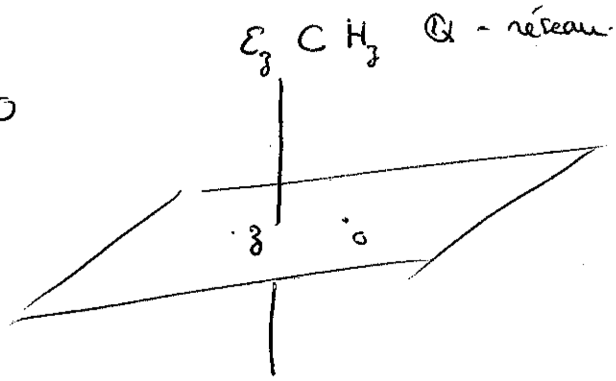
I Axiome d'opposition (bis).

(1

Rappel : une structure de Hodge non-commutative est la donnée de :

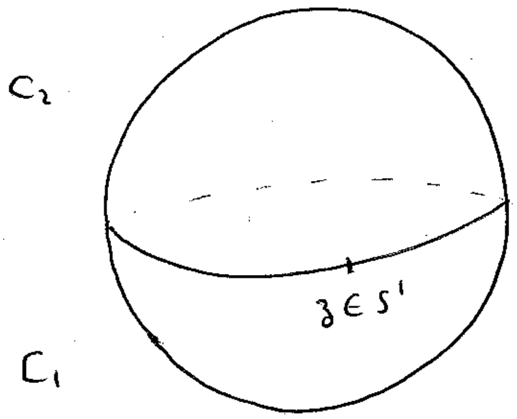
- H fibré algébrique sur $\mathbb{A}^1$
- ∇ connection sur H méromorphe en 0 à pôle d'ordre ≤ 2.
- $\mathcal{E} \in \mathrm{Loc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}^*$, $\mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}\,\nabla$



+ compatibilités.

$(H, \mathcal{E})$ permet de produire un fibré holomorphe $\hat{H}$ sur $\mathbb{P}^1$.
L'axiome d'opposition consiste à demander qu'il soit trivial.

Construction de $\hat{H}$?



$\gamma : z \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}}$

H holomorphe sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$

$K := \overline{\gamma^* H}$ holomorphe sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$.

$\forall z \in S^1$, $K_z = \overline{H}_z$.

or $H_z = \mathcal{E}_z \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} K_z$

Donc $H_{|C_1}$ se recolle avec $K_{|C_2}$ le long de S^1!
$\hat{H}$ est le fibré holomorphe ainsi obtenu.

Sections holomorphes de $\hat{H}$?

Si $s \in \mathcal{E}$, on dispose de la section holomorphe de $\hat{H}$

$$\hat{s} : z \longrightarrow \begin{cases} s(z) & \text{sur } C_1 \cup S^1 \\ s\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) & \text{sur } C_2 \end{cases}$$

Si $s_1, \dots, s_m$ trivialisation de $\mathcal{E}$, $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_m$ trivialisation de $\hat{H}$. (2

Donc une section locale de $\hat{H}$ est de la forme

$$s = \sum_1^m f_i \, z \, \hat{s}_i \quad , \quad f_i \text{ holomorphe.}$$

II Exemple

- $H := \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \downarrow \\ \mathbb{C} \end{matrix}$

- $\nabla = d - \frac{a}{z} dz \,, \quad a \in \mathbb{C}.$

L'existence d'un système local de $\mathbb{Q}$-réseaux dans $H_{|\mathbb{C}^*}$ impose

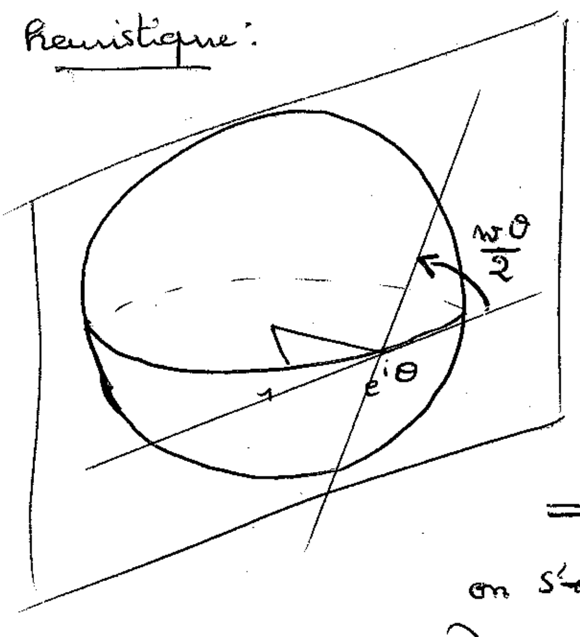
$$e^{2i\pi a} \in \mathbb{Q}$$

soit $a = \frac{1}{2i\pi} \ln r + \frac{w}{2} \quad , r \in \mathbb{Q}^{*+}, \; w \in \mathbb{Z}$

On pose alors $\mathcal{E} := \mathbb{Q} z^a$.

