INTRODUCTION AUX STRUCTURES DE HODGE NON COMMUTATIVES

D'APRÈS KATZARKOV, KONTSEVICH ET PANTEV

EXPOSÉ À L'ENS, 7 OCTOBRE 2009

Claude Sabbah

1. Introduction

Dans [**9**], les trois auteurs proposent la définition suivante pour une structure de Hodge non commutative :

Définition 1.1. Une structure de Hodge non commutative consiste en la donnée

(1) d'un fibré vectoriel algébrique sur la droite affine complexe $\mathbb{A}^1$ de coordonnée u,
(2) d'un faisceau localement constant $\mathscr{E}_B$ de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}} \smallsetminus \{0\}$,
(3) d'un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E}_B \xrightarrow{\sim} H^{\mathrm{an}}_{|\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\}}$,

satisfaisant aux propriétés de prolongement suivant sur $\mathbb{P}^1$:

(a) via (3), la connexion holomorphe $d\otimes\mathrm{Id}$ sur le fibré holomorphe $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathscr{E}_B$ s'étend en une connexion rationnelle ∇ sur H avec un pôle d'ordre au plus 2 à l'origine et une singularité régulière à l'infini ;

(b) la structure de Stokes de la connexion à l'origine est définie sur $\mathbb{Q}$ de manière compatible à la monodromie du faisceau localement constant $\mathscr{E}_B$,

(c) le recollement twistoriel de H^{an} avec son twisteur-conjugué définit un fibré trivial $\widehat{H}$ sur $\mathbb{P}^1$.

Remarques 1.2.

(1) Pour la théorie de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ classique, on considère plutôt un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H muni d'un réseau $H_{\mathbb{Q}}$ et d'une filtration décroissante $F^\bullet$ w-opposée à sa conjuguée. JBT reviendra plus en détail sur cette notion et le rapport avec la présentation non commutative.

(2) On a deux structures « rationnelles » :

- $\mathbb{Q}$-structure sur le faisceau localement constant $\mathrm{Ker}\,\nabla$ sur $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\}$, qui classiquement exprime la partie « topologique » de la structure de Hodge,
- $\mathbb{C}(u)$-structure sur $\widehat{H}$ définie par H, qui exprime ici l'aspect « quantique » de la structure de Hodge non commutative.

(3) Pour traiter tous les exemples intéressants, on introduit une $\mathbb{Z}/2$-graduation (qui correspond aux degrés pairs/impairs de la cohomologie), mais je n'en parlerai pas.

(4) Dans la théorie de Hodge il y a une notion de poids. Ici, le poids intervient de manière moins importante, car on peut le ramener à 0.

2. Un petit historique : comment en est-on arrivé là ?

Bien sûr, le premier exemple de structure de Hodge est celui de $H^k(X,\mathbb{C})$ pour X projective lisse sur $\mathbb{C}$. Une famille holomorphe $f: X \to S$ de variétés projectives lisses $X_s = f^{-1}(s)$ donne lieu à un fibré plat $\mathscr{H}^p$ sur S, de système local associé $\boldsymbol{R}^p f_*\mathbb{C}_X$, muni d'une *variation de structure de Hodge.* Si S est aussi projective lisse, on peut essayer de calculer la structure de Hodge de $H^k(X,\mathbb{C})$ par un argument du type Fubini (suite spectrale de Leray) $H^q(S,\boldsymbol{R}^p f_*\mathbb{C}_X) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C})$. Il est naturel de savoir si la suite spectrale est une suite spectrale dans la catégorie des structures de Hodge, donc en particulier si la cohomologie d'une variété projective lisse S à coefficients dans un faisceau localement constant sous-jacent à une variation de structure de Hodge est elle-même une structure de Hodge (le cas classique étant celui de la variation constante triviale sur le faisceau constant $\mathbb{C}_X$).

Deligne a montré ce résultat dans les années 1972-73 (manuscrit non publié et lettre à Schmid, cité dans [**15**]), en utilisant aussi l'existence d'une polarisation. Le point est que, dans la théorie classique, un argument essentiel consiste en les identités de Kähler pour le laplacien (conduisant à $\Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d$ notamment). Cet argument s'étend sans difficulté (voir le texte de Demailly [**6**]) lorsque le système local de coefficients est sous-jacent à un fibré plat *unitaire* (*i.e.* la représentation de monodromie associée au faisceau localement constant prend ses valeurs dans le groupe $\mathrm{U}(n)$, $n =$ rang du fibré) mais ce n'est pas le cas pour une variation de structure de Hodge polarisée en général. Ainsi, Deligne a montré comment adapter les identités de Kähler.

