Introduction à la théorie de la déformation
Théorèmes de Torelli

O. Schiffmann

1 Familles de Kuranishi

Définition: on appelle *famille* de base S tout morphisme propre et lisse de variétés complexes connexes

$$f : \chi \to S$$

et pour $s \in S$ on notera $X_s = f^{-1}(s)$ la fibre au-dessus de s.

La fibration f est $\mathcal{C}^\infty$ localement triviale, et les X_s, $s \in S$ sont tous difféormorphes (mais avec des structures complexes différentes). En particulier, les nombres dim $H^n(X_s, \mathbb{C})$ sont indépendants de s. Posons $h^{p,q}(s) = \dim H^q(X_s, \Omega^p)$ où Ω^p désigne le fibré des p-formes holomorphes sur X_s. Les fonctions $h^{p,q}(s)$ sont semi-continues supérieurement.

Supposons de plus que toutes les fibres X_s soient des variétés Kahlériennes. Dans ce cas, la décomposition de Hodge

$$H^n(X_s, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X_s, \Omega^p)$$

implique que les $h^{p,q}(s)$ sont des fonctions constantes sur S: ce sont les *nombres de Hodge* de la famille $f : \chi \to S$.

Le cas le plus courant est celui de familles projectives: il existe $n > 0$ et un plongement $i : \chi \to \mathbb{P}^n \times S$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n \times S \arrow[d, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

L'inclusion $i : X_s \to \mathbb{P}^n$ munit X_s d'une structure de variété projective. En particulier les X_s sont des variétés Kahlériennes et algébriques.

Déformations. Soit $f : \chi \to S$ une famille, $s_0 \in S$ et $X : = X_{s_0}$. On appelle aussi $f : \chi \to S$ une déformation de la variété complexe X. Cette déformation est (localement) triviale si il existe (sur un voisinage U de s_0) un difféomorphisme holomorphe $\nu : \chi \to X \times S$ tel que:

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "f"'] & X \times S \arrow[d, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Groupe de monodromie. Soit $f : \chi \to S$ une déformation de $X = X_{s_0}$. Soient $s_1 \in S$ et $\gamma : [0,1] \to S$ un arc joignant s_0 à s_1. On déduit de γ une classe d'homotopie d'isomorphismes $\mu : X \to X_{s_1}$, et un isomorphisme encore noté $\mu : H^*(X_{s_1}, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{Z})$. En particulier, on a un homomorphisme $\pi_1(S; s_0) \to \mathrm{Aut}(H^*(X, \mathbb{Z}))$. L'image de ce morphisme est appelé le *groupe de monodromie* de X (ou de s_0).

Déformations complètes, (uni)verselles. Une déformation $f : \chi \to S$ de $X = X_{s_0}$ est *complète* si toute autre déformation $\phi : \mathcal{F} \to P$ de $X = \phi^{-1}(p_0)$ se déduit de f par un changement de base local, i.e si il existe un voisinage $U \subset P$ de p_0 et $\pi : U \to S$ holomorphe tels que $\pi(p_0) = s_0$ et $\Phi_{|U} = \chi \times_\pi U \to U$ (famille induite).

Une déformation complète $f : \chi \to S$ est *verselle* si de plus $(d\pi)_{p_0}$ est uniquement déterminé, et *universelle* si le germe de π en p_0 est uniquement déterminé.

Une déformation complète verselle d'une variété X est aussi appelée *famille de Kuranishi* de X. Une telle déformation est essentiellement unique. On verra plus tard des critères cohomologiques simples qui assurent l'existence d'une famille de Kuranishi.

2 Application de Kodaira-Spencer

Soit $f : \chi \to S$ une déformation d'une variétée complexe compacte $X = X_{s_0}$. On a la suite exacte

$$0 \to T_X \to T_{\chi|X} \to N_X^\chi \to 0$$

où T_X est le fibré tangeant à X, $T_{\chi|X}$ est la restriction à X du fibré tangeant à χ, et N_X^χ est le fibré normal à X dans χ. L'application $df_{|X}$ induit un isomorphisme $df_{|X} : N_X^\chi \to T_{s_0}$ où T_{s_0} est l'espace tangeant à S en s_0. Ainsi tout $h \in T_{s_0}$ détermine une section globale $\overline{h} \in H^0(X, N_X^\chi)$. On a la longue suite exacte en cohomologie

$$0 \to H^0(X, T_X) \to H^0(X, T_{\chi|X}) \to H^0(X, N_X^\chi) \xrightarrow{\delta} H^1(X, T_X) \to \dots$$

L'application de *Kodaira-Spencer*

$$\rho : T_{s_0} \to H^1(X, T_X)$$

est la composée $\rho(h) = \delta(\overline{h})$.

