Introduction

Le principe général qui sous-tend la construction d'une ncHS sur $\mathbb{P}^n$ est le suivant : si deux objets sont miroirs, alors les ncHS auxquelles ils donnent lieu sont les mêmes.

Dans [KKP]

$$\mathbb{CP}^n \quad \longleftrightarrow \quad F : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow z_1 + \dots + z_n + \frac{1}{z_1 \cdots z_n}$$

On va donc partir de ce miroir supposé pour trouver une ncHS sur $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ et constater qu'elle peut se reformuler à l'aide de données calculables seulement à partir de $\mathbb{P}^n$ et non de F.

Ces données sont :

- $c_1(\mathbb{P}^n)$, $[\omega_{Eub}]$, $*_q$ $\quad (\leadsto \nabla)$
- Une classe caractéristique $\hat{\Gamma}$ $\quad (\leadsto \Sigma)$

Cons : ces données étant présentes pour toute variété sympl. compacte (X, ω) avec ω vérifiant une certaine condition de CV (pss), la reformulation précédent permet de deviner une ncHS candidate sur $H^*(X, \mathbb{C})$.

Rappel : ncHS : H, ∇, $\Sigma \in \mathrm{Loc}\, \mathbb{C}^* \subset \mathrm{Ker}\, \nabla$

Ici $H :=$ fibré trivial sur $\mathbb{A}^1$ de fibre $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$.

I Calcul de la connexion ∇.

Donnée : $F : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longrightarrow z_1 + \cdots + z_n + \frac{1}{z_1 \cdots z_n}$$

But : connexion sur $\mathbb{A}^1$ d'ordre au plus 2 en 0.

= $\mathbb{C}[u,u^{-1}]$-module libre de type fini à connexion

+ sous $\mathbb{C}[u]$-module de même rang dans une base duquel ∇ est à pôle d'ordre ≤ 2.

On fait appel à une construction standard : le système de Gauss-Manin associé à F.

Not : $\omega := \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$, $A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$

On part du complexe de DR algébrique de $(\mathbb{C}^*)^n$:

$$0 \longrightarrow A$$

que l'on tord ensuite à l'aide de F en rajoutant un paramètre auxiliaire u :

$$K^\bullet := 0 \longrightarrow A[u,u^{-1}] \xrightarrow{d_z - u^{-1}dF} \bigoplus_i A[u,u^{-1}] \frac{dz_i}{z_i} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_z - u^{-1}dF} A[u,u^{-1}]\,\omega \longrightarrow 0$$

$K^\bullet$ = complexe de $\mathbb{C}[u,u^{-1}]$-module.

Formellement : $$\frac{\partial}{\partial z} - u^{-1}\frac{\partial F}{\partial z} = e^{F/u} \frac{\partial}{\partial z} e^{-F/u}$$

$$\underset{\frac{\partial}{\partial u} \text{ commute à } \frac{\partial}{\partial z}}{\Longrightarrow} \quad e^{F/u} \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{F}{u}} \text{ commute à } \frac{\partial}{\partial z} - u^{-1}\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2} F := \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial u}}$$

$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial u}} : K^\cdot \longrightarrow K^\cdot$ morphisme de complexe de $\mathbb{C}$-ev

$\rightsquigarrow \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial u}} : H^n(K^\cdot) \longrightarrow H^n(K^\cdot)$ connexion.

$\Omega := H^n(K^\cdot)$ $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$-module.

On regarde dans Ω le réseau de Brieskorn = $\mathbb{C}[u]$-module des classes de type $[P\omega]$, $P \in \mathbb{C}[u, z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}] = A[u]$

$$\Omega = \mathbb{C}[u, u^{-1}] \underset{\mathbb{C}[u]}{\otimes} H.$$

Une base privilégiée est $[1\cdot\omega], [z_1\omega], [z_1z_2\omega], \dots, [z_1 \cdots z_n\omega]$.

Dans cette base :

$$\nabla^F = d + \underbrace{\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 0 & & & n+1 \\ n+1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & n+1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{u}\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}}_{B}$$

Interprétation de A et B vis-à-vis de $\mathbb{P}^n$?

On dispose dans $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ d'une base privilégiée $(1, h, \dots, h^n)$

$h = [H] = [\omega_{FS}]$ + $\underset{1}{*}$ produit quantique, sut. H^* que

$H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[h] / (h^{n+1} - 1)$

$\Longrightarrow$ A correspond $c_1(\mathbb{P}^n) \underset{1}{*} \cdot$

B est l'opérateur graduation.

$\Rightarrow$ On pose $\nabla := d + \frac{1}{u^2} c_1(\mathbb{P}^m) *_1 + \frac{1}{u} Gr.$

sur $H = H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1.$

Rq : [KKP] fait le choix de considérer $Gr - \frac{m}{2} Id$ plutôt que Gr.
On considère donc :

$$\nabla := d + \frac{1}{u^2} c_1(\mathbb{P}^m) *_1 + \frac{1}{u}\left(Gr - \frac{m}{2} Id\right)$$

Pb : Pas de $\mathbb{Q}$-structure privilégiée sur $\operatorname{Ker} \nabla$.

Idée : Regarder la situation en famille en posant

$$\nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2} c_1(\mathbb{P}^m) *_q + \frac{1}{u}\left(Gr - \frac{m}{2} Id\right)$$

$$\nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial q}} = \, ?$$

avec $(H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}), *_q) \simeq \mathbb{C}[h]/(h^{m+1} - q)$

Calcul de $\nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial q}}$?

Idée : on regarde de nouveau le miroir : il faut en trouver une modification par le paramètre q avec dans la base $([\omega], [z_1\omega], \dots, [z_1 \cdots z_m \omega])$: $\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial u}} = \nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial u}}$

On regarde $F : (\mathbb{C}^*)^m \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longrightarrow z_1 + \cdots + z_m + \frac{q}{z_1 \cdots z_m}$$

Puis.

$$K_q^- := 0 \to A[u,u^{-1},q,q^{-1}] \longrightarrow \cdots \longrightarrow A[u,u^{-1},q,q^{-1}]\,\omega \longrightarrow 0.$$

Le calcul donne :

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 0 & & (n+1)\,q \\ n+1 & \ddots & \\ & n+1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{u}\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & n \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial q}} = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{qu}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & q \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{action de } h\, *_q \text{ dans } H^*(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})}$$

On prend donc $\nabla^{\text{quant}}_{\frac{\partial}{\partial q}} = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{uq}\, h\, *_q$

En général, si (X,ω) sympl. compacte $+ \cdots$ on définie sur $\left(H^*(X,\mathbb{C}) \times \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2\right)$.

$$\nabla^{\text{quant}}_{\frac{\partial}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\, c_1(X) *_q + \frac{1}{2}\left(\text{Gr} - \frac{n}{2}\,\text{Id}\right)$$

$$\nabla^{\text{quant}}_{\frac{\partial}{\partial q}} = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{uq}\,[\omega] *_q$$

Si $X = \mathbb{P}^m$, $\omega = \omega_{\text{Fub}}$, dans $1, h, \ldots, h^m$.

$$\nabla^{\text{quant}}_{\frac{\partial}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & (n+1)q \\ n+1 & \ddots & \\ & n+1 & 0 \end{pmatrix}}_{A(q)} + \frac{1}{u}\underbrace{\begin{pmatrix} -m/2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m/2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\nabla^{\text{quant}}_{\frac{\partial}{\partial q}} = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{uq}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & q \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C(q)}$$

Rq : Si $q \to 0$ $\quad *_q \to \wedge$ et on voit apparaître sur $\left(H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \times A^1 \to A^1\right)$:

$$\nabla^{cl}_{\frac{\partial}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ m+1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & m+1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{u}\begin{pmatrix} -m/2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m/2 \end{pmatrix}$$

II La $\mathbb{Q}$-structure. $X = \mathbb{P}^m$

Not : $\mathcal{S}^{quant} := \operatorname{Ker} \nabla^{quant}$

$\mathcal{S}^{cl} := \operatorname{Ker} \nabla^{cl}$.

But : Trouver une $\mathbb{Q}$-structure particulière $\mathcal{E}^{cl} \subset \operatorname{Ker} \nabla^{cl} = \mathcal{S}^{cl}$.

Idée : Trouver une $\mathbb{Q}$-structure particulière $\mathcal{E}^{quant}$ sur $\mathcal{S}^{quant}$ et "passer à la limite $q \to 0$". Pour cela, on va utiliser une description des sections de $\mathcal{S}^{quant}$ en terme d'intégrales.