À la fin des années 80, à la suite de Hitchin, C. Simpson [**10, 11**] a remarqué que les identités de Kähler sont valables dans un cadre beaucoup plus général, où l'on dispose d'un fibré holomorphe avec connexion plate sur X muni d'une métrique hermitienne, pas nécessairement plate, mais *harmonique* (dont je ne donnerai pas la définition). Sur une suggestion de Deligne, il a exprimé la condition d'harmonicité en introduisant un paramètre accessoire u (appelé λ par Simpson) et la notion de λ-connexion. Drinfeld m'a aussi fait remarquer que des physiciens russes (Zakharov et al., [**13, 14**]) travaillant sur des systèmes intégrables à la fin des années 70 avaient aussi remplacé des équations différentielles non linéaires par une équation d'intégrabilité (courbure nulle) en introduisant un tel paramètre accessoire.

Simpson a systématisé le procédé, pour le rendre aussi analogue que possible à la notion de variation de structure de Hodge, et a appelé les nouveaux objets *variations de structure de twisteur* [**12**]. Un twisteur pur de poids w est alors simplement un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ (variable u) isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(w)^n$. La notion de variation est plus délicate, car le fibré sur $X\times\mathbb{P}^1$ que l'on considère n'est pas holomorphe. Il l'est seulement dans la direction u. Il est de plus muni d'une connextion *relative* (*i.e.* qui dérive dans les directions X uniquement) à pôle simple le long de $u=0$ et $u=\infty$.

Dans l'approche précédente, le paramètre u n'a pas de signification géométrique. C'est plutôt un paramètre d'homogénéité qui, dans le cas des structure de Hodge, permet de récupérer l'exposant de la filtration de Hodge. Au début des années 90, les physiciens Cecotti et Vafa [**4, 5, 3**] ont voulu enrichir leur approche de la théorie conforme des champs, notamment pour les modèles de Landau-Ginzburg, d'une structure « anti-topologique ». La notion appelée maintenant variété de Frobenius concerne le fibré tangent TX d'une variété X, et les conditions de Frobenius se lisent comme l'intégrabilité d'une connexion sur l'image inverse de TX sur $X\times\mathbb{A}^1$, connexion absolue cette fois-ci (*i.e.* avec dérivation le long de u), qui a un pôle de rang de Poincaré 1 le long de $u=0$ et qui a une singularité régulière à l'infini. Il faut noter que la connexion relative associée, quand on la restreint à $X\times\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}$, est du type de celle intervenant dans les variations de structure de twisteur. Cecotti et Vafa ont dans ce cadre considéré des équations différentielles liées à une condition d'harmonicité, pour généraliser la notion de « géométrie spéciale » sur X.

C'est B. Dubrovin [**7**] qui montré comment lire les conditions de Cecotti-Vafa comme une condition d'intégrabilité d'une connexion étendue avec un « paramètre spectral », et exprimé cette condition comme la condition de pluri-harmonicité d'une application de la variété à valeurs dans $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{O}(n)$. C'est ce qui fait le lien avec la condition d'harmonicité considérée par C. Simpson.

Au début des années 2000, C. Hertling [**8**] a fait le lien précis entre les constructions de Cecotti et Vafa d'une part et Simpson d'autre part. Il a raffiné la notion de variation de structure de twisteur en précisant les équations satisfaites par une connexion plate absolue (et non plus relative), et a montré que cela correspondait, dans le cas du fibré TX, aux conditions de Cecotti et Vafa. Ceci a pris le nom de (variation de) structure TERP.

Ainsi il y a eu deux types de généralisation des résultats sur les variétés de Frobenius : l'une, holomorphe, est la notion de variation de structure de Hodge semi-infinie de S. Barannikov [**1, 2**] (qui peut aussi contenir une structure réelle ou rationnelle, ainsi qu'une polarisation), et l'autre, qui fait a besoin, pour sa construction, d'une structure réelle, par Cecotti-Vafa réinterprétée par C. Hertling.

La notion de structure de Hodge non commutative de KKP fait en quelque sorte la synthèse des deux points de vue, en raffinant la structure réelle par une structure rationnelle, pour rendre les choses encore plus proches de la topologie. Les deux structures algébriques sur le fibré H reflètent cette dualité de points de vue.

J'ai certainement oublié d'autres contributions à cette histoire.

3. Connexions à pôle double et matrices de Stokes

Soit $\mathscr{H}$ un $\mathbb{C}\{u\}$-module libre muni d'une connexion ∇ à pôle double en $u=0$. On peut aussi considérer $\mathscr{H}$ comme un fibré vectoriel holomorphe sur un voisinage Δ de l'origine et, en restriction à Δ^*, la connexion définit un faisceau localement constant $\mathscr{E}$, dont la donnée est équivalente à celle d'un espace vectoriel muni d'un automorphisme (E,T), $E=\Gamma(\widetilde{\Delta}^*,\mathscr{E})$ et T est la monodromie.