Explicitons cette application dans le cas dim $S = 1$. Soit s une coordonnée locale de S au voisinage de s_0, $\{U_\alpha\}$ un recouvrement d'un voisinage de X, de coordonnées locales $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^d, s)$ (avec $d = \dim X$), et soient $x_\beta^i = F_{\alpha,\beta}^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^d, s)$ les fonctions de transition sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Soit $\frac{\partial}{\partial s} \in T_{s_0}$ la dérivation correspondant à s. Posons

$$t_{\alpha,\beta} = (\frac{\partial}{\partial s})_\beta - (\frac{\partial}{\partial s})_\alpha = \sum_j \frac{\partial F_{\alpha,\beta}^j}{\partial s} \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \in H^0(X, T_X). \tag{1}$$

On a $t_{\alpha,\beta} + t_{\beta,\alpha} = 0$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap X$ et $t_{\alpha,\beta} + t_{\beta,\gamma} + t_{\gamma,\alpha} = 0$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap X$, i.e. $\{t_{\alpha,\beta}\}$ définit un 1-cocycle (de Cech). On a $\rho(\frac{\partial}{\partial s}) = \{t_{\alpha,\beta}\} \in H^1(X, T_X)$.

Il est clair que si $f : \chi \to S$ est une déformation (localement) triviale de X alors l'application de Kodaira-Spencer est nulle (par (1) par exemple). C'est pourquoi on appelle $H^1(X, T_X)$ l'espace des déformations infinitésimales.

Remarque: il est facile de fabriquer des déformations non triviales d'application de Kodaira-Spencer triviale: par un changement de base $\pi : (P, p_0) \to (S, s_0)$ l'application de Kodaira-Spencer se transforme selon $\rho_P = \rho_S \circ d\pi_{p_0}$; il suffit de prendre une déformation non triviale et un changement de base π vérifiant $d\pi_{p_0} = 0$.

L'application de Kodaira-Spencer fournit un critère d'existence de familles de Kuranishi:

Théorème 1 (Kodaira-Nirenberg-Spencer) *Soit X une variété complexe compacte vérifiant $H^2(X, T_X) = 0$. Alors il existe un polydisque S et une déformation complète $f : \chi \to S$ de X sur laquelle l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme. Si, de plus $H^0(X_s, T_{X_s})$ est constant dans un voisinage de s_0 alors f est une déformation universelle.*

Remarques: -une déformation complète d'application de Kodaira-Spencer injective est automatiquement verselle.
-une famille $f : \chi \to S$ est complète si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer est surjective (théorème de Kodaira-Spencer).

3 Espaces de modules (variétés algébriques polarisées)

On cherche à classifier des variétés complexes/algébriques d'un certain type. On commence par spécifier des paramètres discrets (dimension, genre, nombres de Hodge,...) jusqu'à avoir un système de paramètres continus ("modules"). Soit X une variété compacte complexe. Différents "modules" de X correspondent à différentes structures complexes sur la $\mathcal{C}^\infty$ variété X, et la construction d'un espace de module revient à munir l'ensemble $\mathcal{M}$ de ces structures complexes lui même d'une structure complexe, ainsi qu'à construire une famille

$$f : \chi \to \mathcal{M}$$

telle que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(m)$ soit isomorphe à la variété paramétrée par m.

La famille $f : \chi \to \mathcal{M}$ est un *espace de module fin* de X si, pour toute déformation $\phi : \mathcal{F} \to P$ de X, il existe un unique morphisme $\pi : P \to \mathcal{M}$ tel que $\phi = \chi \times_\pi P$.

Notons que si $\mathcal{M}$ est un espace de module fin de X alors un voisinage de $X \in \mathcal{M}$ est une famille de Kuranishi universelle de X.

