RIGIDITÉ ET SINGULARITÉS IRRÉGULIÈRES
D'APRÈS DELIGNE ET ARINKIN
EXPOSÉ À L'ENS, 22 SEPTEMBRE 2010

Claude Sabbah

1. Introduction

J'explique dans cet exposé le théorème suivant, démontré indépendamment par Deligne dans une lettre à Katz (octobre 2006) et par Arinkin [**1**].

Théorème 1.1. *Soit U un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ et $\mathscr{V}$ un $\mathscr{O}_U$-module libre de rang fini à connexion. Si $\mathscr{V}$ est irréductible de rang >1 et si son indice de rigidité est égal à 2, alors quitte à tensoriser $\mathscr{V}$ par un fibré à connexion de rang 1 et à effectuer un changement de variable sur $\mathbb{P}^1$ (homographie), on se trouve dans un des cas suivants :*

(1) $\mathrm{rg}\left[\mathscr{V}\star\mathscr{K}^\alpha\right] < \mathrm{rg}\,\mathscr{V}$ *pour un certain* $\alpha\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}$*, en posant* $\mathscr{K}^\alpha=(\mathscr{O},d+\alpha dz/z)$*,*
(2) $\mathrm{rg}({}^F\mathscr{V}) < \mathrm{rg}\,\mathscr{V}$*.*

Ici, $\star$ désigne la convolution intermédiaire et ${}^F\mathscr{V}$ est le transformé de Fourier de $\mathscr{V}$. Ce théorème prend toute sa valeur si on rappelle les deux résultats de Katz adaptés au cas des connexions méromorphes par Bloch et Esnault dans [**2**]. On dit que $\mathscr{V}$ est *rigide* si tout autre $\mathscr{V}'$ ayant un formalisé en chaque $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$ isomorphe au formalisé correspondant de $\mathscr{V}$ est isomorphe à $\mathscr{V}$. Il faut noter qu'on ne demande pas ici que les germes analytiques de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ en $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$ soient isomorphes, mais que l'hypothèse de rigidité l'implique alors.

Théorème 1.2. *Un fibré à connexion irréductible sur U est rigide si et seulement si son indice de rigidité vaut 2.*

La condition sur l'indice de rigidité ne porte que sur des invariants formels de $\mathscr{V}$ (voir les formules (2.3) et (2.1)), mais ce résultat montre aussi qu'elle implique la rigidité des structures de Stokes locales. Il faut aussi remarquer que la démonstration du théorème de Deligne et Arinkin est relativement simple (quoique très élégante) car elle ne fait intervenir que des propriétés formelles de la connexion.

Théorème 1.3. *Un fibré à connexion irréductible sur U et son transformé de Fourier ont même indice de rigidité.*

On en déduit :

Corollaire 1.4. *Un fibré à connexion irréductible sur U est rigide si et seulement s'il peut être ramené à un fibré de rang 1 par une suite d'opérations du type suivant :*

(1) *tensorisation par un fibré à connexion de rang 1,*
(2) *image inverse par une homographie de $\mathbb{P}^1$,*
(3) *transformation de Fourier.*

2. Connexions à singularités éventuellement irrégulières

Soit $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'inclusion. Soit $\mathscr{V}$ un $\mathscr{O}_U$-module libre de rang fini muni d'une connexion. Son image directe intermédiaire $j_{!*}\mathscr{V}$ est le plus petit $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome $\mathscr{M}$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

(1) $j^*\mathscr{M} = \mathscr{V}$,
(2) $\mathscr{M}$ n'a ni sous-module ni quotient non trivial à support dans $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$.

Propriétés.

(1) Si $\mathscr{V}$ est à singularité régulière en tout point de $\mathbb{P}^1 \smallsetminus U$, alors $\mathrm{DR}\, j_{!*}\mathscr{V} \simeq j_*V$, si V est le système local des sections horizontales de $\mathscr{V}$ sur U^{an}.

(2) Au voisinage d'un point singulier $x \in \mathbb{P}^1 \smallsetminus U$ avec coordonnée locale t, le formalisé $\widehat{\mathscr{V}}_x \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}(\!(t)\!) \otimes \mathscr{V}$ se décompose suivant les pentes

$$\widehat{\mathscr{V}}_x \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} \widehat{\mathscr{V}}_x^{(\lambda)}$$

et de même

$$\widehat{j_{!*}\mathscr{V}}_x \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} \widehat{j_{!*}\mathscr{V}}_x^{(\lambda)}.$$

On a, pour tout λ,

$$\widehat{j_{!*}\mathscr{V}}_x^{(\lambda)} = \begin{cases} \widehat{\mathscr{V}}_x^{(\lambda)} & \text{si } \lambda \neq 0, \\ j_{!*}\widehat{\mathscr{V}}_x^{(0)} & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

(3) Le complexe $\mathrm{DR}(j_{!*}\mathscr{V})$ n'est pas nécessairement concentré en degré 0. Par exemple, si $\mathscr{V}$ est purement irrégulier en x on a, au voisinage de x, $\mathrm{DR}(j_{!*}\mathscr{V}) = \mathrm{DR}\,\mathscr{V}$, et il est connu que $h^1(\mathrm{DR}\,\mathscr{V}_x) - h^0(\mathrm{DR}\,\mathscr{V}_x)$ est égal à l'*irrégularité* de $\mathscr{V}$ en x, définie par

$$\mathrm{irr}_x\mathscr{V} = \sum_\lambda \lambda \dim_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \widehat{\mathscr{V}}_x^{(\lambda)}.$$

(4) Le complexe $\mathrm{DR}(j_{!*}\mathscr{V})$ est néanmoins pervers et coïncide avec V sur U^{an}. Son complexe des cycles évanescents en x, noté $\Phi_x\,\mathrm{DR}(j_{!*}\mathscr{V})$ n'a de cohomologie qu'en un seul degré, et cette cohomologie a pour dimension

$$\delta_x(\mathscr{V}) = \mathrm{irr}_x\mathscr{V} + \mathrm{rg}\,\mathscr{V} - \dim\mathrm{Ker}[\partial_t : \widehat{\mathscr{V}}_x^{(0)} \longrightarrow \widehat{\mathscr{V}}_x^{(0)}]. \tag{2.1}$$

Définition 2.2. L'indice de rigidité $\mathrm{rig}\,\mathscr{V}$ est défini par la formule

$$\mathrm{rig}\,\mathscr{V} = \chi\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\big).$$

La formule d'Euler-Poincaré pour le faisceau pervers $\mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))$ sur $\mathbb{P}^1$ donne

$$\mathrm{rig}\,\mathscr{V} = 2(\mathrm{rg}\,\mathscr{V})^2 - \sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\delta_x(\mathscr{E}nd(\mathscr{V})). \tag{2.3}$$

Lemme 2.4. *Pour tout $\mathscr{V}$, $\mathrm{rig}\,\mathscr{V}$ est pair. Si $\mathscr{V}$ est irréductible, alors $\mathrm{rig}\,\mathscr{V} = 2 - h^1\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\big) \leqslant 2$.*

Démonstration. On remarque que la composition des endomorphismes $\mathscr{E}nd(\mathscr{V})\otimes\mathscr{E}nd(\mathscr{V}) \to \mathscr{E}nd(\mathscr{V})$ est compatible aux connexions. On voit aussi que la trace $\mathrm{tr} : \mathscr{E}nd(\mathscr{V}) \to \mathscr{O}_U$ est compatible aux connexions (lorsque $\mathscr{O}_U$ est muni de la connexion triviale d) : en effet, si on suppose $U \neq \mathbb{P}^1$ par exemple, le fibré $\mathscr{V}$ est trivial et on peut travailler avec les sections globales sur U. Dans une base de sections globales, soit A la matrice de la connexion. Alors la matrice de la connexion sur $\mathscr{E}nd(\mathscr{V})(U)$ dans la base correspondante est $\mathrm{ad}(A)$. Pour la matrice Φ d'un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{E}nd(\mathscr{V})(U)$, on a $\mathrm{tr}(d\Phi + \mathrm{ad}(A)\Phi) = \mathrm{tr}(d\Phi) = d\,\mathrm{tr}(\Phi)$, d'où l'assertion. On en déduit un accouplement non dégénéré symétrique $\mathscr{E}nd(\mathscr{V})\otimes\mathscr{E}nd(\mathscr{V}) \to \mathscr{O}_U$ compatible aux connexions, donné par $(\varphi,\psi) \mapsto \mathrm{tr}(\psi\circ\varphi)$, autrement dit, un isomorphisme symétrique compatible aux connexions entre $\mathscr{E}nd(\mathscr{V})$ et son dual. Il en résulte aussi, par une propriété générale du foncteur $j_{!*}$, que le $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module $j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V})$ est isomorphe à son dual (au sens des $\mathscr{D}$-modules) et l'isomorphisme est symétrique. Enfin, via la compatibilité entre dualité des $\mathscr{D}$-modules holonomes et la dualité de Poincaré-Verdier de leurs complexes de de Rham, on en déduit que $\boldsymbol{H}^2\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\big) \simeq \boldsymbol{H}^0\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))^\vee$, et $\boldsymbol{H}^1\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))$ est est muni d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée. Ceci donne la première assertion.

Pour la seconde assertion, il suffit alors de montrer que, si $\mathscr{V}$ est irréductible on a $h^0\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\big) = 1$. On a une inclusion

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^0\big(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\big) &\hookrightarrow \boldsymbol{H}^0\big(U, \mathrm{DR}\,j_*\,\mathscr{E}nd(\mathscr{V})\big)\\ &= \mathrm{Ker}\big[\nabla : \mathscr{E}nd(\mathscr{V})(U) \longrightarrow \mathscr{E}nd(\mathscr{V})(U)\big]\end{aligned}$$

et il suffit même de montrer que tout endomorphisme horizontal de $\mathscr{V}$ est une constante fois l'identité. Soit φ un tel endomorphisme et soit $x \in U$. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[T]$ tel que $P(\varphi)$ induise l'endomorphisme nul sur la fibre V_x de $\mathscr{V}$ au point x. Par suite, puisque $P(\varphi)$ est aussi horizontal, $P(\varphi)$ est nul sur le fibré plat

$\mathscr{V}^{\mathrm{an}}$ sur U^{an}. On en déduit que $P(\varphi)$ est nul sur $\mathscr{V}$. Puisque $\mathscr{V}$ est irréductible, le polynôme P est de degré 1, d'où l'assertion. $\square$

Le résultat suivant est un des points-clés de la démonstration du théorème 1.1.

Proposition 2.5. *Soit $\widehat{\mathscr{V}}$ un $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-espace vectoriel de dimension finie à connexion, et soient $(\widehat{\mathscr{V}}_i)_{i\in I}$ ses composantes irréductibles répétées avec leur multiplicité. Si $j \in I$ est tel que*

$$\frac{\delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{V}}_j, \widehat{\mathscr{V}})\big)}{\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{V}}_j} \leqslant \frac{\delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{V}}_i, \widehat{\mathscr{V}})\big)}{\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{V}}_i} \qquad \forall\, i \in I, \tag{2.5 $*$}$$

alors $\widehat{\mathscr{L}} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathscr{V}}_j$ satisfait à

$$\delta_0\big(\mathscr{E}nd(\widehat{\mathscr{V}})\big) \geqslant \frac{\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{V}}}{\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{L}}}\cdot \delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}}, \widehat{\mathscr{V}})\big). \tag{2.5 $**$}$$

Démonstration. Dans une suite exacte, rg et irr se comportent additivement, tandis que la suite des $\mathrm{Ker}\,\partial_t$ est peut-être non exacte à droite. Par suite, δ_0 est sur-additif. On en déduit

$$\delta_0\big(\mathscr{E}nd(\widehat{\mathscr{V}})\big) \geqslant \sum_{i\in I} \delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{V}}_i, \widehat{\mathscr{V}})\big) \geqslant \frac{\sum_i \mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{V}}_i}{\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{V}}_j}\cdot \delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{V}}_j, \widehat{\mathscr{V}})\big)$$

par le choix de j, d'où l'assertion. $\square$

Exemple 2.6. Si $\widehat{\mathscr{V}}$ est à singularité régulière, les composantes irréductibles $\widehat{\mathscr{V}}_i$ sont toutes de dimension 1, donc en particulier $\widehat{\mathscr{L}}$ est de dimension 1. La condition (2.5 $*$) signifie exactement que la multiplicité de la valeur propre de la monodromie correspondant à $\widehat{\mathscr{V}}_j$ est maximale.

Plus généralement, lorsque $\widehat{\mathscr{V}}$ est sans ramification, tous les $\widehat{\mathscr{V}}_i$ sont de dimension 1.

3. Quelques formules pour le transformé de Fourier

Le fibré à connexion $\mathscr{V}$ est irréductible si et seulement si le $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module $j_{!*}\mathscr{V}$ l'est. Pour définir le transformé de Fourier, il faut fixer un point à l'infini sur $\mathbb{P}^1$. On le fait, et on note $\mathbb{A}^1$ la droite affine $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{\infty\}$, munie de la coordonnée z. On suppose que $U \subset \mathbb{A}^1$ et on note ι cette inclusion. On considère aussi $\iota_{!*}\mathscr{V}$, qui est un $\mathbb{C}[z]\langle\partial_z\rangle$-module holonome irréductible si et seulement si $\mathscr{V}$ est irréductible. Le transformé de Fourier ${}^F(\iota_{!*}\mathscr{V})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\iota_{!*}\mathscr{V}$ muni de l'action de $\mathbb{C}[\zeta]\langle\partial_\zeta\rangle$ définie par $\zeta m = \partial_z m$ et $\partial_\zeta m = -zm$. Le transformé de Fourier ${}^F\mathscr{V}$ est le fibré restriction de ${}^F(\iota_{!*}\mathscr{V})$ à l'ouvert V complémentaire de ses singularités. La condition d'irréductibilité de $\mathscr{V}$ permet donc de dire que ${}^F\mathscr{V}$ est aussi irréductible et que le transformé de Fourier inverse de ${}^F\mathscr{V}$ est égal à $\mathscr{V}$.

Lemme 3.1. *On a :*

$$\operatorname{rg}{}^F\mathscr{V} = \sum_{x\in\mathbb{A}^1\smallsetminus U} \delta_x(\mathscr{V}) + \operatorname{irr}(\widehat{\mathscr{V}}_\infty^{(>1)}) - \operatorname{rg}(\widehat{\mathscr{V}}_\infty^{(>1)}) \tag{3.1 $*$}$$

et

$$\operatorname{rg}(\mathscr{V}\star\mathscr{K}^\alpha) = \sum_{x\in\mathbb{A}^1\smallsetminus U} \delta_x(\mathscr{V}) + \delta_\infty(\mathscr{V}\otimes\mathscr{K}^\alpha) - \operatorname{rg}\mathscr{V}, \quad \textit{si } \alpha\notin\mathbb{Z}. \tag{3.1 $**$}$$

Démonstration. La formule (3.1 $*$) est donnée par [**3**, Prop. 1.5, p. 79]. Pour (3.1 $**$), on utilise la version de la convolution qui n'utilise pas la transformation de Fourier. Pour x_o fixé dans $\mathbb{A}^1$, soit $s_o:\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1$ l'application $x\mapsto x_o+x$. Alors, pour $x_o\in U$, $\iota_{!*}\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha$ n'a pas de section horizontale (car la monodromie autour de x_o n'est pas l'identité puisque $\alpha\notin\mathbb{Z}$), et la fibre en x_o de $\mathscr{V}\star\mathscr{K}^\alpha$ s'identifie à

$$\operatorname{Coker}\partial_z : \iota_{!*}\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha \longrightarrow \iota_{!*}\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha.$$

On note aussi que, si $\iota' : U' = U\smallsetminus\{x_o\}\hookrightarrow\mathbb{A}^1$ désigne l'inclusion, on a $\iota_{!*}\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha = \iota'_{!*}(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha)$. On peut donc écrire

$$\operatorname{rg}(\mathscr{V}\star\mathscr{K}^\alpha) = -\chi\big(\mathbb{A}^1, \operatorname{DR}\iota'_{!*}(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha)\big).$$

La formule d'Euler-Poincaré déjà utilisée donne

$$\operatorname{rg}(\mathscr{V}\star\mathscr{K}^\alpha) = \sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U'} \delta_x(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha) - 2\operatorname{rg}(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha).$$

On a $\operatorname{rg}(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha) = \operatorname{rg}\mathscr{V}$. Pour $x\in\mathbb{A}^1\smallsetminus U$, on a $\delta_x(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha)=\delta_x(\mathscr{V})$ puisque $\widehat{s_o^*\mathscr{K}^\alpha} = \widehat{\mathscr{O}}$ en d'un tel x. En x_o, on a $\delta_{x_o}(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha) = \operatorname{rg}\mathscr{V}$, puisque $\widehat{\mathscr{V}}_{x_o} = \widehat{\mathscr{O}}^{\operatorname{rg}\mathscr{V}}$ et $\delta_{x_o}(s_o^*\mathscr{K}^\alpha)=1$ car la monodromie de $s_o^*\mathscr{K}^\alpha$ autour de x_o n'est pas l'identité. Enfin, en ∞, $\delta_\infty(\mathscr{V}\otimes s_o^*\mathscr{K}^\alpha) = \delta_\infty(\mathscr{V}\otimes\mathscr{K}^\alpha)$ car $\mathscr{K}^\alpha$ et $s_o^*\mathscr{K}^\alpha$ ont même formalisé. Ceci donne (3.1 $**$). □

4. Principe de la démonstration du théorème 1.1

Soit donc $\mathscr{V}$ de rang >1, irréductible et rigide sur U. On considère deux cas.

(1) Si pour tout $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$ on a $\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_x}=1$ (où $\widehat{\mathscr{L}_x}$ est fourni par la proposition 2.5), alors le raisonnement se fait de manière analogue à celle du cas régulier, en utilisant (3.1 $**$), et le rang diminue par convolution par un $\mathscr{K}^\alpha$ bien choisi.

(2) Sinon, l'hypothèse de rigidité montre que $\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_x}>1$ pour un *unique* $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$. En appliquant une homographie, on envoie ce point à l'infini, et on choisit alors un fibré à connexion $\mathscr{L}'$ de rang 1 sur U tel que $\widehat{\mathscr{L}'_x} = \widehat{\mathscr{L}_x}$ pour tout $x\in\mathbb{A}^1\smallsetminus U$, et tel que la pente de $\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty}, \widehat{\mathscr{L}_\infty})$ soit non entière. C'est possible car on sait que si $\widehat{\mathscr{L}_\infty}$ est irréductible et de rang $r\geqslant 2$, alors il existe $\beta\in\mathbb{C}$ et $\varphi\in\mathbb{C}(\!(u)\!)/\mathbb{C}[\![u]\!]$ qui n'est pas de la forme $\psi(u^r)$, tels que $\widehat{\mathscr{L}_\infty}$ soit l'image directe par $\rho: u\mapsto t=u^r$ de $(\widehat{\mathscr{O}}, d+d\varphi+\beta du/u)$. On choisit alors $\widehat{\mathscr{L}'_x}$ sous la forme $(\widehat{\mathscr{O}}, d+d\psi)$, où $\psi\in\mathbb{C}(\!(t)\!)/\mathbb{C}[\![t]\!]$ est choisi de sorte que la puissance du monôme dominant de $\varphi(u)-\psi(u^r)$ ne divise

pas r. Cette condition n'affecte pas le résidu de la connexion sur $\widehat{\mathscr{L}'_\infty}$, aussi on peut le fixer pour faire en sorte que la somme des résidus des $\widehat{\mathscr{L}'_x}$ ($x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$) soit entière (nulle, par exemple), et ainsi assurer l'existence de $\mathscr{L}'$.