Soit $\mathscr{M}=\mathbb{C}(\{u\})\otimes_{\mathbb{C}\{u\}}\mathscr{H}$. C'est un $\mathbb{C}(\{u\})$-espace vectoriel à connexion, où $\mathbb{C}(\{u\})$ est le corps des séries de Laurent convergentes $\mathbb{C}\{u\}[u^{-1}]$.

Théorème 3.1 **(Levelt-Turrittin).** *Il existe une base du $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-espace vectoriel $\widehat{\mathscr{M}}\overset{\text{déf}}{=}\mathbb{C}(\!(u)\!)\otimes_{\mathbb{C}(\{u\})}\mathscr{M}$ dans laquelle la matrice de ∇ est sous « forme normale ».*

On dit que $(\mathscr{M},\nabla)$ est *sans ramification* ou *de type exponentiel* si la forme normale est du type suivant :

$$(*)\qquad \nabla=d+\sum_i\Big(\frac{c_i}{u}\,\mathrm{Id}_i+A_i\Big)\frac{du}{u},\quad c_i\in\mathbb{C}\text{ et }A_i\text{ constante.}$$

Théorème 3.2 **(Hukuhara-Turrittin).** *Si $(\mathscr{M},\nabla)$ est à pôle double et* sans ramification*, tout changement de base formel faisant passer à la forme normale se relève asymptotiquement de manière unique dans des secteurs d'ouverture $\pi+\varepsilon$.*

Théorème 3.3 **(Riemann-Hilbert).** *La donnée de $(\mathscr{M},\nabla)$ à pôle double et* sans ramification *est équivalente à la donnée « monodromique » suivante :*

– *deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriel E, E' de dimension* $\dim_{\mathbb{C}(\{u\})} \mathscr{M}$ *muni d'une décomposition* $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, $E' = \bigoplus_{i\in I} E'_i$,

– *pour tout $i \in I$ un nombre complexe c_i, de sorte que $i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j$,*

– *pour un ordre total fixé $<$ sur I, la donnée de deux isomorphismes $S^{\pm} : E \to E'$ tels que $S^{\pm}_{ij} : E_i \to E_j$ est nul si $i > j$ (resp. $i < j$) et $S^{\pm}_{ii}$ est aussi inversible.*

Ainsi, S^+ est triangulaire supérieure et S^- triangulaire inférieure. La monodromie (E, T) est donnée par $(S^+)^{-1}S^-$. On appelle parfois monodromie formelle le couple $(E, \widehat{T})$ avec $\widehat{T}_{ij} = 0$ is $i \neq j$ et $\widehat{T}_{ii} = (S^+_{ii})^{-1}S^-_{ii}$. Dans la correspondance de R-H, on peut trouver une forme normale formelle de sorte que, pour tout $i \in I$, $\widehat{T}_{ii} = \exp -2\pi A_i$.

Définition 3.4. On dit que la structure de Stokes $(E, E', S^{\pm})$ est définie sur $\mathbb{Q}$ si les espaces E, E' sont munis de $\mathbb{Q}$-réseaux $E_{\mathbb{Q}}, E'_{\mathbb{Q}}$ compatibles aux décompositions et laissés stables par $S^{\pm}$.

Si on s'est donné une structure monodromique $(E_{\mathbb{Q}}, T_{\mathbb{Q}})$ définie sur $\mathbb{Q}$, on dit que la $\mathbb{Q}$-structure de Stokes est compatible à la $\mathbb{Q}$-monodromie si les $\mathbb{Q}$-réseaux de E coïncident et si $T_{\mathbb{Q}}$ est conjugée par un élément de $\mathrm{GL}(E_{\mathbb{Q}})$ à $(S^+)^{-1}S^-$.

Exemple 3.5. Si $\#I = 1$ et $c_i = 0$, on se trouve dans le cas singulier régulier, et il n'y a pas de différence entre $\widehat{T}$ et T.

4. Le recollement twistoriel

On considère l'involution anti-holomorphe γ sur $\mathbb{P}^1$ définie par $\gamma(u) = 1/\overline{u}$. Si H^{an} est un fibré holomorphe sur $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}$, alors $\gamma^*\overline{H^{\mathrm{an}}}$ est un fibré holomorphe sur la carte $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\infty}$ de $\mathbb{P}^1$. On cherche un moyen de recoller ces deux fibrés, en un fibré qu'on notera $\widehat{H}$ sur $\mathbb{P}^1$.