$\boxed{\textbf{Prop: } \mathcal{H}_a = (H, \nabla, \mathcal{E}) \text{ est une mcHS ssi } w = 0}$

Heuristique:



$$\mathcal{E}_{e^{i\theta}} = e^{i\frac{w\theta}{2}} e^{\frac{1}{2\pi}\ln r} \mathbb{Q}.$$

Mais $H_{e^{i\theta}} = \mathcal{E}_{e^{i\theta}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} K_z$ ne dépend que du $\mathbb{R}$-ev porté par $\mathcal{E}_{e^{i\theta}}$ donc pas du facteur de dilatation $e^{\frac{i}{2\pi}\ln r}$.

$\Rightarrow$ $\hat{H}$ ne dépend que de w.

on s'attend donc à avoir $\hat{H} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)$.

Prouvons-le.

$$s = z^a \in \Sigma \rightsquigarrow \hat{s} : z \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^a \text{ sur } C_1 \cup S^1 \\ \bar{z}^{-a} = z^{-\bar{a}} \underset{\bar{\mathbb{C}}}{\cdot} 1 \end{array} \right.$$

$$\rightsquigarrow t := z^{-a} \cdot \hat{s}\, z \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ sur } C_1 \cup S^1 \\ \bar{z}^{a-\bar{a}} \underset{\bar{\mathbb{C}}}{\cdot} 1 = z^{-w} \underset{\bar{\mathbb{C}}}{\cdot} 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ cocycle z^{-w}

$\Rightarrow \hat{H} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)$.

III $\underline{HS \xrightarrow[\text{plein fidèle}]{} mcHS}$.

Soit $(V_{\mathbb{Q}}, V, F^{\cdot}V)$ HS rationnelle de poids w.

$$M := \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} V$$

$$H = \sum z^{-k} F^k V \subset M.$$

$F^{\cdot} V \Longrightarrow H$ sous $\mathbb{C}[z]$-module de M.

Fibres de H?

Si $z_0 \neq 0$ $\quad H_{z_0} \xrightarrow{\sim} V$

$\qquad\qquad\quad z^{-k} v \longrightarrow z_0^{-k} v$

$z_0 = 0 \quad H_{z_0} = H / zH$

Comme $\mathbb{C}$-ev $\quad H = \bigoplus z^{-k} F^k V$

$$zH = \bigoplus z^{-k} F^{k+1} V$$

donc $\quad H_z = \bigoplus z^{-k} V^{k, w-k} \xrightarrow[\text{oublie de } z^{-k}]{\sim} V$

Conséquence :

1) si $v \in V^{k,w-k}$, $z^{-k} v \in \Gamma(\mathbb{A}^1, H)$ partout non nulle.

2) $H^{an}_{|\mathbb{C}^*} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \otimes_{\mathbb{C}} V$.

Posons $\nabla := \left(d + \frac{w}{2}\frac{dz}{z}\right) \otimes \mathrm{id}_V$ sur H.

$$\mathrm{Ker}\,\nabla = z^{w/2} V$$

Posons $\mathcal{L} = z^{w/2} V_{\mathbb{Q}}$.

$\boxed{\text{Prop } (H, \nabla, \mathcal{L}) \text{ est une mc HS}}$

$v_1, \dots, v_m$ base de $V_{\mathbb{Q}}$.

$$s_i := z^{-w/2} v_i \rightsquigarrow \hat{s}_i : z \longmapsto \begin{cases} z^{-w/2} v_i & \text{sur } C_1 \cup S^1 \\ z^{w/2} \cdot_{\bar{V}} v_i & \text{sur } C_2 \end{cases}$$

$v := \sum_i \lambda_i v_i \in V$.

$$\rightsquigarrow \hat{s} := \sum_i \lambda_i \hat{s}_i : z \longmapsto \begin{cases} z^{-w/2} v \\ z^{w/2} \cdot_{\bar{V}} \bar{v} \end{cases}$$

$$t := z^{w/2 - k} \cdot \hat{s} : z \longmapsto \begin{cases} z^{-k} v \\ z^{(w-k)} \cdot_{\bar{V}} \bar{v} \end{cases}$$

Or si $v \in V^{k,w-k}$, $\bar{v} \in V^{w-k,k}$

donc par 1) t se prolonge à $\mathbb{P}^1$, et on obtient la trivialité de $\hat{H}$ en considérant une base de chaque $V^{k,w-k}$.

Exo : Quand $\mathcal{H}_a$ provient-elle d'une structure de Hodge ?