Les intégrales en question sont :

$u, q \in \mathbb{C}^*$

$$\Psi_\Gamma := (-u)^{-m/2} \int_\Gamma e^{F/u}\, \omega.$$

Quand cette intégrale a-t-elle un sens ?

Il suffit que Γ soit un cycle à support dans la famille $\Phi_{u,q}$ des fermés de $(\mathbb{C}^*)^m$ tels que $\dfrac{\operatorname{Re}(u^{-1}F)}{\|z\|^r} \xrightarrow[z_i \to 0 \text{ ou } \infty]{} -\infty$ pour un $r \in \mathbb{Q}^{+*}$

Ex : Les onglets de Lefschetz :

Ce sont des cycles de $(\mathbb{C}^*)^n$ définis à partir de Crit F.

Calcul de Crit F ?

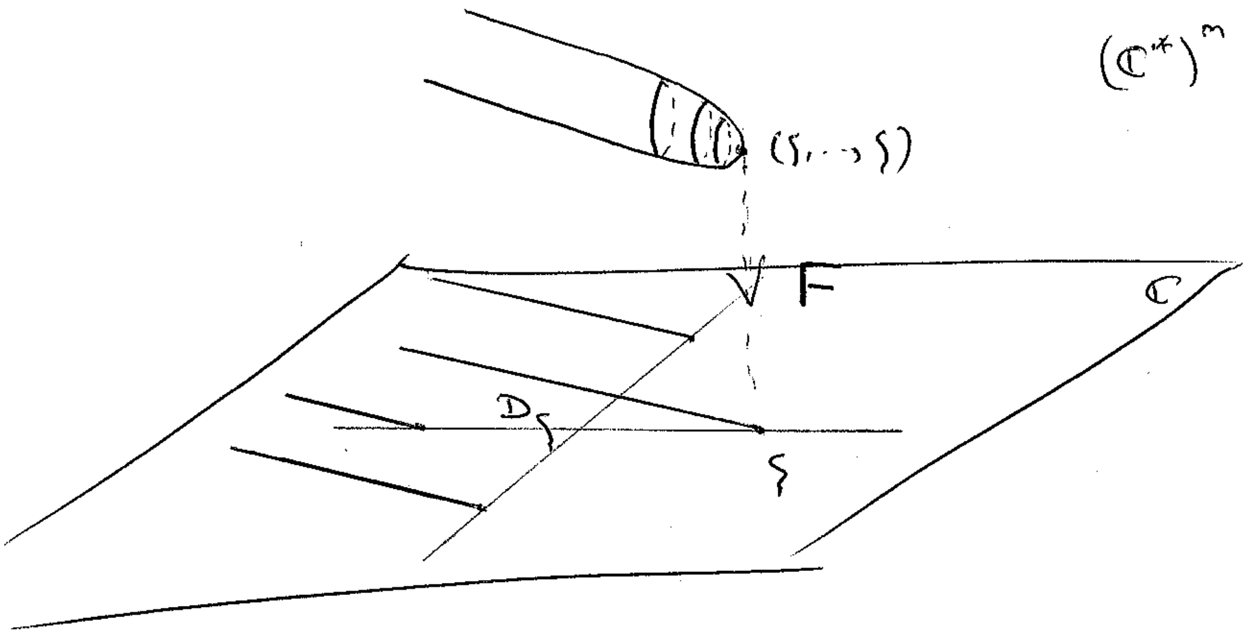
$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = 1 - \frac{q}{z_1 z_i^2 \cdots z_n} = 0 \Rightarrow z_i = \frac{q}{z_1 \cdots z_n}$$

$$\Rightarrow z_1 = \cdots = z_n$$

$$\Rightarrow z_i^{n+1} = q.$$

$z = (\zeta, \dots, \zeta)$, $\zeta^{n+1} = q$ point critique non dégénéré.

$F(z) = (n+1)\zeta$



D_ζ dirigée dans le sens de Re < 0.

Les onglets de Lefschetz sont des cycles de $(\mathbb{C}^*)^n$ au-dessus de D_ζ dessinés par les cycles évanescents au dessus de D_ζ.
Il y en a 1 par chaque droite D_ζ i.e. $(n+1)$.

TH : $H_{\phi_{\mu,q}}((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Z})$ est le groupe libre engendré par les onglets de Lefschetz. La collection des $H_{\phi_{\mu,q}}((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Z})$ s'organise en un système local noté $H_F((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C})$ s'identifiant à S^{quant} via :

$$H_F((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} S^{quand}$$

$$\Gamma = (\Gamma_{\mu,q}) \longrightarrow \psi := \left(\left(\mu q \frac{\partial}{\partial q}\right)^n \psi_\Gamma, \dots, \left(\mu q \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi_\Gamma, \psi_\Gamma\right)$$

Conséquence : On pose $\boxed{\Sigma^{quant} := \text{Image de } H_F((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Q})}$.

III Du quantique au classique.

But : donner un sens à "$S^{cl} = \lim_{q \to 0} S^{quant}$".

Conséquence : on pourra poser "$\Sigma^{cl} = \lim_{q \to 0} \Sigma^{quant}$"

1ère idée : $\psi \in S^{quant} \longmapsto \left(\mu \to \lim_{q \to 0} \psi(\mu, q)\right)$.

Pb : présence de log dans ψ.
Cela est dû au système (2) :

$$(1) \quad \nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial \mu}} = \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\mu^2} A(q) + \frac{1}{\mu} B$$

$$(2) \quad \nabla^{quant}_{\frac{\partial}{\partial q}} = \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{\mu q} C(q)$$

Fixons μ. $\psi(\mu, \cdot)$ est solution de (2)

(2) = système diff. sur $\mathbb{C}$ à singularité régulière en 0

TH classique $\Rightarrow \exists P_u$ changement de Jauge avec

- Via P_u, la matrice de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial q}}$ s'écrit $C(0)$
- P_u défini au voisinage de $q=0$, holomorphe en (u, q).
- $P_u(q=0) = I_{m+1}$

$$\Rightarrow \psi = \underbrace{P_u \exp\left(\frac{\log q}{u} C(0)\right)}_{D(q)} \psi_{cl} \quad ; \quad \psi_{cl} \text{ holomorphe en } u.$$

<u>Conséquence</u> :
$$D^{-1}(q)\psi = D(q)^{-1} P_u D(q) \psi_{cl}$$
$$= D(q)^{-1}(I_{m+1} + q \cdot + \cdots) D(q) \psi_{cl}$$
$$= \psi_{cl} + o(1)$$

Donc $D^{-1}(q)\psi \xrightarrow[q \to 0]{} \psi_{cl}$

<u>Montrons que $\psi_{cl} \in S^{cl}$</u> :

- on injecte $\psi = P_u D(q) \psi_{cl}$ dans (1).

$$\frac{\partial}{\partial u}\psi + \frac{1}{u^2} A(q)\psi + \frac{1}{u} B\psi = 0.$$

ordre 0 en q

$$\frac{\partial}{\partial u}\psi_{cl} + \frac{1}{u^2} A(0)\psi_{cl} + \frac{1}{u} B\psi_{cl} = 0$$

<u>Conséquence</u> : On pose $\boxed{\Sigma^{cl} := \exp\left(-\frac{\log q}{u} C(0)\right) P_u^{-1} \Sigma^{quant}}$

IV Analyse de Σ^{cl}

But : Exprimer Σ^{cl} à l'aide de données liées à $\mathbb{P}^m$.

idée :

$$\begin{tikzcd}
M \circlearrowright S^{quant}_{(q,u)} \arrow[r, "\text{“}q\to 0\text{”}"'] & S^{cl}_u \arrow[r] & H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C}) \supset M_{const} \\
\circlearrowright \Sigma^{quant}_{(q,u)} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \Sigma^{cl}_u \arrow[r] & \Sigma^{const} \ \mathbb{Z}\text{-réseau} \arrow[u, hook] \ \circlearrowleft
\end{tikzcd}$$

on fige les sections à l'aide d'une matrice fondamentale de solutions.

M induit

M_{const} induit

On regarde l'action de la monodromie M obtenue lorsque q tourne autour de 0 dans le sens non trigonométrique. M agit sur S^{quant} et stabilise Σ^{quant}.
On décrit d'autre part une procédure permettant de passer bijectivement de $S^{quant}_{(q,u)}$ à $H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$. Celle-ci se fait en deux temps, et la 1^{ere} étape a fait l'objet de III.
Alors : comprendre $\Sigma^{quant} \Longleftrightarrow$ comprendre $\Sigma^{cl} \Longleftrightarrow$ Comprendre Σ^{const}.

On considère l'action M_{const} induite par M sur $H^*(\mathbb{P}^m, \mathbb{C})$, et on trouve un cycle Γ de telle sorte que la solution associée donne dans Σ^{const} un vecteur cyclique pour M_{const}

. . .

Fait : $F = \exp(\log(-u) B) \exp(\underline{\log(-u)}\, A(0))$ est une matrice fondamentale de solution de $(\nabla^{cl}_u = 0)$

idée : exploiter $[B, A(0)] = A(0)$

Conséquence : $\Psi_{const} := F\Psi_{cl}$ est indépendant de μ et $\Psi_{const} = \Psi_{cl}(-1)$.

$\Psi_{cl} \to \Psi_{const}$ est l'opération de rigidification.

Par définition de Ω_{const} :

$$\begin{tikzcd} \Psi \arrow[r] \arrow[d, "\Omega"'] & \Psi_{const} \arrow[d, "\Omega_{const}"] \\ \Omega\Psi \arrow[r] & (\Omega\Psi)_{const} \end{tikzcd}$$

commute

Calculons Ω_{const}

$$\Psi = P_\mu \exp\left(\frac{\log q}{\mu} C(0)\right)\Psi_{cl}$$

$$\Big\downarrow \text{ monodromie.}$$

$$\Omega\Psi = P_\mu \exp\left(-\frac{2i\pi}{\mu} C(0) + \frac{\log q}{\mu} C(0)\right)\Psi_{cl}$$

$$= P_\mu \exp\left(-\frac{2i\pi}{\mu} C(0)\right) P_\mu^{-1}\Psi$$

$$\Rightarrow \Omega = P_\mu \exp\left(-\frac{2i\pi}{\mu} C(0)\right) P_\mu^{-1}$$

$$\Omega_{const}\Psi_{const} = (\Omega\Psi)_{const}$$

$$= \underbrace{F}_{\text{rigidification}} \underbrace{\exp\left(-\frac{\log q}{\mu} C(0)\right) P_\mu^{-1}}_{\text{quantique} \to \text{classique.}}(\Omega\Psi)$$

$$\Omega_{const}\Psi_{const} = F \cancel{\exp\left(-\frac{\log q}{\mu} C(0)\right)} \cancel{P_\mu^{-1}} \cancel{P_\mu} \exp\left(-\frac{2i\pi}{\mu} C(0)\right) \cancel{\exp\left(\frac{\log q}{\mu} C(0)\right)}\Psi_{cl}$$

$$= F \exp\left(-\frac{2i\pi}{\mu} C(0)\right)\Psi_{cl}$$

$M_{const}\,\Psi_{const}$ indépendant de $\mu \Longrightarrow \mu = -1$.

$$M_{const}\,\Psi_{const} = \exp(2i\pi\, C(0))\,\Psi_{const}$$

$$\Longrightarrow M_{const} = \exp(2i\pi\, C(0)) \text{ dans } (1, h, \ldots, h^m).$$

<u>Calculons Σ^{const}.</u>

<u>idée</u> : trouver un vecteur cyclique pour l'action de monodromie

$\mu \in \mathbb{R}^-$ $q \in \mathbb{R}^+$.

$$\Gamma := \mathbb{R}^{+*} \times \cdots \times \mathbb{R}^{+*} \subset (\mathbb{C}^*)^m.$$

$$\Gamma \in H_{\phi_{\mu,q}}((\mathbb{C}^*)^m, \mathbb{Z})$$

$$\leadsto \Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_m = \Psi_\Gamma) \in S^{quant}, \quad \Psi_\Gamma = (-\mu)^{-m/2} \int_\Gamma e^{F/\mu}\,\omega$$

$$\Psi = P_\mu \exp\left(\frac{\log q}{\mu}\, C(0)\right) \Psi_{cl} \quad , \quad C(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(Id + q P'_\mu + \cdots\right)\left(Id + \frac{\log q}{\mu} C(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\log q}{\mu}\right)^m C(0)^m\right) \Psi_{cl}$$

$$\Psi_\Gamma = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,\mu^k} (\log q)^k\, \Psi_{cl, m-k} + O(q) \qquad q \to 0.$$

(transformée de Mellin (?!)

$$\int_0^{+\infty} \Psi_\Gamma\, q^s \frac{dq}{q} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{\mu^k s^{k+1}} \Psi_{cl, m-k} + O(1), \quad s \to 0$$

Le calcul donne sans difficultés : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi_\Gamma\, q^s \frac{dq}{q} = (-\mu)^{-m/2} (-\mu)^{(m+1)s}\, \Gamma(s)^{m+1}$

donc en prenant $\mu = -1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} s^{m-k}\, \Psi_{const, m-k} = s^{m+1}\, \Gamma(s)^{m+1} + O(s^{m+1})$

Donc $\Psi_{const,0}\, s^0 + \cdots + \Psi_{const,n}\, s^n = \Gamma(1+s)^{n+1} + O(s^{n+1})$

$$\Big\downarrow\ s \leftarrow h$$

$$\Psi_{const} = \Psi_{const,0}\, h^0 + \cdots + \Psi_{const,n}\, h^n = \Gamma(1+h)^{n+1}.$$

Or $\log \Gamma(1+s) = -\gamma s + \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} s^k$. γ constante d'Euler.

$$\Psi_{const} = \exp\Big(-(n+1)\gamma h + \sum_{k \geq 2} (-1)^k (n+1) \frac{\zeta(k)}{k} h^k\Big)$$

$$:= \hat{\Gamma}(\mathbb{P}^n)$$

$$\in \Sigma^{const}.$$

De manière générale, on posera pour X complexe

$$\boxed{\hat{\Gamma}(X) := \exp\Big(\gamma\, ch_1(T_X) + \sum_{m \geq 2} (-1)^k \frac{\zeta(m)}{m} ch_m(T_X)\Big)}$$

Not : $\delta := \bigoplus (2i\pi)^k \, Id_{H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q})}$

Montrons que Σ_{const} est l'image de $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q})$ par $(\hat{\Gamma}(\mathbb{P}^n) \wedge \cdot) \circ \delta$.

Posons $R = (\hat{\Gamma}(\mathbb{P}^n) \wedge \cdot) \circ \delta\, (H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}))$.

Lemme 1 : Ω_{const} stabilise R.

$v_k := (\hat{\Gamma}(\mathbb{P}^n) \wedge \cdot) \circ \delta(h^k)$.

$\Omega_{const}\, v_k = (2i\pi)^k\, \Omega_{const}\, \Psi_{const} \wedge h^k$

Or $\Pi_{const} = \exp\left(2i\pi \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(2i\pi)^p}{p!} h^p \wedge$.

donc $\Pi_{const} v_k = (2i\pi)^k \, \Pi_{const} \sum_{l=0}^{m} \psi_{const,l} \, h^{k+l}$

$$= \sum_{l=0}^{m} \sum_{p=0}^{m} \frac{(2i\pi)^{k+p}}{p!} \psi_{const,l} \, h^{k+p+l}$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \sum_{p=k}^{m} \frac{(2i\pi)^{p}}{(p-k)!} \psi_{const,l} \, h^{p+l}$$

$$= \sum_{p=k}^{m} \frac{1}{(p-k)!} \sum_{l=0}^{m} (2i\pi)^p \psi_{const,l} \, h^{l+p}$$

$$= \sum_{p=k}^{m} \frac{1}{(p-k)!} v_p$$

Dans $(1, h, \dots, h^m)$ $\quad (v_0, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & (2i\pi)^k \psi_{const,0} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

avec $\psi_{const,0} = 1$, donc $(v_0, \dots, v_m)$ base de R.

Dans cette base Π_{const} est donné par $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m-1)!} & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{Q})$

<u>Lemme 2</u> : $(1, 0, \dots, 0)$ est un vecteur cyclique de la matrice précédente.

<u>Conséquence</u> : $v_0 = \hat{\Gamma}(P^m) = \psi_{const}$ est cyclique pour Π_{const}

on conclut

$$\begin{array}{ccc} & \psi_{const} \circlearrowleft \Pi_{const} & \\ \nearrow & & \\ \Sigma^{const} & = & \circlearrowleft R \end{array}$$