Il suffit de se donner une identification holomorphe de ces deux fibrés au voisinage du cercle $|u| = 1$, et même une identification analytique réelle de leur restriction au cercle $|u| = 1$. Sur le cercle, on a $\gamma = \mathrm{Id}$, donc on veut identifier $H^{\mathrm{an}}_{|S^1}$ et $\overline{H}^{\mathrm{an}}{}_{|S^1}$. On utilise la structure réelle déduite de la structure rationnelle.

De l'isomorphisme $H^{\mathrm{an}}_{\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{E}_B$ on déduit $H^{\mathrm{an}}_{|S^1} \simeq \mathscr{A}_{S^1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{E}_{B|S^1}$ et puisque $\mathscr{E}_{B|S^1}$ est défini sur $\mathbb{Q}$ et que $\mathscr{A}_{S^1} = \overline{\mathscr{A}}_{S^1}$, l'isomorphisme $\overline{\mathscr{E}}_{B|S^1} \simeq \mathscr{E}_{B|S^1}$ induit un isomorphisme $\overline{H^{\mathrm{an}}}_{|S^1} \simeq H^{\mathrm{an}}_{|S^1}$, et donc un recollement : c'est le recollement twistoriel.

5. Exemples

Comment donner un exemple de structure de Hodge non commutative (de type exponentiel) ? On dispose des résultats suivants.

(1) Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge usuelle donne lieu à une structure de Hodge non commutative (voir l'exposé de JBT). Dans ce cas, il n'y a pas de différence entre les deux structures $\mathbb{C}(u)$-rationnelles de H^{an} induites par H et $\widehat{H}$.

(2) La transformation de Laplace sur la droite affine $\mathbb{A}^1$ transforme une variation de $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisée sur $\mathbb{A}^1$ privée d'un nombre fini de points en une variation de structure de Hodge non commutative sur $\mathbb{C}^*$. Ce sera la méthode pour montrer que la structure de Hodge non commutative de $\mathbb{P}^n$ en est bien une.

(3) On peut essayer de reprendre la définition et ajuster les données pour obtenir une structure de Hodge non commutative. Ce n'est pas si facile.

(a) La structure de Stokes rationnelle $(E_{\mathbb{Q}}, E'_{\mathbb{Q}}, S^{\pm})$ permet de définir $(\mathscr{M}, \nabla)$,

(b) il faut retrouver H^{an} : il suffit de se donner le germe $\mathscr{H}$ comme $\mathbb{C}\{u\}$-module libre. Il y a alors un unique fibré à connection méromorphe à pôle double en 0 dont le germe en $u=0$ est $\mathscr{H}$. De plus, $\mathscr{H}$ est déterminé par $\widehat{\mathscr{H}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}\,[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{C}\{u\}} \mathscr{H}$ par la formule $\mathscr{H} = \widehat{\mathscr{H}} \cap \mathscr{M}$ dans $\widehat{\mathscr{M}}$. La question revient à la suivante : étant donnée la forme normale $(*)$ (que l'on peut expliciter dès que l'on dispose de la structure de Stokes), choisir un changement de base à coefficients dans $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ dans lequel la matrice reste à pôle double. Le $\mathbb{C}\,[\![u]\!]$-module engendré par la nouvelle base est un candidat pour $\widehat{\mathscr{H}}$, duquel on déduit $\mathscr{H}$, et duquel on déduit H^{an}.

Il n'est pas du tout évident de vérifier si la propriété d'opposition (recollement trivial) est satisfaite ou non.

Théorème 5.1 **(C. Hertling-CS).** *Supposons que les matrices $\Sigma^{\pm}$ satisfassent aux propriétés suivantes :*

$$\Sigma^{-} = -{}^t\Sigma^{+}, \quad \Sigma^{+} + {}^t\Sigma^{+} \geqslant 0.$$

Si on choisit le réseau canonique $\mathscr{H}$ de $\widehat{\mathscr{M}}$ (adapté à la décomposition suivant I), l'objet $(H^{\mathrm{an}}, \mathscr{E}_B, \simeq)$ associé est une structure de Hodge non commutative.

6. Variations de structures de Hodge non commutatives

Comme je l'ai indiqué dans le petit rappel historique, c'est vraiment la définition de variation de structure de Hodge non commutative qui devrait être donnée en premier, pour faire comprendre la notion structure de Hodge non commutative, en particulier la condition de pôle double de la connexion. De fait, la bonne généralisation du fait qu'une connexion relative (*i.e.* ne dérivant pas le long de u) a un pôle simple le long de $u=0$ est le fait que la connexion absolue qui la relève a un pôle de rang de Poincaré $\leqslant 1$.