Pour un tel choix de $\widehat{\mathscr{L}'_\infty}$, on montre que

$$\begin{aligned}(4.1)\quad \operatorname{irr}(\mathscr{H}\!om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)})-\operatorname{rg}(\mathscr{H}\!om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)})&\\ \leqslant \frac{\delta_\infty\big(\mathscr{H}\!om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}}-\operatorname{rg}\mathscr{V},&\end{aligned}$$

et par suite, en utilisant (3.1 $*$) et la propriété des $\widehat{\mathscr{L}_x}$, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}^F(\mathscr{H}\!om(\mathscr{L}',\mathscr{V}))&\leqslant\sum_{x\in\mathbb{A}^1\smallsetminus U}\delta_x\big(\mathscr{H}\!om(\mathscr{L}',\mathscr{V})\big)+\frac{\delta_\infty\big(\mathscr{H}\!om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}}-\operatorname{rg}\mathscr{V}\\ &=\sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\frac{\delta_x\big(\mathscr{H}\!om(\widehat{\mathscr{L}_x},\widehat{\mathscr{V}}_x)\big)}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_x}}-\operatorname{rg}\mathscr{V}\\ &\leqslant\frac{1}{\operatorname{rg}\mathscr{V}}\sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\delta_x\big(\mathscr{E}\!nd(\mathscr{V})\big)-\operatorname{rg}\mathscr{V}\\ &=\frac{2(\operatorname{rg}\mathscr{V})^2-\operatorname{rig}\mathscr{V}}{\operatorname{rg}\mathscr{V}}-\operatorname{rg}\mathscr{V}\\ &=\operatorname{rg}\mathscr{V}-\frac{\operatorname{rig}\mathscr{V}}{\operatorname{rg}\mathscr{V}}<\operatorname{rg}\mathscr{V}.\end{aligned}$$

5. Démonstration du théorème 1.1, cas simple

On suppose que, pour tout $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$, on peut trouver $\widehat{\mathscr{L}_x}$ de rang 1 satisfaisant à (2.5 $**$).

On montre d'abord qu'il n'existe pas de fibré à connexion $\mathscr{L}$ sur U admettant les $\widehat{\mathscr{L}_x}$ comme germe formel en chaque $x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$. Ceci est d'ailleurs équivalent à dire que la somme des résidus des $\widehat{\mathscr{L}_x}$ ($x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U$) n'est pas entière.

Si un tel fibré $\mathscr{L}$ existe, voyons que $\operatorname{Hom}(\mathscr{L},\mathscr{V})$ ou $\operatorname{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{L})$ n'est pas nul. Il suffit pour cela de vérifier que $h^0(\mathbb{P}^1,\operatorname{DR}(j_{!*}\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{V})))$ ou $h^0(\mathbb{P}^1,\operatorname{DR}(j_{!*}\mathscr{H}\!om(\mathscr{V},\mathscr{L})))$ n'est pas nul. On note que l'application de composition

$$\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{V})\otimes\mathscr{H}\!om(\mathscr{V},\mathscr{L})\longrightarrow\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{L})=\mathscr{O}_U$$

est compatible aux connexions et induit un isomorphisme de $\mathscr{H}\!om(\mathscr{V},\mathscr{L})$ sur $\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{V})^\vee$. Par un argument de dualité déjà utilisé, il suffit donc de vérifier que $(h^0+h^2)(\mathbb{P}^1,\operatorname{DR}(j_{!*}\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{V})))\neq0$, et il suffit de montrer que $\chi(\mathbb{P}^1,\operatorname{DR}(j_{!*}\mathscr{H}\!om(\mathscr{L},\mathscr{V})))>0$. On a maintenant, puisque $\operatorname{rg}\mathscr{L}=1$ et en utilisant

(2.5 $**$),

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(j_{!*}\,\mathscr{H}om(\mathscr{L},\mathscr{V}))) &= 2\,\mathrm{rg}\,\mathscr{V} - \sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U} \delta_x(\mathscr{H}om(\mathscr{L},\mathscr{V}))\\ &\geqslant 2\,\mathrm{rg}\,\mathscr{V} - \frac{1}{\mathrm{rg}\,\mathscr{V}}\sum_x \delta_x(\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))\\ &= \frac{\mathrm{rig}\,\mathscr{V}}{\mathrm{rg}\,\mathscr{V}} = \frac{2}{\mathrm{rg}\,\mathscr{V}} > 0.\end{aligned}$$

Puisque $\mathscr{V}$ est irréductible, $\mathrm{Hom}(\mathscr{L},\mathscr{V})$ ou $\mathrm{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{L})$ non nul implique que $\mathscr{V}$ est de rang 1, contrairement à l'hypothèse du théorème, et donc $\mathscr{L}$ n'existe pas.

Soit $\alpha = \sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U} \mathrm{Rés}\,\widehat{\mathscr{L}_x}$. L'argument précédent montre que $\alpha\notin\mathbb{Z}$. Modifions $\widehat{\mathscr{L}_\infty}$ en $\widehat{\mathscr{L}'_\infty} = \widehat{\mathscr{L}_\infty}\otimes\widehat{\mathscr{K}_\infty^{-\alpha}}$. On pose $\widehat{\mathscr{L}'_x} = \widehat{\mathscr{L}_x}$ pour $x\neq\infty$ et $\mathscr{L}'$ le fibré de rang 1 à connexion qui correspond à ces données locales, qui existe puisque la somme des résidus des $\widehat{\mathscr{L}'_x}$ est nulle par construction. On a alors

$$\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\otimes\mathscr{K}_\infty^{-\alpha} = \mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)$$

et donc, d'après la deuxième formule du lemme 3.1,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\,\big(\mathscr{H}om(\mathscr{L}',\mathscr{V})\star\mathscr{K}^\alpha\big) &= \sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\delta_x\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_x},\widehat{\mathscr{V}}_x)\big) - \mathrm{rg}\,\mathscr{H}om(\mathscr{L}',\mathscr{V})\\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{rg}\,\mathscr{V}}\sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\delta_x\big(\mathscr{E}nd(\mathscr{V})\big) - \mathrm{rg}\,\mathscr{V}\\ &= \mathrm{rg}\,\mathscr{V} - \frac{\mathrm{rig}\,\mathscr{V}}{\mathrm{rg}\,\mathscr{V}} < \mathrm{rg}\,\mathscr{V}.\end{aligned}$$ □

6. Démonstration du théorème 1.1, cas général

On ne fait plus l'hypothèse que $\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{L}_x} = 1$ pour tout x. La proposition suivante repose sur le théorème de Levelt-Turrittin qui précise la décomposition suivant les pentes indiquée au § 2, et la forme simple des $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-espaces vectoriels à connexion irréductibles.

Proposition 6.1. *Soient $\widehat{\mathscr{U}},\widehat{\mathscr{W}}$ deux $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-espaces vectoriel de dimension finie à connexion, tels que $\widehat{\mathscr{U}}$ soit irréductible.*

(1) *Si $\mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{U}}\geqslant 2$, alors $\delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{U}},\widehat{\mathscr{W}})\big)\geqslant \mathrm{rg}\,\mathscr{U}\,\mathrm{rg}\,\mathscr{W}$.*

(2) *Si la pente de $\widehat{\mathscr{U}}$ est non entière et >2, alors $\delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{U}},\widehat{\mathscr{W}})\big)\geqslant 2\,\mathrm{rg}\,\mathscr{U}\,\mathrm{rg}\,\mathscr{W}$.*

(3) *Si la pente de $\widehat{\mathscr{U}}$ est non entière et <2, alors*

$$\delta_0\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{U}},\widehat{\mathscr{W}})\big)\geqslant \mathrm{rg}\,\mathscr{U}\,(\mathrm{irr}\,\widehat{\mathscr{W}}^{(>1)} - \mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{W}}^{(>1)} + \mathrm{rg}\,\widehat{\mathscr{W}}).$$

Indication de démonstration. Par la propriété de semi-additivité supérieure de δ_0, on se ramène au cas où $\mathscr{W}$ est aussi irréductible. On utilise alors l'expression explicite de $\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{U}},\widehat{\mathscr{W}})$ (voir par exemple [**4**, (3.11)], ou [**1**]). □

On revient aux notations du théorème. Montrons l'unicité de x tel que $\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_x}\geqslant 2$. En un tel x, on a

$$\begin{aligned}\delta_x(\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))&\geqslant\frac{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_x}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_x}}\cdot\delta_x\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_x},\widehat{\mathscr{V}}_x)\big)\quad\text{d'après (2.5 $**$)},\\&\geqslant(\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_x)^2\quad\text{d'après 6.1(1).}\end{aligned}$$

Mais l'hypothèse de rigidité donne

$$\sum_x\delta_x(\mathscr{E}nd(\mathscr{V}))=2(\operatorname{rg}\mathscr{L})^2-\operatorname{rig}\mathscr{V}<2(\operatorname{rg}\mathscr{L})^2,$$

d'où l'assertion.

On effectue alors une homographie pour placer le point x à l'infini. Montrons maintenant (4.1). Notons que, pour $\widehat{\mathscr{L}'_\infty}$ de rang 1, on a une identification de $\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)$ à

$$\mathscr{H}om\,\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{L}_\infty}),\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big).\tag{6.2}$$

Choisissons donc $\widehat{\mathscr{L}'_\infty}$ comme indiqué au § 4(2). D'après (3.1 $*$), on a

$$\begin{aligned}\delta_\infty\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)&\leqslant\frac{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_\infty}\delta_\infty\big(\mathscr{E}nd(\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)\\&\leqslant\frac{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_\infty}\sum_{x\in\mathbb{P}^1\smallsetminus U}\delta_x\big(\mathscr{E}nd(\widehat{\mathscr{V}}_x)\big)\\&=\frac{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}}{\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_\infty}(2(\operatorname{rg}\mathscr{V})^2-2)\\&<2\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_\infty\\&=2\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{L}_\infty})\cdot\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty).\end{aligned}$$

Alors $\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{L}_\infty})$ ne peut se trouver dans le cas (2) de la proposition 6.1, il est donc dans le cas (3). On déduit de 6.1(3), toujours en utilisant l'identification (6.2), que

$$\begin{aligned}&\delta_\infty\big(\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)\\&\qquad\geqslant\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{L}_\infty})\big(\operatorname{irr}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)}-\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)}\\&\qquad\qquad+\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)\big)\\&\qquad=\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{L}_\infty}\big(\operatorname{irr}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)}-\operatorname{rg}\mathscr{H}om(\widehat{\mathscr{L}'_\infty},\widehat{\mathscr{V}}_\infty)^{(>1)}+\operatorname{rg}\widehat{\mathscr{V}}_\infty\big).\qquad\square\end{aligned}$$

Références

[1] D. Arinkin – « Rigid irregular connections on $\mathbb{P}^1$ », *Compositio Math.* **146** (2010), no. 5, p. 1323–1338, arXiv : `0808.0742`.

[2] S. Bloch & H. Esnault – « Local Fourier transforms and rigidity for $\mathscr{D}$-Modules », *Asian Math. J.* **8** (2004), no. 4, p. 587–606.

[3] B. Malgrange – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.

[4] C. Sabbah – « An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform », in *Singularities, vol. 1*, Contemp. Math., American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, p. 300–330, arXiv : 0706.3570.

---

29 juillet 2011

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah