation ajoute aussi un terme à la seconde équation : cela revient à ajouter un volant de moment d'inertie  $nJ_1$ , où  $J_1$  est le moment d'inertie du solide de masse  $M$ . On doit donc remplacer  $J$  par  $J + nJ_1$ , ce qui a encore un effet favorable pour la stabilité. Enfin, il semble que la forme de cette masse soit choisie pour permettre de concilier une valeur de  $L$  assez petite, tout en gardant  $J_1$  et  $M$  aussi grands que possible.

En conclusion, les aménagements apportés au régulateur de Watt par Porter vont tous dans le sens de la stabilité.

Un autre régulateur, le régulateur de Pickering était particulièrement populaire à la fin du 19ème siècle, et se voit encore sur d'anciennes locomotives à vapeur, ou aux États-Unis, sur de vieux tracteurs. On peut aussi le voir sur un phonographe Edison conservé dans la collection d'instruments anciens de l'École Polytechnique (voir figure 7.4 et figure 7.5), où il sert à maintenir aussi constante que possible la vitesse de rotation du cylindre supportant les rouleaux de cire. Ce régulateur est généralement constitué par deux ou trois masses sphériques, reliées à un châssis en rotation par des ressorts à lames,  $l$ . La force de rappel des boules n'est plus la force de gravité, mais la force élastique des lames.

Nous laissons au lecteur le soin de deviner son fonctionnement et de faire l'étude de sa stabilité.

---

<sup>6</sup>on pourrait de même se demander si un régulateur sur la Lune est plus stable ou moins stable que sur Terre...

<sup>7</sup>et en effet, on l'utilisa pour des machines plus rapides.

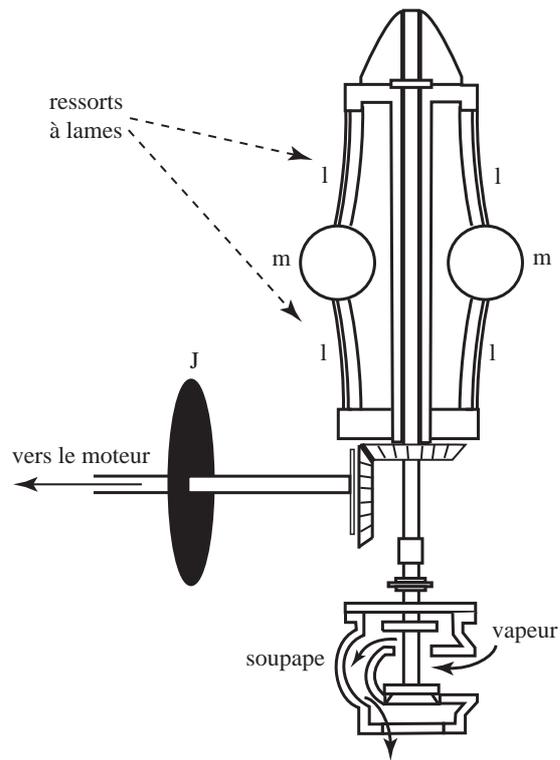


FIG. 7.3 – Régulateur de Pickering

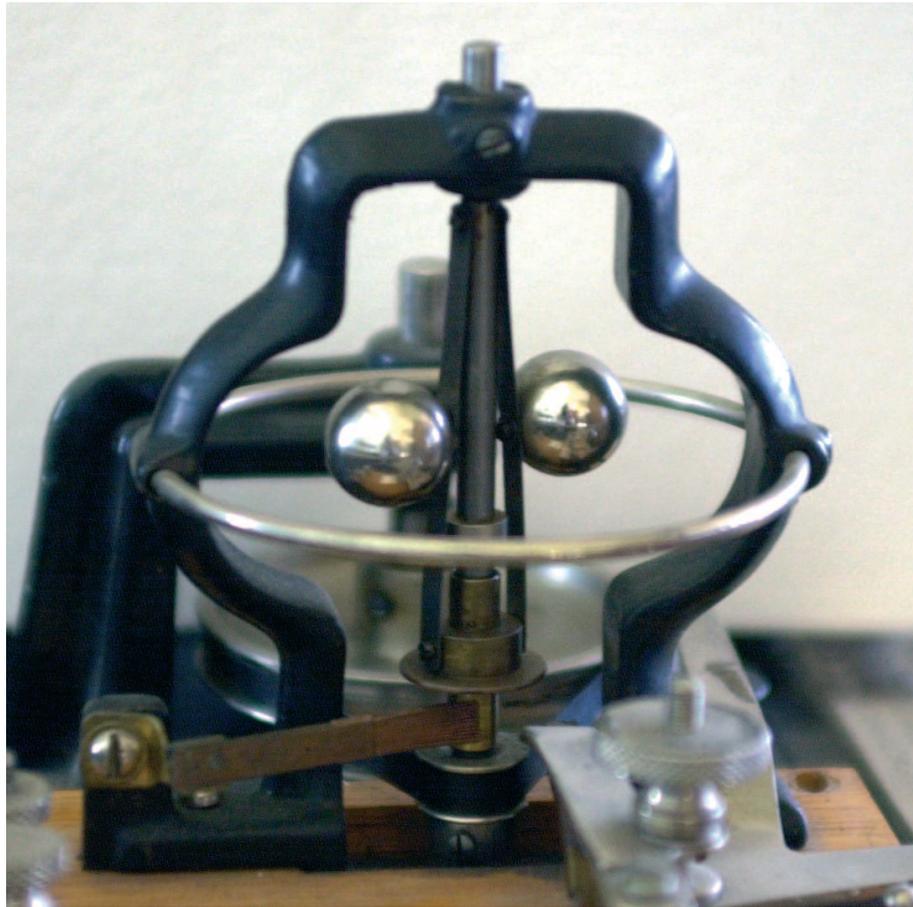


FIG. 7.4 – Vue du régulateur de Pickering d'un phonographe Edison. (Voir le phonographe sur la figure 7.5).

Collection d'instruments anciens de l'École Polytechnique, (Photo : ©J.-L. Déniel, École Polytechnique)



FIG. 7.5 – Phonographe Edison dont on distingue à gauche le régulateur Pickering (voir son agrandissement en 7.4).

Collection d'instruments anciens de l'École Polytechnique, (Photo : ©J.-L. Dénier, École Polytechnique)

## 2 Balançoire et pendule renversé

Une balançoire, est un pendule dont la longueur varie périodiquement (par le déplacement du centre de gravité de la personne qui est dessus). Elle satisfait donc l'équation

$$\ddot{\theta} + (g/l)(1 + a \cos(\omega t)) \sin(\theta) = 0$$

L'équation linéarisée est, comme on l'a vu en 5.2

$$\ddot{\theta} + (g/l)(1 + a \cos(\omega t))\theta = 0$$

et cette équation est instable au sens de Routh pour  $\sqrt{(g/l)}$  proche d'un entier.

On peut se demander ce qui arrive lorsqu'on ajoute un terme de frottement, que l'on supposera linéaire, et lorsqu'on tient compte de la véritable expression de la force (en  $\sin(\theta)$  et pas en  $\theta$ ).

Il s'agit donc de regarder

$$(1) \quad \ddot{\theta} + f\dot{\theta} + (g/l)(1 + a \cos(\omega t)) \sin(\theta) = 0$$

On applique alors le critère de stabilité linéaire des Hamiltoniens, de la proposition 6.11.

D'après les résultats du chapitre 3, section 5.1, l'équation linéarisée de la solution nulle a zéro comme solution stable si  $(\frac{g}{l}, a\frac{g}{l})$  est dans la zone de stabilité, et instable sinon. Cela permet de dire que pour le système non-linéaire avec frottement, la solution nulle est stable si  $(\frac{g}{l}, a\frac{g}{l})$  est dans la zone de stabilité.

Par ailleurs, pour  $(\frac{g}{l}, a\frac{g}{l})$  dans la zone d'instabilité, les valeurs propres de la résolvante du système linéarisé sont de la forme  $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ , avec  $\lambda$  réel différent de 1. La dépendance continue des valeurs propres en fonction des paramètres, nous permet de dire que pour  $f$  assez petit, les valeurs propres seront encore de cette forme, et la solution nulle est instable.

En résumé :

- Si  $(\frac{g}{l}, a\frac{g}{l})$  est dans la zone stable pour l'équation de Mathieu, alors la solution nulle de (1) est stable pour  $f$  positif et assez petit. C'est en particulier le cas pour l'effet Kapitsa, correspondant à la partie de la zone stable située dans  $x < 0$  (la partie orange du demi-plan de gauche sur la figure 3.4).
- Si  $(\frac{g}{l}, a\frac{g}{l})$  est dans la région instable pour l'équation de Mathieu, la solution nulle de (1) est instable pour  $f$  assez petit. On a donc, même dans le cas non-linéaire, un phénomène de résonance paramétrique.

On peut donc dire en conclusion que les effets prédits dans le cas linéaire, que ce soit pour le démarrage de la balançoire ou pour la stabilité du pendule de Kapitsa seront encore vérifiés dans le cas non-linéaire avec frottement.

Nous ne poursuivons pas plus avant l'étude de la dynamique dans la situation non-linéaire, mais il apparaît dans le cas d'une balançoire une deuxième orbite périodique stable : on est en présence d'une **bifurcation de Hopf** qui donne en présence de frottement des effets d'hystérésis<sup>8</sup> lors des variations de la fréquence  $\omega$  (cf [Minorsky]).

---

<sup>8</sup>On appelle hystérésis un phénomène dans lequel lors d'une variation continue des paramètres, deux valeurs identiques des paramètres correspondent à des états distincts du système, fonction de la variation des paramètres. Le cas le plus classique, l'hystérésis magnétique, s'obtient en appliquant un champ magnétique externe (le paramètre) à un noyau en acier trempé : lorsque le champ retourne à une valeur nulle, le métal conserve une aimantation non nulle.

### 3 Le solide en rotation

Soit un solide en rotation libre dans l'espace. On note  $\omega(t)$  le vecteur de rotation instantanée dans une base liée au solide,  $M(t)$  le moment cinétique par rapport à son centre de gravité. Si  $A$  est la matrice d'inertie du système, on a alors  $M(t) = A\omega(t)$ . Si nous nous intéressons à l'évolution  $\omega(t)$ , celui-ci satisfait une équation du second ordre. Nous pourrions écrire cette équation, mais les trajectoires se décrivent plus simplement en considérant les quantités conservées. Tout d'abord l'énergie du système, qui est  $H = \frac{1}{2} \langle \omega(t), A\omega(t) \rangle$

Mais il y a une autre quantité conservée, la norme du moment cinétique :  $|M(t)|^2$ . On aura donc

$$\langle A\omega(t), \omega(t) \rangle = a, \quad \langle A^2\omega(t), \omega(t) \rangle = b$$

Ainsi la trajectoire de  $\omega(t)$  est l'intersection de deux ellipsoïdes. On peut représenter le portrait de phase par la figure suivante.

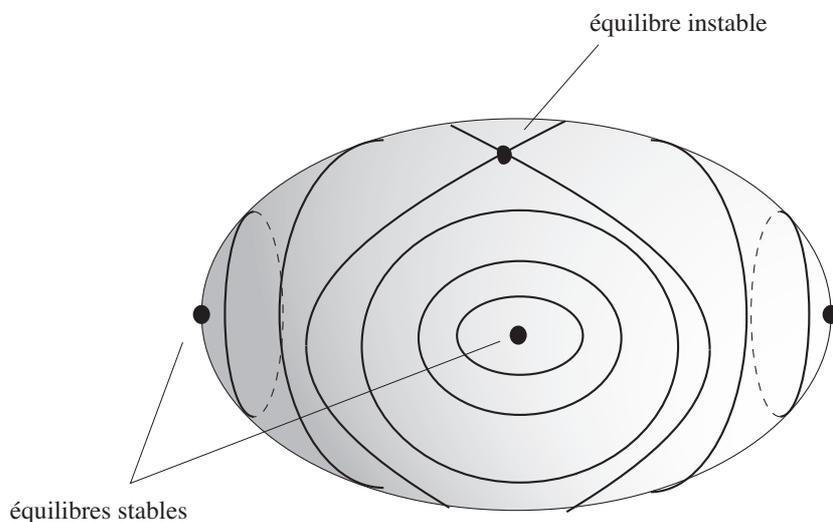


FIG. 7.6 – Dynamique du solide en rotation

On voit donc que s'agissant d'un système conservatif on ne peut avoir stabilité asymptotique. Mais il est facile de vérifier, en utilisant la forme des courbes intersections de deux ellipsoïdes étudiée au chapitre 8, exercice (3.1) de la section 3.1, que les solutions correspondant au petit et grand axe sont stables, alors que celles correspondant à l'axe moyen sont instables.

## Appendice : Condition pour qu'un polynôme de degré 3 ait toutes ses racines de partie réelle négative

**Proposition 7.1.** Soit  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$  un polynôme du troisième degré à coefficients réels. Alors  $P$  a ses racines de partie réelle strictement négative si et seulement si

$$a \cdot b > c > 0, \quad b > 0, \quad a > 0$$

**Démonstration :** L'expression des coefficients d'un polynôme comme fonction symétrique des racines permet d'écrire  $ab - c = -(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)$

On distingue alors deux cas

- Si  $P$  a deux racines complexes conjuguées, par exemple  $x_2, x_3$ , et on pose  $x = x_1$  et  $x_2 = r + is$ , avec  $r$  et  $s$  réels.

On a alors  $ab - c = -2r \cdot ((x + r)^2 + s^2)$  qui est positif si et seulement si  $r < 0$ , et alors  $c = -x(r^2 + s^2)$  sera négatif si et seulement si  $x < 0$ . Comme dans ce cas  $a = -(x + 2r)$  est positif, la proposition est démontrée dans ce cas.

- Si les trois racines sont réelles,  $c > 0$  si et seulement si soit une racine est négative, soit les trois racines sont négatives.

Si une seule racine était négative disons  $x_1$ ,  $a$  ne peut être strictement positif, car  $x_2 + x_3 \leq -x_1$  d'où  $x_1 + x_2 \leq 0, x_1 + x_3 \leq 0$  et comme  $x_2 + x_3 > 0$ , on aurait

$$-(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3) = ab - c < 0$$

□

## Exercices

- (A) Estimer les valeurs de paramètres ( $L$  : longueur du pendule,  $\nu$  fréquence des oscillations,  $a$  amplitude des oscillations) pour lesquels un pendule renversé rigide de longueur  $L$  dont le point d'attache oscille avec une fréquence  $\nu$  et une amplitude  $a$  est stable ou instable. Ce phénomène explique-t-il le fait qu'on puisse faire tenir un balai au bout des doigts en faisant osciller légèrement sa base ?
- (B) Comment varie la stabilité d'un solide en rotation libre en fonction des différents paramètres (longueur des axes de la matrice d'inertie, et choix de l'axe) ?
- (C) Faire l'étude du pendule de Kapitza non-linéaire avec frottement. Quel est l'effet du frottement sur la stabilité ? Quels phénomènes s'attend-on à observer ?
- (D) Calculer les caractéristiques (voltage et distance entre les pôles) d'un quadripôle alimenté en courant alternatif 50Hz, afin qu'un ion de charge  $e$  soit en équilibre stable au centre du quadripôle.

- (E) On dit qu'un régulateur est asynchrone, si la charge (i.e. la puissance utilisée  $F$ ) n'influe pas sur la vitesse de rotation  $\omega_0$ . Montrer qu'un régulateur de Watt ne peut être asynchrone et stable.



# Chapitre 8

## Sous-variétés

Je crois que si l'on voulait se montrer trop pointilleux, il n'y aurait pas de mathématiques du tout.

-Là tu as raison. Dès qu'on voit le problème sous cet angle, il ne manque pas d'étrangeté. Mais le plus étonnant, c'est que ces valeurs imaginaires, ou impossibles, permettent quand même des calculs réels, au bout desquels on obtient un résultat tangible.

R. Musil, *Les désarrois de l'élève Törless*.

Dans ce chapitre nous allons définir et étudier la notion de sous-variété, généralisation naturelle des courbes et surfaces « régulières ».

Au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété « ressemble » à un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Les sous-variétés apparaissent naturellement lorsqu'une équation différentielle admet des quantités invariantes : les trajectoires sont alors tracées sur une sous-variété. La caractérisation des équations différentielles dont le flot préserve une sous-variété donnée est l'objet de la section 3.2.

Mais les sous-variétés apparaissent dans de nombreux autres domaines. Ce sont les objets de base de la géométrie différentielle, de la topologie différentielle, et sous une forme légèrement différente, de la géométrie algébrique, s'introduisant jusque dans les aspects modernes de la théorie des nombres. L'une des principales difficultés de leur étude est la diversité des points de vue possibles, qui correspondent aux différentes manières dont elles interviennent naturellement. Il est utile, sinon indispensable de savoir passer d'un point de vue à l'autre. Choisir pour chaque problème le point de vue le plus approprié constitue la première étape de sa résolution.

## 1 Définition, premières propriétés.

Dans ce chapitre, on supposera tous les difféomorphismes sont de classe  $C^\infty$ .

**Définition 8.1.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $M$  est une sous-variété, si et seulement si en chaque point  $x_0$  de  $M$  il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $\varphi$  tel que l'on ait

$$\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \varphi(U)$$

L'entier  $p$  est appelé dimension de  $M$  en  $x_0$ .

*Remarques 1.1.* (A) Le difféomorphisme  $\varphi$  s'appelle une « carte locale » de  $M$  en  $x_0$ . On va voir (Proposition 8.2) que  $p$  est bien défini et ne dépend pas du choix de  $\varphi$

(B) Être une sous-variété est une propriété « locale », ce qui signifie qu'elle se vérifie en se restreignant au voisinage de chaque point.

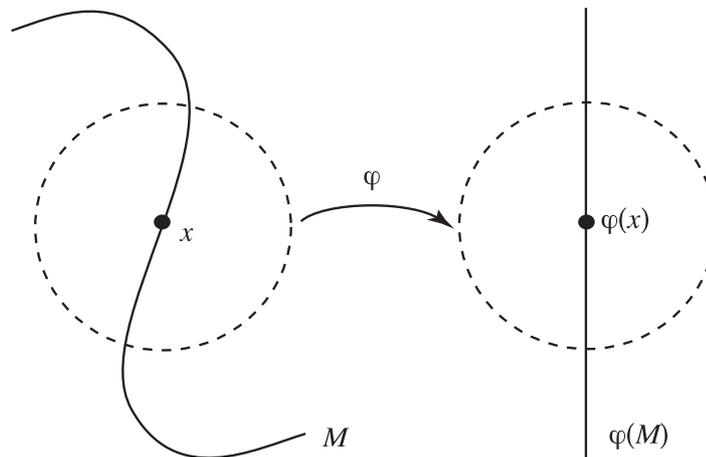


FIG. 8.1 – Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan

L'unicité de la dimension en  $x$  et son indépendance de  $x$  pour une variété connexe résultent de la proposition suivante :

**Proposition 8.2.** *La dimension en un point  $x$  d'une variété est définie de manière unique, et notée  $\dim_x M$ . Si la variété  $M$  est connexe, cette dimension ne dépend pas du point choisi.*

*Démonstration.* En effet, si on avait deux difféomorphismes  $\varphi_1, \varphi_2$  tels que  $\varphi_1(U \cap M) = \varphi_1(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$  et  $\varphi_2(U \cap M) = \varphi_2(U) \cap \mathbb{R}^q \times \{0\}$ , alors  $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  serait un difféomorphisme local défini sur un voisinage de 0 envoyant  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^q \times \{0\}$ . On en déduit que  $d\psi(0)$  envoie  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^q \times \{0\}$ . Or  $d\psi(0)$  est une application linéaire bijective donc injective, ce qui entraîne  $p \leq q$ . Par symétrie on voit que  $p = q$ .

Maintenant si  $\varphi : U \rightarrow V$  est une carte en  $x$ , et  $y$  est un point de  $U$ ,  $\varphi$  donne par translation une carte en  $y$  : le difféomorphisme  $\psi$  donné par  $\psi(z) = \varphi(z) - \varphi(y)$  est une

carte en  $y$ . On en déduit que  $\dim_x M = \dim_y M$  et donc  $D_p = \{x \in M \mid \dim_x M = p\}$  est un ouvert. Son complémentaire est réunion d'ouverts  $M - D_p = \bigcup_{j \neq p} D_j$ , il est donc ouvert, ce qui entraîne que  $D_p$  est à la fois ouvert et fermé. On en conclut que si  $D_p$  est non vide et  $M$  connexe,  $M = D_p$ .  $\square$

Utiliser la définition ci-dessus pour démontrer qu'un ensemble est une sous-variété est parfois peu commode. Il vaut mieux connaître le plus grand nombre de définitions équivalentes pour utiliser chaque fois celle qui est la mieux adaptée. En voici quelques unes :

**Proposition 8.3.** *Soit  $M$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $M$  est une sous-variété si et seulement si pour chaque point  $x_0$  de  $M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que l'une de ces propriétés soit vérifiée*

(A) **(graphe)** *Il existe un changement linéaire de coordonnées,  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et une application  $C^\infty$ ,  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  telle que*

$$W \cap M = W \cap \{A(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$$

(B) **(équation)** *Il existe une application  $C^\infty$ ,  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  telle que  $dF(x_0)$  soit surjective, et  $W \cap M = F^{-1}(0)$ .*

(C) **(nappe paramétrée)** *Il existe  $j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^\infty$  et définie sur un voisinage  $U$  de  $0$ , telle que  $j(0) = x_0$ ,  $dj(0)$  est injective et  $j$  est une bijection bicontinue<sup>1</sup>*

$$j : U \rightarrow M \cap W$$

*Remarque 1.1.* La condition (B) signifie que si on pose  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$ , les formes linéaires  $dF_1(x), \dots, dF_{n-p}(x)$  sont linéairement indépendantes.

*Exemples 1.1.* Pour  $p = 0$  une variété est simplement un ensemble de points isolés. Pour  $p = 1$  on retrouve la notion de courbe plane régulière injective et propre du plan ( $n = 2$ ) ou de l'espace ( $n = 3$ ). Pour  $p = n$  une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Démonstration.** – On note (DEF) la propriété de la définition (8.1). Montrons que (DEF) entraîne la propriété (B).

Soit  $\varphi : M \cap W \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}$ . On note  $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-p})$  les coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$  et  $F : x \mapsto (v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-p}(\varphi(x)))$

Alors il est clair que

$$x \in M \cap W \iff F(x) = 0 \text{ et } x \in W$$

or  $dF(0)$  est surjective car c'est la composée de la différentielle de  $(u, v) \mapsto v$  et de  $d\varphi$ .

---

<sup>1</sup>Ce qui signifie qu'elle est continue, d'inverse continue, ou encore que l'image d'un ouvert est un ouvert de  $M$  (c'est à dire intersection d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et de  $M$ ). On verra en exercice (N) que la bicontinuité peut être remplacée par la propriété.

- Montrons que  $(B) \implies (A)$   
Soit en effet  $(u, v) \in W$ . Alors

$$F(u, v) = 0 \iff (u, v) \in M \cap W$$

Quitte à faire un changement linéaire de variables et à restreindre  $W$ , on peut supposer que  $\frac{\partial F}{\partial v}$  est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(u, v) \in W \text{ et } F(u, v) = 0 \iff v = f(u) \text{ et } u \in U$$

Donc  $M$  est localement le graphe de  $f$ .

- $(A) \implies (\text{DEF})$   
Quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut supposer que  $M \cap W$  est le graphe de  $f : U \rightarrow V$ . Alors  $\varphi : (u, v) \mapsto (u, v - f(u))$  envoie  $M \cap W$  sur  $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap (U \times V)$
- $(A) \implies (C)$   
Soit  $M \cap (U \times V)$  le graphe de  $f : U \rightarrow V$ . Et soit  $j : x \mapsto (x, f(x))$  définie sur  $U$ . Alors  $j$  a sa différentielle injective. De plus l'image d'un ouvert  $U'$  contenu dans  $U$  est égale à  $(U' \times V) \cap M$  qui est donc un voisinage de  $x_0$  dans  $M$ . L'application  $j$  est donc bicontinue.
- $(C) \implies (A)$   
Soit  $j(x) = (u(x), v(x))$  définie sur  $U$ , et telle que  $j(U) = M \cap W$ . On peut supposer après changement linéaire de variables, que l'image de  $dj(0)$  est  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ , c'est-à-dire que  $dv(0) = 0$  et  $du(0)$  est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale permet alors de trouver des ouverts  $U' \subset U$  et  $V' \subset V$  et une application  $C^\infty$ ,  $\rho : U' \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \rightarrow V'$  telle que pour  $(x, y) \in U' \times V'$

$$u(x) = y \iff x = \rho(y)$$

Alors  $f : x \mapsto v \circ \rho(x)$  a pour graphe  $\{(x, v \circ \rho(x)) \mid x \in U'\} = \{(u(x), v(x)) \mid x \in U'\}$ . Par bicontinuité de  $j$ , on peut affirmer que  $j(U') = M \cap W'$  pour un voisinage  $W'$  de  $x_0$ . Alors  $M \cap W'$  est bien le graphe de  $f$  au dessus de  $U'$ .

□

Notons qu'une sous-variété n'est pas a priori fermée. Par exemple la spirale, image de  $s \mapsto (\exp(-s) \cos(s), \exp(-s) \sin(s))$  est une sous-variété, d'après le critère (C). De même une droite privée d'un point est une sous-variété du plan. Si on veut exclure ces exemples (mais on exclut du même coup les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ), on peut se restreindre aux sous-variétés fermées. La plupart des sous-variétés que nous utiliserons sont fermées.

*Exemples 1.2.* (A) La sphère

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \end{aligned}$$

Si  $(x_1, \dots, x_n) \in F^{-1}(0)$ , on a

$$dF(x_1, \dots, x_n) = 2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n$$

qui est non nulle (car  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ ) donc  $dF(x)$  est surjective si  $x \in F^{-1}(0)$ , et  $F^{-1}(0)$ , est une sous-variété.

On voit de même que les autres quadriques

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2 - 1 = 0, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

sont des sous-variétés.

(B) Le tore

$$j : (\theta, \varphi) \mapsto ((r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta))$$

où  $\rho < r$ . C'est une sous-variété car les vecteurs

$$\frac{\partial j}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\rho \cos(\varphi) \sin(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-(r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), 0)$$

sont linéairement indépendants. De plus  $j$  est localement bicontinue. Soit en effet  $j(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Si  $z$  est dans un intervalle de longueur inférieure à  $1/2$ , il existe une unique détermination continue de  $\theta(z) = \arcsin(z)$  égale à  $\theta_0$  en  $z_0$ . Comme  $\rho < r$ , on a  $r - \rho \cos(\theta(z)) > 0$  et en choisissant une détermination continue de  $\varphi(y, z) = \arcsin\left(\frac{y}{r - \rho \cos(\theta(z))}\right)$  telle que  $\varphi(y_0, z_0) = \varphi_0$ , on obtient une application continue  $(x, y, z) \mapsto (\theta(z), \varphi(y, z))$  qui envoie un voisinage de  $(x_0, y_0, z_0)$  du tore sur un voisinage de  $(\theta_0, \varphi_0)$ .

*Remarque 1.2. Attention :* Si  $j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application dont la différentielle est injective, il n'en résulte pas que  $j(U)$  soit une sous-variété. Une telle application  $j$  s'appelle une **immersion**. Par abus de langage un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  tel que tout point a un voisinage qui soit image d'une application de différentielle injective est appelé **sous-variété immergée**. Mais ce n'est pas une sous-variété. En particulier si  $j$  n'est pas injective,  $j(u_0) = j(u_1) = x_0$ , on peut avoir la situation suivante ( $p = 1, n = 2$ )

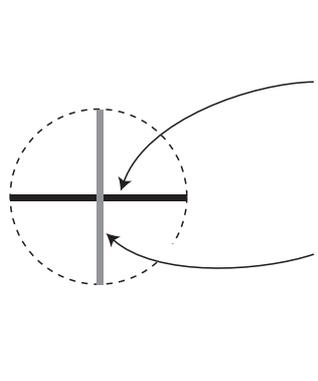


FIG. 8.2 – Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété

On voit alors que  $M = j(U)$  n'est pas une sous-variété, car une carte enverrait les deux vecteurs tangents à chaque branche de la courbe (qui sont linéairement indépendants) sur des vecteurs de  $\mathbb{R}$ , donc liés. Un autre cas, plus subtil se présente si  $j$  n'est pas bicontinue, comme sur le dessin suivant

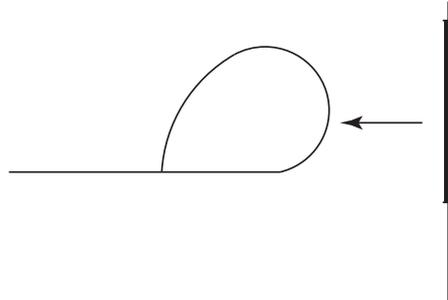


FIG. 8.3 – Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété

On utilisera donc la caractérisation des sous-variétés comme nappes paramétrées avec une certaine prudence.

## 2 Espaces tangents

On suppose dorénavant que  $M^p$  est une variété de dimension  $p$ .

Lorsque  $t \mapsto c(t)$  est une courbe paramétrée, sa tangente en  $c(t_0)$  est dirigée par le vecteur  $c'(t_0)$ , si celui-ci est non nul. Pour une nappe paramétrée  $j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , le plan tangent en  $j(u_0, v_0)$  est engendré par les vecteurs  $\frac{\partial j}{\partial u}(u_0, v_0)$ ,  $\frac{\partial j}{\partial v}(u_0, v_0)$ , qui sont linéairement indépendants si  $dj$  est injective.

La notion d'espace tangent à une sous-variété généralise ces situations.

**Définition 8.4.** Soit  $M^p$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , et  $x_0$  un point de  $M^p$ ,  $\varphi$  une carte en  $x_0$ . L'espace tangent (vectoriel) à  $M$  en  $x_0$  est l'espace vectoriel  $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ , noté  $T_{x_0}M$ . L'espace affine tangent à  $M$  en  $x_0$  est l'unique espace affine passant par  $x_0$  et dirigé par  $T_{x_0}M$ . On le note  $\tilde{T}_{x_0}M$ .

*Remarque 2.1.* On peut montrer directement que l'espace tangent ne dépend pas du choix de la carte. En effet si  $\varphi, \psi$  sont deux cartes en  $x_0$ ,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  envoie  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  sur lui-même et donc sa différentielle aussi. Cela signifie que

$$d\varphi(x_0)d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

en d'autres termes que

$$d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

On remarquera que la proposition 8.5 donne une autre démonstration de cette indépendance.

D'un point de vue pratique,

a) si  $M$  est définie localement comme l'image par  $j$  de  $\mathbb{R}^p$ , avec  $j(0) = x_0$ ,  $dj(0)$  injective, on a

$$T_{x_0}M = dj(0)\mathbb{R}^p$$

b) si  $M$  est définie localement comme le graphe  $\{(z, f(z)) | z \in \mathbb{R}^p\}$

$$T_{x_0}M = \{(h, df(z_0)h) | h \in \mathbb{R}^p\}$$

où  $x_0 = (z_0, f(z_0))$

Dans ce cas  $T_{x_0}M$  est le graphe de  $df(z_0)$ .

c) si  $M$  est définie localement comme le lieu des zéros de  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  telle que  $dF(x_0)$  soit surjective. Alors  $T_{x_0}M = \ker dF(x_0)$ .

La caractérisation suivante de l'espace tangent est parfois utile

**Proposition 8.5.** *Soit  $M$  une sous-variété. L'espace tangent  $T_xM$  est l'ensemble des vecteurs vitesse en  $t = 0$  des chemins  $C^\infty$  tracés sur  $M$  passant par  $x$  à l'instant  $t = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  une carte en  $x$ , et  $c$  une courbe tracée sur  $M$  telle que  $c(0) = x$ . Alors pour  $t$  assez proche de 0  $\varphi(c(t))$  est définie, tracée sur  $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$  et passe par 0 en  $t = 0$ . Donc la tangente en 0 de  $\varphi(c(t))$  est dans  $\mathbb{R}^p$  c'est-à-dire que  $d\varphi(c(0))c'(0)$  est dans  $\mathbb{R}^p$ , ce qui par définition équivaut à  $c'(0) \in T_xM$ .

Inversement soit  $\xi \in T_xM$  alors  $d\varphi(x)\xi$  est dans  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $t \rightarrow \gamma(t)$  une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^p$  tangente à  $d\varphi(x)\xi$  en  $t = 0$ . Alors quitte à restreindre  $\gamma$  à un voisinage de 0, on peut supposer son image contenue dans  $V = \varphi(U)$ . Alors  $c(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$  est une courbe tracée sur  $M$ , et le calcul précédent montre qu'elle est tangente à  $\xi$  en  $t = 0$ .  $\square$

*Exemples 2.1.* (A) Soit  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = 1\}$ . C'est une sous-variété définie par  $F(x) = 0$  où  $F(x) = |x|^2 - 1$ . Vu que  $dF(x)h = 2\langle x, h \rangle$ , l'espace tangent en  $x$  à la sphère,  $T_xS^2$ , est le plan orthogonal à  $x$ , et  $\tilde{T}_xS^2$  le plan orthogonal à  $x$  passant par  $x$ .

(B) Soit  $I$  un intervalle et  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. Si  $\gamma$  est une sous-variété, sa tangente en  $\gamma(t_0)$  est dirigé par  $\gamma'(t_0)$ .

(C) Soit  $C$  le cône  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ . Alors  $C$  n'est pas une sous-variété. En effet, on montre aisément que  $C$  est connexe (utiliser le fait que tout point est sur un segment de droite contenue dans  $C$  et passant par 0 pour montrer que  $C$  est connexe par arcs), et d'après le (B) de la proposition 8.3, un voisinage de  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  est une sous-variété de dimension 2, vu qu'en un tel point  $dF(x, y, z)(u, v, w) = x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w$  n'est pas identiquement nulle. Donc si  $C$  est une sous-variété, elle sera partout de dimension 2.

Mais en  $(0, 0, 0)$  les courbes  $t \rightarrow (t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta), t)$  tracées sur  $C$ , ont pour vecteur vitesse en 0 le vecteur  $(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$ . L'ensemble de ces vecteurs n'est contenu dans aucun plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . L'ensemble  $C$  ne peut donc être une sous-variété.

*Exercice 2.1.* Montrer que  $C$  n'est pas une sous-variété en utilisant la méthode suivante :  
 1) Montrer que  $C$  est connexe et si  $C$  est une sous-variété elle est nécessairement de dimension 2

2) Montrer que si  $M$  est une sous-variété connexe de dimension 2, et  $x$  un point de  $M$ , alors  $M \setminus \{x\}$  est encore connexe

3) Montrer que  $C - (0, 0, 0)$  n'est pas connexe. On pourra montrer que la fonction  $f(x, y, z) = z$  prend des valeurs positives et négatives sur  $C - \{(0, 0, 0)\}$ , mais ne s'y annule pas.

## 2.1 Classification des variétés

Deux variétés sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme global envoyant l'une sur l'autre. L'un des objectifs de la topologie différentielle était la classification des variétés, à difféomorphisme près. Une classification explicite est possible dans les cas suivants :

- (A) Dimension 1 : la seule variété compacte connexe de dimension 1 est le cercle. Il existe une seule autre variété connexe, non compacte de dimension 1 :  $\mathbb{R}$ .
- (B) Dimension 2 : la classification des surfaces compactes connexes est donnée par la sphère, le tore à  $g$  trous, le plan projectif, le plan projectif recollé avec un tore à  $g$  trous. Le cas non-compact est plus compliqué, car on peut avoir une infinité de trous, ainsi que des « pointes ».
- (C) Dimension 3 : G. Perelman a reçu la médaille Fields<sup>2</sup> en 2006 pour avoir montré que la seule variété compacte connexe de dimension 3 qui soit simplement connexe (c'est-à-dire que tout lacet se déforme continument en un lacet constant) est difféomorphe à la sphère de dimension 3, i.e.

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

## 3 Applications

### 3.1 Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété

Soit  $S$  la surface de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$F(x, y, z) = x^4 + x^2 z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0$$

C'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , car en chaque point, les dérivées partielles

---

<sup>2</sup>qu'il a refusée.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2xz^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2z + 4z \end{cases}$$

ne s'annulent pas simultanément sur  $S$  (exercice).

Soit  $f$  la restriction à  $S$  de  $x^2 + y^2 + z^2$ . Comment caractériser les maxima et minima de  $f$ ? Lorsque  $S$  est une sous-variété compacte, on sait que  $f$  atteint son maximum et son minimum, et ce problème donne lieu aux conditions nécessaires classiques d'extrema liés que l'on va énoncer. En effet, grâce aux cartes locales, la recherche des extréma locaux de  $f_S$  se ramène au problème analogue sur  $\mathbb{R}^p$ . Une fonction réelle de classe  $C^1$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  ne peut avoir d'extremum local en 0 que si sa différentielle en 0 s'annule. Plus généralement si  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^n$ , et sa restriction à  $\mathbb{R}^p$  possède en 0 un extremum local, alors  $dg(0)|_{\mathbb{R}^p} = 0$ , ou encore  $dg(0)(\mathbb{R}^p) = 0$ .

Soit alors  $M$  une sous-variété, et supposons qu'une fonction  $g$  de classe  $C^1$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  admette un extremum en  $x_0$ . Considérons une carte locale :  $\varphi : U \cap V \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$ . Alors  $\varphi^{-1}$  envoie un voisinage de 0 de  $\mathbb{R}^p$  sur un voisinage de  $x_0$  dans  $V$ , et  $g = f \circ \varphi|_{\mathbb{R}^p}^{-1}$  a un extremum local en 0 seulement si  $f|_V$  en a un en  $x_0$ .

La condition nécessaire usuelle d'extremum local,  $dg(0) = 0$  devient  $df(x_0) \circ d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = 0$ . Or  $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = T_{x_0}M$ , et on a donc

**Proposition 8.6.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^1$ , et  $V$  une sous-variété. Si  $f|_V$  a un extremum local en  $x_0$  alors  $T_{x_0}V \subset \ker df(x_0)$ .*

**Définition 8.7.** Si la condition nécessaire de la proposition précédente est vérifiée en  $x_0$ , c'est à dire si  $df(x_0)|_{T_{x_0}V} = 0$ , on dit que  $x_0$  est un **point critique** de  $f|_V$ .

Voyons comment s'exprime cette condition lorsque  $V$  est définie comme nappe, comme graphe ou par une équation :

a) Dans le cas d'une nappe, puisque  $T_{x_0}V = \text{Im } dj(u_0)$  on doit vérifier  $df(j(u_0))dj(u_0) = 0$ .

b) Pour le graphe de  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ , vu que  $T_{x_0}V$  est le graphe de  $du(x_0)$  il faut vérifier que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, u(x_0))\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = 0$ .

c) Dans le cas d'une équation  $V = \{x | F(x) = 0\}$ , vu que  $T_{x_0}V = \ker dF(x_0)$ , nous obtenons le théorème des extrema liés. La condition

$$\ker dF(x_0) \subset \ker df(x_0)$$

c'est-à-dire que la forme linéaire  $df(x_0)$  doit s'annuler sur le noyau de  $dF(x_0)$ . Or si  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$   $\ker dF(x_0)$  est l'intersection du noyau des formes linéaires

$dF_j(x_0)$ . Pour que la forme linéaire  $df(x_0)$  s'annule sur l'intersection du noyau des  $dF_j(x_0)$  il faut et il suffit que  $df(x_0)$  soit combinaison linéaire des  $dF_j(x_0)$ . Cette condition équivaut encore à l'existence de réels  $w_j$  tels que

$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{n-p} w_j dF_j(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

On a donc

**Corollaire 8.8** (Extrema liés). *Soit  $V = \{x | F(x) = 0\}$  où  $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-p})$  a sa différentielle surjective sur  $V$ . Alors, pour que la restriction de  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  à  $V$  ait un point critique en  $x_0$ , il faut et il suffit qu'il existe  $w \in \mathbb{R}^{n-p}$  tel que*

$$df(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

*Remarque 3.1.* Le vecteur  $w$  (ou ses composantes) s'appelle multiplicateur de Lagrange.

### Interprétation géométrique :

En les points où  $df(x_0)$  est non nulle,  $\ker df(x_0)$  est l'espace tangent à la sous-variété de niveau  $\Sigma_\lambda = \{f(x) = \lambda\}$ . Donc les points critiques de  $f|_V$  sont les points où les  $\Sigma_\lambda$  sont tangentes<sup>3</sup> à  $V$ .

*Exemples 3.1.* Soient  $q_1(x) = \frac{1}{2}\langle A_1x, x \rangle$  une forme quadratique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $V = \{q_1(x) = 1\}$ . Comme  $dq_1(x).h = \langle A_1x, h \rangle$ ,  $dq_1(x)$  est non nulle sur  $V$  qui est donc une sous-variété : c'est un ellipsoïde!

Si  $q_2(x) = \frac{1}{2}\langle A_2x, x \rangle$  est une autre forme quadratique, les points critiques de la restriction de  $q_2$  à  $V$  sont les  $x$  tels que

$$A_2x = \lambda A_1x$$

Ce sont les vecteurs propres de  $A_1^{-1}A_2$ .

En particulier si  $A_2 = I$  (on peut toujours s'y ramener par changement de base) les extrema de  $\|x\|^2$  sur  $V$  correspondent aux axes de la quadrique  $V$ . D'après notre interprétation géométrique, ces axes correspondent aux points où les sphères centrées à l'origine sont tangentes à la quadrique.

---

<sup>3</sup>c'est-à-dire que l'espace tangent de  $\Sigma_\lambda$  contient l'espace tangent de  $V$ .

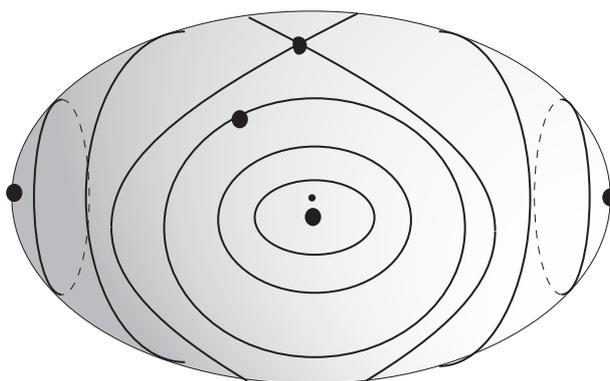


FIG. 8.4 – Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes

Reprenons le problème des extrema de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sur  $F^{-1}(0)$  où  $F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1$ . L'ensemble  $F^{-1}(0)$  étant fermé et borné, on sait que  $f$  y atteint son maximum et son minimum. On doit résoudre les équations

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda x = 4x^3 + 2xz^2 - \lambda x \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda y = 4y^3 - \lambda y \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda z = 2x^2z + 4z - \lambda z \\ x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions (réelles) sont <sup>4</sup>

$(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $((\pm \frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0)$ ,  $(0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$  et le maximum de  $f$  est atteint en quatre points  $(\pm (\frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0)$ , et est égal à  $\sqrt{2}$  le minimum en les deux points  $(0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$ , et vaut  $\frac{1}{2}$ . Les quatre points  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  ne sont ni des minima ni des maxima.

*Exemple 3.1* (Exemple pratique). Nous sommes en mesure de résoudre le problème général suivant :

Soit  $F$  une fonction réelle de classe  $C^1$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que le domaine  $\Omega = \{x \mid F(x) \leq 0\}$  soit compact, et  $dF(x)$  soit surjective pour  $x$  dans  $F^{-1}(0)$ . Soit  $f$  une autre fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On cherche le maximum (ou le minimum) de  $f$  dans le domaine  $\Omega$ .

La compacité de  $\Omega$  nous permet d'affirmer qu'un tel maximum existe, et il y a deux possibilités, suivant qu'il est réalisé dans l'intérieur de  $\Omega$  ou sur son bord  $F^{-1}(0)$ . Dans le premier cas, on doit avoir  $df(x_0) = 0$ . Dans le second cas on a un problème d'extrema liés, et on doit résoudre

$$df(x_0) = \lambda dF(x_0), \quad F(x_0) = 0$$

Le maximum de  $f$  sur  $\Omega$  appartient à l'un des deux ensembles ainsi déterminés (voir l'exercice (J)).

<sup>4</sup>Obtenues encore une fois en utilisant Maple, et les commandes `solve` et `evalf`

### 3.2 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Dans cette sous-section, les champs de vecteurs seront supposés avoir un flot défini pour tout temps. Il est utile de caractériser simplement les équations différentielles dont les solutions restent dans une sous-variété :

**Proposition 8.9.** *Soit  $V$  une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^n$  et  $X$  une équation différentielle telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V, \quad X(t, v) \in T_v V$$

*Si  $\gamma$  est une solution de  $\dot{\gamma}(t) = X(t, \gamma(t))$  définie sur un intervalle  $[0, s]$ , telle que  $\gamma(0) \in V$ , alors  $\gamma([0, s])$  reste dans  $V$ .*

**Démonstration :** Soit  $\tau = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset V\}$ , on veut montrer que  $\tau = s$ . Tout d'abord,  $V$  étant fermée,  $\gamma(\tau) \in V$ . Il suffit alors de montrer que  $\gamma([\tau, \tau + \varepsilon]) \subset V$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

Soit  $\varphi$  une carte de  $V$  autour de  $\gamma(\tau)$

$$\varphi : V \cap U \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

Alors si  $Y = \varphi_*(X)$ , ou encore  $Y(t, \varphi(x)) = d\varphi(x)X(t, x)$ , la courbe  $\sigma(t) = \varphi(\gamma(t))$  vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = Y(t, \sigma(t)) \\ \sigma(t_0) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{cases}$$

Puisque si  $z \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ ,  $Y(t, z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ , en posant  $\sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  l'équation (1) équivaut à

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = B(t, x(t), y(t)) \\ x(\tau) = x_0, y(\tau) = 0 \end{cases}$$

où  $B$  vérifie  $B(t, x, 0) = 0$ . La seconde équation a pour solution  $y \equiv 0$ , et si  $x$  est la solution de

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t), 0), x(\tau) = x_0$$

dont l'existence nous est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on constate que  $(x(t), 0)$  est solution de (1), et par le même théorème, c'est la seule.

On en conclut que  $y$  reste nul tant qu'il est défini, c'est à dire sur  $]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$ , d'où

$$\sigma(t) \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap V$$

pour  $t \in ]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$ . Donc sur cet intervalle,  $\gamma(t) = \varphi(\sigma(t)) \in V$ , ce qui contredit la maximalité de  $\tau$  □

*Exercice 3.1.* Si  $X(0, x) \notin T_x V$  pour un  $x \in V$ , il existe une solution de  $\dot{\gamma} = X(t, \gamma)$  qui est sur  $V$  en  $t = 0$  et quitte  $V$  pour  $t > 0$ .

*Remarque 3.2.* La fermeture de la sous-variété  $V$  est essentielle. En effet, si  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ , on aura que le champ de vecteurs  $X(x, y) = (0, 1)$  est tangent à  $V$ , mais  $\varphi_1(0, -1) = (0, 0) \notin V$ .

*Exemples 3.2.* (A) Soit  $X(t, x)$  un champ de vecteurs tel que  $X(t, x)$  soit orthogonal à  $x$ . Alors son flot préserve les sphères. (voir un cas particulier dans l'exemple suivant).

(B) Soit  $\dot{M}(t) = \Omega(t) \wedge M(t)$ , où  $M(t), \Omega(t)$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Cette équation décrit le mouvement libre d'un solide de moment cinétique  $M(t)$  et de moment d'inertie  $\Omega$ .

On a alors

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |M(t)|^2 \right) = \langle \dot{M}(t), M(t) \rangle = \langle \Omega(t) \wedge M(t), M(t) \rangle = 0$$

On en déduit que la variété  $|M|^2 = |M(0)|^2$  est préservée, c'est à dire que le moment cinétique est de norme constante.

(C) Si  $H(q, p)$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , et  $X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$ . Puisque  $dH(q, p)X_H(q, p) = 0$ ,  $X_H$  est tangent aux hypersurfaces  $\{H(q, p) = C\}$  et le flot préserve ces hypersurfaces. En fait dans ce cas, il suffit de dire que la fonction  $t \mapsto H(q(t), p(t))$  a sa dérivée identiquement nulle.

*Remarque 3.3.* Le cours s'est volontairement placé dans le cadre « restrictif » des sous-variétés. Il existe une notion en apparence plus générale, la notion de variété. Une variété est un espace métrique<sup>5</sup> muni de cartes, qui permettent de définir de manière cohérente la notion de différentiabilité, sans utiliser d'espace ambiant. Bien que toute variété puisse se réaliser comme sous-variété, certains objets sont plus simples à définir dans le cadre des variétés (par exemple les quotients).

## 4 Exercices

- (A) Trouver des conditions suffisantes pour qu'une courbe paramétrée,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit une sous-variété.
- (B) Montrer que si une courbe de niveau de  $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$  ne contient pas de zéro, la trajectoire de  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -\nabla V(x)$  partant d'un point de cette courbe, coïncide avec une composante connexe de la courbe de niveau.
- (C) Démontrer que la réunion de deux plans non parallèles n'est pas une sous-variété. Indication : montrer que son espace tangent en un point d'intersection doit avoir des propriétés contradictoires.
- (D) Montrer que l'image de la courbe  $t \rightarrow (t^2, t^3)$  n'est pas une sous-variété.

<sup>5</sup>La définition usuelle est plus générale, on autorise un espace topologique séparé

- (E) Montrer que si  $p \neq 1$ ,  $\mathbb{R}^p$  ne peut être homéomorphe à  $\mathbb{R}$  (utiliser la non connexité de  $\mathbb{R} - \{0\}$ ).

Utiliser le théorème de Jordan pour montrer que si  $p \neq 2$ ,  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^p$  ne sont pas homéomorphes.

- (F) Lire dans [Milnor] la définition de variété et la démonstration du fait qu'une variété de dimension 1 compacte est difféomorphe à un cercle.

- (G) Soit  $F : E \rightarrow G$  une application  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) entre espaces de Banach, telle que  $dF(x)$  soit surjective pour tout  $x \in F^{-1}(0)$ . Soit  $\varphi : E \rightarrow H$  une autre application, de classe  $C^k$  telle que  $\ker d\varphi(x) \cap \ker dF(x) = \{0\}$  pour tout  $x \in F^{-1}(0)$ . Montrer que l'image de  $F^{-1}(0)$  par  $\varphi$  est une sous variété immergée, et que son espace tangent en  $\varphi(x)$  est  $d\varphi(x) \ker dF(x)$ .

- (H) Soit  $V$  une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On suppose  $V$  donnée par l'équation  $F \leq 0$ , où  $dF$  ne s'annule pas sur  $V$ , et  $F$  est minorée et tend vers  $+\infty$  à l'infini.

(a) Soit  $\nu(x) = \frac{dF(x)}{|dF(x)|}$ . Montrer que  $\nu(x)$  est orthogonal à  $T_x V$ .

(b)  $\varphi : V \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  donnée par  $\varphi(v, t) = v + t\nu(x)$  où  $\nu$  est la normale extérieure de  $V$ .

Montrer que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\varphi$  est un difféomorphisme sur son image.

- (I) Trouver le maximum de  $\sum_{j=1}^n x_j^2$  avec la contrainte  $\sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0$

- (J) Soit  $D$  un domaine du plan bordé par une courbe  $C^1$ . Montrer que les extrema de  $f$  sur  $D$  sont à chercher parmi

-les points où  $df(x)$  s'annule

- les points où  $df(x)|_{T_x \partial D} = 0$

Décrire graphiquement ces points. Montrer que la restriction de  $f$  à  $\partial D$  et la direction de  $\nabla f(x)$  (supposé non nul) en un point  $x$  de  $\partial D$  permettent de savoir si  $x$  est un minimum ou un maximum local de  $f$ .

Expliquer comment, en utilisant une carte météorologique des isothermes, on trouve le point le plus chaud et le plus froid d'un pays (ou d'une région) de la carte, dont la frontière est supposée de classe  $C^1$ . Le faire pour la carte des températures moyennes annuelles du Canada (cf. Figure J).

Indication : décrire l'allure des isothermes au voisinage d'un un tel point.

Que deviennent les conditions d'extrema liés si le bord de la région est seulement  $C^1$  par morceaux ?

- (K) Sur le graphe suivant, on a tracé les courbes

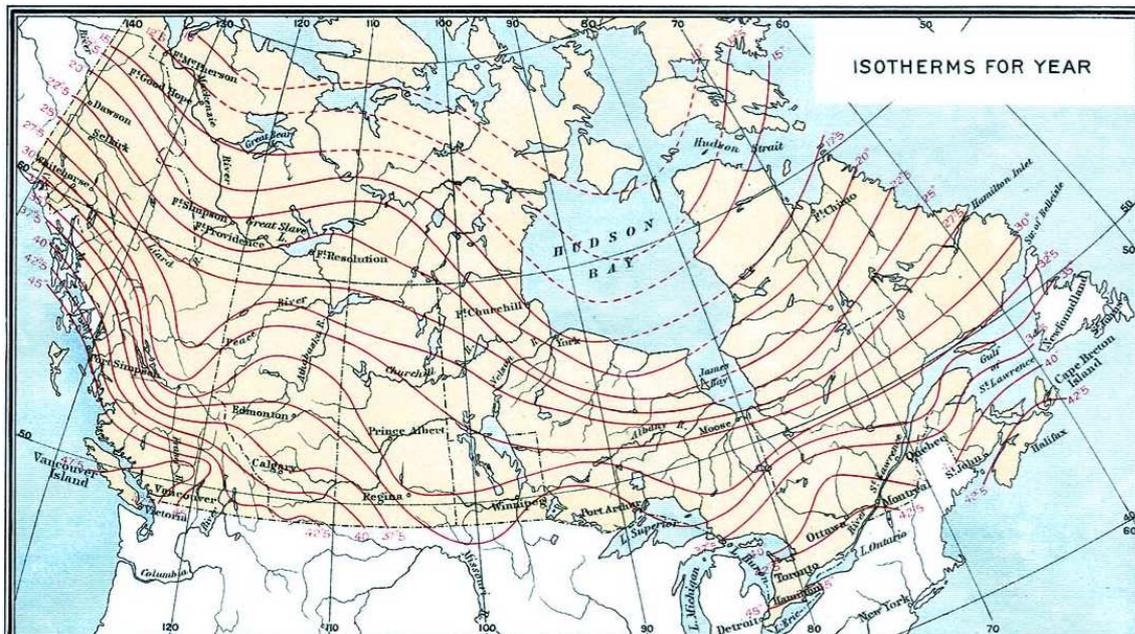


FIG. 8.5 – Isothermes annuelles du Canada.

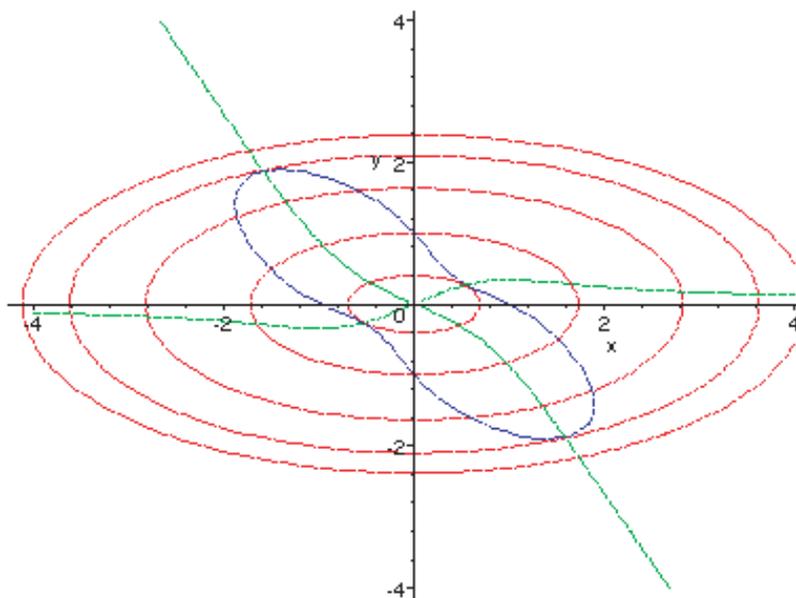


FIG. 8.6 – Exercice (K)

- en bleu :  $F(x, y) = 0$  où  $F(x, y) = x^4 + y^4 + 6xy - 1$
- en rouge : les niveaux de  $G(x, y)$  où  $G(x, y) = x^2 + 3y^2$
- en vert : la courbe  $D(x, y) = 0$  où

$$D(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

[D'après Maple,  $D(x, y) = 24yx^3 + 36y^2 - 8xy^3 - 12x^2$ ]

Indiquer sur le dessin les extrema de la restriction de  $G$  à  $F = 0$ .

- (L) Soit  $\Gamma$  une sous-variété connexe compacte de dimension 1 du plan (i.e. une courbe fermée). On admettra qu'il existe une application  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective, telle que  $\dot{\gamma}(t)$  ne s'annule pas, et telle que  $\Gamma = \gamma(S^1)$ . On identifie dans la suite  $S^1$  à  $\Gamma$  via  $\gamma$ . On note  $\|\bullet\|$  la norme canonique sur le plan.

- (a) Montrer que l'application de  $d_2$  de  $\Gamma^2$  dans  $\mathbb{R}$  donnée par

$$d_2 : (t_1, t_2) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|$$

atteint son maximum en un point où  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  et que  $\dot{\gamma}(t_1)$  et  $\dot{\gamma}(t_2)$  sont orthogonaux à  $\gamma(t_1) - \gamma(t_2)$ .

- (b) Montrer que l'application  $d_3$  de  $\Gamma^3$  dans  $\mathbb{R}$  donnée par

$$d_3 : (t_1, t_2, t_3) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\| + \|\gamma(t_3) - \gamma(t_1)\|$$

atteint son maximum en un point où  $\gamma(t_i) \neq \gamma(t_j)$  si  $i \neq j$  et qu'en un tel point

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|} - \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_3)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\|} \perp \dot{\gamma}(t_2)$$

et de même en effectuant une permutation circulaire de  $t_1, t_2, t_3$ )

- (c) Il existe donc des trajectoires à 3 rebonds sur tout billard dont le bord est convexe. Que dire pour  $k$  rebonds ( $k > 3$ ) ?

- (M) (Théorie des enveloppes)

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  une famille de fonctions  $C^\infty$  définies sur le plan que l'on écrira  $f(\lambda, x, y)$ . On suppose que pour tout  $(\lambda, x, y)$  annulant  $f$ , l'une des dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x, y)$  est non nulle.

- (a) Montrer que l'ensemble  $C_\lambda = \{(x, y) \mid f(\lambda, x, y) = 0\}$  est une sous-variété de dimension 1 (i.e. une courbe régulière plongée).  
 (b) Montrer que la tangente à  $C_\lambda$  en  $(x_0, y_0)$  est donné par l'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x_0, y_0) = 0$$

- (c) Écrire des hypothèses suffisantes pour que l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \exists \lambda, f(\lambda, x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, x, y) = 0\}$$

définisse une courbe  $C^\infty$  notée  $\Gamma$

- (d) Montrer sous les hypothèse précédentes, qu'en chacun de ses points, la courbe  $\Gamma$  est tangente à une des courbes  $C_\lambda$ . On appelle  $\Gamma$  l'**enveloppe** de la famille de courbes  $C_\lambda$

(e) La famille de cubiques

$$y = (x - \lambda)^3$$

vérifie-t-elle les hypothèses des questions précédentes. Existe-t-il une équation différentielle,

$$\dot{x} = a(x, y), \dot{y} = b(x, y)$$

avec  $a, b$  Lipschitziens, dont les solutions sont les paraboles en question ?

(N) Montrer que l'image d'une immersion injective propre est une sous-variété (propre signifie que l'image réciproque d'un compact est compacte).



# Chapitre 9

## Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications

Les formes différentielles interviennent dans plusieurs aspects des mathématiques et tout particulièrement en géométrie et systèmes dynamiques. Intuitivement, une forme différentielle a pour vocation de s'intégrer sur une sous-variété. Le lecteur a sans doute déjà vu de manière plus ou moins explicite les formes de degré 1 à l'occasion de l'étude des fonctions holomorphes (intégrale sur les chemins de  $f(z)dz$ ). L'objet que l'on intègre doit avoir une intégrale ne dépendant pas de la paramétrisation du chemin.

Après avoir introduit le formalisme des formes différentielles, et de la différentielle extérieure, nous démontrons la formule de Stokes qui joue un rôle crucial, autant en mathématiques qu'en mécanique et en physique. Les applications sont alors nombreuses, mais nous insistons particulièrement sur celles de caractère topologique.

### 1 Préambule : les variétés

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^q$ . Le lecteur a du commencer à se rendre compte que l'espace ambiant jouait le plus souvent un rôle secondaire, et que finalement peu importe que  $M$  soit sous-variété de  $\mathbb{R}^q$  ou de  $\mathbb{R}^k$  : un cercle reste un cercle que ce soit dans le plan ou dans l'espace. La sous-variété  $M$  possède un certain nombre de propriétés intrinsèques, qui en font ce que l'on appelle une variété, dont la définition est détaillée en annexe. Pour lire ce chapitre et ceux qui suivent, il est simplement nécessaire d'utiliser la convention suivante : désormais on appelle carte la restriction d'une carte  $\varphi$  à l'intersection de  $M$  et de son ouvert de définition. Donc si  $\varphi$  est une carte de  $M$ , variété de dimension  $d$ , c'est la restriction d'un difféomorphisme de  $M$  à  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On donne en appendice la définition abstraite des variétés.

## 2 Formes différentielles

### 2.1 Algèbre extérieure

On note  $\delta_j^k$  le symbole de Kroenecker, égal à 1 si  $j = k$  et 0 sinon. On note  $\mathfrak{S}(p)$  le groupe des permutations de  $p$  objets. On rappelle que ce groupe de cardinal  $p!$  est engendré par les transpositions (i.e. permutation de  $[1, \dots, p]$  échangeant deux éléments), et que la parité du nombre de transpositions nécessaire pour engendrer la permutation  $\sigma$  est un invariant de la permutation. La signature de  $\sigma$ , notée  $\varepsilon(\sigma)$ , vaut  $-1$  si ce nombre est impair,  $+1$  s'il est pair. L'application  $\sigma \rightarrow \varepsilon(\sigma)$  est un morphisme du groupe  $\mathfrak{S}(p)$  sur le groupe  $(\{-1, +1\}, \times)$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ . On note  $(E^*)^{\otimes k}$  l'espace des formes  $k$ -linéaires, c'est-à-dire telle que pour tout  $j \in [1, k]$ , et quels que soient les vecteurs  $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$  de  $E$ , l'application  $v \rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$  soit linéaire

**Définition 9.1.** On appelle forme extérieure de degré  $k$  une forme  $k$ -linéaire alternée sur  $E$ , c'est-à-dire une application  $\alpha : E^k \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

(A) pour tout  $j \in [1, k]$ , et quels que soient les vecteurs  $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$  de  $E$ , l'application  $v \rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$  soit linéaire

(B) quels que soient les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  de  $E$ ,

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k).$$

On note  $\Lambda^k(E^*)$  l'espace de ces formes.

Notons que la seconde condition entraîne que pour toute transposition  $\tau$ ,

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

Il en résulte que pour toute permutation  $\sigma$

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

et que

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$$

dès qu'il existe  $i \neq j$  tels que  $v_i = v_j$ .

Pour un élément  $\alpha$  de  $(E^*)^{\otimes k}$  et une permutation  $\sigma$  on pose  $\sigma^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ . On obtient ainsi une représentation du groupe  $\mathfrak{S}(k)$  sur  $(E^*)^{\otimes k}$ . Les formes alternées constituent le sous-espace sur lequel  $\mathfrak{S}(k)$  agit comme la multiplication par  $\varepsilon(\sigma)$ .

*Exemples 2.1.* (A) Par convention, on pose  $\Lambda^0(E^*) = \mathbb{R}$ , ce qui est cohérent avec la convention  $E^0 = \mathbb{R}$ .

(B) Les formes linéaires (ou 1-linéaires) forment l'espace vectoriel dual de  $E$  noté  $E^*$  qui s'identifie à  $\Lambda^1(E^*)$ . Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  on note  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale, définie par

$$\forall j, k \in [1..n], e_j^*(e_k) = \delta_j^k$$

- (C) Le déterminant de  $n$  vecteurs dans la base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  c'est-à-dire le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans cette base, induit une forme  $n$ -linéaire alternée. On note  $\det_e$  cet élément de  $\Lambda^n(E^*)$ .
- (D) Enfin si  $\alpha$  est une forme multilinéaire non nécessairement alternée, il existe un opérateur de projection,  $P$  qui lui associe sa partie alternée. Il est naturellement donné par la formule

$$P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

On vérifie aisément que  $P(\alpha)$  est alternée, car si  $\tau$  est une transposition,

$$P(\alpha)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)})$$

et en faisant le changement de variable dans  $\mathfrak{S}(k)$  donné par  $\rho = \sigma\tau$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho\tau^{-1}) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) &= \varepsilon(\tau^{-1}) \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) = \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \end{aligned}$$

**Définition 9.2.** Le produit extérieur de deux formes extérieures  $\alpha, \beta$  de degrés respectifs  $k, l$  est le produit de  $\frac{(k+l)!}{k!l!}$  par la projection par  $P$  de leur produit usuel. C'est donc la forme de degré  $k+l$  donnée par la formule

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k+l)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

On verra ultérieurement la raison de cette normalisation étrange. Notons tout de même que l'on peut aussi écrire

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_A \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

où  $A$  est l'ensemble des permutations vérifiant  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$ . Notons que toute permutation se ramène à un élément de  $A$  par composition avec une permutation de  $\{1, \dots, k\}$  et une permutation de  $\{k+1, \dots, k+l\}$ .

**Proposition 9.3** (Structure de l'algèbre des formes alternées).

Soit  $\alpha \in \Lambda^k(E^*), \beta \in \Lambda^l(E^*)$

(A) (Anti-commutativité) On a

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$$

(B) (Associativité)

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

(C) L'espace vectoriel  $\Lambda^p(E^*)$  est engendré par les éléments  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$  où  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ . En particulier sa dimension est égale au coefficient binomial  $C_n^p$  (elle est nulle pour  $p > n$ ).

(D) L'algèbre  $\Lambda^\bullet(E^*) = \sum_p \Lambda^p(E^*)$  munie de l'addition et du produit extérieur est une algèbre engendrée par les  $e_i^*$ .

Remarques 2.1. (A) Attention : dire qu'une algèbre est engendrée par des éléments  $e_i^*$  signifie que tout élément est somme de produits des  $e_i^*$ .

(B) L'espace des formes de degré  $n$  est de dimension un. Il est engendré par le déterminant associé à une base donnée,  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . On appellera **forme déterminant** une telle forme non-nulle.

L'application  $\det_e(v_1, \dots, v_n)$  s'écrit avec les notations précédentes

$$\det_e = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

qui résulte de la formule

$$\det_e(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} e_1^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(v_{\sigma(n)})$$

Pour vérifier que deux formes volumes sont égales, il suffit de vérifier qu'elle prennent la même valeur sur une base bien choisie.

*Démonstration.* Tout d'abord on voit aisément, en écrivant chaque vecteur dans la base, que la forme  $\alpha$  est déterminée par les nombres  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ . Puisque  $\alpha$  s'annule sur un  $p$ -uplet de vecteurs dont deux sont égaux, et  $\alpha(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}) = \varepsilon(\sigma) \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ , la donnée des  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  détermine  $\alpha$ , car on peut toujours trouver une permutation ordonnant les indices.

La forme  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$  vaut  $\varepsilon(\sigma)$  sur  $e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}$  pour  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}(p)$  et 0 sur les autres  $p$ -uplets de vecteurs de base. Si  $\alpha$  est une  $p$ -forme et on note  $c_{i_1, \dots, i_p} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  on aura

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

puisque les deux formes coïncident sur les  $p$ -uplets  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ .

Cela démontre la propriété (C) et il suffit de vérifier (A) et (B) pour des formes du type  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ , ce qui est laissé au lecteur.

□

Nous pouvons maintenant définir la notion de forme induite par une application linéaire. Il est clair que si  $f$  est une application linéaire et  $\alpha$  une forme multilinéaire (pas nécessairement alternée) on peut définir  $f^*(\alpha)$  par  $f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$ . Cette opération envoie les formes alternées sur des formes alternées. On a donc

**Définition 9.4.** Si  $f : E \longrightarrow F$  est une application linéaire, elle induit une application linéaire

$$\Lambda^k f : \Lambda^k(F^*) \longrightarrow \Lambda^k(E^*)$$

(attention,  $\Lambda^k f^*$  va dans le sens inverse de celui de  $f$ ) aussi notée  $f^*$ , donnée par la formule

$$f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

On notera que la forme induite sur un sous-espace de dimension  $k$  par une forme de degré  $k$  est soit nulle, soit une forme volume<sup>1</sup> de dimension  $k$ . C'est sa principale propriété. On a aussi que si  $f$  est bijective,

$$f^* \det_{f(e)} = \det_e$$

(si  $f$  n'est pas bijective,  $f^* \det_e = 0$ ). Si  $f$  est un endomorphisme, vu que l'application  $\Lambda^n f$  est un endomorphisme d'un espace de dimension un, il existe un unique réel noté  $\det(f)$  tel que

$$f^* \det_e = \det(f) \det_e$$

Notons que  $\det(f)$  ne dépend pas du choix d'une base.

*Remarque 2.1.* (A) Dans un espace vectoriel on dit de deux bases définissent la même orientation si le déterminant de l'une dans l'autre base est positif. Sinon, elles définissent des orientations opposées. Une orientation de l'espace est le choix d'une des deux classe d'équivalence pour la relation « avoir même orientation ». Lorsque l'espace est muni d'un produit scalaire, on peut choisir une base orthonormée orientée, et on note  $\det$  la forme multilinéaire donnée par le déterminant dans cette base. Il est défini de manière unique. Par exemple dans  $\mathbb{R}^n$  on choisit l'orientation associée à la base canonique.

(B) Dans un espace euclidien de dimension 3, à tout vecteur  $v$  on associe la 1-forme  $\alpha_v = \langle v, \bullet \rangle$  et la 2 forme  $\Omega_v = \det(v, \bullet, \bullet)$ . Les applications  $v \longrightarrow \alpha_v$  et  $v \longrightarrow \Omega_v$  sont injectives, donc par raison de dimension bijectives. Les formes de degré 1 ou 2 se paramètrent donc par des vecteurs.

**Proposition 9.5.** *On a les propriétés suivantes*

(A)

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

(B)

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

---

<sup>1</sup>i.e. si  $f : V \longrightarrow E$  est linéaire injective et  $\dim(V) = k$ ,  $f^*(\alpha)$  est une forme volume.

*Démonstration.* Pour la première propriété, il suffit de montrer que  $f^*P(\alpha) = P(f^*(\alpha))$  car alors

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}P(\alpha \cdot \beta)\right) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha \cdot \beta)) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta)) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

Mais on voit que

$$\begin{aligned} f^*P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) &= f^*\left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\right) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \alpha(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) = P(f^*(\alpha))(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

La seconde n'est rien d'autre qu'une réécriture. □

*Exercice 2.1.* (A) Montrer que  $f^*(\alpha_v) = \alpha_{f(v)}$  et  $f^*(\Omega_v) = \Omega_{f(v)}$ .

(B) Montrer que si on note  $v \wedge w$  le produit vectoriel usuel<sup>2</sup> dans  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\alpha_v \wedge \alpha_w = \Omega_{v \wedge w}$$

et que

$$\alpha_v \wedge \Omega_w = \langle v, w \rangle \det$$

(il suffit de vérifier les deux égalités avec des vecteurs choisis parmi  $v, w, v \wedge w$ ).

## 2.2 Formes différentielles sur les variétés

De même que le déterminant de  $n$  vecteurs mesure le volume ( $n$  dimensionnel) du parallélépipède engendré par ces vecteurs dans l'espace de dimension  $n$ , et intervient crucialement dans la formule des changements de variable en théorie de l'intégration, les formes de degré  $k$  vont jouer le même rôle lorsqu'on voudra intégrer sur une sous-variété de dimension  $k$ .

Pour cela il faut d'abord définir les formes différentielles. On se contentera ici de formes de classe  $C^\infty$ , le cas  $C^r$  ne présentant pas de difficultés. Commençons par le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel.

**Définition 9.6.** [Forme différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ]

(A) Une forme différentielle de degré  $k$  et de classe  $C^\infty$  sur un ouvert  $U$  de  $E$  est une application de classe  $C^\infty$  de  $U$  dans  $\Lambda^k(E^*)$ . On note  $\Omega^k(U)$  l'espace des formes différentielles  $C^\infty$  de degré  $k$  définies sur  $U$ .

---

<sup>2</sup>Ce produit est uniquement déterminé dans un espace euclidien de dimension 3 par la formule  $\det(u, v, w) = \langle u, v \wedge w \rangle$ .

(B) Si  $\varphi$  est une application  $C^\infty$ , définie sur un ouvert  $U$  de  $E$  à valeurs dans un ouvert  $V$  de  $F$ , on lui associe une application  $\varphi^* : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$  donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

**Définition 9.7** (Formes différentielles sur une variété). Soit  $M$  une variété. Une forme différentielle de degré  $k$  sur  $M$  est une application qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe un élément de  $\Lambda^k(T_x^*(M))$ . On dit qu'une telle forme est de classe  $C^\infty$  si pour chaque carte locale, la forme  $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$  est de classe  $C^\infty$ . On note  $\Omega^k(M)$  l'espace des formes différentielles  $C^\infty$  de degré  $k$ .

Enfin nous pouvons définir :

**Définition 9.8** (Forme induite par une application différentiable). Si  $\varphi : M \longrightarrow N$  est une application  $C^\infty$  entre variétés, on note  $\varphi^*$  l'application de  $\Omega^*(N)$  vers  $\Omega^*(M)$  donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

*Remarque 2.2.* Dire que  $\alpha$  est une  $k$ -forme de classe  $C^\infty$  signifie donc que si  $\varphi$  est une carte locale, la forme

$$(\varphi^{-1})^*(\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi^{-1}(x))(d\varphi^{-1}(x)\xi_1, \dots, d\varphi^{-1}(x)\xi_k)$$

est une forme de degré  $k$  de classe  $C^\infty$  (i.e. ses coefficients sont de classe  $C^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}^n$ .

Enfin il suffit de vérifier la régularité, avec une carte locale : si  $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$  est à coefficients  $C^\infty$ , et si  $\psi$  est une autre carte,  $\psi^{-1}(\alpha)$  sera aussi  $C^\infty$ , car

$$(\psi^{-1})^*(\alpha) = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*(\alpha)$$

*Exemples 2.2.* (A) Soit  $\tilde{f}$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f$  sa restriction à la sous-variété  $M$ . Alors  $d\tilde{f}(x)$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , dont la restriction à  $T_x M$  ne dépend que de  $f$  et non du choix de l'extension  $\tilde{f}$ . En effet, il suffit de vérifier que si  $f$  est identiquement nulle, alors  $d\tilde{f}(x)$  s'annule sur  $T_x M$  pour tout  $x$  de  $M$ . Mais une carte nous ramène au cas  $M = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ , auquel cas cela revient à vérifier que si  $\tilde{f}$  est nulle sur  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  alors  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$  pour tout  $j$  inférieur à  $k$ , ce qui est évident. On note  $df(x)$  la 1-forme différentielle ainsi définie.

(B) Si  $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  et  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\varphi^*(\alpha) = f(\varphi(x)) \det(d\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

## 2.3 Différentielle extérieure

On utilise désormais la notation classique  $dx_j$  pour  $e_j^*$ . Ceci se justifie par le fait que la différentielle de la coordonnée  $x_j$  est la forme linéaire  $e_j^*$ . Une forme linéaire  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit donc sous la forme d'une combinaison linéaire de termes de la forme  $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ .

**Définition 9.9** (Différentielle extérieure). Si  $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  on pose

$$d\alpha = df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

On étend  $d$  en une application linéaire de  $\Omega^k(M)$  dans  $\Omega^{k+1}(M)$ .

**Proposition 9.10.** *La définition ci-dessus définit de manière cohérente et unique l'opérateur  $d$ . Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes*

(A)  $d$  est une application linéaire de  $\Omega^p(M)$  dans  $\Omega^{p+1}(M)$

(B)  $d \circ d = 0$

(C)

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(D) Pour toute application  $C^\infty$ ,  $\varphi : M \rightarrow N$  on a  $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$ .

*Démonstration.* L'unicité est évidente, car prenant pour  $\varphi$  une permutation des coordonnées, on définit la différentielle de  $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  et par linéarité cela définit de manière unique la différentielle de toute forme. La propriété (A) est évidente. Les autres propriétés sont linéaires et invariantes par permutation des coordonnées et il suffit de les vérifier sur les formes du type  $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ . Pour (B)

$$d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

(car les autres termes sont nuls) Donc

$$d(d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)) = d\left(\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k\right) = \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(x) dx_l \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Dans cette somme les termes contenant  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$ , qui sont égaux d'après le lemme de Schwarz (cf. lemme 1.26 du chapitre 1, Appendice 6) apparaissent avec des signes opposés. Leur somme est donc nulle.

Il suffit de vérifier le point (C) pour des formes du type  $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  et  $\beta = g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$ . Or

$$d\alpha = df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$d\beta = dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$$

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg)(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\
&= (f(x)dg(x) + g(x)df(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\
df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} &+ (-1)^p f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\
&= \alpha \wedge d\beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta
\end{aligned}$$

Pour le point (D), il suffit de le vérifier pour les 0-formes (i.e. les fonctions) auquel cas

$$d(\varphi^*(f))(x)(\xi) = d(f \circ \varphi)(\xi) = df(\varphi(x))d\varphi(x)\xi = (\varphi^*(df))(x)(\xi)$$

Dans le cas général, on utilise la propriété que toute forme  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^n$  est somme de termes du type  $\alpha \wedge d\beta$  avec  $\alpha, \beta$  de degré strictement inférieur à celui de  $\omega$  : par exemple  $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = f(x)dx_1 \wedge (d(x_2dx_3 \wedge \dots \wedge dx_k))$ .

Maintenant

$$\varphi^*d(\alpha \wedge d\beta) = \varphi^*d(\alpha) \wedge \varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ce dernier terme est égal à

$$d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta) = d(\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(d\beta)) = d(\varphi^*(\alpha \wedge d\beta))$$

□

*Remarque 2.3.* On a vu que dans un espace de dimension 3 muni d'un produit scalaire, à tout champ de vecteurs  $X$  on peut associer la 1-forme  $\alpha_X(v) = \langle X(x), v \rangle$  et la 2-forme  $\Omega_X(v, w) = \det(X(x), v, w)$ . Alors notant  $\Omega$  la forme volume, on a

$$d\alpha_X = \Omega_{\nabla \wedge X}, d\Omega_X = (\nabla \cdot X)\Omega$$

où  $\nabla \wedge, \nabla \cdot$  sont respectivement les opérateurs de rotationnel et de divergence. La propriété (D) de la proposition, fort simple pour les formes différentielles, devient compliquée pour les opérateurs définis sur les champs de vecteurs, car  $d\varphi$  ne préserve en général pas le produit scalaire. C'est ce qui explique le comportement délicat du rotationnel et de la divergence par changement de coordonnées.

*Exercice 2.2.* Retrouver les formules sur  $\text{div rot}(X), \text{rot grad}(f), \text{grad}(fg), \text{div}(fv), \text{rot}(fw)$  où  $f, g$  sont des fonctions et  $v, w$  des champs de vecteurs en utilisant la propriété (C) de la proposition 9.10.

Les formes différentielles fournissent un moyen compact de réécrire les équations de Maxwell. Si  $E = (E_x, E_y, E_z)$  sont les composantes du champ électrique,  $B = (B_x, B_y, B_z)$  celles du champ magnétique, on associe au champ électromagnétique la 2-forme  $F$ , définie sur l'espace-temps en coordonnées  $(x, y, z, t)$

$$F = \frac{1}{c}(E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt) + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

Les équations de Maxwell dans le vide entraînent que

$$dF = 0$$

puisque

$$\begin{aligned} dF = & \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - c \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dy \wedge dx \wedge dt + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - c \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dz \wedge dy \wedge dt + \\ & \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - c \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dx \wedge dz \wedge dt + \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c} \nabla \wedge E ; \quad \nabla \cdot B = 0$$

les autres équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme  $d\star F = 0$  où  $\star$  est l'opérateur qui échange d'une part  $dx \wedge dy$  et  $dz \wedge dt$ , et d'autre part  $dx \wedge dz$  et  $dy \wedge dt$ , etc. (qui dépend du choix du produit scalaire).

### 3 Variétés à bord, orientation, Formule de Stokes

#### 3.1 Variétés à bord, variétés orientées

La différentielle extérieure, dont la définition peut sembler étrange, est faite pour vérifier la formule de Stokes. Celle-ci joue le rôle, en dimension supérieure, de la formule d'intégration par parties. Avant d'énoncer la formule de Stokes, nous devons définir la notion de variété orientée et de variété à bord. On note  $\mathbb{H}^n$  le demi-espace  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ .

**Définition 9.11.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $M$  est une sous-variété à bord, si et seulement si en chaque point  $x_0$  de  $M$  il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  envoyant  $x_0$  sur 0 tel que l'on ait

soit

(a)

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

soit

(b)

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

L'entier  $p$  est appelé dimension de  $M$  en  $x_0$ . On appelle bord de  $M$  et on note  $\partial M$  l'ensemble des points  $x_0$  correspondant au cas (b).

*Remarque 3.1.* (A) La définition des variétés est donnée en appendice.

(B) Comme dans le cas de l'invariance de la dimension, les cas (a) et (b) ne peuvent se présenter simultanément pour un même point  $x_0$ , car il n'existe pas de difféomorphisme local préservant l'origine et envoyant  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}^n$  : en effet, l'image d'un ouvert contenant 0 par un difféomorphisme est encore un ouvert contenant 0, mais  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  ne contient pas de tel ouvert.

(C) On définit l'espace tangent comme dans le cas sans bord. Pour les points de  $M \setminus \partial M$  cela ne pose pas de problème. Pour les points de  $\partial M$ , on définit  $T_x M = d\varphi(0)^{-1}(\mathbb{R}^p)$ .

(D) Attention, en un point du bord l'espace tangent en  $x_0$  n'est plus l'ensemble des vecteurs vitesse d'une courbe tracée sur  $M$  passant par  $x_0$ . En effet ces vecteurs vitesse ne décrivent plus que le demi-espace

$$d\varphi(x_0)^{-1}(0)((\mathbb{R}^{p-1} \times \{\mathbb{R}_+\} \times \{0\})$$

*Exemple 3.1.* La demi-sphère,

$$S^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

est une variété à bord, dont le bord est le cercle

$$\Gamma = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

et dont l'espace tangent en  $(x, y, z)$  est donné par

$$T_{(x,y,z)}S^+ = \{(u, v, w) \mid xu + yv + zw = 0\}$$

Les sous-variétés définies dans le chapitre 8 sont telles que  $\partial M$  est vide. On les appelle, lorsqu'une confusion est possible, sous-variétés sans bord.

*Remarque 3.2.* Les problèmes de classification des variétés sont bien entendu plus compliqués pour les variétés à bord. Signalons un fait important : en dimension 1, il existe à difféomorphisme près, deux variétés compactes, connexes à bord : le cercle (dont le bord est vide!) et l'intervalle (cf. [Milnor]).

**Proposition 9.12.** *Si  $M$  est une variété à bord connexe, alors  $\partial M$  est une sous-variété de dimension  $\dim(M) - 1$ .*

*Démonstration.* En un point du bord de  $M$  les cartes sont de type (b). La restriction de  $\varphi$  à  $\partial M \cap U$  a pour image  $\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\} \times \{0\}$ , et fournit donc un carte de  $\partial M$ .  $\square$

Afin d'intégrer une forme différentielle sur une variété, nous aurons besoin de la notion d'orientation d'une variété.

**Définition 9.13.** Soit  $M$  une variété. On dit que  $M$  est une variété (à bord), orientable, si et seulement si on peut choisir un sous ensemble de l'ensemble des cartes tel que pour deux cartes  $\varphi, \psi$  définies sur des voisinages de  $x_0$ ,  $U \cap M$  et  $V \cap M$ ,  $d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_0)$  a un déterminant positif. Le choix d'un tel sous-ensemble de cartes s'appelle une **orientation** de  $M$ .

*Remarque 3.3.* Si  $M$  est orientable, il est clair qu'elle possède deux orientations. Ces deux orientations sont dites opposées.

Une définition équivalente de l'orientabilité est la possibilité de choisir en chaque point de  $M$  une orientation de  $T_x M$  de manière à ce que cette orientation « varie de manière continue ». En d'autres termes

**Définition 9.14.** Une orientation des espaces  $T_x M$  est dite « continue » si la condition suivante est vérifiée. Pour chaque  $n$ -uplet de champs de vecteurs définis au voisinage de  $x_0$  et linéairement indépendants en  $x_0$  tels que  $(X_1(x_0), \dots, X_n(x_0))$  définisse une base positivement orientée de  $T_{x_0} M$  alors pour  $x$  voisin de  $x_0$ , les  $(X_1(x), \dots, X_n(x))$  définissent encore une base positivement orientée pour  $T_x M$ .

**Proposition 9.15.** *La variété  $M$  possède une orientation continue de son espace tangent, si et seulement si elle est  $M$  orientable.*

*Démonstration.* Soit  $t$  une symétrie hyperplane (donc renversant l'orientation) de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\varphi$  une carte définie sur un ouvert connexe. Alors soit  $\varphi$  soit  $t \circ \varphi$  ont la propriété suivante :

$d\varphi(x_0) : T_{x_0} M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  envoie une base positivement orientée de  $T_{x_0} M$  sur une base positivement orientée de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela est clair pour un point  $x_0$ , et comme  $\det(d\varphi(x)X_1(x), \dots, d\varphi(x)X_n(x))$  varie continûment sur un ouvert connexe sans s'annuler, son signe est constant.

Cela donne pour chaque ouvert de carte une application  $\varphi$ , il reste à vérifier que si  $\varphi$  est définie sur  $U$  et  $\psi$  sur  $V$ , alors  $\varphi \circ \psi^{-1}$  a un déterminant positif. Mais en  $x_0 \in U \cap V$ ,  $d\varphi(x_0)$  et  $d\psi(x_0)$  envoient une base positivement orientée de  $T_{x_0} M$  sur une base positivement orientée de  $\mathbb{R}^n$ . On en déduit que le déterminant de  $d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)) = d\varphi(x_0) \circ d\psi(x_0)^{-1}$  est positif.  $\square$

*Exemple 3.2.* (A) On peut montrer qu'une hypersurface compacte sans bord de  $\mathbb{R}^n$  possède toujours un intérieur et un extérieur ( mais ce théorème requiert des bases de la théorie de l'homologie). Elle est donc orientable. En effet, soit  $\nu(x)$  la normale extérieure en  $x$ . Une base de  $T_x M$  sera dite positivement orientée si la base de  $\mathbb{R}^n$  donnée par  $(\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))$  est positivement orientée dans  $\mathbb{R}^n$ . On vérifie aisément que cela fournit une orientation continue de  $T_x M$  en utilisant la continuité du déterminant et le fait qu'une base est positivement orientée si et seulement si  $\det((\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))) > 0$ .

(B) Si  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$  est un chemin, et si on se donne une orientation de  $T_{\gamma(0)} M$  il existe une unique manière de prolonger cette orientation à  $T_{\gamma(t)} M$ .



FIG. 9.1 – Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius

(C) Le ruban de Möbius est une variété à bord non orientable. En effet posons

$$F(r, \theta) = ((1 + r \cos(\theta/2)) \cos(\theta), (1 + r \cos(\theta/2)) \sin(\theta), r \sin(\theta/2))$$

soit

$$M = \{F(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1/2 \leq r \leq 1/2\}$$

Il est facile de construire une base de  $T_z M$  dépendant continûment de  $\theta$  le long de  $z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  qui change d'orientation lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ . En effet les vecteurs  $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta), \frac{\partial F}{\partial r}(0, \theta)$  forment une base de  $T_{F(0, \theta)} M$  mais  $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 2\pi)$ , alors que  $\frac{\partial F}{\partial r}(0, 0) = -\frac{\partial F}{\partial r}(0, 2\pi)$ .

**Proposition 9.16.** *Si  $M$  est une variété à bord orientée,  $\partial M$  est une variété (sans bord) orientée.*

*Démonstration.* On voit en utilisant une carte locale que si  $x$  est un point du bord,  $T_x M$  est divisé en deux demi-espaces. On appelle demi-espace intérieur (resp. extérieur) le demi-espace  $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_- \times \{0\})$  (resp.  $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\})$ ). Cela permet de diviser les vecteurs non tangents à  $\partial M$  en deux classes : les vecteurs pointant vers l'extérieur et ceux pointant vers l'intérieur de  $M$ . Les seconds sont par exemple vecteurs tangents en 0 à une courbe  $c(t)$  telle que  $c(0) = x$  et  $c(t) \in M$  pour  $t > 0$ . Soit alors  $v$  un vecteur sortant. On dira d'une base  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $T_x \partial M$  qu'elle est positivement orientée si la base  $(v, e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $T_x M$  l'est aussi. Cela fournit une orientation continue de  $T_x \partial M$ , qui d'après la proposition 9.15 est donc orientable.  $\square$

### 3.2 Intégration des formes différentielles, formule de Stokes

Commençons par intégrer des formes à support compact sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 9.17.** Soit  $\alpha$  une forme de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^n$  à support compact. Elle peut s'écrire

$$\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

On pose alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$$

Ici  $dx_1 \dots dx_n$  est la mesure de Lebesgue<sup>3</sup> pour laquelle le parallélépipède de côtés  $e_j$  a volume 1.

La formule du changement de variable devient alors

**Proposition 9.18.** Soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  préservant l'orientation, et  $\alpha$  une forme de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors on a la formule de changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\alpha)$$

*Démonstration.* La formule n'est rien d'autre que la traduction de la formule du changement de variable dans les intégrales multiples (voir le cours de P. Colmez, Théorème II.2.12, page 45).

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

En effet si  $\varphi$  préserve l'orientation, le déterminant de  $d\varphi$  est positif, et donc

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha) &= f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \det(d\varphi(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= (\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

□

L'intégration sur une variété orientée peut alors se définir en utilisant

**Lemme 9.19** (Partition de l'unité). Soit  $M$  une variété compacte et  $(U_j)_{j=1..q}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Il existe alors une famille  $(\rho_j)_{j=1..q}$  de fonctions de classe  $C^\infty$  telles que

$$(A) \text{ supp}(\rho_j) \subset U_j$$

---

<sup>3</sup>Notons que l'on n'intégrera que des fonctions  $C^\infty$  à support compact. La question de la mesurabilité ou de l'intégrabilité de  $f$  ne se pose donc pas.

$$(B) \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$$

$$(C) \forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^q \rho_j(x) = 1$$

Pour la démonstration du lemme, on renvoie au cours de F. Golse ([Golse]).

**Définition 9.20.** Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $k$  et  $\omega$  une  $k$ -forme. On se donne une partition de l'unité  $\rho_j$  subordonnée à un recouvrement par des cartes  $\varphi_j$ , préservant l'orientation. On pose

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^q \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

Bien entendu il faut vérifier que cette définition ne dépend ni du choix des cartes ni de la partition de l'unité. Nous omettons ici cette vérification.

*Exemples 3.1.* (A) Une forme de degré 1 sur le plan est donnée par  $\alpha = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ . Son intégrale le long d'un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , défini par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  est l'intégrale sur  $[0, 1]$  de

$$\gamma^* \alpha = [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Nous pouvons maintenant démontrer

**Théorème 9.21** (Formule de Stokes). *Soit  $\omega$  une forme différentielle de degré  $n - 1$  définie sur la variété orientée  $M$  de dimension  $n$ . Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

*Démonstration.* Tout d'abord le théorème est linéaire : si  $\omega = \sum_{j=1}^r \omega_j$  il suffit de démontrer le théorème pour chaque  $\omega_j$ . On peut donc, par partition de l'unité et changement de variable, se ramener au cas où  $\omega$  est à support compact soit dans  $\mathbb{R}^n$  soit dans  $\mathbb{H}^n$ . On peut toujours ramener le premier cas au second par translation. Nous allons donc nous limiter au second cas.

La forme  $\omega$  est soit du type  $f(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  soit du type

$$f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Dans le premier cas,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = \int_{\mathbb{H}^n} d\omega$$

Dans le second cas,

$$d\omega = (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$$

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega = 0$$

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n =$$

$$\int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

Comme  $f$  est à support compact,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j$  s'annule, et l'intégrale ci-dessus est nulle.

On a donc vérifié la formule de Stokes dans les deux cas, ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Remarque 3.4.* La régularité demandée à  $\omega$  ou  $M$  est souvent trop importante pour les applications. Il suffit par exemple que  $M$  soit réunion finie de variétés à bord.

*Exercice 3.1.* Montrer que si  $K$  est l'intérieur du cube de dimension  $n$  (i.e.  $K = [0, 1]^n$  et  $\partial K$  son bord (i.e.  $\partial K = \bigcup_{j=1}^n I^{j-1} \times \{0, 1\} \times [0, 1]^{n-j-1}$ ), la formule de Stokes est encore vérifiée sur  $K$ , i.e.

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$$

**Définition 9.22.** On dit que la forme  $\omega$  est fermée si elle vérifie  $d\omega = 0$ , elle est exacte si il existe  $\alpha$  telle que  $\omega = d\alpha$ . Comme  $d \circ d = 0$ , toute forme exacte est fermée. On appelle  $k$ -ième groupe de cohomologie de de Rham de  $M$  et on note  $H^k(M)$  le quotient de l'espace des  $k$ -formes fermées par les  $k$ -formes exactes.

Le corollaire suivant s'obtient en appliquant la formule de Stokes au cas d'une variété à bord vide.

**Corollaire 9.23.** Soit  $V$  une sous-variété orientable sans bord contenue dans  $M$ , et  $\omega$  une forme exacte. Alors

$$\int_V \omega = 0$$

La formule de Stokes permet d'affirmer que si  $V$  est une sous-variété orientable sans bord de dimension  $n$  contenue dans  $M$ , l'application  $\int_V$  définit une application linéaire de  $H^n(M)$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Exercice 3.2.* Montrer que la forme  $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est fermée mais n'est pas exacte. On pourra calculer son intégrale sur le cercle.

## 4 Applications de la formule de Stokes

Lorsque  $n = 2$  la formule de Stokes est connue sous le nom de formule de Green-Riemann. Elle a pour conséquence directe la formule de Cauchy (cf. le cours de P. Colmez, chapitre V, théorème V.I.3, page 88). On trouvera dans les ouvrages de physique ou de mécanique de nombreuses applications de la formule de Stokes, en particulier à des calculs d'intégrale, de flux, etc. Nous en rappelons ici une version physique et donnons ensuite un certain nombre d'applications moins immédiates, et plus sophistiquées d'un point de vue mathématique.

### 4.1 Formules intégrales

Soit  $S$  une surface bordant un domaine  $V$ , c'est-à-dire que  $V$  est une sous-variété à bord de dimension 3 de  $\mathbb{R}^3$  et  $S = \partial V$ . Soit  $\nu(x)$  la normale à la surface, et  $A$  un champ de vecteurs défini au voisinage de  $V$ . On considère la forme volume canonique  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}^3$  et on pose  $\eta(x)(u, v) = \Omega(x)(\nu(x), u, v)$ . On pose  $\vec{A} \cdot d\vec{S} = \langle A, \nu \rangle \eta$  (où  $d\vec{S} = \nu \det(\nu(x), u, v)$  est une deux forme à valeurs vectorielles).

**Théorème 9.24** (Formule d'Ostrogradsky).

$$\int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot A) dv$$

*Démonstration.* On vérifie que pour  $u, v$  dans  $S$ ,  $\langle A, \nu \rangle \eta(u, v) = \Omega_A(u, v) = \det(A, u, v)$ . Or les deux termes ne dépendent que de la projection de  $A$  sur  $\mathbb{R}\nu$ , et coïncident pour  $A = \nu$ .

La formule de Stokes affirme que

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \Omega_A = \int_V d\Omega_A = \int_V \operatorname{div}(\vec{A})\Omega$$

□

De manière analogue, si  $S$  est une surface de bord  $\partial S = \Gamma$ , on a

**Théorème 9.25** (Formule du gradient).

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

*Démonstration.* En effet, si

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \alpha_V = \int_{\partial S} \alpha_V = \int_S d\alpha_V = \int_S \Omega_{\nabla \wedge \vec{V}} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

□

## 4.2 Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer

Soit

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

On a alors  $d\alpha_n = n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ . On en déduit que

$$\int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{\partial B^n} \alpha_n = \int_{B^n} d\alpha_n = n \int_{B^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \text{vol}(B^n)$$

**Théorème 9.26** (Brouwer). *Soit  $f$  une application continue de  $B^n$  dans elle-même. Alors  $f$  possède au moins un point fixe.*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde et on traite le cas où  $f$  est  $C^\infty$ , laissant l'extension au cas continu en exercice (cf. exercice (D)). Construisons d'abord à l'aide de  $f$  une application  $C^\infty$  de  $B^n$  dans  $S^{n-1}$  qui vaille l'identité sur  $S^{n-1}$ .

La demi-droite  $\{x + t(f(x) - x) \mid t \leq 0\}$  rencontre  $S^{n-1}$  en un point unique donné par l'unique solution négative ou nulle  $t(x)$  de

$$|x|^2 + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + t^2|f(x) - x|^2 = 1$$

Notons que c'est bien un trinôme qui a deux solutions réelles soit toutes les deux nulles, soit de signe opposés. En effet le coefficient de  $t^2$  ne s'annule jamais par hypothèse et le discriminant ne s'annule que si

$$|\langle x, f(x) - x \rangle|^2 - |f(x) - x|^2(|x|^2 - 1) = 0$$

ce qui n'est possible que si  $|x| = 1$  et  $x$  est orthogonal à  $f(x) - x$ , mais alors un dessin montre immédiatement que  $f(x) = x$ . Notons aussi que si  $|x| = 1$ , on a  $t(x) = 0$ . De

plus  $t(x)$  est fonction  $C^\infty$  de  $x$  (la formule donnant les racines du trinôme est  $C^\infty$  en les coefficients pourvu que le discriminant ne s'annule pas). Soit alors  $r(x) = x + t(x)(f(x) - x)$ . On a

$$n \operatorname{vol}(B^n) = \int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{S^{n-1}} r^* \alpha_n$$

car  $r = Id$  sur  $S^{n-1}$ . La formule de Stokes donne alors

$$\int_{\partial B^n} r^* \alpha_n = \int_{B^n} r^* d\alpha_n = 0$$

car  $d\alpha_n$  est une  $n$ -forme volume, mais les vecteurs  $dr(x)(e_j)_{j=1..n}$  sont toujours linéairement dépendants, vu qu'ils sont tangents à  $S^{n-1}$  qui est de dimension  $n - 1 < n$ .

Comme  $\operatorname{vol}(B^n) \neq 0$  nous arrivons à une contradiction.  $\square$

*Remarque 4.1.* La forme  $\alpha_n$  peut aussi s'écrire

$$\alpha_n(x)(u_1, \dots, u_{n-1}) = \det(x, u_1, \dots, u_{n-1})$$

où les  $u_j$  sont dans  $T_x S^{n-1}$

$$(x, u) \in TS^{n-1} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, \langle x, u \rangle = 0\}$$

La même démonstration montre que si  $M$  est une variété à bord orientable

**Proposition 9.27.** *Il n'existe pas d'application continue de  $M$  dans  $\partial M$  dont la restriction au bord soit l'identité.*

*Démonstration.* Soit  $V$  une variété orientable fermée, alors il existe une forme  $\omega$  d'intégrale 1 sur  $V$ . En effet, si  $\varphi$  est une carte en un point, et  $\sigma = \rho(x_1, \dots, x_n)$  une fonction à support dans un voisinage de zéro et d'intégrale 1, alors  $\omega = (\varphi^{-1})^* \sigma$  est d'intégrale 1.

Soit  $\omega$  une telle  $n - 1$ -forme sur  $\partial M$ , et  $r : M \rightarrow \partial M$  l'application en question. Nous avons

$$\operatorname{vol}(\partial M) = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} r^* \omega = \int_M dr^* \omega = \int_M r^*(d\omega)$$

Mais  $d\omega$  est une  $n$ -forme sur  $\partial M$  qui est de dimension  $n - 1$ . Elle est donc nulle et il en est de même pour  $r^*(d\omega)$ . Comme  $\operatorname{vol}(\partial M)$  est non nul, nous obtenons une contradiction.  $\square$

### 4.3 Appendice : définition abstraite des variétés

Soit  $M$  un espace métrique, supposé paracompact, c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts.

**Définition 9.28.** (A) Soit  $M$  un espace métrique, réunion dénombrable de compacts.

Un **atlas** sur  $M$  est la donnée d'un recouvrement de  $M$  par des ouverts,  $U_j$ , et pour chaque  $U_j$  d'un homéomorphisme  $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$ , appelé **carte**, où  $V_j$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , vérifiant la propriété suivante : si  $U_j, U_k$  sont deux tels ouverts, l'application  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$  définie sur  $\varphi_j(U_j \cap U_k)$  est un difféomorphisme ( $C^\infty$ ) d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  sur son image.

(B) Deux atlas sont dits équivalents si leur réunion est un atlas.

(C) Une structure de variété sur  $M$  est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas.

Il est facile de vérifier qu'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est une variété au sens ci-dessus. Il suffit de prendre pour  $U_j$  l'intersection de  $M$  et d'un ouvert de carte, et pour  $\varphi_j$  la restriction d'une carte à  $M$ .

Un théorème de Whitney affirme que toute variété est difféomorphe (on laisse le lecteur définir ce que cela signifie) à une sous-variété de  $\mathbb{R}^q$  pour  $q$  assez grand.

La plupart des opérations que l'on souhaite faire sur les variétés peuvent se faire sur les sous-variétés, mais il existe des exceptions : en particulier le quotient d'une variété par une action de groupe, par exemple le quotient de  $S^2$  par l'application  $x \rightarrow -x$  est difficile à définir si on regarde  $S^2$  comme une sous-variété, mais facile avec la définition de variété.

## 5 Exercices

(A) On considère un espace euclidien de dimension  $n$  dont on note  $(,)$  le produit scalaire, et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée. On identifie  $\Lambda^n(E^*)$  à  $\mathbb{R}$  par l'isomorphisme qui envoie  $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^*$  sur 1.

(a) Il existe un unique produit scalaire sur  $\Lambda^p(E^*)$  pour lequel la base  $e_i^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$  est orthonormée.

(b) Montrer qu'il existe un unique opérateur  $\star : \Lambda^{n-p}(E^*) \rightarrow \Lambda^p(E^*)$  tel que

$$(\alpha, \star\beta) = \alpha \wedge \beta$$

quels que soient  $\alpha \in \Lambda^p(E^*), \beta \in \Lambda^{n-p}(E^*)$

(c) Montrer que  $\star^2 = (-1)^{p(n-p)}$

(B) Montrer en utilisant une partition de l'unité que  $M^k$  est orientable si et seulement si il existe une  $k$ -forme  $\omega$  sur  $M^k$  ne s'annulant jamais. On pourra utiliser construire la forme localement en utilisant une partition de l'unité. Montrer que dans ce cas  $\int_M \omega > 0$  et donc que  $\omega$  n'est pas exacte.

- (C) Montrer en appliquant la formule de Stokes les formules suivantes (dont on précisera les hypothèses)

Théorème du rotationnel :

$$\int \int \int_V \operatorname{rot}(X) dv = \int \int_S \vec{X} \wedge d\vec{S}$$

Théorème du gradient :

$$\int \int \int_V \operatorname{grad}(f) dv = \int \int_S f d\vec{S}$$

- (D) Soit  $f$  une application continue de  $B^n$  dans elle-même supposée sans point fixe.

- (a) Montrer que quel que soit  $\varepsilon$  strictement positif, on peut trouver  $g$  telle que  $g$  soit  $C^\infty$  et que  $|g - f|_{C^0} \leq \varepsilon$ . Montrer que pour  $\varepsilon$  assez petit, l'application

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon)} \frac{g(x)}{\rho(|g(x)|)}$$

est  $C^\infty$  et envoie  $B^n$  dans lui-même, où  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que

- i.  $\rho(t) = t$  pour  $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$
- ii.  $\rho(t) \geq 1 - 2\varepsilon$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$

- (b) Montrer que toute application continue de  $B^n$  dans elle-même possède au moins un point fixe.

- (E) Soit l'équation différentielle définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + x(t) = e(t)$$

où

- $e$  est  $C^\infty$  périodique de période  $T$  et il existe un réel  $E$  tel que  $|e(t)| \leq E - 1$ ,
- $f(x, v)$  est  $C^\infty$ , constante et égale à  $f > 0$  pour  $|x|^2 + |y|^2$  suffisamment grand.

- (a) Ramener l'équation à un système du premier ordre dans le plan. Que dire du temps de vie des solutions ?
- (b) Montrer que pour  $R$  assez grand et  $|u| \leq 1$ , toute solution partant d'un point d'un cercle  $C(u_0, R)$  centré en  $(u, 0)$  de rayon  $R$ , tel que  $|y| > E/f$  rentre dans le disque  $D(u, R)$  bordé par  $C(u, R)$ .
- (c) Pour  $R$  assez grand, montrer que la solution de condition initiale  $(R, E/f)$  traverse la droite  $y = -E/f$  pour  $t > 0$ . On note  $t_0$  le premier instant où cette droite est atteinte, et  $\Gamma_0(R)$  la courbe  $\varphi^t(R, E/f)$  pour  $t$  dans  $[0, t_0]$ .

On admettra de même qu'il existe un arc de trajectoire  $\Gamma_1(R)$  arrivant en  $(-R, -E/f)$  partie de  $y = E/f$

- (d) Montrer que si  $(R, E/f), (x_+(R), E/f)$  sont les extrémités de  $\Gamma_0$  on a  $|x_+(R) - R| \leq O(1/R)$ . On admettra de manière analogue que  $|x_-(R) + R| \leq O(1/R)$ .

Pour les questions suivantes, on pourra admettre la version suivante du théorème de Schönflies : toute courbe fermée du plan (sans point doubles) sépare le plan en deux ouverts dont la composante bornée est un ouvert difféomorphe au disque.

- (e) En utilisant des arcs de cercles et les courbes définies aux questions précédentes, construire une courbe fermée telle que tout point intérieur à cette courbe reste à l'intérieur de la courbe.
- (f) En déduire l'existence d'au moins une solution périodique de période  $T$ .

# Chapitre 10

## Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle, Calcul de Lie

### 1 Lemme de Poincaré, théorie du degré

#### 1.1 Lemme de Poincaré

Il s'agit de l'énoncé suivant, qui joue un rôle crucial pour lier topologie et formes différentielles. On rappelle que le support d'une forme différentielle est la fermeture de l'ensemble  $\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}$ .

**Proposition 10.1** (Lemme de Poincaré). *Soit  $\omega$  une forme de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\omega$  est exacte. Si de plus  $\omega$  est à support dans  $]0, 1[^n$ , alors  $\omega$  est la différentielle d'une forme à support dans  $]0, 1[^n$  si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ .*

*Démonstration.* Commençons par le cas sans support : si  $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  on pose  $g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} g(t, x_2, \dots, x_n)dt$  d'où  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ . On en déduit que  $\omega = d(g(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$ .

Passons maintenant au cas à support dans  $]0, 1[^n$ . La nécessité de la condition est évidente d'après la formule de Stokes : si  $B$  est une boule contenant  $]0, 1[^n$ , et  $\omega = d\varphi$  avec  $\varphi$  à support dans  $]0, 1[^n$ , on aura

$$\int_B \omega = \int_B d\varphi = \int_{\partial B} \varphi = 0$$

Supposons maintenant que  $\omega$  est d'intégrale nulle. On va démontrer par récurrence que l'on peut trouver une  $(n-1)$  forme  $\mu_k$  à support dans  $]0, 1[^n$  telle que  $\omega - d\mu_k = f_k(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  où  $f_k$  est à support dans  $]0, 1[^n$  vérifie

$$(*) \quad \int_{[0,1]^{n-k}} f_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n = 0$$

quel que soit  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

Pour  $k = 0$  on prend  $\mu_0 = 0$  et l'hypothèse de nullité de l'intégrale de  $\omega$  montre que  $\mu_0$  vérifie bien la condition (\*). Supposons cette hypothèse vérifiée à l'ordre  $k - 1$ . Considérons la fonction

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}} f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) dt dx_{k+1} \dots dx_n$$

Puisque  $f_{k-1}$  est à support dans  $]0, 1[^n$ ,  $g_k$  est à support dans  $]0, 1[^{k-1}$ . De plus, on a pour  $x_k$  suffisamment grand,

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}} f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) dt dx_{k+1} \dots dx_n = \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k+1}} f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_k dx_{k+1} \dots dx_n = 0$$

par hypothèse.

Calculons maintenant

$$d(g_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^k \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \left( \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}} f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Posons

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = f_{k-1}(x_1, \dots, x_n) - (-1)^k \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

et

$$\mu_k = \mu_{k-1} + g_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

On a alors

$$\omega - d\mu_k = \omega - d\mu_{k-1} - d(g_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n) = f_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Par construction on a

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}} f_k(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n = \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}} \left( f_{k-1}(x) - (-1)^k \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \right) dx_{k+1} \dots dx_n = 0$$

Pour  $k = n$  l'hypothèse dit que  $f_n = 0$  et donc  $\omega = d\mu_n$  est exacte. □

*Remarque 1.1.* Le résultat est encore vrai pour des formes de degré quelconque, et aussi pour des formes à support non-compact (il n'y a plus de condition d'intégrale nulle). Pour le cas général à support non-compact, on réfère à la section 3.1 de ce chapitre, proposition 10.19

Nous pouvons alors démontrer

**Proposition 10.2.** *Soit  $M$  une variété connexe, compacte, de dimension  $n$ , sans bord et orientée. Alors une forme  $\omega$  de degré  $n$  est exacte si et seulement si*

$$\int_M \omega = 0$$

*Démonstration.* La nécessité résulte de la formule de Stokes (théorème 9.21, chapitre 9) appliquée à un compact contenant le support (on admet qu'il existe des ouverts à bord contenant tout compact!).

Par compacité du support de  $\omega$ , celui-ci se recouvre par un nombre fini de domaines difféomorphes à  $]0, 1[^n$ . La suffisance se démontre par récurrence sur le nombre de domaines difféomorphes à  $]0, 1[^n$  nécessaires pour recouvrir le support de  $\omega$ .

Si le support de  $\omega$  se recouvre par un seul tel domaine et si  $\varphi$  est le difféomorphisme entre  $U$  et  $]0, 1[^n$ , on se ramène au lemme de Poincaré en considérant  $\varphi^*\omega$ .

Soient  $U_1 \cup \dots \cup U_q$  un recouvrement du support de  $\omega$  par des ouverts difféomorphes à  $]0, 1[^n$ . Un argument de compacité donne l'existence d'un tel recouvrement fini, et on suppose la proposition démontrée pour  $q - 1$ . Une partition de l'unité permet de décomposer  $\omega$  en somme de formes  $\omega_j$  à support dans  $U_j$ . Alors il existe  $k \neq q$  tel que  $U_q \cap U_k \neq \emptyset$  sinon  $M$  ne serait pas connexe. Quitte à permuter les indices on peut supposer  $k = q - 1$ . On prend alors  $\sigma$  à support dans  $U_q \cap U_{q-1}$  d'intégrale.  $\int_{U_q} \omega_q$  et on écrit

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + (\omega_{q-1} + \sigma) + (\omega_q - \sigma)$$

Puisque  $\omega_q - \sigma$  est d'intégrale nulle et à support dans  $U_q$  elle s'écrit  $d\mu_q$  d'après le lemme de Poincaré. Maintenant

$$\omega - d\mu_q = \omega_1 + \omega_2 + \dots + (\omega_{q-1} + \sigma)$$

a même intégrale que  $\omega$  et son support est contenu dans  $U_1 \cup \dots \cup U_{q-1}$ . Par hypothèse de récurrence, c'est une forme exacte. Donc  $\omega$  est exacte.  $\square$

## 1.2 Théorie du degré, applications

Soient  $M, N$  deux variétés compactes de dimension  $n$  orientées,  $N$  étant connexe et  $f$  une application de  $M$  dans  $N$ . Alors si  $\omega$  est une forme de degré  $n$  sur  $N$  d'intégrale 1,

on associe à toute application  $f$  de  $M$  dans  $N$  le nombre

$$\text{deg}(f) = \int_M f^*\omega$$

**Proposition 10.3.** *Le nombre  $\text{deg}(f)$  ne dépend pas du choix de  $\omega$ . Si  $f_t$  est une famille continue d'applications différentiables,  $\text{deg}(f_0) = \text{deg}(f_1)$*

*Démonstration.* D'après la proposition 10.2, deux formes  $\omega_1, \omega_2$  de degré  $n$  ayant même intégrale diffèrent par une forme exacte. Si  $\omega_1 - \omega_2 = d\alpha$ , on aura

$$\int_M f^*\omega_1 - \int_M f^*\omega_2 = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$$

On va démontrer le deuxième énoncé avec l'hypothèse supplémentaire que  $F(t, x) = f_t(x)$  est  $C^\infty$ , le cas général s'y ramène par approximation. Puisque  $\partial([0, 1] \times M) = \{0\} \times M - \{1\} \times M$  (où le signe  $-$  signifie que l'on prend l'orientation opposée à celle de  $M$ ), on aura d'après la formule de Stokes (théorème 9.21, chapitre 9)

$$\int_M f_1^*\omega - \int_M f_0^*\omega = \int_{\partial([0,1] \times M)} F^*\omega = \int_{[0,1] \times M} d(F^*\omega) = \int_{[0,1] \times M} F^*(d\omega) = 0$$

puisque la forme  $\omega$  est fermée. Le cas où  $t \rightarrow f_t(x)$  est seulement continue est laissé en exercice. □

Soit  $x$  un réel, on définit  $\text{signe}(x)$  comme égal à  $\pm 1$  et de même signe que  $x$ .

**Proposition 10.4.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^\infty$  entre deux variétés orientées. Le nombre  $\text{deg}(f)$  se calcule comme suit. Soit  $y \in N$  tel que pour tout  $x \in f^{-1}(y)$  on ait  $\det(df(x)) \neq 0$ . Alors*

$$\text{deg}(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(\det(df(x)))$$

*En particulier ce nombre ne dépend pas du choix de  $y$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que si  $\det(df(x))$  dépend du choix d'une base de  $T_xM$  et  $T_yN$ , son signe n'en dépend pas pourvu que ces bases soient choisies positivement orientées (ce qui est ici sous-entendu). Soit  $U$  un voisinage de  $y$  identifié par une carte respectant l'orientation,  $\varphi$ , à un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et considérons une forme  $\rho = \rho(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  concentrée en  $0$  d'intégrale 1. Soit  $\alpha_y = \varphi^*(\rho)$  l'image de cette forme par une carte. Alors  $f^*\alpha_y$  est à support dans  $f^{-1}(U)$ . Par le théorème d'inversion locale  $f^{-1}(U)$  sera une réunion disjointe d'ouverts difféomorphes à  $U$ , notés  $U_j$ . On trouvera un  $U_j$  pour chaque élément  $x_j \in f^{-1}(y)$  correspond un  $U_j$  Sur chacun de ces ouverts  $U_j$ ,  $\varphi \circ f$  est un difféomorphisme et donc

$$\int_U f^*\omega = \sum_j \int_{U_j} f^*\omega = \sum_j \int_{f(U_j)} \omega = \sum_j \left( \int_V \omega \right) \text{signe}(\det df(x)) = \sum_j \text{signe}(\det df(x))$$

□

Le théorème de Sard, que nous ne démontrons pas ici, bien qu'il joue un rôle crucial en topologie différentielle, affirme que l'ensemble des points  $y$  vérifiant les hypothèses du lemme forment un ouvert dense (attention, on peut avoir  $\det(df(x)) = 0$  pour tout  $x$ , dans ce cas le lemme de Sard affirme que le complémentaire de l'image de  $f$  est un ouvert dense).

*Exemple 1.1.* Examinons le cas  $n = 1$ . Soit  $c : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$  une application  $C^\infty$ . On considère le nombre

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Ce nombre est égal à  $\deg(c)$ , car la forme différentielle sur  $S^1$  donnée par

$$\alpha_1(x)h = \frac{1}{2\pi} \det(x, h)$$

est une 1-forme sur  $S^1$  dont l'intégrale vaut 1, et

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Les propositions 10.3 et 10.4 permettent de conclure.

**Théorème 10.5** (Théorème de la sphère chevelue). *Tout champ de vecteurs tangent à la sphère  $S^{2n}$  possède au moins un zéro.*

*Démonstration.* Supposons que  $v$  soit un champ de vecteurs  $C^\infty$  sans zéro. Alors en suivant à partir de  $x$  un grand cercle donné par  $v(x)$  (i.e. contenu dans le plan engendré par  $x$  et  $v(x)$ ), dans la direction de  $v(x)$ , on obtient une famille  $C^\infty$  d'applications joignant l'identité à l'application antipodale  $\varphi : x \rightarrow -x$ . On en déduit que  $\deg(\text{Id}) = \deg(\varphi)$ . Or  $\deg(\text{Id}) = 1$  et si  $\alpha_{2n}$  est la forme citée plus haut on a  $\varphi^* \alpha = -\alpha$  donc

$$\deg(\varphi) = \int_{S^{2n}} \varphi^* \alpha_{2n} = - \int_{S^{2n}} \alpha_{2n} = - \deg(\text{Id}) = -1$$

et nous obtenons une contradiction. L'argument d'approximation habituel permet de traiter le cas  $C^0$ .  $\square$

*Remarques 1.1.* (A) Soit  $p$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $S^1$  donnée par  $p(x) = (\cos(x), \sin(x))$ . Alors  $p^*(\alpha) = dx$  puisque

$$\alpha_1(p(x))dp(x) = \det((\cos(x), \sin(x)), (-\sin(x), \cos(x)))dx = dx$$

On en déduit que si  $c(t) = p(\gamma(t))$  où  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $2\pi$  périodique, on a

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \int_0^{2\pi} (p \circ \gamma)^*(\alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(p^* \alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(dx) = \gamma(2\pi) - \gamma(0)$$

L'existence de  $\gamma$  est donnée par le théorème de relèvement de l'exercice (O) du chapitre 1. Dans notre cas la définition du degré coïncide avec celle donnée en l'exercice (P) du chapitre 1.

(B) Lorsque  $X$  est une application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  on définit l'indice de  $X$  par rapport à 0 et on note  $\text{ind}(X, 0)$  le nombre  $\text{deg}(\frac{X}{|X|})$ . Notons  $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  l'application donnée par  $N(x) = \frac{x}{|x|}$ , et  $\beta_n = \frac{1}{n \text{vol}(B^n)} N^* \alpha_n$ . Alors l'indice de l'application  $X$  est donné par

$$\text{ind}(X, 0) = \int_M X^* \beta_n$$

### 1.3 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé

Soit  $X$  un champ de vecteurs tangent à une sous-variété  $M$ .

On suppose les zéros de  $X$  isolés. Soit  $z$  un tel zéro. On considère une carte  $\varphi$  en  $z$  et le champ de vecteurs  $Y = \varphi_*(X)$  défini au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et ayant un zéro isolé à l'origine. Soit alors  $S(\varepsilon)$  une sphère de rayon  $\varepsilon$  centrée en 0. On suppose  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\varphi_*(X)$  n'ait pas de zéro dans la boule de rayon  $\varepsilon$  et on considère l'application  $Y : S(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et on note son degré  $\text{deg}(\varphi_*(X), \varepsilon)$  (avec l'abus de langage de la dernière remarque).

**Proposition 10.6.** *Le nombre  $\text{deg}(\varphi_*(X), \varepsilon)$  ne dépend ni de  $\varphi$  ni de  $\varepsilon$ . On le note  $\text{ind}(X, z)$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord l'indépendance de  $\varepsilon$  (à  $\varphi$  fixé) est claire car on doit comparer  $\int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$  et  $\int_{S(\varepsilon')} Y^* \beta_n$  mais la différence est donnée par

$$\int_{\partial(B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon'))} Y^* \beta_n = \int_{B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon')} dY^* \beta_n = 0$$

. Mais en utilisant le (D) de la proposition 9.10,  $dY^* \beta_n = Y^* d\beta_n = 0$ .

Maintenant si  $U$  est un domaine de bord  $\partial U$  contenant 0, le même argument montre que pour  $\varepsilon$  assez petit (il faut que  $B(\varepsilon) \subset U$ )

$$\int_{\partial U} Y^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$$

Maintenant si  $\varphi, \psi$  sont deux cartes, on doit comparer  $\int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$  et  $\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n$ . Mais  $Y_\psi = (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi$  et on donc

$$\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi^* \beta_n = \int_{(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$$

la dernière égalité résulte de ce que  $(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)$  est le bord de  $(\psi \circ \varphi^{-1})B(\varepsilon)$  qui contient l'origine. □

## 2 Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf

Soit  $M$  une surface compacte orientée sans bord de  $\mathbb{R}^3$  et considérons en chaque point  $\nu(x)$  la normale unitaire<sup>1</sup>. L'application  $\nu$  envoie  $M$  sur la sphère  $S^2$ . Nous allons compter de deux manières différentes le degré de cette application. On note  $\alpha_2$  la forme volume sur  $S^2$  définie plus haut. Notons que  $\int_{S^2} \alpha_2 = 4\pi$ . On note  $\sigma_M$  la deux forme définie sur  $M$  par  $\sigma_M(x)(u, v) = \det(\nu(x), u, v)$  où  $\det$  est le déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 10.7.** On appelle courbure de Gauss de la surface  $M$ , la fonction  $K$  définie sur  $M$  par

$$\nu^* \alpha_2 = K(x) \sigma_M$$

*Remarque 2.1.* Le lecteur qui a vu d'autres définitions de la courbure pourra montrer qu'elles sont équivalentes à celle donnée ci-dessus. On dit qu'un point d'une surface est elliptique si  $K(x)$  est strictement positif, hyperbolique si  $K(x)$  est négatif et parabolique si  $K(x) = 0$ . La trichotomie elliptique/hyperbolique/parabolique est omniprésente en mathématiques, de la géométrie à l'algèbre en passant par les équations aux dérivées partielles. Nous n'avons malheureusement pas la place de développer cette notion ici, mais les réponses données par un moteur de recherche appliqué à « elliptique, hyperbolique, parabolique » vous en donneront une idée.

L'application  $\nu : M \rightarrow S^2$  donnée par  $x \rightarrow \nu(x)$  induit une application  $F_\nu : TM \rightarrow TS^2$  donnée par

$$\begin{aligned} F_\nu : TM &\longrightarrow TS^2 \\ (x, h) &\longrightarrow (\nu(x), h) \end{aligned}$$

Si on note  $p_M, p_2$  les projections de  $TM$  sur  $M$  et de  $TS^2$  sur  $S^2$  respectivement<sup>2</sup>, on a

$$p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$$

<sup>1</sup>le choix de la normale est déterminé par l'orientation : si  $(u, v)$  est une base positivement orientée de  $T_x M$ , on choisit  $\nu(x)$  tel que  $\det(\nu(x), u, v) > 0$ .

<sup>2</sup>i.e.  $p_M(x, h) = x$ .

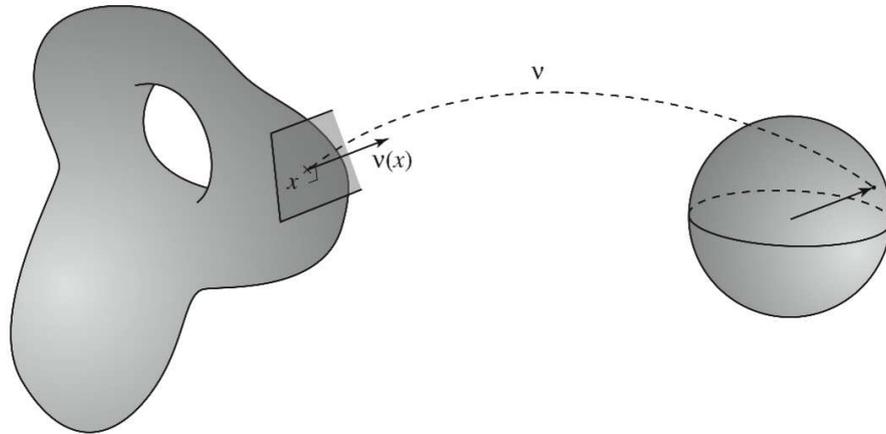


FIG. 10.1 – L'application de Gauss

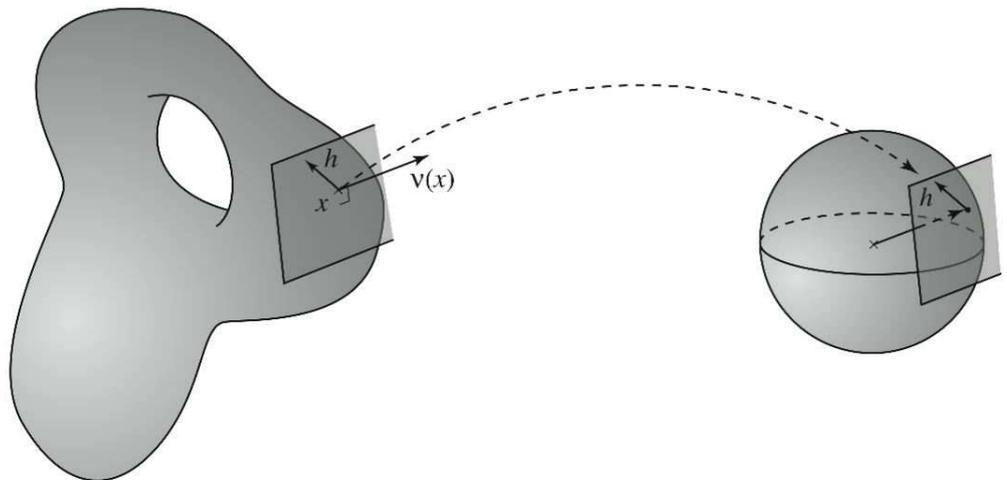


FIG. 10.2 – L'application  $F_\nu$  envoyant  $(x, h)$  sur  $(\nu(x), h)$

Soit alors  $T_2$  la 1-forme définie sur le tangent unitaire à la sphère de dimension 2

$$U_2 = \{(x, h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1, |h| = 1, \langle x, h \rangle = 0\} \subset TS^2$$

par la formule

$$T_2(x, h)(u, v) = \det(x, h, v)$$

On vérifie sans peine que  $U_2$  est une sous-variété de dimension 3 de  $\mathbb{R}^6$  (car donné par trois équations aux différentielles indépendantes) et que

$$T_{(x,h)}U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0, \langle h, v \rangle = 0, \langle x, v \rangle + \langle h, u \rangle = 0\}$$

qui possède une base donnée par

$$(x \wedge h, x \wedge h), (h, -x), (0, x \wedge h)$$

(où  $\wedge$  représente ici le produit vectoriel). Le lemme suivant nous dit que si  $\alpha_2$  n'est pas exacte d'après la formule de Stokes (son intégrale vaut  $4\pi$ ), son relevé à  $U_2$ ,  $p_2^*\alpha_2$  est exacte.

**Lemme 10.8.**

$$dT_2 = p_2^*\alpha_2$$

*Démonstration.* Il s'agit d'un calcul élémentaire. Par définition  $dT_2$  est l'antisymétrisée de  $DT_2$ . Donc

$$dT_2(x, h)(u_1, v_1)(u_2, v_2) = \det(u_1, h, v_2) - \det(u_2, h, v_1) + \det(x, v_1, v_2)$$

où  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  sont dans  $T_{(x,h)}U_0$ .

On prétend que sur  $U_0$  cette somme coïncide avec  $\det(x, u_1, u_2)$ . Il suffit de vérifier l'égalité sur les éléments d'une base.

En effet, si  $u_1 = 0$ ,  $dT_2(x, h)(u_1, v_1)(u_2, v_2) = -\det(u_2; h, x \wedge h) + \det(x, x \wedge h, v_2)$ . Comme sur les éléments de la base  $(u_2, v_2) = (h, -x)$  ou  $(x \wedge h, x \wedge h)$  on obtient zéro dans les deux cas,  $dT_2$  est un élément de  $\Lambda^2(T_{(x,h)}^*U_0)$  qui s'annule dès qu'un vecteur est dans la droite  $u = 0$ . C'est donc une forme définie sur le quotient  $T_{(x,h)}U_0/(u = 0)$  qui est de dimension 2 et en tant que forme de degré 2 sur un espace de dimension 2 est proportionnelle au déterminant  $\det(u_1, u_2) = \det(x, u_1, u_2)$ . Il est facile de vérifier que la constante de proportionnalité vaut 1.  $\square$

Soit alors  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , et  $\rho$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  telle que  $\rho(t) = t$  pour  $t \geq \delta$ . On pose  $Y(x) = \frac{X(x)}{\rho(|X(x)|)}$ . Alors  $Y$  est de norme 1 hors d'un voisinage  $\Omega_\varepsilon$  de l'ensemble des zéros de  $X$  (qui coïncident avec ceux de  $Y$ ).

On choisit dans la suite pour  $\Omega_\varepsilon$  une réunion de petits disques autour des zéros de  $X$ , supposés isolés<sup>3</sup>. Hors de ce voisinage, l'application  $Y$  envoie  $M$  dans  $U_M$  et vérifie  $p_M \circ Y = \text{Id}$ .

On a d'après le lemme précédent et la propriété  $p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$  l'égalité

---

<sup>3</sup>Par « petit disque » on entend l'image d'un petit disque par une carte. Les disques sont supposés assez petits pour ne pas s'intersecter.

$$p_M^*(K\sigma_M) = p_M^*\nu^*\alpha_2 = F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = F_\nu^*(dT_2) = d(F_\nu^*(T_2))$$

Donc on a en utilisant  $p_M \circ Y = Id_M$

$$\int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} K(x)\sigma = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*p_M^*\nu^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*dT_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} d(Y^*F_\nu^*T_2)$$

d'après le Lemme 10.8

On peut alors appliquer la formule de Stokes, ce qui nous donne

$$- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*T_2$$

Maintenant,  $F_\nu^*T_2(u, v) = \det(\nu(x), h, v)$  et donc

$$Y^*F_\nu^*T_2(\xi) = \det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi)$$

Or, si  $p_{x,z}$  est la projection de l'orthogonal de  $\nu(z)$  à celui de  $\nu(x)$  on a

$$|p_{x,z}(w) - w|_{C^1} \leq \varepsilon|w|$$

si  $|x - z|$  est assez petit. On en déduit que si  $V(x) = \frac{p_{x,z}Y(x)}{|p_{x,z}Y(x)|}$

$$|V - Y|_{C^1} \leq \varepsilon$$

et donc

$$\det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi) - \det(\nu(z), V(x), dV(x)\xi)$$

tend vers 0 avec  $|x - z|$ .

On doit donc calculer pour chacun des lacets  $c(t)$  constituant le bord de  $\Omega_\varepsilon$  la quantité

$$\int_{S^1} \det(\nu(z), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t))dt$$

or  $\det(\nu(z), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t))$  où le déterminant est celui dans  $T_zS$ . Comme

$$\int_{S^1} \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \text{ind}(X, z)$$

on en déduit

**Lemme 10.9.** *Si  $c(t)$  est un chemin positivement orienté autour d'un unique zéro  $z$  de  $X$ , alors*

$$\int_{S^1} \det(\nu(c(t)), Y(c(t)), dY(c(t))\dot{c}(t))dt = 2\pi \text{ind}(X, z) + O(\varepsilon)$$

De ce qui précède on déduit, faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0

**Théorème 10.10** (Gauss-Bonnet-Poincaré-Hopf).

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x)\sigma = \sum_{X(z)=0} \text{ind}(X, z)$$

On notera que

-le terme de gauche ne dépend pas du choix d'un champ de vecteurs

-le terme de droite ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , puisque l'indice d'un champ de vecteurs en un zéro n'en dépend pas. Si  $\varphi$  est un difféomorphisme entre deux surfaces  $M_1, M_2$  il envoie les zéros de  $X$  sur  $M_1$  sur ceux de  $\varphi_*X$  sur  $M_2$ , et on aura

$$\sum_{X(z_1)=0} \text{ind}(X, z_1) = \sum_{(\varphi_*X)(z_2)=0} \text{ind}((\varphi_*X), z_2)$$

Il en résulte, les deux termes étant égaux, que ceux-ci ne dépendent ni du plongement ni du champ de vecteurs. Leur valeur commune ne dépend que de la surface. Si deux surfaces sont difféomorphes ce terme est invariant. Le terme de droite étant clairement entier, il en résulte que l'intégrale de la courbure est un multiple entier de  $2\pi$ . Ce résultat est remarquable, dans la mesure où la courbure elle-même n'est bien entendu pas un entier, et peut prendre, localement, des valeurs quelconques.

La valeur commune de ces termes est appelée caractéristique d'Euler, et notée  $\chi(S)$ . Elle vaut 2 pour la sphère (calculer la somme des indices du champ de vecteurs « Nord-Sud »), 0 pour un tore (trouver un champ de vecteurs sans zéro sur le tore), et  $2 - 2g$  pour une surface « à  $g$  trous ». On démontre, et on l'admettra ici, que toute surface orientable est difféomorphe à une et une seule surface à  $g$  trous. En d'autres termes le genre ou la caractéristique d'Euler permettent de classifier les surfaces à difféomorphisme près.

Nous répétons ce théorème en deux versions séparées :

**Proposition 10.11** (Théorème de Gauss-Bonnet). *La quantité*

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x)\sigma = \chi(M)$$

*est un nombre entier pair appelé caractéristique d'Euler de  $M$ .*

Le théorème de Gauss-Bonnet affirme que le nombre  $\chi(M)$  ne dépend que de la « topologie » de  $M$ . Par exemple une sphère « cabossée » aura même valeur de  $\chi(M)$  qu'une sphère ronde.

**Proposition 10.12** (Théorème de Poincaré-Hopf). *Si les zéros de  $X$  sont isolés*

$$\sum_{z|X(z)=0} \text{ind}(X, z) = \chi(M)$$

*Elle est égale à  $\chi(M)$ , qui ne dépend donc d'aucun choix. C'est un invariant ne dépendant que de la surface  $M$  à difféomorphisme près.*

**Corollaire 10.13.** *Une surface ayant un champ de vecteurs sans zéro a une caractéristique d'Euler nulle. En particulier, la seule surface orientable ayant un champ de vecteurs sans zéro est la surface de genre 0, le tore.*

*Remarque 2.2.* Le cas du flot irrationnel sur le tore, donné en coordonnées  $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$  par  $\varphi^t(\alpha, \beta) = (\alpha + t, \beta + t\theta)$  où  $\theta$  est irrationnel, et dont les trajectoires sont des courbes s'enroulant sans jamais se refermer sur le tore, montre que non seulement il existe sur le tore un champ de vecteurs sans zéro, mais qu'il en existe même sans orbites périodiques : l'analogie du théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas valable sur le tore.

Enfin la proposition suivante donne une autre méthode pour calculer la caractéristique d'Euler.

**Proposition 10.14.** *Soit  $v$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  et  $H_v$  la restriction à  $M$  de la fonction  $z \rightarrow \langle v, z \rangle$ . On suppose que les points critiques de  $H_v$  sont non-dégénérés, c'est à dire qu'en un tel point  $z$ , la forme quadratique  $d^2H_v(z)$  restreinte à  $T_zM$  est non dégénérée. Alors  $\chi(M)$  est égal au nombre de maxima et de minima de  $H_v$  moins le nombre des autres points critiques.*

*Démonstration.* Il y a deux démonstrations possibles et il est intéressant de les mentionner toutes les deux. D'une part le théorème de Poincaré-Hopf appliqué au gradient de  $H_v$  permet de démontrer immédiatement le résultat. L'autre démonstration que nous donnons ici fait le lien direct avec la courbure de Gauss.

En effet,  $\text{deg}(\nu)$  est aussi égal au nombre de préimages de  $v$  comptées avec multiplicité. Or  $\nu(p) = \pm v$  si et seulement si  $p$  est un point critique de  $H_v$  puisque cette dernière condition s'écrit, par le théorème des extrema liés,  $T_pM \subset \ker(H_v)$  soit  $\nu(p) = \lambda v$ .

Au voisinage d'un tel point,  $p = (x, y, z)$ , la surface est un graphe au dessus de  $z$  soit  $z = f(x, y)$ , et le plan tangent est donné par

$$T_pM = T_{(x,y,z)}M = \{(u, v, w) \mid w = u \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\}$$

d'où  $\nu(x, y, z)$  est proportionnel à

$$n(x, y, z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), -1 \right)$$

et

$$dn(x, y, z)(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\nu(x, y, z) = \lambda(x, y, z)n(x, y, z)$  avec  $\lambda(x, y, z) > 0$  on a

$$d\nu(x, y, z) = d\lambda(x, y, z)n(x, y, z) + \lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$$

et donc la projection de  $d\nu(x, y, z)$  sur l'espace tangent à la sphère (qui est orthogonal à  $n(x, y, z)$ ) est égal à la projection de  $\lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$  sur cet espace. Dans notre cas, cette projection est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix}$$

On a donc que le signe de  $\det(d\nu(x, y, z))$  est égal à celui de

$$\det(d^2 f(x, y))$$

On en déduit que  $\det(d\nu(x, y, z))$  est positif si la forme quadratique  $d^2 f(x, y)$  est définie, c'est-à-dire si  $(x, y)$  est un maximum ou un minimum local de  $H_v$  et négatif sinon. On a pour conclure

$$\begin{aligned} \deg(\nu) &= \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(d\nu(p)) = \\ &= \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(dn(p)) = \sum_{p=(x,y,z) \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(d^2 f(x, y)) \end{aligned}$$

□

*Remarques 2.1.* (A) La véritable portée du théorème de Gauss-Bonnet, s'obtient lorsqu'on calcule l'intégrale de  $K(x)$  sur un domaine de  $M$  bordé par une courbe. On montre que pour un domaine bordé par un triangle géodésique, la somme des angles du triangle diffère de  $\pi$  par l'intégrale de  $K(x)$  sur l'intérieur du triangle (cf. exercice). C'est le théorème originellement démontré par Gauss, qui remarqua que pour la sphère de rayon 1,  $K(x) = 1$  et donc la somme des angles d'un triangle diffère de  $\pi$  par l'aire du triangle. Il existe donc des géométries telles que la somme des angles d'un triangle ne vaut pas  $\pi$ , et se demanda en précurseur de l'astrophysique moderne, si la géométrie naturelle (i.e. celle pour laquelle les géodésiques sont des rayons lumineux) ne serait pas de ce type, plutôt qu'eulidienne. Le théorème que nous avons énoncé se déduit facilement de la version que nous citons en découpant la surface en triangles. On montre que la somme du nombre de triangles moins le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets vaut encore  $\chi(M)$ , quel que soit le découpage de  $M$  en triangles. Ces idées sont à la base de la topologie algébrique moderne et de nombreuses autres théories reliant des propriétés géométriques à des propriétés topologiques (i.e. invariantes par bijection continue) de ces objets.

(B) La topologie différentielle est l'étude des propriétés topologiques des variétés différentiable. Elle fut initiée par Riemann, puis par Poincaré. L'utilisation de formes

différentielles et la définition des groupes de cohomologie, autrefois appelés groupes de Betti est due à ces mêmes auteurs, mais sans utiliser la notion de formes différentielles. L'idée que la topologie de la variété puisse s'étudier en considérant les propriétés des formes différentielles est habituellement attribuée à Élie Cartan et Georges deRham, mais il semble que Vito Volterra ait joué un rôle de précurseur. Enfin l'analogie de la forme différentielle  $T_2$  sur l'espace des vecteurs tangents unitaires d'une variété orientable quelconque s'appelle la classe de Thom. Elle a été découverte par Thom en 1952 dans sa thèse. L'existence d'une telle classe vérifiant  $dT = p^*\alpha$  (ici  $\alpha$  est une forme fermée définie sur  $M$ , qui n'est plus liée à la courbure de Gauss) a de nombreuses conséquences.

### 3 Calcul différentiel de Lie

#### 3.1 Crochets de Lie

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs définis sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi^t$  et  $\psi^t$  leurs flots respectifs, supposés définis pour tout temps. Ces flots ne commutent généralement pas,  $\varphi^t \circ \psi^s \neq \psi^s \circ \varphi^t$ , comme on le voit sur l'exemple suivant :

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Alors  $\varphi^t(x, y) = (x+t, y)$  et  $\psi^s(x, y) = (x, y+sx^2)$  d'où  $\varphi^t \circ \psi^s(x, y) = (x+t, y+sx^2)$  tandis que  $\psi^s \circ \varphi^t(x, y) = (x+t, y+s(x+t)^2)$

On veut en général mesurer cette « non-commutativité » au premier ordre. Posons  $[X, Y] = \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) |_{t=0}$ . On appelle le champ de vecteurs  $[X, Y]$  le **crochet de Lie** de  $X$  et  $Y$ .

**Proposition 10.15** (Propriétés des crochets de Lie). .

- (A)  $[X, Y] = 0$  si et seulement si les flots de  $X$  et de  $Y$  commutent
- (B)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,  $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$  (antisymétrie et bilinéarité)
- (C)  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$  (identité de Jacobi)
- (D) Si  $X$  et  $Y$  sont tangents à une sous-variété  $V$ , alors  $[X, Y]$  l'est aussi.

*Démonstration.* <sup>4</sup>

Pour le premier point, supposons  $[X, Y] = 0$ , alors

---

<sup>4</sup>Toutes les étapes sont faciles si on sait dériver une fonction composée de plusieurs variables  $\frac{d}{dt}(F(t, g(t, x))) = (\frac{d}{dt}F)(t, g(t, x)) + \frac{d}{dx}F(t, g(t, x))\frac{d}{dt}g(t, x)$  et si on n'oublie pas que le flot  $\varphi^t(x)$  est en fait une fonction des deux variables  $(t, x)$ .

$$\frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\psi^{t+t_0})_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_* \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_*([X, Y]) = 0$$

Cela montre que  $(\psi^t)_*(X)$  est indépendant de  $t$ , donc égal à  $Y$ . L'égalité de leurs flots s'écrit  $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$  ce qui signifie que les flots de  $X$  et  $Y$  commutent. Inversement si  $X$  et  $Y$  commutent,  $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$ , et l'égalité des générateurs infinitésimaux de ces flots s'écrit  $(\psi^t)_*(X) = Y$ . Il est alors clair que  $[X, Y] = 0$ .

Montrons maintenant le deuxième point.

Tout d'abord, en utilisant  $\psi^0 = Id$  et  $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = Id$  on obtient

$$\frac{d}{ds}(\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})(x) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t}) \Big|_{s=0} \varphi^0 - d(\psi^t \circ \varphi^0 \circ \psi^{-t}) \left( \frac{d}{ds} \varphi^s \right) \Big|_{s=0} = (\psi^t)_*(X) - X$$

et en prenant la dérivée par rapport à  $t$

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})(x) \Big|_{s=0, t=0}$$

Par symétrie, et parce que les dérivations en  $s$  et  $t$  commutent, on peut écrire

$$[Y, X] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (\varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s} \circ \psi^{-t})(x) \Big|_{s=0, t=0}$$

Comme  $\varphi^s \circ \psi^t \circ \varphi^{-s} \circ \psi^{-t} = (\psi^t \circ \varphi^s \circ \psi^{-t} \circ \varphi^{-s})^{-1}$  et que si  $h_{s,t}$  est une famille de difféomorphismes telle que  $h_{0,0} = Id$ , on a

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}^{-1}) \Big|_{s=t=0} = -h_{0,0}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \right) h_{0,0}^{-1} = - \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} (h_{s,t}) \Big|_{s=t=0} \text{ on en déduit que } [Y, X] = -[X, Y].$$

Puisque  $(\psi^t)_*$  est linéaire, sa dérivée par rapport à  $t$  l'est aussi, d'où  $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ .

L'identité de Jacobi résulte de l'exercice (B).

Enfin, supposons que  $X$  et  $Y$  soient tangents à  $V$ . Alors,  $\psi^t$  préserve  $V$ , et donc  $d\psi^t$  envoie l'espace tangent à  $V$  en  $x$  sur l'espace tangent à  $V$  en  $\psi^t(x)$ . Puisque  $X$  est partout tangent à  $V$ ,  $(\psi^t)_*(X)(x)$  est une courbe de l'espace tangent à  $V$  en  $x$ , et donc la dérivée de ce chemin est encore contenue dans cet espace tangent.  $\square$

*Remarque 3.1.* Il ne suffit pas que  $X$  et  $Y$  soient tangents à  $V$  en  $x_0$  pour que  $[X, Y]$  le soit. Plus généralement,  $[X, Y](x_0)$  **ne dépend pas seulement** des valeurs de  $X$  et  $Y$  en  $x_0$  mais aussi de leurs dérivées (comme cela résultera clairement de la proposition 10.16). Par exemple, si on note par abus de langage les champs de vecteurs constants égaux au

vecteur de base  $e_i$ , par  $e_i$ , on a  $[e_3, x_3e_2] = e_2$ , pourtant les champs  $e_3$  et  $x_3e_2$  sont tangents en 0 à  $\{x_2 = x_3 = 0\}$  mais ce n'est pas le cas de leur crochet,  $e_2$ .

Par contre, si  $X$  et  $Y$  sont tangents à  $V$  au voisinage de  $x$ , alors  $[X, Y](x)$  est tangent à  $V$  en  $x$ .

La proposition suivante permet le calcul aisé des crochets de Lie, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer des flots.

**Proposition 10.16** (Calcul des crochets de Lie). *On a*

(A) *Si  $f$  est une fonction  $C^\infty$*

$$[X, f \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) + (df(x)X(x))Y(x)$$

(B)

$$[X, Y] = dY(x)X(x) - dX(x)Y(x)$$

**Démonstration :** La première égalité équivaut à montrer que

$$[f \cdot X, \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) - (df(x)Y(x))X(x)$$

En effet,  $(\psi^t)_*(f \cdot X) = f(\psi^{-t}(x))(\psi^t)_*(X)$  donc en dérivant par rapport à  $t$ , et utilisant que  $\frac{d}{dt}f(\psi^t(x))|_{t=0} = -df(x)Y(x)$  l'identité en résulte.

Pour la deuxième formule, si elle est vraie pour  $X$  et  $Y$  elle le sera pour  $X$  et  $f \cdot Y$  car le terme de gauche devient

$$df(X)Y + f \cdot [X, Y] = df(X)Y + f(dY(X) - dX(Y)) = d(f \cdot Y)X - dX(f \cdot Y)$$

Par antisymétrie on peut aussi remplacer  $X$  par  $g \cdot X$  et enfin par bilinéarité des deux termes, il suffit de le vérifier pour  $X$  et  $Y$  champs de vecteurs constants, car tout champ de vecteurs est combinaison linéaire à coefficients  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , des vecteurs de base  $e_i$ .

Or  $[e_i, e_j] = 0$  car les flots des champs de vecteurs constants commutent, et comme  $de_i = 0$ , l'égalité est évidente dans ce cas.  $\square$

**Exercice 3.1 (Exercice corrigé).** Démontrer la proposition directement, en utilisant la définition de  $[X, Y]$  et le fait que  $L(t, x) = d\psi^t(x)$  et que l'application

$$L : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{L}(T_x M, T_{\varphi^t(x)} M)$$

vérifie

$\frac{d}{dt}L(t, x) = dY(\psi^t(x))L(t, x)$ , comme on le voit en différenciant par rapport à  $x$  la relation  $\frac{d}{dt}\psi^t(x) = Y(\psi^t(x))$ .

En effet,  $(\psi^t)_*X(x) = L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi^t)_*X(x) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(L(t, x)) \Big|_{t=0} X(x) + dL(t, x) \frac{d}{dt}\psi^{-t}(x) \Big|_{t=0} X(x) + L(t, x) \frac{d}{dt}X(\psi^{-t}(x)) \Big|_{t=0} = \\ &= dY(x)X(x) - dL(0, x)(Y(x), X(x)) - dX(x)Y(x) \end{aligned}$$

Comme  $L(0, x) = Id$ , on a  $dL(0, x) = 0$  et le deuxième terme est nul, ce qui conduit à la formule annoncée

*Exemple 3.1.* (A) Soit  $GL(n, \mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathbb{R}^n$ . C'est un ouvert de l'ensemble des matrices, qui forment un espace vectoriel de dimension  $n^2$ . L'espace tangent à  $GL(n)$  est donc égal à  $M(n, \mathbb{R})$ .

Il existe alors des champs de vecteurs particuliers sur  $GL(n, \mathbb{R})$ , appelés invariants à gauche, donnés par  $X_A(M) = MA$  où  $A$  est une matrice fixée<sup>5</sup>, et ces champs engendrent sur  $C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$  tous les champs de vecteurs<sup>6</sup> sur  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Quel est alors le crochet  $[X_A, X_B]$  ?

En utilisant le calcul ci-dessus,  $dX_A(M)(H) = MHA$ , et donc

$[X_A, X_B] = dX_B(X_A)(M) - dX_A(X_B)(M) = M(AB - BA) = X_{AB-BA}(M)$  On pose alors  $[A, B] = AB - BA$

Exercice : Faire le calcul en utilisant le flot de  $X_A$

Le flot est donné par  $\frac{d}{dt}M(t) = X_A(M(t)) = M(t)A$  dont la solution est d'après le chapitre 3,  $M(t) = M(0)e^{tA}$ .

Les flots de  $X_A$  et  $X_B$  commutent si et seulement si  $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ . Or il résulte des propriétés du crochet de Lie, que cela ne peut arriver pour tout  $t$  que si  $A$  et  $B$  commutent.

(B) Soit  $SO(n)$  le groupe des rotations de  $\mathbb{R}^n$ , identifié aux matrices carrées de  $GL(n, \mathbb{R})$  telles que  $MM^* = I$  et  $\det(M) > 0$

L'espace tangent en  $M$  s'obtient en dérivant l'équation  $MM^* = I$  (prescrire le signe de  $\det(M)$  ne sert qu'à se limiter à la composante connexe des isométries préservant l'orientation), et est donné par l'équation  $MA^* + AM^* = 0$ . Ce sont donc les matrices telles que  $M^{-1}A$  soit antisymétrique.

Un champ de vecteurs sur  $SO(n)$  peut donc s'identifier à une application de  $SO(n)$  dans l'ensemble des matrices antisymétriques : on associe à  $A(M)$ , la matrice antisymétrique  $M^{-1}A(M)$ . Les champs de vecteurs invariants à gauche sont ceux pour lesquels cette matrice est constante, sont ceux de la forme  $A(M) = MA = X_A(M)$ , où  $X_A$  a été défini dans l'exemple précédent.

<sup>5</sup>La terminologie « invariant à gauche » vient de ce qu'ils vérifient  $X_A(UM) = UX_A(M)$ .

<sup>6</sup>On fera attention à ne pas confondre combinaisons linéaires sur  $C^\infty(M)$  et sur  $\mathbb{R}$ .

Parmi les champs de vecteurs  $X_A$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  invariants à gauche, ceux tangents à  $SO(n)$  sont ceux correspondant à une matrice  $A$  antisymétrique. Et clairement tout champ de vecteurs sur  $SO(n)$  est combinaison linéaire de ceux-ci.

Quel est alors le crochet de  $X_A$  et  $X_B$  ? En remarquant que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs ne dépend pas de la sous-variété sur laquelle on le considère, donc on a encore  $[X_A, X_B] = X_{BA-AB}$ . On vérifie que si  $A$  et  $B$  sont antisymétriques,  $BA - AB$  l'est aussi !

- (C) En particulier si  $n = 3$ , les matrices antisymétriques forment un espace de dimension 3. Le produit vectoriel identifie ces espaces :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \\ v &\longrightarrow L_v \end{aligned}$$

où  $L_v(x) = v \wedge x$ . L'application  $L_v$  est bien linéaire et antisymétrique, et de plus on vérifie que  $L_v L_w - L_w L_v = L_{v \wedge w}$  (il suffit de le vérifier si  $v, w$  sont colinéaires, où sur les vecteurs  $v, w, v \wedge w$ ).

On a ainsi identifié les champs de vecteurs tangents à  $SO(3)$  aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $R(t)$  est un chemin dans  $SO(3)$ , on a alors  $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$  et  $\Omega(t) = L_{\omega(t)}$ . Le vecteur  $\omega(t)$  est porté par l'axe instantané de rotation et sa norme est la vitesse instantanée de rotation autour de cet axe.

On renvoie au chapitre sur les théorèmes de Frobenius et Chow, pour des applications de crochets de Lie.

### 3.2 Dérivée de Lie

L'idée de dériver un objet le long d'un flot peut s'appliquer à autre chose qu'un champ de vecteurs.

**Définition 10.17.** Soit  $\alpha$  une forme différentielle, et  $X$  un champ de vecteurs. On note  $L_X \alpha$  la forme différentielle de même degré donnée par

$$L_X \alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \alpha |_{t=0}$$

*Exemple 3.2.* (A) Si  $f$  est une fonction,  $(\varphi^t)^* f(x) = f(\varphi^t(x))$  et donc

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* f(x) |_{t=0} = \frac{d}{dt}(f(\varphi^t(x))) |_{t=0} = df(x)X(x)$$

*Remarques 3.1.* (A)  $L_X$  commute à  $d$  car  $(\varphi^t)^* d\alpha = d(\varphi^t)^* \alpha$  et  $\frac{d}{dt}$  et  $d$  commutent donc,

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* d\alpha |_{t=0} = \frac{d}{dt}d(\varphi^t)^* \alpha |_{t=0} = d \frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \alpha |_{t=0} = dL_X \alpha$$

Donc

$$(1) \quad L_X \circ d = d \circ L_X$$

(B) On a de plus

$$(2) \quad L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$$

En effet

$$(\varphi^t)^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^t)^*\alpha \wedge (\varphi^t)^*\beta$$

donc par multilinéarité de la dérivation

$$\frac{d}{dt} [(\varphi^t)^*\alpha \wedge (\varphi^t)^*\beta] = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\alpha|_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\beta|_{t=0}$$

De ce qui précède, on voit qu'il suffit pour calculer  $L_X\alpha$  de décomposer  $\alpha$  en somme de produits de formes de degré 1. Chaque forme de degré 1 est elle-même somme de termes de la forme  $fdg$ . Or  $L_X(fdg)(x) = df(x)X(x)dg(x) + fd(L_Xg) = X \cdot fdg + fd(X \cdot g)$  où on note  $X \cdot f(x) = df(x)X(x)$

La proposition suivante joue un rôle fondamental en topologie algébrique :

**Proposition 10.18.**

$$L_X = di_X + i_Xd$$

où  $i_X$  est l'application linéaire des formes de degré  $p+1$  vers celles de degré  $p$  donnée par

$$(i_X\alpha)(x)(X_1, \dots, X_p) = \alpha(X, X_1, \dots, X_p)$$

*Démonstration.* Montrons que le terme de droite vérifie aussi les propriétés (1) et (2). En effet, il est facile de vérifier que  $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta$ . Donc

$$\begin{aligned} (di_X + i_Xd)(\alpha \wedge \beta) &= d(i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta) + i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta) = \\ &= (di_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(i_X\alpha)} i_X\alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg \alpha} d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha di_X\beta + \\ &+ (i_Xd\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(d\alpha)} d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{\deg \alpha} i_X\alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha i_Xd\beta \end{aligned}$$

Comme  $\deg(d\alpha)$  et  $\deg(i_X\alpha)$  ont le même parité qui est toujours différente de celle de  $\deg(\alpha)$  on voit aisément que la somme ci-dessus se réduit à

$$(di_X + i_Xd)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (di_X + i_Xd)\beta$$

Pour ce qui est de (1), on a

$$d(di_X + i_Xd) = d^2i_X + di_Xd = di_Xd$$

alors que

$$(di_X + i_Xd)d = di_Xd + i_Xd^2 = di_Xd$$

Maintenant, deux opérateurs vérifiant (1) et (2), et qui coïncident sur les fonctions sont égaux en vertu de la remarque précédant l'énoncé de la proposition.

□

La formule ci-dessus se généralise aisément au cas suivant : soit  $r_t : M \longrightarrow M$  une famille lisse d'applications  $C^\infty$ . On pose  $X(t_0, x) = \frac{d}{dt}r_t(x) \big|_{t=t_0}$ . Alors

$$\frac{d}{dt}r_t^*\alpha \big|_{t=t_0} = r_{t_0}^*(di_X\alpha + i_Xd\alpha)$$

Le lemme de Poincaré en découle aisément :

**Proposition 10.19.** *Soit  $U$  un domaine tel qu'il existe un point  $x_0$  de  $U$  et une famille continue d'applications  $C^\infty$  telle que  $r_0 = \text{Id}$  et  $r_1$  est constante égale à  $x_0$ . Alors toute forme fermée sur  $U$  de degré non nul est exacte.*

*Démonstration.* On va supposer que la famille  $r_t$  est en fait lisse, le cas général se traitant par approximation. Comme  $dr_1$  est nulle,  $r_1^*\alpha = 0$  dès que  $\alpha$  est de degré non nul.

Or

$$\alpha = r_0^*\alpha = r_0^*\alpha - r_1^*\alpha = - \int_0^1 \frac{d}{dt}r_t^*\alpha \big|_{t=s} ds = - \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha + i_Xd\alpha)ds$$

Puisque  $\alpha$  est fermée le second terme s'annule et il nous reste

$$- \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha)ds = d \left( \int_0^1 -r_s^*(di_X\alpha)ds \right)$$

On a donc trouvé une forme  $\beta = - \int_0^1 r_s^*(di_X\alpha)ds$  telle que  $d\beta = \alpha$ . □

*Remarque 3.2.* La plupart des résultats topologiques obtenus ne nécessitent pas la lissité des fonctions. Ce sont des résultats d'approximation des fonctions  $C^0$  par des fonctions lisses, qui permettent de se débarrasser de ces hypothèses ; Par exemple dans Brouwer, s'il existe une application continue de  $B$  dans elle-même sans point fixe, on peut trouver une application  $C^\infty$  ayant la même propriété. De même dans le lemme de Poincaré, l'existence d'une famille  $r_t$  continue entraîne qu'il existe une famille lisse ayant les mêmes propriétés.

## 4 Exercices

### Topologie et géométrie différentielle

- (A) Soit  $M, N$  deux variétés orientables de même dimension mais non compactes. Montrer que l'on peut construire une théorie du degré pour les applications **propres** de  $M$  dans  $N$ .
- (B) Soit  $M$  est une variété compacte orientable et  $P$  une variété compacte orientable de bord  $M$ . Montrer que si l'application  $f : M \longrightarrow N$  s'étend à  $P$ , alors  $\text{deg}(f) = 0$ .
- (C) Montrer qu'une application qui renverse l'orientation ne peut être homotope à l'identité.

- (D) Étendre la formule de Gauss-Bonnet-Poincaré-Hopf au cas d'hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$  c'est-à-dire pour des sous-variétés de dimension  $n$ . On remplacera  $T_2$  par la  $n-1$  forme  $T_{n-1}$  donnée par  $\det(x, h, v_1, \dots, v_{n-2})$  sur l'espace tangent unitaire à  $S^{n-1}$
- (E) Montrer que si  $f_0$  et  $f_1$  sont deux applications homotopes de  $M$  dans  $N$  (de dimensions respectives,  $m$  et  $n$ ), il existe une application linéaire  $K : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  telle que  $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = dK(\alpha) + Kd\alpha$ .
- (a) Commencer par le cas  $j_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$  donnée par  $j_t(x) = (x, t)$ . On note  $X$  le champ de vecteurs sur  $M \times \mathbb{R}$  donné par  $\frac{\partial}{\partial t}$  de flot  $\varphi^s(x, t) = (x, t + s)$ , et, utilisant le fait que  $j_t = \phi^t \circ j_0$  on utilise la formule de Lie-Cartan (proposition 10.18)

$$\begin{aligned} (\varphi^1)^*(\alpha) - (\varphi^0)^*(\alpha) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (\varphi^s)^*(\alpha) ds = \int_0^1 (\varphi^s)^*(L_X \alpha) ds = \\ &= \int_0^1 (\varphi^s)^*(di_X + i_X d\alpha) ds = d \left( \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X \alpha) ds \right) + \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(d\alpha)) ds \end{aligned}$$

On pose alors  $K\alpha = \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(\alpha)) ds$

- (b) Traiter le cas général
- (c) En déduire que si  $\alpha$  est fermée,  $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha)$  est exacte, et en particulier son intégrale sur toute sous-variété est nulle.
- (F) Montrer que pour une surface dans  $\mathbb{R}^3$ , il existe toujours un point où  $K(x) > 0$ . Plus précisément montrer que si  $S$  est contenue dans une sphère de rayon  $R$ , il existe un point où la courbure vérifie  $K(x) > 1/R$ . Indication : On pourra chercher le point à distance maximale de l'origine.
- La formule de Gauss-Bonnet n'est donc pas la seule contrainte que doit satisfaire une fonction  $K(x)$  pour être la courbure de Gauss d'un plongement de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- (G) Montrer que si une variété est de dimension impaire,  $\chi(M) = 0$ . On pourra montrer que  $\text{ind}(-X, z) = -\text{ind}(X, z)$  et appliquer la formule de Poincaré-Hopf.
- (H) On considère une courbe  $\gamma(t)$  de classe  $C^\infty$ . On peut reparamétriser la courbe afin que  $\dot{\gamma}(t)$  soit de norme un. On appelle alors courbure de la courbe la quantité  $|\ddot{\gamma}(t)|$ . Si la courbe est tracée sur la surface  $S$ , la projection de  $\ddot{\gamma}(t)$  sur l'espace tangent à  $S$  en  $\gamma(t)$  est orthogonal à  $\dot{\gamma}(t)$ . On appelle courbure géodésique la coordonnée de  $\ddot{\gamma}(t)$  le long du vecteur  $\nu \wedge \dot{\gamma}(t)$  contenu dans  $T_x S$  et orthogonal direct de  $\dot{\gamma}(t)$ . On la note  $k_g(t)$ .

- (a) Montrer que

$$k_g(t) = \det(\nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))$$

- (b) (Gauss-Bonnet, cas à bord)

- i. Reprendre la démonstration de Gauss-Bonnet pour montrer que si  $\gamma$  est une courbe fermée telle que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$ , bordant un domaine  $U$  contenu dans  $S$  on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x)\sigma = \int_0^1 k_g(t)dt + \chi(U)$$

où  $\chi(U)$  est la somme des indices des zéros contenus dans  $U$  d'un champ de vecteurs tangent à  $S$  et à  $\partial U$  (i.e. on pourra supposer  $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ ).

- ii. Montrer que si  $\gamma$  possède des coins, i.e. est  $C^\infty$  par morceaux, et sa dérivée ayant des discontinuités en  $\tau \in \{t_1, \dots, t_k\}$  avec  $\alpha_\tau = \text{angle}(\lim_{t \rightarrow \tau^+} \dot{\gamma}(t) - \lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{\gamma}(t))$ <sup>7</sup>

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x)\sigma = \int_0^1 k_g(t)dt + \sum_{j=1}^n \alpha_j + \chi(U)$$

où on note  $\alpha_j = \alpha_{t_j}$ .

- iii. En déduire que pour un triangle  $T$  dont les côtés ont une courbure géodésique nulle, et dont les angles sont  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , on a

$$\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \int_T K(x)\sigma$$

- (I) (Géodésiques) Soit  $\gamma$  une courbe tracée sur une surface  $S$ . On suppose  $\dot{\gamma}(t)$  de norme un, et on note  $k_g(t)b(t)$  la projection de  $\ddot{\gamma}(t)$  sur l'orthogonal au vecteur tangent à la courbe dans le plan tangent à  $S$ .

On appelle énergie de  $\gamma$  la quantité

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$$

Montrer que si  $X$  est un champ de vecteurs tangent à  $S$  et s'annulant en  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ , et de flot  $\varphi^t$ ,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \varphi^s(\gamma(t)) \right|^2 dt = \int_0^1 \langle k_g(t)b(t), X(\gamma(t)) \rangle dt$$

En déduire que si  $\gamma$  minimise  $E(\gamma)$  parmi les courbes à extrémités fixées, on a  $k_g = 0$ .

- (J) (a) Montrer que si  $v$  est un vecteur unitaire tangent à  $S$  en  $x_0$ , l'équation

$$\dot{\gamma}(0) = v, \gamma(t) \in S, \ddot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S^\perp$$

possède une solution définie sur  $[0, \varepsilon]$ , avec  $\varepsilon$  indépendant de  $v$ .

- (b) Montrer que l'application qui à  $v$  associe  $\gamma(t)$  définie pour  $|t| \leq \varepsilon$  et notée  $\exp(tv)$  est telle que  $D \exp(0) = Id$ . En déduire que si  $x, y$  sont deux points suffisamment proches, on a une unique courbe  $\gamma(t)$  reliant  $x$  à  $y$  et de longueur minimale (parmi toutes les courbes reliant  $x$  à  $y$ ).

---

<sup>7</sup>les dérivées à droite et à gauche étant supposées non nulles.

(K) Soit  $M^n$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^q$ . On considère le voisinage tubulaire de  $M$

$$M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^q \mid \exists z \in M, |x - z| \leq \varepsilon\}$$

(a) Montrer que pour  $\varepsilon$  assez petit  $M_\varepsilon$  est une sous-variété à bord de dimension  $q$  et que

$$M_\varepsilon = \{z + u \mid z \in M, u \in (T_z M)^\perp, |u| \leq \varepsilon\}$$

(b) Montrer que  $\chi(M)$  -défini comme la somme des indices des zéros d'un champ de vecteur sur  $M$ - coïncide avec  $\chi(M_\varepsilon)$  somme des indices d'un champ de vecteurs sur  $M_\varepsilon$  sortant sur  $\partial M_\varepsilon$ .

(c) Montrer que si  $\nu : \partial M_\varepsilon \rightarrow S^{q-1}$  est l'application qui a un point de  $\partial M_\varepsilon$  associe sa normale extérieure, on a  $\chi(M) = \deg(\nu)$ .

(d) On pose  $K(z, u)\sigma_{M_\varepsilon} = \nu^*(\alpha_{q-1})$  où  $\sigma_M$  est la forme volume sur  $\partial M_\varepsilon$ . Montrer que

$$\int_{\partial M_\varepsilon} K(z, u)\sigma_{M_\varepsilon} = \chi(M)$$

(e) Montrer que si on pose

$$K(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{q-n-1}} \int_{S^{q-n-1}(\varepsilon)} K(z, u) du$$

la limite est bien définie et on a

$$\int_M K(x)\sigma_M = \chi(M)$$

Bien entendu notre définition contient la normalisation de la courbure

(L) (**Teorema Egregium de Gauss**) On appelle métrique Riemannienne sur une sous-variété  $M$  la donnée en chaque point de  $T_x M$  d'une forme quadratique dont les coefficients varient de manière  $C^\infty$  avec  $x$ . La norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  induit sur toute surface une métrique Riemannienne. Dédurre des deux exercices précédents que  $K(x)$  ne dépend que de la métrique induite par  $\mathbb{R}^3$  et non du plongement. En d'autres termes, s'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  entre deux surfaces plongées,  $S_1, S_2$ , préservant la métrique, c'est-à-dire tel que

$$\langle h_2, h_1 \rangle = \langle d\varphi(x)h_2, d\varphi(x)h_1 \rangle$$

Alors  $K_2(\varphi(x)) = K_1(x)$ .

(M) (**Théorème de Smale**)

Dans tout le problème, on dira qu'un espace topologique  $X$  est contractile sur  $x_0 \in X$  s'il existe une famille continue d'applications  $h_s : X \rightarrow X$ ,  $s \in [0, 1]$  telles que

(a)  $h_0 = Id_X$

(b)  $\forall x \in X, h_1(x) = x_0$

(c)  $\forall s \in [0, 1], h_s(x_0) = x_0$

On dit que  $h_s$  est l'homotopie réalisant la déformation de  $X$  sur  $x_0$ .

Enfin une application  $\varphi : f \mapsto g$  de l'espace des fonctions  $C^\infty$  dans lui-même est continue si et seulement si les dérivées partielles de  $\varphi(f)$  dépendent continûment de celles de  $f$  (pas nécessairement au même ordre). Par exemple la restriction d'une application continue pour toutes les topologies  $C^k$  ( $\forall k \geq 1$ ) et l'application  $f \mapsto df$  sont continues en topologie  $C^\infty$ .

Le but de ce problème est de montrer que l'espace

$$D = \{f \in C^\infty(I^2, I^2) \mid f \text{ est un difféo et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^2 - \{1\} \times [0, 1]\}$$

est contractile.

I. Espace d'applications à valeurs dans  $S^1$  (une autre démonstration du théorème de relèvement dans le cas  $C^\infty$ ).

Soit  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$ , on définit  $\partial I = \{0, 1\}$ ,  $\partial I^2 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$ . On dira qu'une application définie sur  $I^2$  est  $C^\infty$  si elle a des dérivées partielles à tous les ordres, continues sur  $I^2$ . Soit  $f$  une application  $C^\infty$  de  $I^2$  à valeurs dans  $S^1$ . On se propose de montrer que  $F = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(0, 0) = 1\}$  est contractile sur  $f_0 \equiv 1$ . On pose

$$\xi_1(x_1, x_2, \theta) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)), \quad \xi_2(x_1, x_2, \theta) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2))$$

- (a) Montrer que les trajectoires de  $\xi_1$  partant de  $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$  sont données par l'équation  $t \mapsto (x_1 + t, x_2, f(x_1 + t, x_2))$ , tant que  $t + x_1 \in [0, 1]$ . De même la trajectoire de  $\xi_2$  est donnée par  $t \mapsto (x_1, x_2 + t, f(x_1, x_2 + t))$ .
- (b) Soit  $p$  la projection de  $R$  sur  $S^1$  donnée par  $p(u) = \exp(iu)$ , et  $\pi$  la projection de  $I^2 \times R$  sur  $I^2 \times S^1$  donnée par  $id_{I^2} \times p$ . Calculer  $d\pi$ , et montrer qu'il existe deux champs de vecteurs  $\tilde{\xi}_1$  et  $\tilde{\xi}_2$  sur  $I^2 \times R$  tels que  $d\pi(z)\tilde{\xi}_j(z) = \xi_j(\pi(z))$  pour  $j = 1, 2$ .
- (c) Montrer que  $[\xi_j, \xi_k] = 0$  et en déduire que  $[\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_k] = 0$ .
- (d) Montrer en utilisant les champs de vecteur construits ci-dessus que l'on peut construire  $\tilde{f} : I^2 \rightarrow R$  telle que  $p \circ \tilde{f} = f$  et  $\tilde{f}(0, 0) = 0$ .
- (e) Montrer que  $f \mapsto \tilde{f}$  est continue pour la topologie  $C^\infty$ .
- (f) Montrer que

$$\tilde{F} = \{f \in C^\infty(I^2, R) \mid f(0, 0) = 0\}$$

est contractile sur  $\tilde{f}_0 \equiv 1$ . En déduire que  $F$  est contractile sur  $f_0$ .

- (g) Montrer de même que  $G = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(x, y) = 1 \text{ au voisinage de } \partial I^2\}$  est contractile en  $f_0$ .

II. Un théorème de S. Smale.

On se propose de montrer que

$$\mathcal{D}_k = \{f \in C^\infty(I^k, I^k) \mid f \text{ est un difféomorphisme, et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^k\}$$

est contractile en l'identité si  $k = 1, 2$ .

- (a) Montrer le résultat si
- $k = 1$
- .

On suppose dorénavant  $k = 2$ . On pose  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$ .

Notons que pour  $f \in \mathcal{D}$  on a tout de même  $f(\{1\} \times [0, 1]) = \{1\} \times [0, 1]$ . On note  $X_1$  le champ constant  $\frac{\partial}{\partial x}$ , et  $Z$  l'ensemble des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $I^2$  tels que

- i.  $X = X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  au voisinage de  $\partial I^2$
- ii.  $X$  n'a pas de zéro sur  $I^2$ .

- (b) Montrer que
- $Z$
- est contractile en
- $X_0$
- (on utilisera les coordonnées polaires pour se ramener à la question I.5).

Soit  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow Z$  l'application définie par  $\varphi(f)(x, y) = df(f^{-1}(x, y))X_0(x, y)$ .

- (c) Montrer que les trajectoires de  $\varphi(f)$  sont données par  $f([0, 1] \times \{y\})$ .
- (d) On note  $h_s$  l'homotopie obtenue en 2, et  $u \mapsto P_s(f)(u, x_0, y_0)$  le flot de  $h_s\varphi(f)$ , avec condition initiale  $P_s(f)(0, x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ . On pose  $Q_s(f)(x, y) = P_s(f)(x, 0, y)$ . Représenter sur un dessin l'application  $Q_s(f)$  (en fonction des trajectoires de  $X_s = h_s\varphi(f)$ ). Montrer que  $Q_s(x, y)$  (lorsqu'il est défini) a sa différentielle de rang maximal.
- (e) Montrer qu'une trajectoire de  $P_s(f)(u, 0, y_0)$  sort nécessairement de  $I^2$ , et que cela a lieu en un point de  $\{1\} \times [0, 1]$  (on pourra utiliser le corollaire de Poincaré-Bendixson N).
- (f) Soit  $\bar{u}(s, f, y)$  un instant où la trajectoire partant de  $(0, y)$  atteint  $\{1\} \times [0, 1]$ . Montrer que  $\bar{u}(s, f, y)$  est unique, et que  $(s, f, y) \mapsto \bar{u}(s, f, y)$  est  $C^\infty$  en  $(s, y)$  continue en  $f$  et strictement positive.
- (g) Montrer que  $Q_s$  est un difféomorphisme de son domaine de définition (que l'on déterminera) sur  $I^2$ .

On pose  $g(f) = \min\{\frac{\bar{u}(s, f, y)}{1 - \bar{u}(s, f, y)}, 1 \mid s, x \in I, \bar{u} < 1\}$ . On admettra que si  $g$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{D}$  et partout strictement positive il existe alors  $\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  continue telle que  $0 < \eta < g$  et  $\gamma : \mathcal{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$  telle que  $t \mapsto \gamma(f, t)$  soit  $C^\infty$  et vérifie  $\frac{d\gamma}{dt} < 1 + \eta(f)$ , et  $\gamma(f, 0) = 0$ ,  $\gamma(f, 1) = 1$ .

- (h) On pose
- $H_s(f)(x, y) = Q_s(f)(x + \gamma(f, x)(\bar{u}(s, f, y) - 1), y)$
- . Montrer que
- $H_s$
- envoie
- $I^2$
- sur lui-même. En écrivant
- $H_s$
- comme la composée de deux applications, montrer que c'est un élément de
- $\mathcal{D}$
- . En conclure que
- $\mathcal{D}$
- est contractile en l'identité.

Pour d'autres conséquences de ce résultat, se référer à l'article de S. Smale « Diffeomorphisms of the 2-sphere », Proceedings of the A.M.S., vol 10 (1959) pp. 621-626. Pour le cas de  $\mathcal{D}_3$  voir J. Cerf « Sur  $\Gamma_4 = 0$  », Lectures notes in Math. Springer-Verlag. Enfin si  $k > 6$ ,  $\mathcal{D}_k$  n'est même plus connexe en général (cf. les travaux de J. Milnor).



# Chapitre 11

## Quelques propriétés des champs de sous-espaces

Il arrive souvent que des contraintes naturelles sur l'évolution d'un système s'expriment comme des contraintes infinitésimales, mais en nombre insuffisant pour déterminer cette évolution. C'est le cas de tous les systèmes « commandés », voitures, robots, etc... En général, nous pouvons faire évoluer un tel système à notre guise, pourvu de respecter certaines contraintes. Le cas le plus simple est celui d'une voiture : on peut la faire avancer ou reculer, et tourner le volant, mais le mouvement doit se faire dans la direction prescrite par les roues. De même, on peut agir sur un bras articulé, pourvu de respecter les contraintes de ses articulations.

Commençons par le cas le plus simple : celui du monocycle. Un modèle simplifié consiste à le repérer par la position de son centre de gravité dans le plan  $(x, y)$  et l'angle  $\theta$  entre la direction de la roue et celle de l'axe  $Ox$ . Le mouvement doit alors vérifier l'équation  $\sin(\theta)\dot{x} - \cos(\theta)\dot{y} = 0$ .

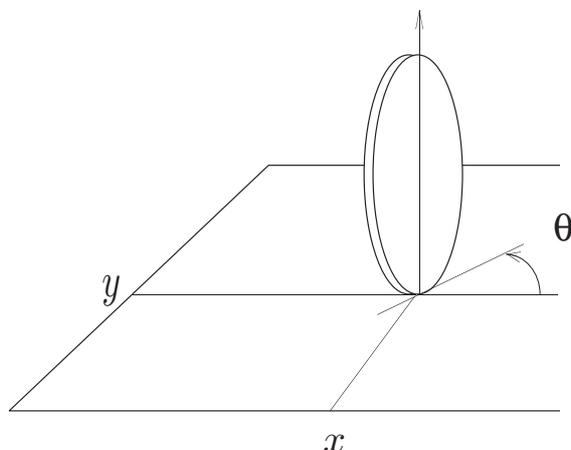


FIG. 11.1 – Monocycle et ses coordonnées (d'après le chapitre 4 de [Bellaïche-Jean-Risler])

Dit autrement, le vecteur vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$  est contenu dans le plan  $D(x, y, \theta) = \{(u, v, w) \mid \sin(\theta)u - \cos(\theta)v = 0\}$ . On dit alors que l'on a deux degrés de liberté, et on peut se demander quels sont les points de l'espace que l'on peut rejoindre à partir d'un point donné, en suivant un chemin qui reste partout tangent au plan  $D(x, y, \theta)$ .

On verra que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan et n'importe quelle direction de la roue, ce qui peut sembler surprenant, puisque l'espace a trois dimensions, alors que le mouvement est « limité à deux dimensions ».

La conduite d'une voiture est un problème analogue, ainsi que celui d'un semi-remorque. On a le même type de résultat, ce qui a pour conséquence théorique la possibilité de garer sa voiture. Les questions pratiques, que nous n'abordons pas ici (combien de manœuvres faut-il pour cela, quelle est la manœuvre optimale) sont encore l'objet de recherches actives.

## 1 Théorème de Frobenius

Soit  $M^n$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . Supposons donné en chaque point  $x \in M^n$  un sous-espace vectoriel,  $D(x)$  de  $T_x M$ .

On suppose, en un sens que l'on va préciser, que  $D(x)$  est  $C^\infty$  en  $x$ . On appelle la donnée de  $x \rightarrow D(x)$  un champ de sous-espaces<sup>1</sup>.

**Définition 11.1.** Le champ  $D$  est  $C^\infty$  s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

- (A) au voisinage de chaque point  $x$ ,  $D(x)$  est engendré par  $p$  champs de vecteurs  $C^\infty$  linéairement indépendants  $X_1, \dots, X_p$
- (B) au voisinage de chaque point  $x$ ,  $D(x)$  est définie par  $(n - p)$  formes différentielles (de degré 1), linéairement indépendantes en chaque point. En d'autres termes,

$$D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$$

On rappelle qu'une forme différentielle de degré un est la donnée en chaque point de  $x \in M$  d'une forme linéaire sur  $T_x M$ , dont les coefficients dépendent de manière  $C^\infty$  du point. On notera que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt conservant la propriété d'être  $C^\infty$ , on peut supposer que les  $X_i$  forment une famille orthonormée.

Pour montrer que (A) entraîne (B), considérons  $Y_1, \dots, Y_{n-p}$  complétant la famille  $(X_1, \dots, X_p)$  en une base de  $T_x M$ .

On peut encore supposer que  $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$  est orthonormée et  $C^\infty$ .

Alors  $\alpha_i(x).h = \langle Y_i(x), h \rangle$  est une forme différentielle  $C^\infty$  sur  $M$ . Ces formes sont linéairement indépendantes sur  $T_x M$  (car  $\langle Y_i(x), Y_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ ), et  $D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$ .

<sup>1</sup>Souvent appelé dans la littérature « distribution » terminologie que nous avons évitée.

Étant donné un tel champ, il est naturel de considérer les sous-variétés tangentes à  $D(x)$ .

**Définition 11.2.** Une sous-variété  $V$  de  $M$  est dite tangente à  $D$  si et seulement si

$$\forall x \in V, T_x V \subset D(x)$$

On dit que  $V$  est une sous-variété intégrale de  $D$  si

$$\forall x \in V, T_x V = D(x)$$

Outre les sous-variétés intégrales, on s'intéresse surtout au cas des courbes tangentes ( $\dim V = 1$ ).

Notons qu'il existe toujours des courbes tangentes à  $D$  : il suffit de prendre les trajectoires de champs de vecteurs  $X$  tels que  $X(x) \in D(x)$ . Par contre il n'existe pas toujours de sous-variété intégrales (sauf si  $\dim D(x) = 1!$ ). Si une telle sous-variété  $V$  existe, on voit aisément que toute courbe tangente à  $D$  rencontrant  $V$  est entièrement contenue dans  $V$ . En effet, comme dans la démonstration de la proposition 8.9, il suffit de démontrer que si  $\gamma(0) \in V$  alors  $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Or soient  $X_1(x), \dots, X_p(x)$  des champs de vecteurs formant une base de  $D(x)$ . On peut alors écrire de manière unique

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + \alpha_p(t)X_p(\gamma(t))$$

Posons  $X(t, x) = \alpha_1(t)X_1(x) + \dots + \alpha_p(t)X_p(x)$ , alors  $X$  vérifie les hypothèses de la Proposition 8.9, et donc, si  $\gamma(0) \in V$ ,  $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$ .

Étant donné un champ  $D$ , les questions suivantes se posent naturellement, et sont étroitement liées

- soit  $x \in M$ . Quels sont les points que l'on peut atteindre par des courbes tangentes à  $D$ ? En d'autres termes, décrire

$$\mathcal{A}_x = \{\gamma(1) \mid \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(t) \in D(\gamma(t)) \forall t \in [0, 1]\}$$

ensemble des points « accessibles » à partir de  $x$ .

- existe-t-il des sous-variétés intégrales pour  $D$ ?

- si  $y \in \mathcal{A}_x$ , décrire un chemin  $\gamma$  tangent à  $D$  reliant  $x$  à  $y$ ?

**Théorème 11.3 (Frobenius).** *Soit  $D$  un champ de sous-espaces. Pour chaque point de  $M$  passe une sous-variété intégrale si et seulement si quels que soient les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  tangents à  $D$ ,  $[X, Y]$  est aussi tangent à  $D$ .*

**Démonstration :** La nécessité est évidente d'après la proposition 8.9.

Pour l'existence, plaçons nous dans un ouvert assez petit, sur lequel  $D(x) = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$ . Traitons d'abord le cas simple où  $[X_i, X_j] = 0$ . Soit  $\varphi_t^j$  le flot de  $X_j$ , l'application

$$\begin{aligned} \psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_p) &\longrightarrow \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0) \end{aligned}$$

a pour image une sous-variété intégrale de  $D$ . En effet  $(\frac{\partial}{\partial t_j} \psi)(t_1, \dots, t_p) =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_{t_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^{t_p}(x_0)) &= \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_{t_j}^{t_j} \circ \varphi_{t_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^{t_p}(x_0)) \\ &= X_j(\varphi_{t_j}^{t_j} \circ \varphi_{t_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^{t_p}(x_0)) \end{aligned}$$

comme les  $X_j$  sont linéairement indépendants,  $d\psi(t_1, \dots, t_p)$  est injective et a son image dans  $D(\psi(t_1, \dots, t_p))$ , qui est donc une sous-variété tangente à  $D$ . Comme elle a même dimension que  $D$ , c'est une sous-variété intégrale.

Montrons que l'on peut ramener le cas général à ce cas. Comme  $X_1$  ne s'annule pas, d'après le théorème de redressement, on peut, quitte à restreindre  $U$  trouver un système de coordonnées où  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ .

En soustrayant à  $X_2$  un multiple de  $X_1$  il s'écrira comme combinaison linéaire de  $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  et en permutant les coordonnées, on peut supposer le coefficient de  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  non nul. Divisant par ce coefficient (ce qui oblige éventuellement à réduire encore  $U$ ), on peut supposer qu'en  $x_0$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j \geq 3} a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et ainsi de suite

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j \geq k+1} a_k^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

En retirant de  $X_2$  successivement des multiples de  $X_3, X_4, \dots, X_p$ , on obtient

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k \geq p+1} b_2^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et de même avec  $X_3, \dots, X_p$ .

Pour finir on a

$$X'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k \geq p+1} b_j^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On a toujours  $[X'_j, X'_\ell] \in \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$  et  $D(x) = \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$ . Mais  $[X'_j, X'_\ell] \in \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$  et vu que  $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle \cap \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle = \{0\}$  on a finalement  $[X'_i, X'_j] = 0$ . Comme les  $X'_i$  sont linéairement indépendants et tangents à  $D$ ,  $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle(x) = D(x)$ , et donc les  $X'_j$  commutent entre eux.  $\square$

Lorsque les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites, on dit que le champ de sous-espaces  $D$  est **intégrable**. L'ensemble d'accessibilité,  $\mathcal{A}_x$  est alors égal à la « sous-variété intégrale » passant par  $x$ . On appelle « feuilletage » la décomposition de  $M^n$  en réunion des  $\mathcal{A}_x$ , appelées « feuilles ».

## 2 Les théorèmes de Chow et Sussmann

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Frobenius ne sont pas vérifiées? À quoi ressemble alors l'ensemble  $\mathcal{A}_x$ ?

Un premier élément de réponse est donné par le

**Théorème 11.4** (Sussmann). *L'ensemble  $\mathcal{A}_x$  est l'image d'une variété par une immersion.*

**Démonstration :** On rappelle qu'une immersion est une application de différentielle injective. Être une sous-variété immergée est une propriété locale : il suffit de montrer que  $\mathcal{A}_x$  est réunion d'images d'ouverts par des immersions.

Soit  $E = L^1([0, 1], \mathbb{R}^p)$ , et si  $u = (u_1, \dots, u_p) \in E$  on note  $\gamma_u$  la solution de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= X_u(\gamma(t)) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + u_p(t)X_p(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= x \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow M \\ u &\mapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est différentiable en  $u$  est bien définie d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres (nous la calculerons ultérieurement) et de rang évidemment inférieur à la dimension de  $M$ .

Soit  $r$  le maximum du rang  $D\varphi(u)$  lorsque  $u$  parcourt  $E$ , et  $u_0$  un élément de  $E$  tel que  $D\varphi(u_0)$  soit de rang  $r$ .

On prétend qu'il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace de Banach  $F$ , et

$$\Psi : \mathcal{U} \rightarrow M$$

telle que

- 1)  $\forall v, \text{rang } D\Psi(v) = r$
- 2)  $\Psi(\mathcal{U}) = \varphi(E)$

En effet par semi-continuité inférieure du rang,  $\text{rang } D\varphi(u) = r$  pour  $u$  dans un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $u_0$ .

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des chemins  $u$  de  $[0, 1]$  dans  $E$ , de la forme :

$$\begin{cases} u(t) = u_1(3t) \text{ pour un } u_1 \in \mathcal{W}, t \in [0, \frac{1}{3}] \\ u(t) = u_2(2 - 3t) \text{ pour } u_2 \in \mathcal{W}, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ u(t) = v(3t - 2) \text{ pour } v \in E, t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

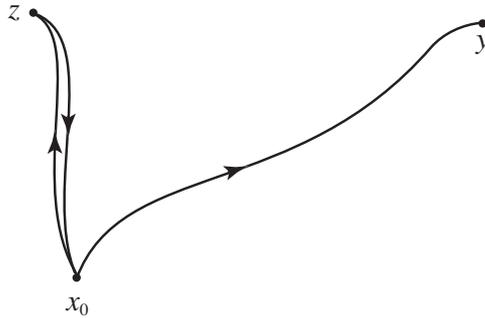


FIG. 11.2 – Démonstration du théorème de Sussmann

On note alors  $u = u_1 * u_2^{-1} * v$  et  $\Psi(u_1, u_2, v) = \varphi(u_1 * u_2^{-1} * v)$ .

On a bien que  $u \in E$ , et que  $\Psi(u_1 * u_1 * v) = \varphi(v)$ .

Montrons que  $D\Psi$  est surjective. Or  $\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u_1, u_1, v)$  calcule la variation de  $x(1)$  lorsque  $u_1$  varie, pour  $x$  solution de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_{u_1}(x(t))t \in [0, \frac{1}{3}] \\ &= -X_{u_2}(x(t))t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ &= X_v(x(t))t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{aligned}$$

Or lorsqu'on varie  $u_1$ , de  $\delta u_1$ ,

$$\begin{aligned} \delta x(\frac{1}{3}) &= D\varphi(u_1)\delta u_1, \\ x(\frac{2}{3}) &= \varphi_2^{-1}(x(\frac{1}{3})) \text{ donc } \delta x(\frac{2}{3}) = d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))\delta x(\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

où  $\varphi_1, \varphi_2, \psi$  sont les flots de  $X_{u_1}, X_{u_2}, X_v$  et  $x(1) = \psi(x(\frac{2}{3}))$  d'où

$$\delta x(1) = d\psi(x(\frac{2}{3}))d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))D\varphi(u_1)\delta u_1$$

Comme les flots sont des difféomorphismes, et que par hypothèse  $D\varphi(u_1)$  est de rang  $r$ , on voit que

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\varphi(u_1 * u_1^{-1} * v) = \frac{\partial}{\partial u_1}\psi(u_1, u_2, v)$$

est de rang  $r$ .

Nous pouvons maintenant conclure en utilisant le

**Théorème 11.5** (Théorème du rang constant). *Soient  $E$  un espace de Banach, et  $F$  un espace de dimension finie. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), telle que le rang de  $df(x)$  soit constant au voisinage de  $x_0$  et égal à  $p$ . Alors il existe  $g$  et  $h$  difféomorphismes locaux au voisinage de  $x_0$  et  $f(x_0)$  tels que, si  $\pi = df(0) : E \rightarrow F$ ,*

$$h \circ f \circ g : x \longmapsto \pi(x)$$

En particulier si  $U$  est un voisinage assez petit de  $x_0$  dans  $E$ ,  $f(U)$  est une sous-variété<sup>2</sup>.

**Corollaire 11.6.** *Si  $X$  est une sous-variété, et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue telle que pour tout  $x \in X$ , il existe  $\Omega$  voisinage de  $x$  dans  $X$ , et il existe  $U$  voisinage de  $0$  dans un espace de Banach  $E$ ,  $W$  voisinage de  $z$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow V$  tels que  $df(x)$  est de rang constant au voisinage de  $0$ ,  $f(0) = z$ , et  $f(U) = V \cap W$ . Alors  $\varphi(X)$  est une « sous-variété immergée ».*

*Démonstration du théorème du rang constant.* Pour simplifier on suppose  $x_0 = 0$  et  $f(x_0) = 0$ . Séparons les variables à la source et au but, afin que, écrivant

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in F_1 \oplus F_2$$

où  $(x, y) \in E_1 \oplus E_2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$  soit inversible.

Notons que l'on peut prendre  $E_2 = \ker df(0)$ , et pour  $E_1$  un supplémentaire de  $E_2$ , engendré par  $r$  vecteurs indépendants de  $E$  dont les images par  $df(0)$  engendrent l'image de  $df(x_0)$ . On prendra  $F_1 = \text{Im } df(0)$  et pour  $F_2$  un supplémentaire de  $F_1$ .

Alors par le théorème d'inversion locale,  $g : (x, y) \longmapsto (u(x, y), y)$  est un difféomorphisme, et  $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, w(x, y))$ . Mais  $(x, y) \longmapsto (x, w(x, y))$  est de rang  $r$  au voisinage de  $0$ , si et seulement si  $\frac{\partial w}{\partial y}$  est identiquement nulle au voisinage de  $0$ . On peut alors écrire  $w(x, y) = \rho(x)$ , et  $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, \rho(x))$ .

Le difféomorphisme local  $h : (u, v) \mapsto (u, v - \rho(u))$ , vérifie  $h \circ f \circ g^{-1}(x, y) = (x, 0)$  ce qui donne la réduction cherchée.

□

*Démonstration du Corollaire.*  $\Psi$  définit une topologie sur son image : celle dont les ouverts sont les images d'ouverts de  $X$ . Muni de cette topologie, on voit que chaque point possède un voisinage, pour cette topologie, qui est l'image d'un voisinage de  $x \in X$ . Mais  $\varphi(\Omega)$  est une sous-variété, d'après le théorème du rang constant.

□

---

<sup>2</sup>et si nous avons défini les sous-variétés d'un Banach, nous pourrions dire que  $f^{-1}(x) \cap U$  est aussi une sous-variété.

□

*Exercice 2.1.* Montrer que l'on peut remplacer  $L^1$  par  $C^0$  dans la démonstration ci-dessus.

*Remarque 2.1.* Dans le cas d'un champ de vecteurs, une orbite est « plus » que l'image d'une immersion. L'immersion est injective, même si ce n'est pas nécessairement une sous-variété. L'explication détaillée nécessiterait de définir la notion de variété immergée, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Par contre, on voit que pour une immersion,  $j$ , la condition suivante nous assure que l'image n'a pas de « croisements » :

si  $j(x) = j(y) = p$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et  $V$  de  $y$ ,  $U$ , un point  $z$  et un voisinage  $W$  de  $z$  tels que  $j(z) = p$  et  $j(U) \cup j(V) \subset j(W)$ .

Pour voir que  $\mathcal{A}_x$  vérifie cette condition, il suffit de montrer que si  $x \in \Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$  où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  sont deux ouverts, alors  $\Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$  est un voisinage de  $x$  dans  $\Psi(\mathcal{U})$ .

Or si  $u_0, u'_0$  sont les préimages de  $x$  dans  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$ , on peut considérer  $u'' = u * u^{-1} * u'$  qui a aussi pour image par  $\psi$  le point  $x$ . De plus l'image par  $\Psi$  d'un voisinage de  $u''$  contient à la fois  $\Psi(\mathcal{U})$  (image de  $v \mapsto v * u^{-1} * u'$  pour  $v$  voisin de  $u$ ) et  $\Psi(\mathcal{U}')$  (image de  $v' \mapsto u * u^{-1} * v'$  pour  $v'$  proche de  $u'$ ). Quitte à restreindre les voisinages  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$ , on voit que  $\Psi(\mathcal{U}) \cup \Psi(\mathcal{U}') \subset \Psi(\mathcal{U}'')$ .

Le théorème précédent nous permet de donner une condition suffisante pour que  $\mathcal{A}_x$  soit égal à l'espace tout entier.

**Théorème 11.7 (Chow).** *Si  $M$  est connexe et les crochets itérés  $[X_1, [X_2 \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$  de vecteurs tangents à  $D$  engendrent en chaque point tout l'espace, alors  $\mathcal{A}_x = M$ .*

**Démonstration.** D'après le théorème de Sussmann  $\mathcal{A}_x$  est une sous-variété immergée. Comme les vecteurs tangents à une sous-variété sont stables par crochets de Lie, que les  $X_i$  tangents à  $D$  sont évidemment tangents à  $\mathcal{A}_x$ , les crochets itérés sont tangents à  $\mathcal{A}_x$ . Il en résulte que l'espace tangent à  $\mathcal{A}_x$  en  $z$  est égal à  $T_z M$ . Comme la sous-variété est immergée, on en conclut que  $\mathcal{A}_x$  est ouverte dans  $M$ . Ce raisonnement montre que toutes les feuilles sont ouvertes, donc la réunion des feuilles distinctes de  $\mathcal{A}_x$  est aussi ouvert. On conclut que  $\mathcal{A}_x$  est à la fois ouvert et fermé, et par connexité  $\mathcal{A}_x = M$ . □

*Exemples 2.1.* (A) **Le monocycle**

Dans ce cas  $X_1(x, y, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  et  $X_2(x, y, \theta) = (0, 0, 1)$ . On a donc  $[X_1, X_2] = (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$  et  $X_1, X_2, X_3$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ . On conclut d'après le théorème de Chow que l'on peut atteindre n'importe quelle position.

(B) **L'entropie**(C. Caratheodory).

On considère un système « thermodynamique » décrit par un certain nombre de paramètres (pression, volume, température, etc...). On considère aussi avoir fixé l'énergie totale du système, et nous considérons les « transformations adiabatiques réversibles ». Il n'est pas nécessaire de savoir ce que cela signifie dans la pratique. Il suffit de savoir que, pour un chemin (différentiable) dans l'espace des états, la

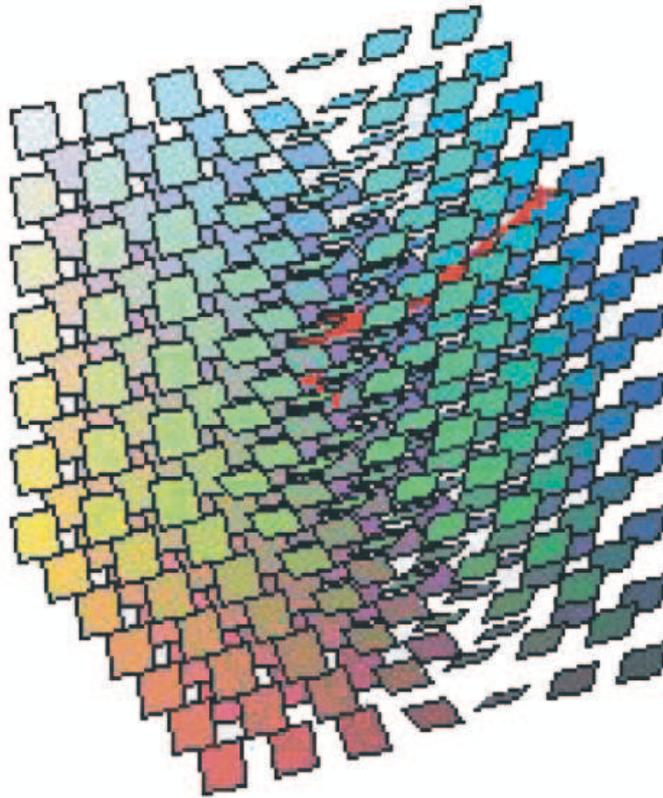


FIG. 11.3 – Champ de plans non-intégrable et courbe tangente

propriété d'être un chemin « de transformations adiabatiques réversibles » est une propriété qui se vérifie à chaque instant, de manière infinitésimale<sup>3</sup>.

En d'autres termes, en chaque point  $x$  de l'espace des phases, il existe un sous-espace vectoriel  $D(x)$ , tel que le chemin d'états  $\gamma(t)$  est « adiabatique réversible » si et seulement si  $\gamma$  est en chaque point tangent à  $D(x)$ .

La question se pose alors de savoir si on peut passer de n'importe quel état du système à n'importe quel autre par une telle transformation. Et si ce n'est pas le cas, que peut on dire ?

Or si  $D(x)$  est un champ d'hyperplans, et si on suppose une certaine « homogénéité » on a deux cas possibles<sup>4</sup> :

-soit les crochets de champs de vecteurs de  $D(x)$  engendrent l'espace, auquel cas on peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre par une transformation « adiabatique réversible »,

-soit les crochets de champs de  $D(x)$  restent dans  $D(x)$ , auquel cas il existe un feuilletage dont les feuilles sont tangentes à  $D(x)$ .

<sup>3</sup>Le lecteur pourra se convaincre que les « périphrases » des cours de physique de taupe pour définir de telles transformations se résument au fait que c'est une propriété du vecteur vitesse d'un chemin.

<sup>4</sup>cette partie de l'argumentation n'est pas rigoureuse, comme le lecteur est invité à le vérifier.

Dans le cas décrit par la thermodynamique usuelle, le principe de Clausius<sup>5</sup> nous dit que ce n'est pas le cas. Il y a des états qui ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par une transformation « adiabatique réversible ».

Dans ce cas, supposons comme cela se produit en thermodynamique, que la condition infinitésimale d'adiabaticité soit donnée par une forme différentielle<sup>6</sup>, que l'on notera bien sûr  $\delta Q$ . Cela signifie que

$$\delta Q(x)h = 0 \Leftrightarrow h \in D(x)$$

Alors si  $S$  une fonction qui décrit localement les feuilles du feuilletage :  $\mathcal{A}_x = \{y \mid S(y) = S(x)\}$ . alors comme  $T_x \mathcal{A}_x = \{h \mid \delta Q(x)h = 0\} = \{h \mid dS(x)h = 0\}$ , et puisque  $dS(x)$  et  $\delta Q(x)$  ont même noyau elles sont proportionnelles : il existe donc une fonction que l'on notera  $T(x)$ , telle que  $dS(x) = \frac{1}{T(x)}\delta Q(x)$ .

On aura reconnu l'entropie  $S$ , et la température  $T$ .

### (C) Boule roulant sans glissement

Nous allons maintenant traiter l'exemple de la contrainte de **roulement sans glissement** d'une boule sur un plan, qui s'exprime ainsi :

Soit  $R(t)$  la matrice de rotation qui décrit la position de la boule à l'instant  $t$ , et  $(x(t), y(t))$  les coordonnées de son centre.

Un point  $e$  de la boule, sera à l'instant  $t$  en

$$(x(t), y(t), 0) + R(t).e$$

La condition de roulement sans glissement nous dit que le point de contact avec la table, qui correspond à  $(x(t), y(t), -1)$  et donc sur la boule à

$$R(t)e = (0, 0, -1) = v$$

a une vitesse nulle, c'est à dire

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) + \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0.$$

Soit  $\Omega(t)$  la matrice antisymétrique telle que  $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$ . La condition ci-dessus s'exprime par  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) = -\Omega(t)v$

La position de la boule, qui est décrite par un point d'une sous-variété de dimension 5,  $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^2 \times M_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{11}$ , et la condition de « roulement sans glissement » s'exprime par la relation satisfaite par le vecteur vitesse  $(\dot{Z}(t), \dot{R}(t))$  :

$$\dot{Z}(t) - \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0 .$$

Il s'agit de deux conditions, qui déterminent en chaque point de  $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$  un sous-espace de dimension 3 de son espace tangent.

---

<sup>5</sup>il s'agit d'un fait expérimental, irréductible à une démonstration mathématique : il n'existe pas de chemin adiabatique réversible dont le seul effet est de refroidir un corps isolé en produisant du travail mécanique.

<sup>6</sup>Ici ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire définissant  $D(x)$  en  $x$ , et dépendant de manière  $C^\infty$  de  $x$ .

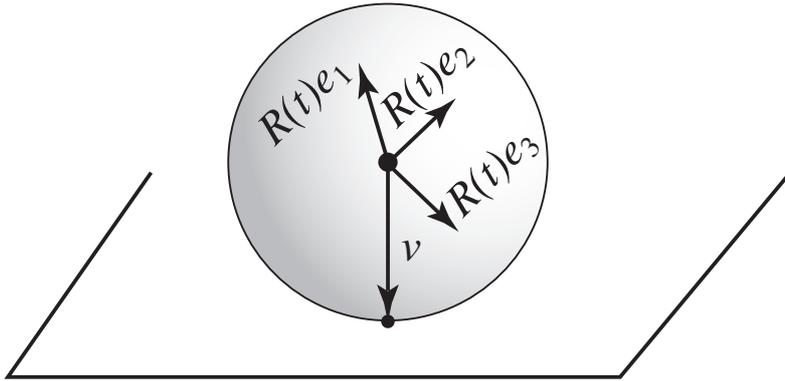


FIG. 11.4 – Boule roulant sans glisser sur un plan

Si on pose  $\Omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$  qui est une matrice antisymétrique, et s'identifie donc à un vecteur  $\omega(t)$  ( $\Omega(t) = L_{\omega(t)}$ ), appelé le vecteur instantané de rotation.

L'espace  $D(Z, R)$  est alors engendré par

$X_1 = (0, 1, e_1)$ , générateur du roulement sans glissement dans la direction  $e_1$

$X_2 = (1, 0, e_2)$ , générateur du roulement sans glissement dans la direction  $e_2$

$X_3 = (0, 0, e_3)$ , générateur du roulement sans glissement autour de l'axe vertical  $e_3$

On a alors que  $[X_1, X_2] = (0, 0, e_1 \wedge e_2) = X_3$ , et  $[X_1, X_3] = (0, 0, e_1 \wedge e_3) = (0, 0, -e_2)$ ,  $[X_2, X_3] = (0, 0, e_2 \wedge e_3) = (0, 0, e_1)$ . Comme les vecteurs  $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], [X_3, X_1], [X_3, X_2]$  forment en chaque point une base de  $\mathbb{R}^2 \times T_R SO(3)$  on voit que  $D$  vérifie la condition de Chow. La connexité de l'espace des positions permet de dire que tout point peut-être atteint par un chemin tangent au champ de sous-espaces : on peut joindre deux positions quelconques de la boule par un roulement sans glissement sur le plan.

On peut d'ailleurs constater que les champs  $X_1, X_2$  suffisent pour que leurs crochets itérés engendrent l'espace tangent tout entier. Il faut noter que les roulements dans la direction  $e_1$  et  $e_2$  préservent la composante verticale du moment cinétique. Ces mouvements peuvent en fait être réalisés sans force extérieure à la boule (autre que les forces de frottement du plan).

Cependant le théorème de Chow nous permet de réaliser une rotation quelconque autour de l'axe vertical en composant de tels roulements. Donc, bien que la composante verticale du moment cinétique de la boule soit de dérivée constante, cette composante verticale peut varier. L'explication est que si  $\alpha_v$  est la forme différentielle mesurant cette composante verticale,  $\ker(\alpha_v)$  qui contient  $D(Z, R)$  mais est non intégrable (en effet,  $X_1, X_2 \in \ker(\alpha_v)$  mais  $\alpha_v(X_3) = 1$ ).

Un phénomène analogue explique pourquoi un chat lâché tête en bas, peut retomber sur ses pattes malgré la conservation du moment cinétique.

Une autre manière de revoir la dualité « intégrabilité/non-intégrabilité » est en termes de **formes différentielles** et leurs **facteurs intégrants**.

Soit alors  $\alpha$  une forme différentielle de degré un sur  $M$  ne s'annulant pas. Cherchons la condition pour que  $D(x) = \{h \mid \alpha(x)h = 0\}$  soit intégrable.

Définissons pour cela<sup>7</sup>

$$d\alpha(x)(X(x), Y(x)) = d(\alpha(x)X(x))Y(x) - d(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)[X, Y](x)$$

L'objet ainsi défini est bilinéaire alterné en les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ . Comme les différents termes ne dépendent pas seulement de la valeur de  $X$  et  $Y$  en  $x$ , mais aussi de leur dérivée, on pourrait penser que le résultat aussi. Or un miracle se produit

**Proposition 11.8.**

$$d\alpha(X, Y)(x) = D(\alpha(x)X(x))Y(x) - D(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)([X, Y](x))$$

*ne dépend que de la valeur de  $X$  et  $Y$  en  $x$ . Cela définit donc une forme bilinéaire antisymétrique sur l'espace tangent à  $x$ , que l'on note encore  $d\alpha$ .*

*De plus le champ  $D\alpha$  défini par  $\alpha$  est intégrable, si et seulement si  $d\alpha$  s'annule sur  $\ker \alpha(x)$ . Dans ce cas il existe des fonctions,  $f, g$  telles que  $\alpha = f \cdot dg$*

**Démonstration.** En utilisant une carte de la sous-variété, il suffit de le démontrer dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $x = 0$ . Soient  $X_0$  et  $X_1$  des champs de vecteurs qui coïncident en 0. Pour montrer que  $d\alpha(X_0, Y)(0) = d\alpha(X_1, Y)(0)$ , il suffit de montrer par linéarité que si  $X(0) = 0$ , alors  $d\alpha(X, Y)(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} & [D(\alpha)(0)X(0) + \alpha(0)dX(0)]Y(0) - [D(\alpha)(0)Y(0) + \alpha(0)dY(0)]X(0) - \\ & (\alpha(0)(dX(0)Y(0) - dY(0)X(0))) = D\alpha(0)(X(0), Y(0)) - D\alpha(0)(Y(0), X(0)) \end{aligned}$$

On voit donc que  $d\alpha$  ne dépend que de  $X(0), Y(0)$  et est égale à la partie antisymétrique de  $D\alpha$ <sup>8</sup>.

On appelle  $d\alpha$  la différentielle extérieure de  $\alpha$ .

□

### 3 Exercices

- (A) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des champs de vecteurs sur  $V$  formant en chaque point  $x$  de  $V$  une base de  $T_x V$ . Montrer que tout champ de vecteurs  $X$  sur  $V$  s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients  $C^\infty(V)$  des  $X_j$ .

<sup>7</sup>Attention, dans ce qui suit  $d$  n'est pas la différentielle usuelle, mais un « opérateur » associant à une un-forme différentielle une deux-forme. La différentielle usuelle est maintenant notée  $D$ , afin d'éviter toute confusion. Nous sommes là encore tributaires des **notations standard**.

<sup>8</sup>Dans  $\mathbb{R}^n$ , car  $D\alpha$  n'a pas de sens intrinsèque dans une sous-variété.

Montrer que tout champ de vecteurs sur  $SO(n)$  est combinaison linéaire à coefficients  $C^\infty$  des  $X_A$ , où  $A$  est antisymétrique.

(B) Soit  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  une application linéaire vérifiant  $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ . On dit alors que  $D$  est une **dérivation**.

(a) Montrer que si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  alors  $D(fg)(x_0) = 0$

(b) Montrer en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral que  $R(x) = f(x) - df(x_0)(x - x_0)$  est somme de produits de fonctions s'annulant en  $x_0$ .

(c) En déduire que  $D(f)(x_0) = df(x_0)X(x_0)$ . Montrer que  $X$  qui ne dépend pas de  $f$ , (mais est déterminé par  $D$ ) est un champ de vecteurs  $C^\infty$ . On note  $D = D_X$ .

(d) Montrer que si  $D_{X_1}, D_{X_2}$  sont des dérivations, alors  $D_{X_1}D_{X_2} - D_{X_2}D_{X_1}$  est une dérivation, égale à  $D_{[X_1, X_2]}$

(e) En déduire une démonstration de l'identité de Jacobi.

(C) Soit  $\mathfrak{X}^\infty(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$  et  $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$   $\varphi_t^X$  son flot.

Soit  $\Psi : M \times \mathfrak{X}^\infty \rightarrow M$  l'application donnée par  $\Psi(x_0, X) = \varphi_1^X(x_0)$

Calculer  $D\Psi$ . Indication : après avoir montré que  $\Psi$  est différentiable, on pourra utiliser les résultats de la théorie des perturbations pour calculer les différentielles partielles de  $\Psi$  par rapport à  $x_0$  et  $X$ .

(D) Soit  $G$  le groupe des difféomorphismes d'une variété connexe  $M$  contenant le flot de  $Y_1, \dots, Y_p$  où les  $Y_j$  engendrent l'espace tangent à  $M$ .

(a) Montrer que  $G$  agit transitivement sur  $M$  (i.e.  $\forall x, y \in M, \exists g \in G \mid gx = y$ ).

(b) Soit  $D(x)$  une distribution sur une variété  $M$  de dimension 3, engendrée (localement) par les champs de vecteurs  $X_1, X_2$ .

Montrer (sans utiliser le théorème de Chow!) que si  $X_1, X_2, [X_1, X_2]$  engendrent  $T_x M$ , alors deux points voisins de  $x$  sont toujours joints par une courbe tangente à  $D$ . On pourra au choix

i. Calculer la différentielle de :

$$(1) \quad (t_1, t_2, t_3) \mapsto \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(\epsilon(t_3) X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(-\epsilon(t_3) X_2) x_0$$

où  $\epsilon(t) = \text{signe}(t)(|t|)^{1/2}$

ii. Raisonner sur le groupe  $G$  des difféomorphismes engendré par les flots des  $X_j$ , et montrer que si  $\varphi^t$  est le flot de  $X_i$ ,  $G$  contient les difféomorphismes  $(\varphi^t)_* X_j$ , donc le flot de  $Z_\epsilon = X_i + \epsilon[X_i, X_j] + \epsilon^2 \dots$  et utiliser l'exercice (D).

- iii. Estimer le temps maximal nécessaire pour atteindre un point (supposant tous les champs de vecteurs de norme 1).  
Commencer par le cas  $n = 3, k = 2$ , et montrer que l'on peut joindre deux points suffisamment proches,  $v$  et  $v'$  par une courbe de longueur au plus  $d(v, v')^{1/2}$ .
- (c) Soit  $D$  un champ de sous-espaces différentiable, et  $\mathcal{A}_x$  une feuille du feuilletage donné par le théorème de Sussmann. On veut déterminer la dimension de cette feuille et plus précisément son espace tangent.
- i. On note  $G_D$  le groupe engendré par les flots de champs de vecteurs tangents à  $D$ , et  $G_{D, x_0}$  le sous-groupe des éléments qui fixent  $x_0$  (i.e.  $\{\varphi \in G_D \mid \varphi(x_0) = x_0\}$ ). Montrer que  $G_D(x)$  agit sur  $T_x M$  par sa différentielle.
  - ii. Montrer que  $T_x \mathcal{A}_x$  est invariant par  $G_D(x)$ . En déduire que  $T_x \mathcal{A}_x$  contient le plus petit sous-espace invariant par  $G_D(x)$  contenant  $D(x)$ , noté  $\Delta_D(x)$ . On veut montrer que  $T_x \mathcal{A}_x$  est égal à ce sous-espace  $\Delta_D(x)$ .
  - iii. Utiliser l'exercice (C) pour montrer que  $T_x \mathcal{A}_x$  est contenu dans  $\Delta_D(x)$
  - iv. Montrer en utilisant le théorème de Frobenius que  $\Delta(x)$  est stable par crochet de Lie et donc contient les crochets itérés d'éléments de  $D$  (i.e. les  $[X_1, [X_2, \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$ )
- (d) Étudier le problème de la manœuvre d'une voiture, les roues avant faisant un angle de  $\varphi$  avec l'axe de la voiture, celle-ci faisant un angle égal à  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . On note  $\ell$  la distance entre les essieux. Écrire les équations du mouvement et des champs de vecteurs engendrant le champ de sous-espaces associé.
- (e) Étudier de même le problème de la manœuvrabilité d'un semi-remorque à deux remorques.

**Avertissement :**

Pour diverses raisons, nous avons favorisé dans cette liste les ouvrages en langue française. Il ne faut pas cacher au lecteur, que les ouvrages (et les articles) en français, ou écrits par des français ne représentent qu'une petite partie de la littérature disponible. Il est donc indispensable de pouvoir lire couramment des ouvrages ou articles en langue anglaise. Signalons aussi, que les éditions Mir en Russie et Dover aux États-Unis, publient des classiques à des prix défiant toute concurrence.



# Bibliographie

## Les Grands Classiques :

- [Birkhoff] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems*. AMS, New-York, 1927.
- [Laplace] P. S. de Laplace. *Exposition du système du Monde*. P.-M. de Vroom, Bruxelles, 6ème édition, 1827
- [Poincaré] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 vols.* Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899.
- [Routh] E. J. Routh *Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. The Elementary part (Part I). The Advanced part (Part II)* MacMillan, N.Y. 1905 (Première édition Londres, 1860)

## Quelques ouvrages généraux plus récents :

- [Arnold] V. I. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou 1976.
- [Coddington-Levinson] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential equations*. McGraw-Hill, New-York, 1955.
- [Colmez] P. Colmez *Eléments d'Analyse et d'Algèbre*. Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2009.
- [Dieudonné] J. Dieudonné *Fondements de l'Analyse moderne*. Gauthier-Villars, Paris, 1963.
- [Hartman] P. Hartman *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New-York, 1964.
- [Hirsch-Smale] M. Hirsch et S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, London, 1974.
- [Katok-Hasselblatt] A. Katok, and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, London, 1997.
- [Landau-Lifschitz] L. Landau et L. Lifschitz *Mécanique* Mir, Moscou.

- [Laudenbach] F. Laudenbach *Calcul Différentiel et Intégral*. Editions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [Golse] F. Golse *Distributions et Analyse de Fourier*. Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2007.
- [Lefschetz] S. Lefschetz *Differential equations : geometric theory*. Dover, New-York 1977.
- [Pontriaguine] L.S. Pontriaguine *Équations différentielles*. Mir, Moscou, 1967.

#### Sur les équations intégrales :

- [Courant-Hilbert] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical physics*. Wiley Interscience.
- [Tricomi] F.G. Tricomi. *Integral equations*. Dover, New-York, 1985.
- [Volterra] V. Volterra. *Leçons sur les fonctions de lignes*. Gauthier-Villars, 1913.

#### Sur la théorie des oscillations :

- [Andronov-Khaikin-Vitt] A.A. Andronov, S.E. Khaikin, and A.A. Vitt. *Theory of oscillators*. Dover, 1987
- [Brillouin] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Dover, New-York, 1953.
- [Elmer] F.J. Elmer. The Pendulum Lab.  
<http://monet.physik.unibas.ch/elmer/pendulum/>
- [Maxwell] J. C. Maxwell. On Governors. *Proceedings of the Royal Society, no. 100 (1868)*. Reproduit dans « The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, Dover 1965 »
- [Minorsky] N. Minorsky. *Nonlinear oscillations*. R.E.Krieger Pub.C<sup>0</sup>, New-York 1974.
- [Pippard] A. B. Pippard. *The Physics of vibration* Cambridge University Press, 1978.

#### Sur les aspects numériques des équations différentielles :

- [Demailly] J.-P. Demailly. *Analyse Numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.
- [Iserles] A. Iserles. *A first Course in Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge, 1996.

**Sur variétés et sous-variétés :**

- [Do Carmo] M. Do Carmo *Differential Geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall, 1976
- [Milnor] J. Milnor *Topology from the differentiable viewpoint.* The University Press of Virginia. Charlottesville, 1965.

**Sur Frobenius, Chow et la robotique :**

- [Bellaïche-Risler] A. Bellaïche, J.J. Risler. *Sub-Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1996.
- [Bellaïche-Jean-Risler] A. Bellaïche, F. Jean, J.-J. Risler. *The Geometry of nonholonomic systems.*  
[ftp ://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf](ftp://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf)
- [Godbillon] C. Godbillon *Géométrie différentielle et Mécanique analytique* Hermann, 1985.

**Aspects historiques :**

- [Bennett] S. Bennett. *A history of control engineering 1800-1930* IEE Control Engineering series, vol. 8. Peter Peregrinus Ltd, 1979
- [Daumas] M. Daumas. *Histoire Générale des techniques, Tomes 3 et 4.* Collection Quadrige. Presses Universitaires de France, Paris 1996 (1re édition 1978)
- [Ekeland] I. Ekeland. *Le calcul l'imprévu. Les figures du temps de Kepler à Thom.* Seuil, Paris 1984.
- [Heath] Sir T. Heath. *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus* Dover, New-York, 1981.
- [Israel] G. Israel. *La mathématisation du réel.* Seuil, Paris 1996.
- [Thurston] R. Thurston. *History of the growth of the steam engine.* D. Appleton and C°, New-York, 1878.  
Edition « web » :  
[http ://www.history.rochester.edu/steam/thurston/1878](http://www.history.rochester.edu/steam/thurston/1878)



# Index

- $T_z M$ , 186
- $\Lambda^k(E^*)$ , 200
- $\Lambda^k f$ , 203
- $\alpha$ -limite
  - ensemble, 140
- $\omega$ -limite, 42
  - ensemble, 140
- équations de Maxwell, 207
- $\mathcal{L}(E, E)$ , 25
- algèbre extérieure, 200
- anti-périodique, 82
- antipodale
  - application, 225
- application de Poincaré, 133
- Ascoli
  - théorème, 46
- asymptotiquement stable, 72
- autonome
  - équation différentielle, 126
- Banach
  - espace, 21
- bifurcation de Hopf, 176
- bootstrap, 27
- caractéristique d'Euler, 231
- carte, 218
  - d'une sous-variété, 182
- Cauchy
  - suite de, 21
- centre, 69
- champ
  - de sous-espaces, 248
- champ de vecteurs, 126
  - complet, 112
  - crochets de Lie, 234
  - cycle limite, 140
  - indice le long d'une courbe, 147
  - orbite périodique, 127
  - point singulier, 127
  - section de Poincaré, 133
  - zéros, 127
- classe de Thom, 229
- compact, 30
- complet
  - champ de vecteurs, 112
  - espace métrique, 21
- connexe, 29
  - par arcs, 29
- courbure de Gauss, 227
- critère de stabilité
  - de Liapounov, 151
  - de Routh, 154
    - cas linéaire, 72
    - cas périodique, 156
    - cas périodique autonome, 157
- crochets de Lie, 234
- cycle limite, 140
- dépendance sensitive en les conditions
  - initiales, 119
- différentielle extérieure, 205, 206
- distance, 18
- ensemble
  - $\alpha$ -limite, 140
  - $\omega$ -limite, 140
- enveloppe d'une famille de courbes, 196
- équation
  - de Hill, 85
  - de Mathieu, 87
  - de Sturm-Liouville, 59, 63, 105
  - de van der Pol, 138
  - différentielle autonome, 68, 126
  - intégrale, 55
    - de Fredholm, 55

- de Volterra, 55
- équicontinu, 46
- espace
  - séparé, 32
- espace métrique
  - compact, 30
  - complet, 21
  - connexe, 29
- espace tangent, 186
- Euler
  - caractéristique  $d'$ , 231
- extrémum, 189
- flot, 126
  - boîte de, 132
- flyball governor, 11
- fonction de Liapounov, 150
- forem déterminant, 202
- Forme différentielle
  - intégration, 212
- forme différentielle, 200
  - différentielle extérieure, 205
  - induite, 205
  - sur un ouvert, 204
  - différentielle extérieure, 206
  - produit extérieur, 201
- formule
  - de Stokes, 212
- formule de Lie-Cartan, 239
- foyer instable, 69
- foyer stable, 69
- Fredholm
  - équation intégrale de, 55
- générateur infinitésimal, 127
- graphe, 183
- Gronwall
  - lemme de, 115
- groupe à un paramètre, 127
- hétéroclines, 147
- Hamiltonien, 128
- Hopf
  - bifurcation de, 176
- immersion, 185
- Kapitsa, P.L., 12, 88
- Laplace, P.S., 10
- Lebesgue
  - lemme de, 32
- lemme
  - de Gronwall, 115
  - de Lebesgue, 32
  - de Morse, 145
  - de Poincaré, 221
- Liapounov
  - fonction de, 150
- Lie-Cartan
  - formule de, 239
- Lindstedt
  - série de, 145
- Liouville
  - théorème de, 74
- lipschitzienne, 20
- loc-lipschitzienne, 20
- métrique, 18
- Maxwell, 11, 167
  - equations de, 207
- modèle
  - proie-prédateur, 10
- Morse
  - lemme de, 145
- nappe paramétrée, 183
- noeud, 69
- noeud impropre, 69
- noeud instable, 69
- orbites périodiques, 127
- orientation, 210
- partition de l'unité, 212
- Peano
  - théorème de, 62
- pendule
  - de Kapitsa, 12, 88
- Picard
  - théorème de, 24
  - version analytique, 44
- Poincaré
  - application de, 133

- lemme de, 221
- théorème de Hopf-, 232
- point critique, 188, 189
- points singuliers, 127
- Porter, C.
  - régulateur, 171
- portrait de phase, 68, 127
- premier retour
  - application, 133
- produit extérieur, 201
- produit vectoriel, 204
- proie-prédateur
  - modèle, 10
- régulateur
  - à boules, 11
  - de Pickering, 171, 172
  - de Porter, 171
  - de Watt, 11, 167
- résolvante
  - d'une équation linéaire, 74
- résonance, 83
- résonance paramétrique, 92
- relèvement
  - théorème de, 45
- roulement sans glissement, 256
- Routh, 11
  - critère de (cas linéaire), 72
  - critère de (cas non-linéaire), 154
  - critère de (cas périodique autonome), 157
  - critère de (cas périodique non-linéaire), 156
- ruban de Möbius, 211
- séparé
  - espace, 32
- série de Lindstedt, 145
- section de Poincaré, 133
- selle, 69
- Smale
  - théorème de, 243
- solution maximale, 110
- sous-variété, 182
  - équation d'une, 183
  - à bord, 208
- carte d'une, 182
- immergée, 185
- intégrale, 249
- tangente, 249
- stabilité, 13, 149
  - asymptotique, 149
  - d'un système linéaire
    - à coefficients constants, 72
  - des systèmes Hamiltoniens, 159
  - orbitale, 157
    - asymptotique, 157
- stable, 72
- Stokes
  - formule de, 212
- Sturm
  - Critère de, 106
- Sturm-Liouville
  - équation de, 59, 63, 105
- système dynamique, 9
- systèmes Hamiltoniens, 159
- tangent
  - espace, 186
- termes séculaires, 90, 137, 146
- théorème
  - d'Ascoli, 46
  - d'inversion locale, 28
  - de Bloch, 80
  - de Brouwer, 216
  - de Cauchy-Lipschitz, 50
    - à paramètres, 53
    - version analytique, 61
  - de Chow, 254
  - de Floquet, 79
  - de Frobenius, 249
  - de Gauss-Bonnet, 231
  - de Liouville, 74
  - de Peano, 62
  - de Picard, 24
    - à paramètres, 25
    - version analytique, 44
  - de Poincaré-Bendixson, 140
  - de Poincaré-Hopf, 232
  - de relèvement, 45
  - de Smale, 243

- de Sussmann, 251
- de Volterra, 56
  - non linéaire, 58
  - des fonctions implicites, 27
- théorie de Floquet, 79
- théorie des perturbations, 135
- Thom
  - classe de, 229
- trajectoires, 68
- van der Pol
  - équation de, 138
- variété
  - à bord, 208
  - orientée, 210
  - orientées, 208
  - orientable, 210
- variation de la constante, 75
- Volterra, 264
  - équation intégrale de, 55
  - théorème de, 56
- Volterra, V., 10
- Watt, James, 11
- zone de Brillouin, 80