Comptage de courbes pseudo-holomorphes

Denis Auroux

9 novembre 1998

Le but de cet exposé est de présenter sommairement les espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes et les techniques utilisées pour les compactifier, dans le but de définir les invariants de Gromov-Witten.

1 Espace de modules de courbes

1.1 Notations et rappels

Dans tout ce qui suit, (M, ω) sera une variété symplectique compacte de dimension $2n$, munie d'une structure presque complexe compatible J (c'est-à-dire que $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne sur M).

On notera $c_1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$ la première classe de Chern du fibré tangent de M (cette classe de cohomologie sera introduite plus en détail dans un exposé ultérieur ; ici on introduit seulement la caractérisation suivante : pour toute sous-variété $S \subset M$ de dimension 2, $\langle c_1, [S] \rangle$ est le degré topologique, en tant que fibré vectoriel complexe, de la restriction à S du fibré tangent TM). Dans le cas d'une variété de Calabi-Yau on a $c_1 = 0$.

Rappelons qu'une courbe pseudo-holomorphe est une application $u : (\Sigma, j) \to (M, J)$ qui vérifie $du \circ j = J \circ du$, où (Σ, j) est une surface de Riemann (i.e. une variété complexe de dimension complexe 1). On s'intéressera tout particulièrement au cas des *courbes rationnelles*, c'est-à-dire lorsque la courbe est de genre $g = 0$ ($\Sigma = \mathbb{CP}^1$).

On se limitera dans un premier temps au cas des courbes dites *simples*, ou encore *quelque part injectives*, c'est-à-dire telles qu'il existe $z \in \Sigma$ tel que $\forall z' \neq z$ $u(z') \neq u(z)$ et $du(z) \neq 0$. Les courbes qui ne vérifient pas cette propriété sont des *revêtements multiples*, c'est-à-dire qu'elles se factorisent en la composition d'une application holomorphe $(\Sigma, j) \to (\Sigma', j')$ entre surfaces de Riemann, de degré > 1 (c'est-à-dire un revêtement ramifié non trivial) et d'une courbe pseudo-holomorphe $u' : (\Sigma', j') \to (M, J)$; leur présence éventuelle complique beaucoup les choses, comme on le verra plus loin.

1.2 Espace des modules, transversalité

Définition 1 *Soit* (Σ, j) *une surface de Riemann compacte de genre* g*, et soit* $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ *une classe d'homologie : l'espace des modules* $\mathcal{M}(A, J)$ *est l'ensemble de toutes les courbes pseudo-holomorphes simples* $u : (\Sigma, j) \to (M, J)$ *dont l'image représente la classe d'homologie* A*.*

L'espace tangent en u à $\mathcal{M}(A, J)$ s'identifie à l'espace des sections du fibré u^*TM sur Σ qui annulent un certain opérateur différentiel $\mathbb{R}$-linéaire

$$D_u : C^\infty(u^*TM) \to \Omega^{0,1}(u^*TM)$$

(obtenu en dérivant la quantité $du \circ j - J \circ du$). Cet opérateur différentiel est d'ordre 1, et ne diffère de l'opérateur $\bar\partial_J$ que par une perturbation d'ordre 0 (en fait, lorsque la structure presque complexe J est intégrable, D_u s'identifie naturellement à $\bar\partial_J$ et devient $\mathbb{C}$-linéaire, mais en général la non-intégrabilité de J ajoute des termes de perturbation d'irdre 0). En particulier D_u est *elliptique* et donc *Fredholm*, i.e. son image est fermée, et son noyau et son conoyau sont de dimension finie. Le théorème de Riemann-Roch permet de calculer l'indice de D_u :

$$\text{ind } D_u = \dim \text{Ker } D_u - \dim \text{Coker } D_u = n(2 - 2g) + 2\langle c_1, A\rangle.$$

Le théorème de Sard-Smale permet d'affirmer que pour un choix générique de J l'opérateur D_u est surjectif ; la formule ci-dessus donne alors la dimension de $T_u\mathcal{M}(A, J) = \text{Ker } D_u$, et le théorème des fonctions implicites implique que $\mathcal{M}(A, J)$ est localement une variété lisse.

Théorème 1 *L'ensemble* $\mathcal{J}(M, \omega)$ *de toutes les structures presque complexes compatibles avec* ω *contient un sous-ensemble dense* $\mathcal{J}_{reg}$ *tel que* $\forall J \in \mathcal{J}_{reg}$*,* $\forall A \in H_2(M, \mathbb{Z})$*, l'espace des modules* $\mathcal{M}(A, J)$ *est une variété lisse de dimension* $n(2 - 2g) + 2\langle c_1, A\rangle$*, naturellement orientée. De plus les espaces de modules correspondant à différents* $J \in \mathcal{J}_{reg}$ *sont naturellement cobordants.*

2 Compacité de l'espace des modules

2.1 Phénomène de bubbling

Afin de pouvoir définir des invariants à partir de l'espace des modules, il est crucial d'obtenir des résultats de compacité sur celui-ci. Dans le cas des courbes rationnelles, la variété $\mathcal{M}(A, J)$ ne peut être compacte, à cause de l'action du groupe de reparamétrisation $G = \text{Aut}(\mathbb{CP}^1) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui est non compact. En revanche, dans certains cas le quotient $\mathcal{M}(A, J)/G$ est compact, et lorsqu'il ne l'est pas on doit le compactifier.

L'obstacle principal à la compacité de l'espace des modules (ou plus précisément de son quotient) est le phénomène de *bubbling*, qui survient lorsque dans une suite de courbes pseudo-holomorphes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la dérivée du_n tend à devenir de plus en plus grande en certains points ; il y a alors formation d'une “bulle”, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : on considère dans $\mathbb{CP}^2$ muni de sa structure complexe standard les courbes rationnelles $u_n : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$ qui réalisent la classe d'homologie $2L$, où $L = [\mathbb{CP}^1]$ est le générateur de $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, et qui sont définies en coordonnées homogènes par $u_n(x_0 : x_1) = (\frac{1}{n}x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1)$. Leurs images sont les courbes lisses définies par les équations $X_0X_1 - \frac{1}{n}X_2^2 = 0$, qui lorsque $n \to \infty$ convergent vers la courbe singulière $X_0X_1 = 0$, composée des deux droites projectives $L_0 : X_0 = 0$ et $L_1 : X_1 = 0$ s'intersectant en un point.

Pour tout point $z = (x_0 : x_1) \in \mathbb{CP}^1 - \{(1 : 0)\}$, $u_n(z)$ converge pour $n \to \infty$ vers $(0 : x_1^2 : x_0x_1) = (0 : x_1 : x_0)$, tandis que $u_n(1 : 0) = (1 : 0 : 0)$: une discontinuité surgit en $(1 : 0)$, qui est l'unique point de $\mathbb{CP}^1$ où $|du_n|$ tend vers $+\infty$. En fait, étant donné un voisinage quelconque U de $(1 : 0)$, l'image par u_n de $\mathbb{CP}^1 - U$ converge vers L_0 ; pendant qu'un voisinage de plus en plus réduit du point $(1 : 0)$ tend à former la “bulle” L_1. $\square$

Cet exemple montre bien que dans certains cas l'espace des modules que nous avons défini ci-dessus n'est pas compact, même après quotient par le groupe de reparamétrisation. Il convient donc de déterminer les différents phénomènes susceptibles d'engendrer la non-compacité de l'espace des modules, et d'étendre ce dernier afin d'y inclure les diverses courbes singulières que l'on est susceptible d'obtenir comme limites de suites d'éléments de $\mathcal{M}(A, J)$.

Définition 2 *On appelle énergie d'une application* $u : \Sigma \to M$ *la quantité* $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Sigma |du|^2$. *Dans le cas d'une courbe pseudo-holomorphe* $u \in \mathcal{M}(J, A)$ *on a* $E(u) = \int_\Sigma u^*\omega = \langle \omega, A \rangle$.

La notion d'énergie est fondamentale pour la maîtrise du phénomène de bubbling, car chaque bulle qui apparaît ôte de l'énergie à la courbe vers laquelle converge la suite u_n. En particulier, dans le cas où l'énergie totale est insuffisante pour former une bulle on peut conclure à la compacité de l'espace des modules :

Théorème 2 *Supposons qu'il n'existe pas de classe d'homologie* $B \in H_2(M, \mathbb{Z})$ *réalisable par une sphère et telle que* $0 < \langle \omega, B \rangle < \langle \omega, A \rangle$. *Alors l'espace des modules* $\mathcal{M}(A, J)/G$ *est compact.*

2.2 Compacité de Gromov et courbes stables

Dans le cas général, le résultat fondamental sur l'espace des modules de courbes pseudo-holomorphes est le théorème de compacité de Gromov (1985) ; la meilleure façon de le formuler consiste à utiliser le concept de *courbe stable* introduit par Kontsevich.

Le point de départ du résultat de Gromov est l'observation que d'une part il existe une constante $\hbar > 0$ (énergie minimale) telle que toute courbe pseudo-holomorphe rationnelle fermée possède une énergie supérieure à $\hbar$, ce qui permet de borner le nombre de bubblings possibles pour des courbes réalisant une classe d'homologie donnée ; d'autre part toute suite de courbes pseudo-holomorphes pour lesquelles il existe une borne uniforme sur $\|du\|_{L^\infty}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.

Considérons une suite de courbes pseudo-holomorphes rationnelles $u_n : \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to M$, d'énergie $E(u_n)$ uniformément bornée par une constante c. Les observations ci-dessus permettent de conclure que, quitte à extraire une sous-suite, il existe un nombre fini de points $z_1, \dots, z_l \in \mathbb{CP}^1$ tels que la suite converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{CP}^1 - \{z_1, \dots, z_l\}$ vers une courbe $u : \mathbb{CP}^1 \to M$, et tels que les dérivées $|du_n(z)|$ atteignent au voisinage des points z_j des maxima locaux tendant vers l'infini en des points $z_{n,j} \to z_j$. Notons $m(z_j)$ l'énergie du bubbling en z_j, définie par

$$m(z_j) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} E(u_n, B(z_j, \epsilon)) \geq \hbar.$$

Il est alors facile de choisir des nombres $\epsilon_{n,j}$ qui tendent vers 0 pour $n \to \infty$ et tels que $E(u_n, B(z_{n,j}, \epsilon_{n,j})) = m(z_j) - \frac{1}{2}\hbar$. Posons $v_{n,j}(z) = u_n(z_{n,j} + \epsilon_{n,j} z)$: quitte à extraire de nouveau une sous-suite, cette suite de courbes est de nouveau convergente sur le complémentaire d'une partie finie de $\mathbb{CP}^1$ vers une courbe v_j.

La courbe v_j décrit précisément la première bulle attachée à la courbe u qui se forme en z_j (en particulier $v_j(\infty) = u(z_j)$). D'autres bulles peuvent éventuellement venir se greffer sur cette courbe (lorsque les dérivées de $v_{n,j}$ ne sont pas uniformément bornées), ce qui conduit à obtenir un "arbre de bubbling" formé par les bulles successives qui viennent s'empiler les unes sur les autres.

Un cas particulier susceptible de se produire est celui où l'application limite v_j est constante ; dans ce cas, on montre aisément qu'il y a en fait au moins deux bulles supplémentaires attachées à la courbe v_j. Ceci correspond au cas où deux bulles surgissent des courbes u_n en étant attachées au même point ; le rescaling a alors pour effet de faire apparaître une bulle "fictive" dont le seul but est de séparer l'une de l'autre les bulles qui se forment.

Ces arbres de bubbling conduisent naturellement à définir la notion de courbe stable. Rappelons tout d'abord qu'un *arbre* est la donnée d'un ensemble fini Γ (les sommets) et d'une relation $R \subset \Gamma \times \Gamma$ (les arêtes reliant les sommets), symétrique et sans cycles. En outre, en vue de la définition des invariants de Gromov-Witten on considérera des courbes dont certains points sont *marqués* (c'est-à-dire qu'on considère en fait des couples constitués d'une courbe et d'un ensemble de points de la courbe).

Définition 3 *Une courbe pseudo-holomorphe stable de genre* 0 *dans* M *avec* k *points marqués, modelée sur un arbre* (Γ, R)*, est un couple*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \big((u_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}, (z_{\alpha\beta})_{\alpha R\beta} \cup (\alpha_i, z_i)_{1\leq i\leq k}\big)$$

où les courbes $u_\alpha : \mathbb{CP}^1 \to M$ *sont des sphères* J*-holomorphes, et où* $(\alpha, z_{\alpha\beta})$ *et* (α_i, z_i) *sont des points de* $\Gamma \times \mathbb{CP}^1$ *deux à deux distincts qui satisfont les propriétés suivantes :* $\forall \alpha R\beta$, $u_\alpha(z_{\alpha\beta}) = u_\beta(z_{\beta\alpha})$*, et pour tout* α *tel que la courbe* u_α *est constante celle-ci comporte au moins trois points parmi les* $z_{\alpha\beta}$ *et les* z_i*.*

Deux courbes stables $(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ *et* $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{z}})$ *modelées sur des arbres* Γ *et* $\tilde\Gamma$ *sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme d'arbres* $f : \Gamma \to \tilde\Gamma$ *et des transformations* $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *tels que : (a)* $\forall \alpha \in \Gamma$, $\tilde u_{f(\alpha)} = u_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$ *; (b)* $\forall \alpha R\beta$, $\tilde z_{f(\alpha)f(\beta)} = \phi_\alpha(z_{\alpha\beta})$ *; (c)* $\forall i$, $(\tilde\alpha_i, \tilde z_i) = (f(\alpha_i), \phi_{\alpha_i}(z_i))$*.*

On note $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J)$ *l'espace des modules des courbes stables de genre* 0 *avec* k *points marqués, et* $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J) = \overline{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J)/\sim$*.*

Le théorème de compacité de Gromov s'écrit alors :

Théorème 3 *Toute suite* $(\mathbf{u}_n, \mathbf{z}_n)$ *de courbes pseudo-holomorphes stables de genre* 0 *avec* k *points marqués telle que* $\sup_n E(\mathbf{u}_n) < \infty$ *admet une sous-suite convergente au sens de Gromov (convergence uniforme sur les compacts qui ne contiennent pas les* $z_{\alpha\beta}$*, à équivalence près).*

En particulier l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J)$ *est compact.*

En outre, on vérifie aisément que, pour J générique, l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J)$ se compose de strates indexées par les différents types d'arbres possibles. La strate principale, qui correspond au cas où l'arbre est réduit à un point (c'est-à-dire aux courbes d'un seul tenant, sans bubbling), est de dimension

$$d^0_{k,A} = 2n + 2\langle c_1, A\rangle + 2k - 6,$$

et chaque ajout d'une bulle supplémentaire fait chuter la dimension de 2.

Remarque : des résultats similaires restent valables dans le cas des courbes pseudo-holomorphes de genre supérieur. Toutefois la notion de courbe stable devient alors plus difficile à définir, car il faut prendre en compte des configurations plus compliquées.

3 Invariants de Gromov-Witten

3.1 Classe fondamentale et application d'évaluation

L'espace des modules $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A,J)$ des courbes stables à k points marqués admet une application naturelle à valeurs dans M^k, appelée *application d'évaluation* et notée ev_k, qui à toute courbe associe les images des points marqués :

$$ev_k(\mathbf{u},\mathbf{z}) = (u_{\alpha_i}(z_i))_{1\leq i\leq k}.$$

Afin de définir les invariants de Gromov-Witten il est essentiel de pouvoir définir une classe fondamentale $[ev_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A,J))] \in H_*(M^k,\mathbb{Z})$ pour l'image de l'application d'évaluation. Comme cette image n'est en général pas une variété, il est nécessaire de s'assurer que les images de toutes les strates ajoutées lors de la compactification de l'espace des modules ont une codimension *supérieure ou égale à* 2 dans l'image totale (il sera alors possible de définir sans ambiguïté des nombres d'intersection avec $[ev_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A,J))]$, ce qui est le but recherché).

On a vu dans la section précédente que dans l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A,J)$ toutes les strates correspondant aux courbes stables ajoutées lors de la compactification sont de codimension ≥ 2, ce qui semble régler le problème. Malheureusement, des difficultés techniques surgissent lorsqu'il existe des sphères pseudo-holomorphes dont la classe fondamentale vérifie $\langle c_1, A\rangle < 0$. En effet, lors d'un passage à la limite d'une suite de courbes il peut apparaître des courbes stables où deux bulles différentes sont envoyées sur la même image dans M, ou encore une bulle peut être un revêtement multiple. Pour l'image par l'application d'évaluation, seule compte alors la courbe "simplifiée" où on a remplacé de telles configurations par une bulle unique ; lorsque la sphère concernée a un nombre de Chern négatif cette opération de simplification est susceptible d'augmenter la dimension de l'espace des modules, ce qui pose problème (l'espace des courbes singulières peut alors devenir plus gros que celui des courbes usuelles !).

On doit donc se limiter au cas des variétés symplectiques *faiblement monotones*, dont les propriétés garantissent que pour un choix générique de la structure presque-complexe J il n'existe pas de sphères pseudo-holomorphes de nombre de Chern négatif. Ce cas sera suffisant pour nous, puisqu'il inclut entre autres les variétés de Calabi-Yau, ainsi que toutes les variétés de dimension ≤ 6.

Définition 4 *Une variété symplectique compacte (M,ω) de dimension $2n$ est dite faiblement monotone si l'une des conditions suivantes est satisfaite : (a) il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\forall A \in \pi_2(M)$, $\langle\omega, A\rangle = \lambda\langle c_1, A\rangle$;*

(b) $\forall A \in \pi_2(M)$, $\langle c_1, A\rangle = 0$ *; (c)* $\forall A \in \pi_2(M)$, $\langle \omega, A\rangle = 0$ *; (d) le nombre de Chern minimal* $N \geq 0$*, défini par l'égalité* $\langle c_1, \pi_2(M)\rangle = N\mathbb{Z}$*, vérifie* $N \geq n-2$.

Théorème 4 *Supposons que* (M, ω) *est faiblement monotone, et que la classe* $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ *n'est pas un multiple* mB $(m > 1)$ *d'une classe d'homologie* $B \in H_2(M, \mathbb{Z})$ *réalisable par une sphère pseudo-holomorphe et telle que* $\langle c_1, B\rangle = 0$*. Alors l'image par l'application d'évaluation* ev_p *des strates ajoutées lors de la compactification de l'espace des modules* $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,p}(A, J)$ *est contenue dans une union de sous-variétés dont la dimension est au plus celle de l'image de la strate principale diminuée de* 2*.*

Remarque : la construction des invariants de Gromov-Witten a été récemment étendue par différents auteurs (Hofer-Salamon, Li-Tian, Ruan, Siebert, 1996) à des variétés symplectiques compactes arbitraires. Afin de lever l'hypothèse "faiblement monotone", on doit perturber l'équation qui définit les courbes pseudo-holomorphes afin d'empêcher l'existence de courbes pseudo-holomorphes qui sont des revêtements multiples de sphères de nombre de Chern négatif. Cette perturbation de l'équation $du \circ j - J \circ du = 0$ doit être d'ordre 0, satisfaire certaines conditions de transversalité, et surtout être équivariante sous l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Cette dernière condition d'équivariance ne peut en général être satisfaite par une perturbation unique ; il est donc nécessaire d'introduire des perturbations "multivaluées", c'est-à-dire de superposer diverses perturbations en leur affectant chacune un coefficient de multiplicité fractionnaire (par exemple $\frac{1}{2}$ si on superpose 2 perturbations), afin de rétablir l'équivariance. La conséquence la plus frappante de cet état de fait est que la classe fondamentale qu'il est alors possible de définir est un élément non plus de $H_*(M^k, \mathbb{Z})$ mais $H_*(M^k, \mathbb{Q})$. Le comptage aboutit du coup dans certains cas à des nombres de courbes fractionnaires.

3.2 Invariants de Gromov-Witten

Fixons des classes d'homologie $B_1, \ldots B_k \in H_*(M, \mathbb{Z})$, et notons $\beta_1, \ldots, \beta_k$ les classes de cohomologie duales de Poincaré. On suppose en outre que

$$\sum_{j=1}^{k} \deg(\alpha_j) = 2n + 2\langle c_1, A\rangle + 2k - 6,$$

et qu'une classe fondamentale (éventuellement à coefficients rationnels, cf. ci-dessus) a pu être définie pour $ev_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J))$. Les classes B_j permettent de définir une classe produit $B_1 \times \cdots \times B_k \in H_*(M^k, \mathbb{Z})$, ou de façon équivalente la classe duale $\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k \in H^*(M^k, \mathbb{Z})$. On définit alors l'*invariant de Gromov-Witten*

$$\Phi_A(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \big\langle \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k, [ev_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}(A, J))] \big\rangle.$$

De façon intuitive, cet invariant compte les courbes rationnelles (stables) à k points marqués qui réalisent la classe d'homologie A et telles que $u(z_1) \in B_1$, $u(z_2) \in B_2, \ldots, u(z_k) \in B_k$. Le nombre ainsi défini ne dépend pas du choix d'une structure presque-complexe J générique sur M.

Remarque : l'invariant de Gromov-Witten peut aussi être défini à l'aide d'un pull-back par l'application d'évaluation, comme une intégrale sur l'espace des modules compactifié.

Exemple : dans $\mathbb{CP}^n$ deux points déterminent une unique droite. En notant $L = [\mathbb{CP}^1] \in H_2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$, on a donc $\Phi_L(\mathrm{pt}, \mathrm{pt}) = 1$ (attention, il faut un argument de transversalité non trivial, car le calcul doit être effectué avec une structure presque complexe générique, ce qui n'est pas toujours le cas de la structure complexe standard !).

3.3 Cohomologie quantique

On se placera ici, dans un but de simplification, dans le cas où la variété (M, ω) est *monotone*, c'est-à-dire où il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\langle \omega, A \rangle = \lambda \langle c_1, A \rangle \ \forall A \in \pi_2(M)$. Ceci permet de définir la cohomologie quantique avec des coefficients dans un anneau de polynômes. Lorsque la variété est seulement faiblement monotone (ou même en toute généralité en utilisant les invariants en cohomologie rationnelle), et en particulier dans le cas des variétés de Calabi-Yau, il convient afin d'éviter des divergences dans les sommes qui apparaissent d'introduire des anneaux de coefficients plus sophistiqués.

Le cup-produit quantique est en fait une déformation de la structure de produit usuelle de l'anneau de cohomologie $H^*(M, \mathbb{Z})$. Rappelons que cette structure usuelle correspond, via la dualité de Poincaré, aux nombres d'intersections triples : $\langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle$ est le nombre de points d'intersection entre les trois cycles duaux de α, β et γ. L'idée de la cohomologie quantique consiste à remplacer cette intersection usuelle par un invariant de Gromov-Witten.

Plus précisément, on doit considérer l'espace $QH^*(M) = H^*(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, dans lequel la variable formelle q est de degré $2N$ où $N \in \mathbb{Z}$ est le générateur de $\langle c_1, \pi_2(M) \rangle$. Autrement dit, tout élément de $QH^*(M)$ est une somme finie $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i q^i$, avec $a_i \in H^{k-2Ni}(M, \mathbb{Z})$. La dualité de Poincaré fournit alors pour tous $a \in QH^k(M)$ et $b \in QH^l(M)$ un accouplement $\langle a, b \rangle = \sum\limits_{2N(i+j)=k+l-2n} \langle a_i \cup b_j, [M] \rangle$.

Définition 5 *Le cup-produit quantique de deux éléments* $a = \sum_i a_i q^i \in QH^l(M)$ *et* $b = \sum_j b_j q^j \in QH^m(M)$ *est l'unique élément* $a*b$ *de* $QH^{l+m}(M)$ *tel que, pour tout* $c = \sum c_k q^k \in QH^{2n-l-m}(M)$*, on ait*

$$\langle a * b, c\rangle = \sum_{i,j,k} \sum_A \Phi_A(a_i, b_j, c_k),$$

où la seconde somme porte sur toutes les classes $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ *telles que* $N(i + j + k) + \langle c_1, A\rangle = 0$.

Propriétés : $a * b = (-1)^{\deg(a)+\deg(b)} b * a$; pour $a \in H^0(M)$ ou $a \in H^1(M)$, $a * b = a \cup b$ (en particulier, $1 \in H^0(M)$ est l'unité de $QH^*(M)$) ; enfin, $\langle a * b, c\rangle = \langle a, b * c\rangle$.

Exemple : le cas de $\mathbb{CP}^n$. On a alors $N = n + 1$, et l'anneau de cohomologie classique est engendré par $p \in H^2(\mathbb{CP}^n)$ qui est le dual de Poincaré de $[\mathbb{CP}^{n-1}]$. On a $H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[p]/(p^{n+1})$, et en particulier $H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ est engendré par p^n.

Pour $l + m \leq 2n$ le cup-produit quantique coïncide nécessairement avec le produit classique puisque $\deg(q) = 2n + 2$; le premier produit quantique non trivial est $p * p^n = q$, et de même on calcule $p^k * p^l = p^{k+l-n-1} q$ pour $k + l \geq n + 1$. On a donc $QH^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Z}[p, q, q^{-1}]/(p^{n+1} = q,\ q^{-1}q = 1)$.

Théorème 5 *Le cup-produit quantique* $*$ *est associatif.*

Ce théorème est en fait un résultat extrêmement profond. Il consiste à remarquer que la quantité $\langle (a*b)*c, d\rangle$ correspond à un comptage des courbes rationnelles $u : \mathbb{CP}^1 \to M$ telles que les images par u de quatre points génériques fixés de $\mathbb{CP}^1$ appartiennent aux cycles duaux de Poincaré de a, b, c et d. La symétrie de cette expression en a, b et c implique alors que $(a * b) * c = a * (b * c)$, mais la démonstration en est très ardue.

Mentionnons au passage que cette propriété d'associativité se traduit au niveau du prépotentiel de Gromov-Witten (voir un exposé ultérieur) par la remarquable équation de Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV).

Pour terminer, signalons que dans le cas où M n'est pas monotone la définition ci-dessus n'est pas valide car la somme qui sert à définir $\langle a*b, c\rangle$ peut faire intervenir une infinité de classes A. Il reste possible de définir la cohomologie quantique, mais cela nécessite l'utilisation d'un anneau de coefficients plus sophistiqué, par exemple l'anneau de Novikov. De façon très sommaire, l'idée de l'anneau de Novikov consiste à affiner la graduation : au lieu de simplement classer les termes qui interviennent dans le produit quantique selon la valeur du nombre de Chern $\langle c_1, A\rangle$ (à l'aide de la variable formelle q), on conserve toute l'information en considérant un générateur formel pour chaque classe A. Ainsi un élément de l'anneau de Novikov est une somme formelle du type $\sum_{A \in H_2(M,\mathbb{Z})} \lambda_A e^A$ où coefficients λ_A appartiennent à $\mathbb{Z}$ (le produit de l'anneau de Novikov correspondant à l'addition dans $H_2(M, \mathbb{Z})$, et le degré de chaque générateur étant donné par le nombre de Chern).

Bibliographie

- D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture Series Vol. 6, AMS, 1994.
- D. Salamon, *Lectures on Floer Homology*, University of Warwick Preprint 47/97, 1997.
- M. Gromov, *Pseudo Holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Inv. Math. 82 (1985) 307–347.
- M. Kontsevich, *Enumeration of Rational Curves via Torus Actions*, Preprint, 1994.
- T.H. Parker, J.G. Wolfson, *Pseudoholomorphic Maps and Bubble Trees*, J. Geom. Anal. 3 (1993) 63–98.