Définition 6.1. Une variation de structure de Hodge non commutative paramétrée par une variété complexe S consiste en la donnée

(1) d'un $\mathscr{O}_S[u]$-module localement libre de rang fini,
(2) d'un faisceau localement constant $\mathscr{E}_B$ de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur $S \times (\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}} \smallsetminus \{0\})$,
(3) d'un isomorphisme $\mathscr{O}_{S\times(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\})} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E}_B \xrightarrow{\sim} H^{\mathrm{an}}_{|S\times(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\})}$,

satisfaisant aux propriétés de prolongement suivant sur $S \times \mathbb{P}^1$:

(a) La connexion holomorphe $d \otimes \mathrm{Id}$ sur le fibré holomorphe $\mathscr{O}_{S\times(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\smallsetminus\{0\})} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E}_B$ s'étend en une connexion rationnelle ∇ sur H de rang de Poincaré $\leqslant 1$ le long de $S\times\{0\}$ et une singularité régulière le long de $S \times \{\infty\}$;

(b) pour tout $s \in S$, la restriction à $\{s\} \times \mathbb{A}^1$ est une structure de Hodge non commutative,

(c) la structure formelle le long de $S\times\{0\}$ est *bonne* : dans le cas « de type exponentiel », les fonctions $c_i(s)$ et leurs différences $c_i - c_j$ ne s'annulent pas sur S, sauf à s'annuler identiquement.

Quelles sont les donnés minimales ? Partons d'un $\mathscr{O}_S[u]$-module libre H à connexion méromorphe ∇, qu'on suppose à singularité régulière le long de $S\times\{\infty\}$ et de rang de Poincaré $\leqslant 1$ le long de $S \times \{0\}$. Je suppose aussi que la structure formelle est bonne le long de $S \times \{0\}$ (*cf.* la définition ci-dessus dans le cas de type exponentiel).

Je suppose que S est simplement connexe et je fixe $s_o \in S$.

Proposition 6.2. *Dans ces conditions, la donnée d'une structure de Hodge non commutative en s_o s'étend de manière unique en une variation de structure de Hodge non commutative sur $S \smallsetminus D$, où D est une hypersurface de S ne contenant pas s_o (dépendant de la donnée en s_o).*

Références

[1] S. Barannikov – « Quantum periods. I. Semi-infinite variations of Hodge structures », *Internat. Math. Res. Notices* (2001), no. 23, p. 1243–1264.

[2] ______, « Semi-infinite variations of Hodge structures and integrable hierarchies of KdV type », *Int. Math. Res. Not.* (2002), no. 19, p. 973–990.

[3] S. Cecotti, P. Fendley, K. Intriligator & C. Vafa – « A new supersymmetric index », *Nuclear Phys. B* **386** (1992), p. 405–452.

[4] S. Cecotti & C. Vafa – « Topological-antitopological fusion », *Nuclear Phys. B* **367** (1991), p. 359–461.

[5] ______, « On classification of $N = 2$ supersymmetric theories », *Comm. Math. Phys.* **158** (1993), p. 569–644.

[6] J.-P. Demailly – « Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation », in *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas & Synthèses, vol. 3, Société Mathématique de France, 1996, p. 3–111.

[7] B. Dubrovin – « Geometry and integrability of topological-antitopological fusion », *Comm. Math. Phys.* **152** (1993), p. 539–564.

[8] C. Hertling – « *tt** geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities », *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 77–161.

[9] L. Katzarkov, M. Kontsevich & T. Pantev – « Hodge theoretic aspects of mirror symmetry », in *From Hodge theory to integrability and TQFT : tt*-geometry* (R. Donagi & K. Wendland, éds.), Proc. Symposia in Pure Math., vol. 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, arXiv : `0806.0107`, p. 87–174.

[10] C. Simpson – « Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 867–918.

[11] ______, « Higgs bundles and local systems », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **75** (1992), p. 5–95.

[12] ______, « Mixed twistor structures », Prépublication Université de Toulouse & arXiv : `math.AG/9705006`, 1997.

[13] V.E. Zakharov & A.V. Mikhailov – « Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method », *Soviet Phys. JETP* **74** (1978), no. 6, p. 1953–1973.

[14] V.E. Zakharov & A.B. Shabat – « Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. II », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **13** (1979), no. 3, p. 13–22.

[15] S. Zucker – « Hodge theory with degenerating coefficients : L_2-cohomology in the Poincaré metric », *Ann. of Math.* **109** (1979), p. 415–476.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah`