Introduction aux variétés symplectiques

E. de Pirey

2 Novembre 98

1 Espaces vectoriels symplectiques

Un **ev symplectique** (E,ω) est un $\mathbb{R}$-ev E muni d'une 2-forme non dégénérée ω (ω est non dégénérée si et seulement si $\omega^{\dim E} \neq 0$). Un **symplectomorphisme linéaire** $\psi \in Sp(E)$ est un automorphisme de E tq $\psi^*\omega = \omega$. Le **complémentaire symplectique** W^ω d'un sev W dans (E,ω) est le sev $\{v \in E \ : \forall w \in W, \omega(v,w) = 0\}$. On remarque les égalités :

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim E \ \text{ et } \ W^{\omega\omega} = W.$$

On dit que W est un **sev symplectique** (resp. **lagrangien**) si $W \cap W^\omega = \{0\}$ (resp. $W = W^\omega$). Il existe une **base symplectique** $u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_n$, *i.e.* $\omega(u_i,u_j) = \omega(v_i,v_j) = 0$ et $\omega(u_i,v_j) = \delta_{i,j}$ pour tout (i,j) ; et tout ev symplectique est symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \sum dx_i \wedge dy_i)$.

Une **structure complexe** est un endomorphisme J de E tq $J^2 = -1$. On dit que la structure complexe J est **compatible** avec ω si $J^*\omega = \omega$ et $\omega(v,Jv) > 0$ pour tout $v \neq 0$; on note $g_J = \omega(.,J.)$ la métrique associée, et $\mathcal{J}(E,\omega)$ l'ensemble des structures complexes compatibles. $\mathcal{J}(E,\omega)$ est contractible. On remarque aussi que les endomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ qui conservent les structures symplectiques et complexes standard sont les endomorphismes unitaires $U(n) = Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C})$, où $Sp(2n) = Sp(\mathbb{R}^{2n})$.

2 Variétés symplectiques

Une **variété symplectique** (V,ω) est une variété lisse munie d'une 2-forme fermée $\omega \in \Lambda^2 T^*V$ qui induit une structure symplectique sur chaque fibre de TV. Par exemple, $\mathbb{R}^{2n}$ standard, le fibré cotangent d'une variété lisse, les surfaces de Riemann…

Un **symplectomorphisme** d'une variété symplectique (V,ω) est un difféomorphisme ψ de V tel que $\psi^*\omega = \omega$. Le groupe des symplectomorphismes est noté $\mathrm{Symp}(V,\omega)$. Soit une **fonction de Hamilton** lisse $H : V \to \mathbb{R}$. On note X_H le **champ de vecteurs hamiltonien** tel que

$$\omega(X_H,.) = dH.$$

Si V est compacte, on peut définir pour tout t le **flot de Hamilton** ψ_H^t de H avec

$$\frac{d}{dt}\psi_H^t = X_H \circ \psi_H^t.$$

Alors ψ_H^t est une famille de symplectomorphismes de (V, ω).

Il n'y a pas de propriété locale pour la forme symplectique :

Théorème 2.1. de Darboux. *Toute forme symplectique sur une variété V de dimension n est localement difféomorphe à la forme standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.*

Dans une même classe de cohomologie, les formes symplectiques sont équivalentes :

Théorème 2.2. de stabilité de Moser. *Soit V une variété compacte et ω_t une famille lisse de formes symplectiques de même classe de cohomologie sur V. Il existe une famille de difféomorphismes ψ_t de V tels que*

$$\psi_0 = id, \text{ et } \psi_t^* \omega_t = \omega_0.$$

De plus, si $\omega_t(p)$ est constant pour $p \in Q$ où Q est une sous-variété compacte, on peut imposer à ψ_t d'être constant sur Q.

Une sous-variété L d'une variété symplectique (V, ω) est une **sous variété symplectique** (resp. **lagrangienne**) si les fibres T_pL sont symplectiques (resp. lagrangiennes) dans T_pV. Par exemple, sont lagrangiennes toutes les sous-variétés de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, les sections nulles et les fibres dans T^*V. De plus, une section de T^*V est lagrangienne si et seulement si elle est fermée.

Théorème 2.3. *Soit deux variétés symplectiques $(V_i, \omega_i)_{i=1,2}$ avec des sous variétés symplectiques Q_i telles qu'il existe un symplectomorphisme $\phi : Q_1 \to Q_2$. Alors il existe une prolongation symplectique de ϕ d'un voisinage de Q_1 dans un voisinage de Q_2.*

Théorème 2.4. *Soit (V, ω) une variété symplectique et L une sous-variété lagrangienne. Il existe un voisinage de la section nulle dans T^*L (muni de la forme symplectique canonique) et un voisinage de L dans V symplectomorphes.*

3 Strucures presque complexes

Une **variété presque complexe** est une variété V munie d'une section $J \in T^*V \otimes TV$ qui induit une structure complexe sur chaque fibre de TV. Une **application presque complexe** f est une application d'une variété presque complexe (V_1, J_1) dans une autre (V_2, J_2) telle que

$$df \circ J_1 = J_2 \circ df.$$

Une 2-forme est dite **compatible** avec la **structure presque complexe** J si elle est compatible dans toutes les fibres de TV. On peut aussi définir la métrique associée comme dans le cas linéaire.

Proposition 3.1. *Soit V une variété. Pour toute 2-forme non dégénérée ω sur V, l'ensemble $\mathcal{J}(V,\omega)$ des structures presque complexes compatibles avec ω est non vide et contractible.*

En particulier, symplectique $\Rightarrow$ presque complexe $\Rightarrow$ dimension paire. On remarque aussi que les classes de Chern ne dépendent pas de la structure presque complexe.

On dit qu'une strucure complexe J est intégrable s'il existe un atlas $\{\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ tel que toutes les cartes de U_α dans $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure complexe standard sont presques complexes. En particulier, les cartes sont alors holomorphes et l'on dit que J est une **structure complexe**.

Lemme 3.2. *Soit ω une 2-forme non dégénérée sur une variété V, $J \in \mathcal{J}(V,\omega)$ et ∇ la dérivée covariante induite par la métrique g_J. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\nabla J = 0$;
2. *J est intégrable et la forme ω est fermée.*

Théorème 3.3. *Toute structure presque complexe sur une surface de Riemann est intégrable.*

Une **variété kählérienne** (V,ω,J) est une variété symplectique (V,ω) munie d'une structure presque complexe compatible intégrable. En particulier, toute surface de Riemann est kählérienne.

Une **sous-variété pseudoholomorphe** d'une variété presque complexe (V,J) est une sous-variété dont le tangent est stable par J. En particulier, dans le cas Kähler, une sous-variété pseudoholomorphe est une sous-variété holomorphe. On remarque aussi que toute sous-variété pseudoholomorphe est symplectique, et qu'une sous-variété est symplectique seulement s'il existe une structure $J \in \mathcal{J}(V,\omega)$ telle que la sous-variété soit pseudoholomorphe. Enfin, une **courbe pseudoholomorphe** est l'image d'une surface de Riemann dans une variété symplectique (V,ω,J) par une application presque complexe.

Références

[1] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford University Press, 1995.