INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE COMPLEXE : THÉORIE DE HODGE

par

Laurent Berger

Table des matières

Introduction 1
1. Structures de base en géométrie complexe 1
2. Cohomologies des variétés complexes 3
3. Le théorème de Hodge pour une variété complexe compacte 4
4. Applications 6
Références 7

Introduction

On rappelle les notions fondamentales de géométrie complexe puis on énonce et démontre le théorème de Hodge.

1. Structures de base en géométrie complexe

1.1. Variétés complexes. — Une variété complexe est une variété différentiable localement homéomorphe à $\mathbb{C}^d$ et telle que les changements de cartes soient holomorphes. On supposera toujours que nos variétés sont connexes ce qui permet de parler de leur dimension d. Notons que la dimension complexe est la moitié de la dimension réelle.

Les changements de cartes étant holomorphes, on peut définir des fonctions holomorphes et méromorphes sur une variété complexe.

Exemple 1.1. —

1. L'espace $\mathbb{C}^d$ et ses quotients par des réseaux $\mathbb{C}^d/\Lambda$ sont des variétés complexes;
2. si X est une variété algébrique, alors $X(\mathbb{C})$ est une variété complexe. Remarquons qu'il existe des variétés complexes qui ne sont pas obtenues de cette manière; par exemple, certains tores complexes ne sont pas algébrisables;
3. une sous-variété d'une variété complexe : soient M une variété complexe, $f = (f_1, \dots, f_k)$ des fonctions holomorphes, N l'ensemble des zéros de f; si $J(f)(x)$ (voir plus loin la définition de la Jacobienne) est de rang k pour tout $x \in N$, alors N est une variété complexe.

Une variété complexe M est naturellement une variété réelle C^∞, et en chaque point $x \in M$, on dispose d'un espace tangent réel $T_{x,\mathbb{R}}M$, un $\mathbb{R}$-ev de dim $2d$. On pose $T_xM = T_{x,\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$. Cet espace s'identifie à l'espace des dérivations $\mathbb{C}$-linéaires sur les germes en x de fonctions C^∞ à valeur dans $\mathbb{C}$. Si $z_1, \dots, z_d$ sont des coordonnées holomorphes, on a $T_xM = \langle \partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_d, \partial/\partial \overline{z}_1, \dots, \partial/\partial \overline{z}_d \rangle_{\mathbb{C}}$ et on a une décomposition $T_xM = T_x^hM \oplus T_x^{ah}M = T_x^hM \oplus \overline{T_x^hM}$ de l'espace tangent en espaces tangents holomorphes et anti-holomorphes. L'espace T_x^h s'identifie aux dérivations qui s'annulent sur les fonctions antiholomorphes et ne dépend donc pas du choix des coordonnées.

Soit $f\ : M \to N$ une fonction C^∞. On a sa dérivée $Tf : TM \to TN$ et f est holomorphe si et seulement si $Tf(T^hM) \subset T^hN$.

Si f est holomorphe, soit $J(f)$ sa Jacobienne définie comme suit : $J(f) = (\partial f_i / \partial z_j)$ en coordonnées; c'est la matrice d'une application de $T^hM \to T^hN$.

Comme pour les variétés réelles, on dispose d'un théorème d'inversion locale (et aussi de fonctions implicites, etc) :

Proposition 1.2. — *Soit $f : (U,u) \to (V,v)$ holomorphe telle que $J(f)(u)$ est inversible. Alors f est localement inversible et f^{-1} est holomorphe.*

Démonstration. — C'est une conséquence de l'inversion locale réelle et du fait que f stabilise les espaces tangents holomorphes. □

1.2. Fibrés vectoriels. — Soit M une variété différentiable; un fibré vectoriel C^∞ sur M, c'est une variété E munie d'une projection $E \stackrel{\pi}{\to} M$, telle que $\pi^{-1}(x) = E_x$ est un espace vectoriel de dimension k (le rang du fibré), et telle que pout tout x il existe un voisinage U_x de x tel que $\pi^{-1}(U_x)$ est difféomorphe à $U_x \times \mathbb{C}^k$. E s'appelle l'espace total, M l'espace de base, et E_x est une fibre. Un morphisme de fibrés $f : E \to F$ c'est un morphisme de variétés tel que $f_x : E_x \to F_{f(x)}$ soit linéaire.

Exemple 1.3. —

1. Le fibré tangent TM. Soit $f : M \to N$ une fonction C^∞; alors $Tf : TM \to TN$ est un morphisme de fibrés;
2. soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de M. Un fibré $E \stackrel{\pi}{\to} M$ détermine des fonctions de transition g_{UV} provenant des trivialisations, et ces fonctions doivent vérifier :$g_{UV}g_{VU} = \mathrm{Id}$, $g_{UV}g_{VW}g_{WU} = \mathrm{Id}$; réciproquement, la donnée de telles fonctions permet de construire un fibré sur M par recollement.

Les opérations usuelles sur les espaces vectoriels passent aux fibrés vectoriels : somme directe, produit tensoriel, dual, produit alterné. La dernière construction permet de prendre le déterminant d'un fibré.

Une section σ au dessus de U c'est $\sigma : U \to E$ telle que $\sigma(x) \in E_x$ pour tout x. Un repère c'est un k-uplet de sections $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ qui engendrent E_x en chaque x. On note $\Gamma(U, E)$ l'espace des sections au-dessus de U. Par exemple, un fibré de rang k est trivial s'il existe k sections globales linéairement indépendantes en chaque point.

On notera $\mathcal{A}^k(E)$ le faisceau des sections de $E \otimes T^{*k}M$.

Si M est une variété complexe, un fibré holomorphe c'est $E \stackrel{\pi}{\to} M$ où E est une variété complexe, et où les applications en jeu sont holomorphes.

1.3. Formes différentielles. — Soit T_x^*M l'espace cotangent à M en x. Le fibré cotangent est le dual du fibré tangent, et une forme différentielle de degré k, c'est une section C^∞ du produit alterné $\Lambda^k T^*M$. On note $A^k(M)$ l'espace des formes différentielles de degré k. Une forme de degré zero est juste une fonction C^∞.

On a les opérations usuelles sur les formes différentielles, à savoir le produit extérieur (antisymétrisé du produit tensoriel) et la différentielle extérieure d (telle que d est la dérivation usuelle sur les fonctions C^∞, $d \circ d = 0$, et $d(a_p \wedge b_q) = d(a_p) \wedge b_q + (-1)^p a_p \wedge d(b_q)$).

Sur une variété complexe, on peut dire un peu plus. Rappelons nous que $T_x^*M = T_x^{*h}M \oplus T_x^{*ah}M$ et cette décomposition passe au produit alterné : $\Lambda^n T_x^*M = \oplus_{p+q=n} \Lambda^p T_x^{*h}M \otimes \Lambda^q T_x^{*ah}M$ ce qui entraîne la décomposition : $A^n(M) = \oplus A^{p,q}(M)$. On parlera de formes différentielles de type (p,q), et on écrira $\varphi = \sum \varphi^{(p,q)}$.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ des formes différentielles, et $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$. On pose $\varphi_I = \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$, et $I^C = \{1, \dots, d\} \setminus I$ (ces définitions seront utilisées lors de la construction de l'étoile de Hodge).

La différentielle extérieure vérifie $d\varphi^{(p,q)} \in A^{(p+1,q)} \oplus A^{(p,q+1)}$ et on définit des opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sur $A^{(p,q)}$ comme suit : $d\varphi^{(p,q)} \in A^{(p+1,q)} \oplus A^{(p,q+1)} = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi$. Une forme différentielle ω est dite holomorphe si $\overline{\partial}\omega = 0$ et on note $\Omega^k(M)$ l'espace des formes différentielles holomorphes.

1.4. Métriques hermitiennes. — Une métrique hermitienne sur une variété complexe M, c'est la donnée en chaque point x d'un produit scalaire hermitien $\langle,\rangle_x : T^h_x M \times T^h_x M \to \mathbb{C}$ variant de manière C^∞ avec x. On peut écrire localement ce produit en coordonnées comme $\sum h_{i,j}(z) dz_i d\overline{z}_j$; un corepère, c'est un d-uplet de formes différentielles $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ telles que le produit s'écrive $\sum \varphi_i \overline{\varphi_i}$. Il en existe toujours localement (orthogonalisation de Gram-Schmidt).

À partir d'une métrique hermitienne H, on peut construire une métrique riemannienne $\operatorname{Re} H$, et une forme de type $(1,1)$, $-1/2 \operatorname{Im} H$. Plus précisément, on a un isomorphisme $T_{x,\mathbb{R}} M \simeq T^h_x M$ et $\operatorname{Re} H$ définit une forme quadratique définie positive sur cet espace, donc une métrique riemannienne. Ensuite $\operatorname{Im} H$ est une forme alternée; si $H = \sum \varphi_i \overline{\varphi}_i$ alors $\omega = -1/2 \operatorname{Im} H = \frac{i}{2} \sum \varphi_i \wedge \overline{\varphi}_i$. Notamment, cette forme détermine la métrique hermitienne. En général, une forme $(1,1)$ ω détermine une forme hermitienne et on dit que ω est > 0 si cette forme hermitienne est > 0.

Exemple 1.4. —

1. $\mathbb{C}^d$ doté de la métrique $\sum dz_i d\overline{z}_i$ (métrique euclidienne) qui passe au quotient sur $\mathbb{C}^d/\Lambda$;
2. $\mathbb{P}^d\mathbb{C}$ muni de la métrique de Fubini-Study, définie comme suit : soit $U \subset \mathbb{P}^d\mathbb{C}$ un ouvert de cartes, et $Z : U \to \mathbb{C}^{d+1} - 0$ un relèvement de la projection canonique. La forme différentielle $\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|Z|^2$ est indépendante du relèvement choisi et définit une forme $(1,1)$. Il est facile de voir que cette forme est > 0 et donc définit une métrique hermitienne
3. la restriction d'une métrique à une sous-variété complexe : si N est dotée d'une métrique, une application $f : M \to N$ telle que $T_x f$ est injective pour tout x définit une métrique sur M, via $\omega_M = f^* \omega_N$.

Une métrique hemitienne sur un fibré complexe, c'est un produit scalaire hermitien sur chaque E_x, variant de manière C^∞ avec x. Un fibré holomorphe muni d'une métrique hermitienne s'appelle un fibré hermitien.

Une connection ∇ sur un fibré $E \xrightarrow{\pi} M$, c'est une application :

$$\nabla : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^1(E)$$

telle que si $\xi \in \Gamma(U, \mathcal{A}^0(E))$, $f \in C^\infty(U)$, on a $\nabla(f \cdot \xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla(\xi)$. Il existe de nombreuses connections sur un fibré E mais certaines sont plus agréables :

Proposition 1.5. — *Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel hermitien; alors il existe une unique connection ∇_E sur E qui satisfait :*

1. *∇_E est compatible avec la structure complexe, ce qui veut dire que si l'on écrit $\nabla_E : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^{(0,1)} \oplus \mathcal{A}^{(1,0)} = \nabla^h_E \oplus \nabla^{ah}_E$, on a $\nabla^{ah}_E = \overline{\partial}$;*
2. *∇_E est compatible avec la métrique, ie $d(\xi,\eta) = (\nabla_E \xi, \eta) + (\xi, \nabla_E \eta)$ (ici (a,b) est la fonction $x \mapsto \langle a(x), b(x)\rangle_x$).*

On peut voir une connection comme un moyen de dériver des sections.

2. Cohomologies des variétés complexes

On dispose de plusieurs cohomologies sur une variété complexe; l'interêt est de pouvoir les comparer.

2.1. Cohomologie de de Rham. — On a un complexe :

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} A^0(M) \xrightarrow{d_0} A^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{2d-1}} A^{2d}(M) \xrightarrow{d_{2d}} 0$$

et pour $p \geqslant 0$, on pose $H^p_{dR}(M) = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p-1}$.

2.2. Cohomologie de Dolbeault. — Fixons p; on a un complexe

$$0 \longrightarrow A^{(p,0)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \longrightarrow A^{(p,q-1)} \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{(p,q)} \longrightarrow \cdots$$

et on note $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ sa cohomologie : $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = \ker \overline{\partial}_{p,q} / \operatorname{im} \overline{\partial}_{p,q-1}$.

2.3. Intégration et homologie singulière. — Soit k un entier, $H^k_{dR}(M)$ la cohomologie de de Rham, et $H_k(M,\mathbb{C})$ l'homologie singulière. Si $\omega \in H^k_{dR}(M)$ et $u = \sum a_i f_i \in H_k(M,\mathbb{C})$ est un cycle (qu'on peut toujours prendre C^∞ par morceaux), on peut intégrer u le long de ω comme suit : $\int_\omega u = \sum a_i \int_{\Delta_k} f_i^*\omega$. Le théorème de Stokes nous dit que l'intégrale le long d'un bord d'une forme fermée est nulle, et on en déduit un accouplement $H^k_{dR}(M) \times H_k(M,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, et donc une application $H^k_{dR}(M) \to H^k(M,\mathbb{C})$. Un petit calcul montre que cette application échange produit extérieur des formes et cup-produit. Nous verrons un peu plus loin que c'est un isomorphisme.

2.4. Cohomologie de Čech des faisceaux et comparaisons des cohomologies. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur M; on note $H^p(M,\mathcal{F})$ le $p$ème groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$. Par exemple $H^0(M,\mathcal{F})$ est $\mathcal{F}(M)$, l'espace de ses sections globales. Rappelons qu'une suite de faisceaux est exacte si elle l'est localement sur les sections et qu'une suite exacte courte de faisceaux donne une suite exacte longue de cohomologie (qui mesure donc le défaut de surjectivité des sections globales).

Par exemple, soit $\mathcal{A}^k$ le faisceau des formes différentielles de degré k. Le lemme de Poincaré dit que la suite $0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \cdots$ est exacte (tout point a un voisinage homotope à un point, ce qui fait que la suite est bien localement exacte sur les sections). Un petit argument utilisant le fait que $H^q(M,\mathcal{A}^p) = 0$ si $q > 0$ permet de montrer le théorème de de Rham : $H^p_{dR}(M,\mathbb{C}) \simeq H^p(M,\underline{\mathbb{C}})$. Rappelons que la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$ s'identifie au dual de l'homologie singulière, et l'isomorphisme de de Rham est fourni par l'intégration des formes différentielles sur les cycles.

Un raisonnement parfaitement analogue (on utilise le lemme de Poincaré pour $\overline{\partial}$ qui dit que la suite $0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{(p,0)} \to \mathcal{A}^{(p,1)} \to \cdots$ est exacte) montre que la cohomologie de Dolbeault s'identifie à celle des formes différentielles holomorphes : $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \simeq H^q(M,\Omega^p)$.

On ne peut pas, a priori, comparer les cohomologies de Dolbeault et de de Rham, mais sous certaines hypothèse additionnelles, c'est possible; voir la section sur les variétés Kähleriennes.

3. Le théorème de Hodge pour une variété complexe compacte

3.1. Théorie L^2. — Soit M une variété hermitienne compacte et E^i des fibrés vectoriels; soit E un complexe d'opérateurs différentiels :

$$0 \longrightarrow \Gamma(M,E^0) \xrightarrow{d_0} \Gamma(M,E^1) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d_{n+1}} \Gamma(M,E^{n+1}) \longrightarrow 0$$

Faisons l'hypothèse qu'on dispose d'un produit scalaire sur les $\Gamma(M,E^i)$, et que les opérateurs différentiels d_i aient des adjoints d_i^* pour cette métrique :

$$0 \longrightarrow \Gamma(M,E^{n+1}) \xrightarrow{d^*_{n+1}} \Gamma(M,E^n) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{d^*_0} \Gamma(M,E^0) \longrightarrow 0$$

On définit des opérateurs (Laplaciens) $\Delta_i = d_i^* d_i + d_{i-1}d_{i-1}^* : \Gamma(M,E^i) \to \Gamma(M,E^i)$.

Nous utiliserons le théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Soit E un complexe sur une variété compacte, tel que les opérateurs* $\mathrm{Id} + \Delta_i$ *admettent des inverses compacts; alors* $\ker \Delta_i$ *est de dimension finie et*

$$\Gamma(M,E^i) = \ker \Delta_i \oplus \operatorname{im} d_{i-1} \oplus \operatorname{im} d_i^*$$

Un corollaire immédiat est le suivant : si on définit la cohomologie du complexe par $H^i(E) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i-1}$ alors $H^i(E) \simeq \ker \Delta_i$.

On notera que le théorème est vrai sous des hypothèses plus générales d'ellipticité des d_i.

Donnons une idée de preuve : il y a deux étapes distinctes, la première consistant à établir la décomposition dans les complétés L^2 des espaces en jeu, et la seconde à montrer que cette décompostion est toujours vraie avec des sections C^∞.

Soit T l'inverse de $\mathrm{Id} + \Delta_i$; il est compact (par hypothèse) et autoadjoint, ce qui fait que l'on peut appliquer le théorème de réduction des opérateurs compacts autoadjoints et en déduire que le complété L^2 de $\Gamma(M,E^i)$ est somme directe hilbertienne des espaces de dimensions finies $\ker(\lambda_m \mathrm{Id} - \Delta_i)$ où (λ_m) est une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$. On définit alors un opérateur de Green de la manière suivante : si $f = \sum a_m \varphi_m$, $Gf = \sum_{m>0} a_m \varphi_m / \lambda_m$. Soit P la projection orthogonale sur $\ker \Delta_i$; il est alors clair que $\mathrm{Id} = P + \Delta_i G$, et la décomposition en découle, au moins hilbertiennement.

Ensuite, si f est une fonction C^∞, cela se lit sur ses coefficients de Fourier (théorème de Sobolev), et il est alors clair que Gf est aussi C^∞. Par suite, chaque terme de la décomposition est au moins aussi régulier que le terme de départ (le Laplacien régularise les fonctions, c'est une caractéristique fondamentale des opérateurs elliptiques).

3.2. Structures préhilbertiennes sur les $\Gamma(M,E)$. — Soit M une variété hermitienne compacte. La métrique hermitienne nous permet de construire des produits scalaires sur les espaces de sections de formes différentielles. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré hermitien et σ, τ deux sections. On pose

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_M H_x(\sigma(x), \overline{\tau(x)})\mu(x)$$

où $\mu(x)$ est la forme volume sur M déduite de la métrique hermitienne (et telle que $\int_M \mu = 1$; c'est $1/n!\omega^n$ par le théorème de Wirtinger). Cela fait de $\Gamma(M,E)$ une espace préhilbertien.

Rappelons que par hypothèse, $T^h M$ est muni d'une métrique, et que la $(1,1)$ forme associée s'écrit localement $\frac{i}{2}\sum \varphi_j \wedge \overline{\varphi}_j$; cela permet de définir une métrique sur les $T^{*(p,q)}M$ en décidant que les $\{\varphi_I \wedge \overline{\varphi}_J/2^{p+q}\}_{\#I=p,\#J=q}$ en forment une base orthonormée.

Ensuite, il n'est pas sûr que les opérateurs que nous aurons à considérer (d et $\overline{\partial}$) possèdent des adjoints, et il faut les construire à la main. Pour ce faire, introduisons l'étoile de Hodge, $* : A^{(p,q)} \to A^{(d-p,d-q)}$, définie comme suit (les ε_{IJ} sont des signatures de permutations) :

$$*(\sum \eta_{IJ}\varphi_I \wedge \overline{\varphi}_J) = 2^{p+q-d}\sum \varepsilon_{IJ}\overline{\eta_{IJ}}\varphi_{I^C} \wedge \overline{\varphi}_{J^C}$$

On a alors (au signe près) : $d^* = *d*$ et $\overline{\partial}^* = *\overline{\partial}*$, ce qui se lit mieux sur le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A^{(p,q)} & \xrightarrow{\overline{\partial}^*_{q-1}} & A^{(p,q-1)} \\ {*}\downarrow & & \uparrow{*} \\ A^{(d-p,d-q)} & \xrightarrow{\overline{\partial}_{d-p,d-q}} & A^{(d-p,d-q+1)} \end{array}$$

On a alors en plus $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \varphi \wedge *\overline{\psi}$.

3.3. Théorie de Hodge pour d et $\overline{\partial}$. — Pour appliquer les résultats précédents, il faut voir que pour Δ un laplacien attaché à d ou à $\overline{\partial}$, $\mathrm{Id} + \Delta$ est inversible et son inverse est compact. Donnons quelques indications : Soit $\langle , \rangle_D$ le produit scalaire de Dirichlet $\langle f,g\rangle_D = \langle f,g\rangle + \langle d_i f, d_i g\rangle + \langle d^*_{i-1}f, d^*_{i-1}g\rangle$. Alors si $\varphi \in L^2$, la forme linéaire $f \mapsto \langle f, \varphi\rangle$ est continue pour la norme H^1 (espace de Sobolev). Il existe donc $\psi \in H^1$ tel que $\langle \varphi, f\rangle = \langle \psi, f\rangle_D$. On pose $T\varphi = \psi$. Reste à comparer les normes $||_D$ et $||_{H^1}$, à montrer une estimée du type $|T\varphi|_D < C|\varphi|_{L^2}$ et à utiliser les théorèmes d'injection compacte de Rellich-Kondrakov pour conclure que T est compact. Le lecteur notera que ces calculs sont sans mystère pour des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et qu'il s'agit principalement de les "recoller" sur M munie de sa connection métrique.

On a donc l'isomorphisme : $H^p_{dR}(M,\mathbb{C}) \simeq \ker \Delta_p$ et la description correspondante pour la cohomologie de Dolbeault : $A^{(p,q)} = \ker \Delta_{p,q} \oplus \overline{\partial}A^{(p,q-1)} \oplus \overline{\partial}^* A^{(p,q+1)}$ et $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \simeq \ker \Delta_{p,q}$.

Dans chaque classe de cohomologie, il existe donc une forme d'"énergie" minimale.

Tirons quelques conséquences des calculs précédents; soit Δ un Laplacien attaché à $\overline{\partial}$. Il est immédiat que $*\Delta = \Delta *$ et donc $\ker \Delta_{p,q} = \ker \Delta_{d-p,d-q}$. Le théorème de Kodaira-Serre est en partie conséquence de ces calculs :

Théorème 3.2. — *Le groupe $H^d(M,\Omega^d)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$; le produit extérieur de formes induit une forme non-dégenérée $H^{p,q}(M) \times H^{d-p,d-q}(M) \to H^{d,d}(M) \simeq \mathbb{C}$.*

On définit les nombres de Hodge de M de la manière suivante : $h^{p,q} = \dim H^{p,q}_{\overline{\partial}}$. Les résultats démontrés jusqu'à présent nous donnent : $h^{p,q} < +\infty$, $h^{d,d} = 1$, $h^{p,q} = h^{d-p,d-q}$.

4. Applications

4.1. Variétés Kähleriennes. — Si les résultats précédents nous donnent une description satisfaisante des groupes de cohomologie de de Rham et de Dolbeault, on ne sait toujours rien sur les rapports entre ces deux théories. Comme les groupes de cohomologie s'identifient à des noyaux de Laplaciens, il est normal que si l'on sait comparer les Laplaciens, on saura comparer les cohomologies. C'est possible dans un cadre assez vaste que nous allons décrire.

Soit M variété compacte hermitienne, et ω la $(1,1)$-forme associée à la métrique. On dit que la métrique est Kählerienne si $d\omega = 0$.

Exemple 4.1. —

1. Un calcul direct montre que la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^d\mathbb{C}$ jouit de cette propriété. Les formes ω passant au pullback (voir plus haut), on en déduit que toute sous-variété complexe de $\mathbb{P}^d\mathbb{C}$ est Kähler. C'est notamment vrai pour l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique projective. On notera toutefois que la métrique induite dépend du plongement.
2. Si X est une surface de Riemann, alors $d\omega$ est un forme de degré trois et donc nulle.

Le résultat principal est le suivant :

Proposition 4.2. — *Soit M une variété compacte dotée d'une métrique Kähler; alors $\Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la métrique est Kähler si et seulement si en chaque point il existe un système de coordonnées holomorphes tel que la métrique soit donnée par $\sum dz_j d\overline{z}_j +$ termes d'ordre $\geqslant 2$ (cela entraîne facilement que $d\omega = 0$ et dans l'autre sens c'est un petit calcul).

Ensuite, soit Λ le dual du produit $\wedge\omega$. On a les identités suivantes : $i\overline{\partial}^* = \Lambda\partial - \partial\Lambda$ et $i\partial^* = \Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda$. Elles sont vraies sur $\mathbb{C}^d$, et si on choisit $x \in M$, elles sont vraies à des termes s'annulant en x près (via un bon choix de coordonnées), donc en x, donc partout sur M.

De là, on en déduit facilement que $\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial = 0$ et donc que $\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} = 2\Delta_{\overline{\partial}}$. □

Ceci nous permet enfin de comparer les cohomologies de de Rham et de Dolbeault. Le résultat est le suivant (rappelons nous l'isomorphisme entre cohomologies singulière et de de Rham) : On a la décomposition $H^r(M,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(M)$ et de plus $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$.

Définition 4.3. — Une structure de Hodge de poids n, c'est la donnée de :

1. un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini $H_\mathbb{Z}$;
2. d'une filtration décroissante sur son complexifié $H_\mathbb{C} = H_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{C}$, $H_\mathbb{C} = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n$ telle que $H = F^p \oplus \overline{F}^{n-p+1}$;

On pose alors $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$, et la donnée des $H^{p,q}$ est équivalente à celle de la filtration.

Exemple 4.4. —

1. On vient de voir que les groupes de cohomologie d'une variété complexe compacte Kähler possèdent une structure de Hodge (pour la structure entière sur la cohomologie prendre l'image de $H^n(X,\mathbb{Z})$ dans $H^n_{dR}(X)$);
2. plus généralement, Deligne a montré l'existence d'une structure de Hodge sur la cohomologie des variétés algébriques lisses (qu'on ne suppose plus forcément projectives);
3. dans une autre direction, les surfaces complexes compactes (pas forcément Kähler) ont une structure de Hodge sur leur cohomologie.

Notons qu'on peut dire pas mal de choses sur la cohomologie d'une variété Kähler; la forme ω^d n'est pas exacte, vu qu'elle donne le volume de M par le théorème de Wirtinger. On en déduit que ω^m non plus pour $m \leqslant d$, car si $\omega^m = d\xi$, alors $\omega^d = d(\omega^{d-m} \wedge \xi)$. Par suite, les groupes de cohomologie d'ordres pairs sont non triviaux (ce qui fournit des exemples de variétés complexes non-Kähler). Ensuite, le théorème de Lefschetz "vache" dit que l'application naturelle $H^m(M,\mathbb{C}) \to H^{m+2}(M,\mathbb{C})$ donnée par $\wedge\omega$ est injective pour $m \leqslant d-1$.

Soit $b_k = \dim H^k(M)$; en combinant les résultats précédents, on trouve :

1. $b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}$;
2. si r est pair alors b_r est non-nul;

3. si r est impair alors b_r est pair (par dualité de Poincaré);
4. si $r \leqslant d-1$ alors $b_r \leqslant b_{r+2}$ et donc si $r \geqslant d+1$, $b_r \geqslant b_{r+2}$ (escalier de Hodge).

4.2. Variation de structure de Hodge. — L'idée dominante de cette section est que si l'on a une famille "continue" $\{X_s\}_{s\in S}$ de variétés algébriques, alors les structures de Hodge qui leur sont rattachées vont aussi varier continument.

Introduisons la notion de variation de structure de Hodge :

Définition 4.5. — Une variation de structure de Hodge, c'est la donnée de :

1. Une variété complexe connexe M (espace de paramètres);
2. un fibré (plat) $\mathbf{H}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} M$ et des sous fibrés en réseaux et en $\mathbb{R}$-ev $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}} \subset \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ tels que $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$;
3. une filtration décroissante de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ par des sous fibrés holomorphes $\mathbf{H}_{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset \mathbf{F}^p \supset \cdots \supset 0$;

vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout $s \in M$, les fibres en s des différents fibrés forment une structure de Hodge;
2. l'hypothèse technique suivante est vraie : $\nabla_{\mathbf{F}^p} \mathcal{A}^0(\mathbf{F}^p) \subset \mathcal{A}^0(\mathbf{F}^{p-1}) \otimes \Omega^1$.

L'exemple à retenir est le suivant : soit $F : \mathcal{X} \to M$ un morphisme de variétés surjectif propre holomorphe connexe, avec $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^N\mathbb{C}$ donné. Pour $s \in M$, $X_s = f^{-1}(s)$ est une variété compacte Kähler (via le plongement projectif de $\mathcal{X}$).

Soit $\mathbf{H}^r_{\mathbb{Z}}$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^r(f^{-1}(U), \mathbb{Z})$ et $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ le fibré dont les sections sont les $\Gamma(U, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C})$. Alors la filtration de Hodge sur chaque fibre se recolle en des fibrés C^∞ (ce qui nécessite un peu de travail; par exemple, les nombres $h^{p,q}_t$ sont constants car leur somme l'est et ils varient semicontinument superieurement par rapport à t, étant des dimensions de noyaux de familles d'opérateurs elliptiques).

***Théorème 4.6* (Griffiths).** — *Les fibrés $\mathbf{F}^p$ sont holomorphes et la donnée de $\{\mathbf{H}^r_{\mathbb{Z}}, \mathbf{F}^p\}$ constitue une variation de structure de Hodge.*

4.3. Polarisation. — Soit X une variété et L un fibré en droites; c'est un élément de $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ et la suite exacte courte $0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$ provenant de l'exponentielle complexe permet de définir une application de connection $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$, qui au fibré associe sa première classe de Chern.

Une variété algébrique polarisée, c'est la donnée de (X, ω) où ω est la première classe de Chern d'un fibré en droite positif (c'est à dire qu'il y a une métrique sur ce fibré telle que la matrice de courbure est positive).

Cette classe ω permet de définir une forme bilinéaire $Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ par

$$Q(\varphi, \psi) = (-1)^{n(n-1)/2} \int_X \varphi \wedge \psi \wedge \omega^{d-n}$$

cette forme est symétrique ou antisymétrique selon que n est pair ou impair.

On a de plus : $Q(H^{p_1,q_1}, H^{p_2,q_2}) = 0$ sauf si $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = n$. Enfin, $i^{p-q} Q(\psi, \overline{\psi}) > 0$ pour $\psi \neq 0$ (Hodge-Riemann).

Une telle forme bilinéaire sur $H_{\mathbb{C}}$ définit une polarisation de la structure de Hodge.

Si $\{\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}, \mathbf{F}^p\}$ est une variation de structure de Hodge, une polarisation est la donnée d'une forme bilinéaire $\mathbf{S}$ rationnelle sur les $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ et qui définit une polarisation sur chaque fibre.

Références

[1] S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Springer-Verlag, 1987.
[2] P.A. Griffiths, J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley, 1978.
[3] C. Nash. *Differential topology and quantum field theory.* Academic Press, 1991.
[4] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 2.* Springer-Verlag, 1994.
[5] W. Schmid. *Variation of Hodge structure.* Inventiones math. vol 22.

LAURENT BERGER, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris • *E-mail :* berger@clipper.ens.fr
Url : http://www.eleves.ens.fr:8080/home/berger/