Une telle situation arrive rarement. Par exemple il n'existe pas d'espace de modules fins pour les courbes elliptiques: si E est une courbe elliptique, il est facile de construire (à l'aide de translations dans E) un groupe à un paramètre d'automorphismes $\xi_t : \mathbb{C}^* \to \text{Aut }(E)$, et donc une famille non triviale $f : \chi \to \mathbb{C}^*$ dont toutes les fibres sont isomorphes à E. S'il existait un espace de module fin $\mathcal{M}$ pour les coubres elliptiques, cette famille serait induite par l'application $\mathbb{C}^* \to \mathcal{M}, c \mapsto [E]$ (et donc triviale). C'est pourquoi il faut se contenter de la notion suivante:

La famille $f : \chi \to \mathcal{M}$ est un *espace de module grossier* si, pour toute déformation $\phi : \mathcal{F} \to P$, il existe un morphisme $\pi : P \to \mathcal{M}$ tel que $\phi^p = f^{-1}(\pi(s))$.

Mumford a construit un espace de module grossier $\mathcal{M}_g$ (de dimension $3g-3$) pour les courbes complexes compactes de genre g. Le cas $g = 1$ des courbes elliptiques remonte à beaucoup plus loin.

Remarque: Dans le cas d'un espace de module grossier $\mathcal{M}$, le voisinage d'une variété $X \in \mathcal{M}$ n'est plus nécessairement une famille de Kuranishi de X. On a une application $S \to \mathcal{M}$, qui peut être non injective (quotient par un groupe d'automorphismes analytiques locaux, cf [1], 2.5)

Variétés algébriques polarisées. Une variété algébrique X de dimension d est dite polarisée si elle est munie d'une $(1,1)$ forme fermée ω qui est (à un multiple rationnel positif près) la classe de Chern d'un fibré en droite positif (c'est à dire qu'il existe une métrique sur L de matrice de courbure positive). Deux variétés polarisées (X, ω) et (X', ω') sont isomorphes si il existe un isomorphisme $\phi : X \to X'$ vérifiant $\phi^*([\omega']) = \alpha[\omega]$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^+$.

Les exemples les plus courants de variétés algébriques polarisées sont les variétés projectives: si $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ est un plongement, on prend $L = \pi^*(\mathcal{O}(1))$ et $\omega = c_1(L)$.

Cohomologie primitive, décomposition de Lefschetz. Soit (X, ω) une variété algébrique polarisée de dimension d. En particulier, ω est une forme de Kahler, et on a la décomposition de Hodge de poids n

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X).$$

Il existe aussi une autre décomposition de $H^n(X, \mathbb{C})$ (de Lefschetz). Notons $\xi^{p,q}(X)$ le fibré des formes p-holomorphes et q-antiholomorphes sur X, et $\xi^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \xi^{p,q}(X)$. Notons aussi d l'opérateur de différentiation usuel, δ son adjoint et $\Delta = d\delta + \delta d$ le Laplacien associé à ω. Enfin, soit $\mathcal{H}^n$ l'espace des

n-formes harmoniques, et soit $\mathcal{H}^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^{p,q}$ la décomposition en formes harmoniques de poids (p,q). Le théorème de Hodge dit $H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}$.

Considérons l'opérateur $L : \xi^k(X) \to \xi^{k+2}(X),\ \phi \mapsto \omega \wedge \phi$. Comme $d\omega = 0$, on a $Ld = dL$. Soit $\Lambda = L^*$. Un calcul montre que

$$[\Lambda, L] = \sum_{r=0}^{2d} (d-r)\Pi_r :\ = \Pi$$

où $\Pi_r : \xi^*(X) \to \xi^r(X)$ est la projection. On vérifie les relations

$$[\Pi, L] = -2L, \qquad [\Pi, \Lambda] = 2\Lambda,$$

i.e. (L, Π, Λ) est un sl_2-triplet. En particulier, l'algèbre $\mathbb{C}L \oplus \mathbb{C}\Pi \oplus \mathbb{C}\Lambda \simeq sl_2(\mathbb{C})$ opère sur le module $\mathcal{H}^n$ (qui est de dimension finie), qui se décompose donc en somme de représentations irréductibles. Rappelons que les représentations irréductibles de dimension finie de $sl_2(\mathbb{C})$ sont paramétrées par $\mathbb{N}$ et que le module V_k correspondant à $k \in \mathbb{N}$ admet la description suivante:

$$V_k = v \oplus Lv \oplus \ldots \oplus L^k v,$$

où $L^{k+1}v = 0$, $\Lambda(L^r v) = L^{r-1}v$ et $\Lambda v = 0$, et $\Pi(L^r v) = (k-2r)v$. L'espace vectoriel $\mathbb{C}v = \mathrm{Ker}\ \Lambda \subset V_k$ est appelé espace de plus haut poids, ou *espace primitif.* Il permet de reconstruire le reste du module. On pose $P^n(X) = \mathrm{Ker}\ \Lambda_{|\mathcal{H}^n}$ (*cohomologie primitive*). On obtient ainsi la *décomposition de Lefschetz*

$$H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_k L^k P^{n-2k}(X).$$

Notons que cette décomposition est compatible avec la décomposition de Hodge: on pose $P^{p,q}(X) = P^{p+q}(X) \cap H^{p,q}(X)$, et on a

$$P^k(X) = \bigoplus_{p+q]k} P^{p,q}(X); \qquad \overline{P^{p,q}(X)} = P^{q,p}(X).$$

Relations de Hodge-Riemann. Soit (X,ω) une variété algébrique polarisée de dimension d, et $k \leq d$. Considérons la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} Q :\ H^{d-k}(X) \otimes H^{d-k}(X) &\to \mathbb{C} \\ (\phi, \psi) &\mapsto \int_X \phi \wedge \psi \wedge \omega^k \end{aligned}$$

Cette forme est symétrique si $d-k \equiv 0 \pmod 2$ et antisymétrique si $d-k \equiv 1 \pmod 2$. De plus, $Q(H^{p,q}, H^{r,s}) = 0$ si $p \neq s$ ou $q \neq r$. Enfin, on montre que si $\Omega \in P^{p,q}(X)$ alors

$$i^{p-q}(-1)^{(d-p-q)(d-p-q-1)/2} Q(\Omega, \overline{\Omega}) > 0$$

(Relations de Hodge-Riemann). En particulier, comme $Q(L^r\phi, L^r\psi) = Q(\phi,\psi)$, ceci montre que Q est non dégénérée.

Structure de Hodge polarisée. Les relations de Hodge-Riemann sur la cohomologie d'une variété algébrique polarisée mènent à la définition suivante: une *structure de Hodge polarisée* de poids n $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}, Q\}$ est la donnée d'une structure de Hodge $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ et d'une forme bilinéaire

$$Q :\ H_{\mathbb{Z}} \otimes H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$$

étendue par bilinéarité à $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ telle que

i) $Q(\phi,\psi) = (-1)^n Q(\psi,\phi)$,

ii) $Q(\phi,\psi) = 0$ si $\phi \in H^{p,q}$, $\psi \in H^{r,s}$ et $(p,q) \neq (s,r)$,

iii) $i^{p-q}Q(\psi,\overline{\psi}) > 0$ pour tout $\psi \in H^{p,q}\backslash\{0\}$.

La cohomologie primitive d'une variété algébrique polarisée est l'exemple typique d'une structure de Hodge polarisée (c'est fait pour).

Espace de modules de variétés algébriques polarisées. Soit (X,ω) une variété algébrique polarisée. On cherche à munir d'une structure de variété algébrique l'ensemble $\mathcal{M}$ des structures $(\tilde{X},\tilde{\omega})$ de variétés algébriques polarisée sur la $\mathcal{C}^\infty$-variété X qui donnent la même polarisation de $H^n(X,\mathbb{Z})$ (i.e. la même forme $Q : H^n(X,\mathbb{Z})\otimes H^n(X,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$) que (X,ω) (c'est clair?).

On dit que la variété algébrique $\mathcal{M}$ ainsi obtenue est un espace de module grossier pour (X,ω) si, pour toute déformation algébrique $\phi:\mathcal{F}\to S$ de fibres X_s munies d'une $(1,1)$ classe de cohomologie $[\omega_s]$ positive, entière, et invariante par l'action du groupe de monodromie (et telle que $(X_{s_0},\omega_{s_0})=(X,\omega)$), il existe un morphisme $\pi:S\to\mathcal{M}$ tel que $(\phi^{-1}(s),\omega_s)$ soit isomorphe à la variété paramétrisée par $\mathcal{M}$.

4 L'application période

Espace classifiant. Supposons nous donné: un entier n; un $\mathbb{Z}$-module libre $H_{\mathbb{Z}}$; une forme bilinéaire non dégénérée $Q:H_{\mathbb{Z}}\otimes H_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Z}$ vérifiant $Q(\phi,\psi)=(-1)^nQ(\psi,\phi)$; des entiers $h^{p,q}$, $p+q=n$, tels que $h^{p,q}=h^{q,p}$ et $\sum h^{p,q}=\text{rang } H_{\mathbb{Z}}$.

L'espace classifiant D pour $\{H_{\mathbb{Z}},Q\}$ est par définition l'ensemble des structures de Hodge polarisées $\{H_{\mathbb{Z}},H^{p,q},Q\}$ de poids n et de nombres de Hodge $\dim H^{p,q}=h^{p,q}$. Pour munir D d'une structure de variétée algébrique, considérons la filtration de Hodge $\{F^d\subset F^{n-1}\subset\ldots F^0=H_{\mathbb{C}}\}$ associée à une structure de Hodge $\{H_{\mathbb{Z}},H^{p,q},Q\}$ (définie par $F^p=\bigoplus_{j=0}^{n-p}H^{n-j,j}$). C'est un élément de la variété des drapeaux

$$\mathcal{F}:=\{F^d\subset F^{d-1}\subset\ldots F^0=H_{\mathbb{C}}\};\qquad \dim F^p=f^p$$

avec $f^p=\sum_{j=0}^{n-p}h^{n-j,j}$. La variété $\mathcal{F}$ est une sous-variété complexe compacte (projective) de $\prod_p G^{f^p}_{H_{\mathbb{C}}}$, où $G^{f^p}_{H_{\mathbb{C}}}$ désigne la Grassmanienne des f^p-sous-espaces vectoriels de $H_{\mathbb{C}}$. La condition ii) définissant les structures de Hodge polarisées s'écrit $Q(F^p,F^{n-p+1})=0$, et définit donc un sous-espace algébrique $\tilde{D}$ de $\mathcal{F}$ (espace classifiant dual). Les conditions restantes (iii) et $F^p+\overline{F^{n-p+1}}=H_{\mathbb{C}}$) définissent un ouvert D de $\tilde{D}$, qui est l'espace classifiant souhaité. Toutes ces variétés sont lisses. Enfin, notons $G_{\mathbb{Z}}$ le groupe des automorphismes $\mathbb{Z}$-linéaires de $H_{\mathbb{Z}}$ qui préservent Q (et qui opère sur D).

Application période. Soit $f:\chi\to S$ une famille projective, de plongement $i:\chi\to\mathbb{P}^n\times S$. Les fibres X_s sont algébriques et Kahlériennes. Elles sont aussi munies d'une polarisation naturelle $\omega_s=i^*c_1(\mathcal{O}(1))$, qui induit une forme bilinéaire Q_s sur la cohomologie (primitive). Comme ω_s est la restriction à $H^2(X_s,\mathbb{Z})$ d'une classe $\omega\in H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$, pour tout chemin $\gamma:[0,1]\to S$, $\gamma(0)=s_0$, $\gamma(1)=s$ on a $\gamma_s^*(\omega_s)=\omega_{s_0}$. Soit $n>0$, et posons $(H_{\mathbb{Z}})_s=P^n(X_s,\mathbb{Z})$, et $H_{\mathbb{Z}}=P^n(X_{s_0},\mathbb{Z})$. Ainsi, $\gamma_s^*:\ (H_{\mathbb{Z}})_s\tilde{\to}H_{\mathbb{Z}}$ envoie Q sur Q_s. En particulier, le groupe de monodromie Γ_s est un sous-groupe de $G_{\mathbb{Z}}=\text{Aut }(H_{\mathbb{Z}},Q)$. En étendant γ_s^* linéairement à $P^n(X_s,\mathbb{C})$ et en posant $H_s^{p,q}=P^{p,q}(X_s)$, on obtient une structure de Hodge polarisée $\{H_{\mathbb{Z}},\gamma_s^*(H_s^{p,q}),Q\}$. Pour tout groupe Γ, tel que $G_{\mathbb{Z}}\supset\Gamma\supset\Gamma_s$ on a donc construit une *application période*:

$$\Phi_\Gamma:S\to D/\Gamma.$$

Théorème 2 (Griffith) *L'application Φ_Γ est holomorphe: pour tout $s_0\in S$ il existe un voisinage U de s_0 et $\Phi_U:U\to D$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr, "\Phi_\Gamma"'] & & D \arrow[dl, "\pi"] \\ & D/\Gamma & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Notons que ce théorème est aussi valable dans le cas d'une famille de variétés Kahlériennes compactes (pas nécessairement projectives) définie sur un polydisque S.

5 Théorèmes de Torelli

Les théorèmes de Torelli répondent à la question suivante: quand les périodes d'une variété algébrique polarisée déterminent-elles la variété? En d'autres termes, quand est-ce que l'application période est un plongement? Le premier résultat qui va dans ce sens est le théorème de Torelli (le vrai) qui date de 1914, et qui répond à cette question (par l'affirmative) dans le cas des courbes. Il existe trois types de théorèmes de Torelli: infinitésimal (pour les familles de Kuranishi), local, et global (pour les espaces de modules grossiers).

Théorème de Torelli infinitesimal. Soit X une variété compacte Kahlérienne admettant une famille de Kuranishi universelle $f : \chi \to S$ de base $S \simeq H^1(X, T_X)$ (par exemple $H^0(X, T_X) = H^2(X, T_X) = 0$). Supposons de plus que chaque fibre X_s soit équippée d'une structure Kahlerienne ω_s (dépendant de s de manière lisse). Soit $n > 0$. Comme $\pi_1(S) = 0$ et qu'on ne s'est pas donné de polarisation, l'application période de poids n s'écrit ici (cf. §4)

$$\Phi : S \to \mathcal{F}.$$

On dit que le théorème de Torelli infinitésimal est vrai pour la variété Kahlérienne X si Φ est un plongement au voisinage de X, i.e. si $(d\Phi)_{s_0}$ est injective.

Supposons maintenant que la forme de Kahler ω de X soit entière et positive (une polarisation), et soit $S_\omega \subset S$ la sous-variété de S sur laquelle ω_s définisse aussi une polarisation; c'est la famille de Kuranishi universelle pour la variété algébrique polarisée (X, ω). On dit que le théorème de Torelli infinitésimal est vrai pour (X, ω) (et pour le poids n) si

$$\Phi : S_\omega \to D$$

est un plongement au voisinage de (X, ω), i.e si $(d\Phi)_{|TS_\omega}$ est injective.

Théorème de Torelli local, global. Soit (X, ω) une variété algébrique polarisée et supposons qu'il existe un espace de modules grossier $\mathcal{M}$ de (X, ω). Soit $n > 0$. L'application période

$$\Psi : \mathcal{M} \to D/G_{\mathbb{Z}}$$

fait correspondre à $m \in \mathcal{M}$ l'élément $u \in D$ paramétrisant la structure de Hodge polarisée de la variété $(\mathcal{M}_m, \omega_m)$. On dit que le théorème de Torelli local est vrai pour (X, ω) si l'application $d\Psi : T_{[(X,\omega)]} \to T_{\Psi([(X,\omega)])}$ est injective. On dit que le théorème de Torelli global est vrai pour (X, ω) si Ψ définit un plongement (des points fermés) de $\mathcal{M}$ vers $D/G_{\mathbb{Z}}$.

On peut aussi se demander quand l'application période est *surjective*. Un argument de dimension montre que cela n'arrive pas quand X est une courbe. Par contre, Kulikov a démontré que Ψ est surjective dans le cas des surfaces $K3$.

Remarque: Il est possible qu'un théorème de Torelli local soit vrai alors que le théorème de Torelli infinitésimal correspondant est faux. Cela tient au fait que la famille de Kuranishi universelle d'une variété X peut être "plus grosse"que le voisinage de $[X]$ dans l'espace de module $\mathcal{M}$.

6 Courbes (elliptiques) et variétés abéliennes

Espace classifiant des courbes de genre $g > 0$. Soit E une courbe algebrique lisse de genre $g > 0$. Considérons la structure de Hodge de poids 1 de E. On a

$$H_{\mathbb{Z}} = H^1(E, \mathbb{Z}) = P^1(E, \mathbb{Z}), \qquad (\text{rang } H_{\mathbb{Z}} = 2g),$$
$$H_{\mathbb{C}} = H^1(E, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}, \qquad \dim H^{1,0} = \dim H^{0,1} = g.$$

Ici on a une polarisation gratuite, donnée par

$$Q(\phi, \psi) = \int_E \phi \wedge \psi, \qquad \phi, \psi \in H^1(E, \mathbb{C}).$$

Cette forme est la duale de la forme d'intersection $H_1(E, \mathbb{Z}) \otimes H_1(E, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, et il existe une base $\eta_1, \ldots, \eta_g, \mu_1, \ldots \mu_g$ de $H^1(E, \mathbb{Z})$ dans laquelle la matrice de Q est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Construisons l'espace classifiant associé aux données d'un $\mathbb{Z}$-module libre $H_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}\eta_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\mu_g$ muni d'une forme antisymétrique Q donnée par 2. A tout couple de sous-espaces $H^{1,0}, H^{0,1} \subset H_{\mathbb{Z}}$ de dimension g, vérifiant $\overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$, $H^{1,0} \oplus H^{0,1} = H_{\mathbb{C}}$ on associe la matrice complexe Z de taille $g \times g$ telle que

$$(p\eta_1, \ldots, p\eta_g) = -(p\mu_1, \ldots, p\mu_g)Z,$$

ou $p : H_{\mathbb{C}} \to H^{0,1}$ est la projection le long de $H^{1,0}$. On vérifie que les conditions $i)$ et $ii)$ impliquent que:

a) Z est symétrique,

b) Im Z est définie positive.

L'espace classifiant D est donc l'ensemble des matrices complexes Z vérifiant $a)$ et $b)$. C'est le *demi-plan de Siegel* H_g. Le groupe $G_{\mathbb{Z}}$ est ici

$$SP(2g, \mathbb{Z}) = \left\{ \gamma \mid \gamma \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \gamma^t = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

qui opère sur H_g par

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Notons que changer de bases $(\eta_1, \ldots, \mu_g)$ dans la construction de la matrice Z ci-dessus revient a opérer (sur Z) par un élément de $G_{\mathbb{Z}}$.

Le domaine des périodes est donc

$$D/G_{\mathbb{Z}} = H_g/Sp(2g, \mathbb{Z}).$$

Dans le cas $g = 1$ (courbes elliptiques), on retrouve bien sur le demi-plan de Poincaré $H_1 = \mathbb{H}$ et $G_{\mathbb{Z}} = SL(2, \mathbb{Z})$, et on reconnaitra en $H_1/G_{\mathbb{Z}}$ l'espace des modules des courbes elliptiques.

Espace classifiant des variétés abéliennes polarisées. Fixons $g > 0$ et soit H un réseau de $\mathbb{C}^g$. Le tore complexe $X = \mathbb{C}^g/H$ est une *variété abélienne* si X est projectif (et donc algébrique). Notons que le choix d'un plongement $i : X \to \mathbb{P}^n$ determine une polarisation ω sur X définie par $\omega = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

Remarque: tout tore de rang 1 est projectif (courbe elliptique). En général un tore $\mathbb{C}^g/H$ est une variété abélienne si H vérifie les conditions de Riemann-Frobenius (cf [1]).

Soient $e_1, \ldots e_{2g}$ une base du $\mathbb{Z}$-module H et $x_1, \ldots x_{2g}$ les coordonnées réelles associées (i.e. $x_i(e_j) = \delta_{ij}$). Les formes $dx_1, \ldots dx_{2g}$ forment une base de $H^1(X, \mathbb{Z})$ et $H_1(X, \mathbb{Z})$ s'identifie à H. La forme ω s'écrit

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad r_{ij} \in \mathbb{Z}$$

pour une certaine matrice $R = (r_{ij})$ antisymétrique et non-dégénérée. Cette matrice se met sous forme normale (de Smith) $R = PR'P^t$ où

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} (\delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_g \end{pmatrix}$$

avec $\delta_i \in \mathbb{N}$ et $delta_i \mid \delta_{i+1}$ les *diviseurs élémentaires* de la forme ω.

Autrement dit, il existe une base $e'_1, \ldots e'_{2g}$ de H définissant des coordonnées $dx'_1, \ldots dx'_{2g}$ dans laquelle

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} \delta_j dx'_j \wedge dx'_{j+g}.$$

L'ensemble $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ est le *type de polarisation* de (X, ω). Si $(\delta = (1, \ldots, 1)$ alors (X, ω) est dite de *polarisation principale*.

Il est clair que $\delta_1^{-1}e'_1,\dots,\delta_g^{-1}e'_g$ forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^g$. Notons $z_1,\dots z_g$ les coordonnées complexes correspondantes. Les formes $dz_1,\dots dz_g \in H^1(X,\mathbb{C})$ foement une base de $H^{1,0}$. Décomposons les vecteurs $e'_1,\dots e'_{2g}$ dans la base $\delta_1^{-1}e'_1,\dots,\delta_g^{-1}e'_g$:

$$(e'_1,\dots,e'_{2g}) = (\Delta \mid Z)$$

où Z est une matrice complexe de taille $g\times g$. Les relations de Hodge-Riemann impliquent que Z est symétrique et que $\operatorname{Im} Z$ est définie positive, i.e. $Z\in H_g$. Ceci montre que l'espace classifiant des variétés abéliennes polarisées de polarisation δ fixée est le demi-plan de Siegel H_g.

Théorèmes de Torelli (globaux). Commencons par les variétés abéliennes. Pour simplifier on se restreindra au cas de polarisation principale. Soit $Z\in H_g$. La matrice

$$\Omega = (\Delta \mid Z)$$

définit $2g$ vecteurs $e_1,\dots,e_{2g}$ de $\mathbb{C}^g$, qui engendrent un réseau $H=\mathbb{Z}e_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}e_{2g}$. Posons $X=\mathbb{C}^g/H$. Soient $x_1,\dots,x_{2g}$ les coordonnées réelles correspondant à la base $e_1,\dots,e_{2g}$ et soit

$$\omega = \sum_j dx_j\wedge dx_{j+g}.$$

En utilisant le fait que $Z\in H_g$ on vérifie que ω est une $(1,1)$-forme représentant une classe de cohomologie positive et entière. On a ainsi reconstruit la variété abélienne X et sa polarisation ω à partir de la donnée de sa structure de Hodge polarisée de poids 1.

Maintenant, soient $Z',Z''\in H_g$ et (X',ω'), (X'',ω'') sont les variétés abéliennes correspondantes. On montre que $(X',\omega')\simeq(X'',\omega'')$ si et seulement si

$$Z'\in G_{\mathbb{Z}}Z'' = Sp(2g,\mathbb{Z})Z''.$$

Ceci montre que l'espace

$$\mathcal{M}^g_{ab} :\, = D/G_Z = H_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$$

est l'espace de modules (grossier) dpour les variétés abéliennes de rang g et de polarisation principale (et l'application période n'est autre que l'identité).

Passons au cas des courbes lisses de genre $g>0$. Mumford a construit un espace de module grossier $\mathcal{M}_g$, qui est une variété algébrique lisse quasiprojective de dimension $3g-3$ (notons que $3g-3 = \dim H^1(C_g,TC_g)$ pour toute courbe lisse de genre g, ce qui est en accord avec le §2).

Composons l'application période

$$\Phi : \mathcal{M}_g \to H_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$$

avec l'isomorphisme $H_h/Sp(2g,\mathbb{Z}) = \mathcal{M}^g_{ab}$. Ce morphisme s'interprète comme suit: à toute courbe C de genre g on associe l'unique variété abélienne polarisée $J(C)$ qui a même structure de Hodge de poids 1. Cette variété abélienne s'appelle la *Jacobienne* de C, et le théorème de Torelli global pour les courbes lisses de genre g s'écrit donc

Théorème 3 (Torelli) *Deux courbes lisses, connexes, de genre g sont isomorphes si et seulement si leurs Jacobiennes sont isomorphes.*

Remarque: contrairement au cas des surfaces $K3$, la détermination de l'image de l'application période $\Phi:\ \mathcal{M}_g\to D/G_{\mathbb{Z}}$ (i.e l'ensemble des variétés abéliennes qui sont des Jacobiennes) est un problème difficile (problème de Schottky). Ceci explique pourquoi il n'existe pas de construction *par la théorie de la déformation* (des points complexes) de l'espace des modules $\mathcal{M}_g$.

Les théorèmes de Torelli infinitesimaux sont faux pour les courbes de genre $g>1$ et pour les variétés abéliennes (cf [1], §5.5).

Références

Tout ce qui précède est ALLÈGREment pompé de:

[KK] Kulikov V.S., Kurchanov P.F., *Periods of integrals and Hodge structures*, dans Algebraic Geometry III, EMS, Springer Verlag vol. 36.