SYSTÈMES GKZ ET VARIÉTÉS TORIQUES

Groupe de travail "Symétrie(s) miroir pour les orbifolds toriques via les équations différentielles "

T. Mignon

Luminy, 9-11 mars 2010

Abstract. Nous donnons une brève présentation de la théorie des systèmes GKZ et montrons en quoi la "fonction I" de Givental est reliée à de tels systèmes.

1. Introduction : Fonctions hypergeometriques

1.1. **La fonction hypergéométrique de Gauss.** L'origine des fonctions hypergéométriques se trouve au début du 19ème siècle, lorsque Gauss étudie l'équation différentielle suivante (appelée maintenant "l'équation différentielle de Gauss") :

$$x(1-x)F^{''} + (c-(a+b+1)x)F' - abF = 0 \tag{1.1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Cette équation linéaire, qui provient de la physique, a trois points singuliers réguliers en $0, 1$ et ∞. Toute équation différentielle linéaire de degré 2 possédant trois points singuliers réguliers peut se mettre sous cette forme.

La recherche de solutions en séries entières $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, conduit à la relation de récurrence suivante (où nous supposons que $c \notin \mathbb{Z}$).

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)} \tag{1.2}$$

En fixant $c_0 = 1$, on obtient :

$$F(a,b,c;x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} x^k$$

où $(\alpha)_k$ désigne le *symbole de Pochammer* :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha)_k & = & (\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), \quad \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^* \\ (\alpha)_0 & = & 1 \end{array}$$

en particulier, $(1)_k = k!$. On montre le théorème suivant (voir [1]) :

Théorème 1. *On suppose $c \notin \mathbb{Z}$. La série entière :*

$$F(a,b,c;x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} x^k$$

est convergente pour $|x| < 1$. Les deux fonctions

$$F(a,b,c;x) \qquad \text{et} \qquad x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$$

forment une base de l'espace des solutions de l'équation 1.1.

La fonction F est appelée la *fonction hypergéométrique de Gauss*. Elle fut largement étudiée durant le 19ème siècle. Cette fonction vérifie aussi l'expression intégrale suivante :

Théorème 2. *Si* $0 < \mathrm{Re}b < \mathrm{Re}c$ *, on a :*

$$F(a,b,c;x) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

1.2. **Les fonctions hypergéométriques.** Le terme fonction hypergéométrique provient de la relation de récurrence 1.2. Cette relation est du type $c_{k+1} = H(k)c_k$ où H est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes de degrés 2. Si ces deux polynômes étaient constants égaux à 1, on obtiendrait la série

$$G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots ,$$

qui est la série géométrique (de raison x). On obtient aussi la série géométrique comme particulier de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$F(1,c,c;x) = G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Une première généralisation de la fonction hypergéométrique consiste à modifier la fraction rationnelle H de la relation 1.2. On obtient les fonctions notées ${}_pF_q\left({a_1,\dots,a_p \atop b_1,\dots,b_q};x\right)$ en la variable x dont le développement en série entière $\sum c_k x^k$ vérifie :

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a_1)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)\cdots(k+b_q)(k+1)}.$$

Plus tard, de nombreuses versions de fonctions hypergéométriques à plusieurs variables ont été proposées. On signalera les fonctions d'Appel et Lauricella et les fonctions de Horn par exemple. Dans tous les cas, les trois aspects suivants sont présents :

(1) Un système différentiel holonome
(2) Des solutions développable en séries entières, dont les termes s'expriment à l'aide de symboles de Pochamer.
(3) Des expressions intégrales des solutions, à l'aide d'intégrales d'Euler généralisées.

Ces trois points caractérisent la notion de fonction hypergéométrique, dans sons sens le plus étendu.

Systèmes GKZ

En 1989, Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky introduisent les systèmes différentiels dénommés aujourd'hui selon leurs initiales (voir [3]). Ils parlent alors de $\mathcal{A}$-systèmes. Les $\mathcal{A}$-systèmes proposent une approche nouvelle et unifiante des fonctions hypergéométriques. Leur article montre en quoi les fonctions "historiques" sont des cas particuliers de $\mathcal{A}$-systèmes.

Soit $N = \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{A} = (b_1, \cdots, b_m)$, m vecteurs de N engendrant $N \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, et $a \in \mathbb{C}^n$. A partir de ces données, les auteurs définissent un ensemble d'opérateurs différentiels de l'algèbre de Weyl :

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] < \frac{\partial}{\partial\lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\lambda_n} > .$$

On posera $\partial_i = \frac{\partial}{\partial\lambda_i}$.

1.3. **Opérateurs carrés :** On considère la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & & e_i & \mapsto & b_i & & \end{array} \tag{1.3}$$

où $(e_1, \dots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^m$. Le sous-module L de $\mathbb{Z}^m$ est donc le réseau des relations entre les b_i. A chaque relation $l = (l_1, \dots, l_m)$, on associe l'opérateur suivant :

$$\Box_l = \prod_{i\in[1,m], l_i>0} \partial_i^{l_i} - \prod_{i\in[1,m], l_i<0} \partial_i^{-l_i}$$

où, par convention, le produit vaut 1 si l'ensemble des indices est vide. On obtient ainsi, dans le cas où les b_i ne sont pas linéairement indépendants, une infinité d'opérateurs.

1.4. **Opérateurs "Z_i", ou opérateurs d'action du tore.** Fixons les coordonées des vecteurs :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq m,\ b_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^n,\ \text{et a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}.$$

On pose, pour $1 \leq j \leq n$,

$$Z_{j,a} = b_{1,j}\lambda_1\partial_1 + \cdot + b_{m,j}\lambda_m\partial_m - a_j.$$

on obtient ainsi n opérateurs, que l'on peut résumer en :

$$Z_a = \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i\partial_i - a$$

Identifions les b_i avec des caractères du tore de dimension n : $T^n = \mathbb{C}^{*n}$ en posant :

$$\begin{array}{rcl} T^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t = (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & t^{b_i} = t_1^{b_{i,1}} \dots t_n^{b_{i,n}}, \end{array}$$

et considérons une fonction $f \in \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ vérifiant la relation :

$$\forall t \in T^n, \lambda \in \mathbb{C}^n,\ f(t^{b_1}\lambda_1, \dots, t^{b_m}\lambda_m) = t^a f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \tag{1.4}$$

(pour une détermination du logarithme de t fixée). Les dérivées de cette relation selon $t_1, \dots, t_n$ au point $t = (1, \dots, 1)$ donnent précisemment les opérateurs $Z_{1,a}, \dots, Z_{n,a}$, qui apparaissent donc comme une compatibilité infinitésimale à l'action du tore.

Pour autant, les solutions du système ne vérifieront pas systématiquement la relation non infinitésimale 1.4.

1.5. **Le $\mathcal{D}$-module GKZ.** Les opérateurs ci-dessus définissent un idéal à gauche de l'algèbre de Weyl :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A},a} = \sum_{l\in L} \mathcal{D}\Box_l + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}Z_{i,a}.$$

On note aussi :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},a} = \mathcal{D}/\mathcal{I}_{\mathcal{A},a}.$$

C'est le $\mathcal{D}$-module GKZ, associé aux données $\mathcal{A}, a$.

1.6. **Exemples.** Nous évoquerons essentiellement une famille d'exemples très importante : ceux issus de l'éventail d'une variété torique. Dans ce cas, le $\mathbb{Z}$-module N est l'espace des groupes à un paramètre du tore $T^n = \mathbb{C}^n$. L'éventail est un ensemble de cônes Σ contenus dans $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, et l'ensemble $\mathcal{A}$ est l'ensemble des générateurs des rayons de l'éventail (on le notera parfois $\Sigma(1)$). Le vecteur a est choisi égal à $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ lorsque l'objectif est d'obtenir la focntion I.

1.6.1. *Cas de* $\mathbb{P}^2$. On a $N = \mathbb{Z}^2$ et les générateurs des rayons de l'eventail sont :

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On pose $\mathcal{A} = (b_1, b_2, b_3)$ et $a = (0,0)$. A à un facteur multiplicatif près, la seule relation entre b_1, b_2 et b_3 est :

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

et la suite exacte 1.3 s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L = \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & N = \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & 0 \\ & & l & \mapsto & (l,l,l) & & & & \\ & & & & e_i & \mapsto & b_i & & \end{array}$$

Les opérateurs carrés sont donc paramétrés par $l \in \mathbb{Z}$, et s'écrivent :

$$\begin{array}{rl} l > 0 : & \Box_l = \partial_1^l \partial_2^l \partial_3^l - 1 \\ l = 0 : & \Box_l = 1 - 1 = 0 \\ l < 0 : & \Box_l = 1 - \partial_1^{-l} \partial_2^{-l} \partial_3^{-l} \end{array}$$

Les opérateurs Z_a sont au nombre de deux et s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} Z_{1,a} = Z_{1,0} & = & \lambda_1 \partial_1 - \lambda_3 \partial_3 \\ Z_{2,a} = Z_{2,0} & = & \lambda_2 \partial_2 - \lambda_3 \partial_3 \end{array}$$

On observe que :

$$\begin{array}{ll} \forall l \in \mathbb{Z}, & \Box_l = -\Box_{-l} \\ \forall l \in \mathbb{N}^*, & \Box_l = (\partial_1 \partial_2 \partial_3)^l - 1 = ((\partial_1 \partial_2 \partial_3)^{l-1} + \cdots + 1)\Box_1 \end{array}$$

Ceci montre que l'opérateur $\Box_1$suffit à engendre tous les opérateurs carrés, et on obtient :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A},0} = \mathcal{D}\Box_1 + \mathcal{D}Z_{1,0} + \mathcal{D}Z_{2,0},$$

soit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},0} = \mathcal{D}/ < \partial\partial_2\partial_3 - 1, \lambda_1\partial_1 - \lambda_3\partial_3, \lambda_2\partial_2 - \lambda_3\partial_3 > .$$

2. Propriété du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_{\mathcal{A},a}$

Les principales propriétés des $\mathcal{D}$-modules GKZ sont toutes démontrées dans l'article initial des Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky. Les trois auteurs imposent toutefois une hypothèse supplémentaires aux vecteurs de $\mathcal{A} = (b_1, \dots, b_m)$: ceux-ci doivent se trouver sur un même hyperplan affine de N. En 1994, Adolphson revient sur l'article de GKZ et parvient à supprimer cette hypothèse dans un grand nombres de cas, en particulier celui des variétés toriques ([2]). Ce sont les résultats d'Adolphson que nous présentons ici.

Théorème 3. *Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_{\mathcal{A},a}$ est holonome.*

La variété caractéristique est donc de dimension m et, en dehors d'une hypersurface de $\mathbb{C}^m$, les solutions du système forment un faisceau localement constant de rang fini.

Exemple 4. Le cas de $\mathbb{P}^2$.
Dans le cas de la variété torique $\mathbb{P}^2$ présentée plus haut, l'idéal $\mathcal{I}_{A,0}$ vaut $< \partial\partial_2\partial_3 - 1, \lambda_1\partial_1 - \lambda_3\partial_3, \lambda_2\partial_2 - \lambda_3\partial_3 >$. La variété caractéristique est donc définie par l'idéal $I_{car} =< y_1y_2y_3, \lambda_1y_1 - \lambda_3y_3, \lambda_2y_2 - \lambda_3y_3 >$ de $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, y_1, y_2, y_3]$. C'est une réunion de 3-plans de $\mathbb{C}^6$.

2.1. Dimension de l'espace des solutions.

L'objet essentiel ici est le polyèdre suivant :

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \text{Enveloppe convexe de } \mathcal{A} \text{ et } 0_{\mathrm{N}_{\mathbb{R}}}$$

Ce polyèdre est compact ; il n'est pas contenu dans un hyperplan puisque nous avons supposé que les vecteurs de $\mathcal{A}$ engendrent $N_{\mathbb{R}}$. Il a donc un volume non nul pour la mesure usuelle de Lebesgue, et ne sera pas considéré comme une face de lui-même.

Pour étudier l'espace des solutions formelles, en un point $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$, Adolphson introduit le polynôme de Laurent de $\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ suivant :

$$f_{\lambda^{(0)}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(0)} x^{b_i}$$

(avec la notation des multi-indices : $x^{b_i} = x_1^{b_{i,1}} \cdots x_n^{b_{i,n}}$). Pour toute face τ de $\Delta_{\mathcal{A}}$, il pose aussi :

$$f_{\tau,\lambda^{(0)}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1,\ b_i\in\tau}^{m} \lambda_i^{(0)} x^{b_i}.$$

Définition 5. Le polynôme $f_{\lambda^{(0)}}$ est dit *non dégénéré* si pour toute face τ ne contenant pas $0_{N_{\mathbb{R}}}$, le polynôme $f_{\tau,\lambda^{(0)}}$ n'a pas de point critique dans $(\mathbb{C}^*)^n$.

Autrement dit, si τ est une face de $\Delta_{\mathcal{A}}$ ne contenant pas 0, les polynomes $\frac{\partial f_{\tau,\lambda^{(0)}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{\tau,\lambda^{(0)}}}{\partial x_n}$ n'ont pas de zéro commun.

Nous poserons :

$$\begin{aligned} B &= \text{sous} - \text{module de N engendré par } \mathcal{A} \\ &= \{\sum_{i=1}^{m} k_i b_i, k_i \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

et, pour toute face τ de $\Delta_{\mathcal{A}}$, nous noterons :

$$R_\tau = \mathbb{C}[x^{b_i}, b_i \in \tau] \subset \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

Théorème 6. *Si le polynôme $f_{\lambda^{(0)}}$ défini par $\mathcal{A}$ n'est pas dégénéré, et si pour toute face $\tau \in \Gamma$,l'anneau $R_\tau$est de Cohen-Macaulay, la dimension de l'espace des solutions holomorphes au point $\lambda^{(0)}$ est :*

$$\frac{n!\mathrm{Vol}(\Delta_{\mathcal{A}})}{[N:B]}.$$

Souvent que le $\mathbb{Z}$-module B sera égal à N. De plus, la condition "Cohen-Macaulay" est immédiate dans le cadre des variétés toriques (supposées normale, c'est à dire dans le cas où les vecteurs considérés sont les générateurs minimaux des rayons du cône). On a alors :

Corollaire 7. *Soit Σ un éventail de $N_{\mathbb{R}}$, non contenu dans un hyperplan. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des générateurs minimaux des rayons de Σ. Soit $\lambda^{(0)}$ un élément de $\mathbb{C}^m$. Si $\mathcal{A}$ engendre N et si le polynôme $f_{\lambda^{(0)}}$ défini par $\mathcal{A}$ n'est pas dégénéré, alors la dimension de l'espace des solutions formelles en $\lambda^{(0)}$est :*

$$n!\mathrm{Vol}(\Delta_{\mathcal{A}}).$$

Remarque. Si la variété torique est lisse, la condition "$\mathcal{A}$ engendre N" est automatiquement vérifiée puisque les rayons d'un cône maximal forment une base de N.

Exemple. Dans le cas de $\mathbb{P}^2$, le polynôme $f_{\lambda^{(0)}}$ vaut :

$$f_{\lambda^{(0)}}(x_1, x_2) = \lambda_1^{(0)} x_1 + \lambda_2^{(0)} x_2 + \lambda_3^{(0)} x_1^{-1} x_2^{-1}$$

On vérifie que ce polynôme est non dégénéré si et seulement $\lambda_1^{(0)}\lambda_2^{(0)}\lambda_3^{(0)} \neq 0$. En tel point $\lambda^{(0)}$, la dimension de l'espace des solutions est égale à $2.\mathrm{Vol}(\Delta_{\mathcal{A}}) = 3$.

3. Solutions des systèmes GKZ : séries gamma

3.1. **La fonction Γ.** Rappelons que la fonction Γ est défini pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Elle vérifie aussi la relation :

$$\forall s, Re(s) > 0,\ \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{3.1}$$

ce qui permet de la définir par prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!$ et le lien avec les symboles de Pochamer est le suivant :

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

3.2. **Séries Γ.** Nous allons définir une famille de solutions (a priori formelles) d'un système GKZ. Nous renvoyons le lecteur à [3] ou à [4] pour une présentation plus détaillée. Soit donc $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_m) \in N$, $a \in \mathbb{C}^n$ et $L \subset N$ le réseau des relations donné par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L = \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow N = \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0.$$

Considérons un élément $\gamma \in \mathbb{C}^m$ tel que

$$\gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_m b_m = a \tag{3.2}$$

à un tel vecteur, on associe une série formelle :

$$\phi_\gamma = \sum_{l \in L} \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{\gamma_i + l_i}}{\Gamma(\gamma_i + l_i + 1)} \tag{3.3}$$

Proposition 8. *La fonction ϕ_γ est formellement solution du système GKZ défini par $\mathcal{A}$ et a.*

Proof. La relation $Z_a.\phi_\gamma$ repose essentiellement sur la relation : $\gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_m b_m = a$.

Soit maintenant $l = (l_1, \ldots, l_m) \in L$. Remarquons tout d'abord que le vecteur $\gamma + l$ vérifie encore la relation 3.2, et que $\phi_{\gamma + l} = \phi_\gamma$. Posons $l^+ = (l_1^+, \ldots, l_m^+)$ où $l_i^+ = \max(l_i, 0)$, de même pour l^-. on a :

$$\begin{aligned} \prod_{l_i > 0} \partial_i^{l_i} \phi_\gamma &= \phi_{\gamma - l^+} && (\text{fonction } \Gamma) \\ &= \phi_{\gamma + l^-} && (\text{car } \phi_{\gamma'} = \phi_{\gamma' + l}) \\ &= \prod_{l_i < 0} \partial_i^{-l_i} \phi_\gamma. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Box_l \phi_\gamma = 0$. $\square$

Remarque 9. La fonction ϕ_γ n'est pas bien définie telle quelle : il faut une détermination du log des λ_i pour que les puissances $\lambda_i^{\gamma_i + l_i}$ aient toujours un sens.

Nous ne parlerons pas des question de convergence ou de détermination d'une base de solutions, ni de la décomposition GKZ qui y est liée. Nous renvoyons pour cela à [4], par exemple.

3.3. **Autres écritures des séries gamma.** La propriété (3.1) de la fonction Γ et les symboles de Pochammer autorise une grande diversité d'écriture des séries gamma. Nous en présentons deux :

Soit donc $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_m), a$, et $\gamma \in \mathbb{C}^m$ tel que $\sum \gamma_i b_i = a$. On a :

$$\begin{aligned} \phi_\gamma &= \sum_{l = (l_1, \ldots, l_m) \in L} \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{\gamma_i + l_i}}{\Gamma(\gamma_i + l_i + 1)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{\gamma_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \cdot \sum_{l \in L} \left(\prod_{l_i > 0} \frac{\lambda_i^{l_i}}{(\gamma_i + 1)_{l_i}} \right) \cdot \left(\prod_{l_i < 0} \lambda_i^{l_i} (-1)^{-l_i} (-\gamma_i)_{-l_i} \right) \qquad (3.4) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{\gamma_i}}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \cdot \sum_{l \in L} \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{l_i} \frac{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq l_i} (\gamma_i + \nu + 1)}{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq 0} (\gamma_i + \nu + 1)} \qquad (3.5) \end{aligned}$$

La preuve n'est qu'un calcul. On observe que l'écriture 3.4, à l'aide symboles de Pochamer s'apparente à l'écriture de la fonction hypergéométrique de Gauss : Les séries gamma des fonctions hypergéométrique (nous ne parlerons pas des expressions intégrales, qui existent aussi).

L'écriture 3.5 est celle sont laquelle est généralement donnée la fonction I, comme nous le verrons dans la section suivante.

3.4. **La fonction hypergéométrique de Gauss.** La fonction hypergéométrique de Gauss s'obtient à l'aide d'un système GKZ. Ce n'est toutefois pas totalement immédiat, puisqu'il s'agit d'une fonction à une seule variable, que l'on ne peut obtenir par un système à un seul vecteur. Voici comment procéder :

Nous cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$x(1-x)F^{''} + (c-(a+b+1)x)F' - abF = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$,$c \notin \mathbb{Z}$. Posons $\mathcal{A} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ avec :

$$b_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

et posons $a = \begin{bmatrix}1-c\\-a\\-b\end{bmatrix}$.

Le réseau des relations vaut :

$$L = \mathbb{Z}.(1, 1, -1, -1)$$

Nous considérons la série ϕ_γ pour $\gamma = (0, c-1, -a, -b)$. Nous remarquons tout d'abord, que dans la définition (3.3) les termes avec $\frac{1}{\Gamma(\gamma_1+l_1+1)}$ pour $l_1 < 0$ s'annule (la fonction Γ à un pôle en tout point entier négatif, et γ_1 =0). L'écriture (3.4) nous donne alors :

$$\begin{aligned}\phi_\gamma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= \left(\frac{\lambda_2^{c-1}\lambda_3^{-a}\lambda_4^{-b}}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\right).\sum_{l\in\mathbb{N}}\left(\frac{\lambda_1^l}{(\gamma_1+1)_l}.\frac{\lambda_2^l}{(\gamma_2+1)_l}\right). \\ &\qquad \left(\lambda_3^{-l}(-1)^l(-\gamma_3)_l.\lambda_4^{-l}(-1)^l(-\gamma_4)_l\right) \\ &= \left(\frac{\lambda_2^{c-1}\lambda_3^{-a}\lambda_4^{-b}}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\right).\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(a)_l(b)_l}{(1)_l(c)_l}.\frac{\lambda_1^l\lambda_2^l}{\lambda_3^l\lambda_4^l}\end{aligned}$$

En particulier, on obtient :

$$\phi_\gamma(x, 1, 1, 1) = \frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}.\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(a)_l(b)_l}{(1)_l(c)_l}.x^l$$

qui est bien la fonction de Gauss, au facteur $\frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}$ près.

4. Fonction I d'une variété torique

4.1. **Homologie et réseau des relations.** Nous considérons ici l'éventail $\Sigma \subset N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ d'une variété torique lisse $X = X_\Sigma$. Les vecteurs b_i sont les générateurs minimaux des rayons de Σ et l'on fixe $a = 0$.

A chaque vecteur b_i correspond un diviseur torique D_i (on notera de la même façon le diviseur D_i et son image dans le groupe de Picard de X_Σ qui est aussi $H^2(X,\mathbb{Z})$). Il y a un accouplement parfait :

$$\begin{array}{ccc} H_2(X,\mathbb{Z}) \times H^2(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (d,D) & \mapsto & D(d) = \int_d D \end{array}$$

Ceci permet de voir le réseau des relation L comme le groupe d'homologie $H_2(X,\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L = H_2(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & d & \mapsto & (D_1(d),\ldots,D_m(d)) & & & & \\ & & & & e_i & \mapsto & b_i & & \end{array} \tag{4.1}$$

Les opérateurs carrés s'écrivent donc maintenant :

$$\Box_d = \prod_{i, D_i(d)>0} \partial_{\lambda_i}^{D_i(d)} - \prod_{i, D_i(d)<0} \partial_{\lambda_i}^{-D_i(d)},\ d \in H_2(X,\mathbb{Z}).$$

4.2. **Passage des variables λ au variables q.** L'étude des opérateurs $Z_{i,0}$ donne une première indication sur la forme des solutions :

Soit $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$. Posons $q^d = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{D_i(d)}$.

Lemme 10. *On a $Z_{j,0} q^d = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,b$; de plus, si un m-uplet d'entiers $k = (k_1,\ldots,k_m)$ vérifie :*

$$Z_{j,0} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{ki} = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

alors $k \in L$, c'est à dire que $k = (D_1(d),\ldots,D_m(d))$ pour un certain $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ et $\prod_{i=1}^m \lambda_i^{ki} = q^d$.

La preuve est immédiate. Ceci nous conduit à chercher des solutions dépendantes des q^d, et à enlever les opérateurs $Z_{j,0}$ du système GKZ. Le choix d'une base va rendre ce choix de nouvelles variables plus explicites.

Soit $T_1,\ldots,T_r$ une base de $H^2(X,\mathbb{Z})$ et $\beta_1,\ldots,\beta_r$ la base duale de $H_2(X,\mathbb{Z})$. Nous noterons $m_{i,a}$ les coordonnées des $D_i \in H^2(X,\mathbb{Z})$ dans la base fixée :

$$D_i = \sum_{j=1}^r m_{i,a} T_a,\ 1 \le i \le m$$

Nous posons :

$$q_a = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{D_i(\beta_a)} = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{m_{i,a}},\ a = 1,\ldots,r$$

On a alors si $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$, $q^d = \prod_{a=1}^r q_a^{T_a(d)}$.

Le système GKZ en les m variables λ_i va pouvoir s'exprimer comme un système en les variables q_a.

On observe que,

$$\lambda_i \partial_{\lambda_i} = \sum_{a=1}^r m_{ia} q_a \partial_{q_a}$$

En posant $\delta_i = \lambda_i \partial_{\lambda_i}$, et en remarquant que $\lambda_i^2 \partial_i^2 = \delta_i(\delta_i - 1)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\prod_{D_i(d)>0} \lambda_i^{D_i(d)} \Box_d &= \prod_{D_i(d)>0} \delta_i(\delta_i - 1)\dots(\delta_i - D_i(d) + 1) \\
&\quad - q^d \prod_{D_i(d)<0} \delta_i(\delta_i - 1)\dots(\delta_i + D_i(d) + 1)
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour peu que l'on travaille dans les algèbres $\mathbb{C}[\lambda_i, \lambda_i^{-1}] < \partial_{\lambda_i} >$ et $\mathbb{C}[q_a, q_a^{-1}] < \partial_a >$, où les variables sont inversibles, nous pouvons remplacer l'opérateur $\Box_d$ par l'opérateur

$$
\Box_d^{'} = \prod_{D_i(d)>0} \delta_i(\delta_i - 1)\dots(\delta_i - D_i(d) + 1) - q^d \prod_{D_i(d)<0} \delta_i(\delta_i - 1)\dots(\delta_i + D_i(d) + 1),
$$

qui est un opérateur en les variables q_a. Bien souvent, c'est ce système GKZ, avec les opérateurs "carrés prime" qui sera utilisé pour les présentation de la fonction I.

4.3. **La fonction I.** Dans la section précédente, nous avons donné des solutions du système GKZ paramétrées par un vecteur $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_m b_m = 0$. La suite exacte 4.1 montre que l'on a :

$$
D_1 b_1 + \dots + D_m b_m = 0
$$

On peut donc définir, en développant toutes les expressions en série entière (dont la fonction Γ au voisinage de 1) une fonction $\phi_{(D_1,\dots,D_m)}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$:

$$
\begin{aligned}
\phi_{(D_1,\dots,D_m)} &= \sum_{d \in H_2(X,\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{D_i + D_i(d)}}{\Gamma(D_i + D_i(d) + 1)} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{D_i}}{\Gamma(D_i + 1)} \right) \cdot \sum_{l \in L} \left(\prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{D_i(d)} \right) \frac{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq l_i} (D_i + \nu + 1)}{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq 0} (D_i + \nu + 1)}
\end{aligned}
$$

en utilisant l'écriture 3.5. C'est une solution du système GKZ.

La fonction I va de $H^2(X, \mathbb{C})$ dans l'anneau de cohomologie $H^*(X, \mathbb{C})$. Soit $\tau \in H^2(X, \mathbb{C})$ écrivons $\tau = \sum_{a=1}^{r} t_a T_a$ et posons $q_a = e^{t_a}$. Les classes T_a, l'expressions $e^{t_a T_a}$, obtenue par le développement en série entière de l'exponentielle, est une classe de $H^*(X, \mathbb{C})$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
e^{\tau} &= \prod_{a=1}^{r} e^{t_a T_a} = \prod_{a=1}^{r} q_a^{T_a} = \prod_{a=1}^{r} \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{m_{i,a} T_a} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{D_i} \in H^*(X, \mathbb{C}) \\
\text{et } q^d &= \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{D_i(d)} = \prod_{a=1}^{r} e^{t_a T_a(d)} = e^{\tau(d)} \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$
\phi_{(D_1,\dots,D_m)}(\tau) = \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(D_i + 1)} \right) \cdot \left[e^{\tau} \sum_{l \in L} q^d \frac{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq l_i} (D_i + \nu + 1)}{\prod_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \geq 0} (D_i + \nu + 1)} \right]
$$

La fonction :

$$\begin{array}{ccc} H^2(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^*(X,\mathbb{C}) \\ \tau = \sum t_a T_a & \mapsto & e^\tau \sum_{l\in L} q^d \frac{\prod_{\nu\in\mathbb{Z},\nu\geq l_i}(D_i+\nu+1)}{\prod_{\nu\in\mathbb{Z},\nu\geq 0}(D_i+\nu+1)} \end{array}$$

est la fonction $I(\tau, z=1)$ de la variété torique associée à Σ, évaluée au point $z=1$. On a ainsi fait le lien entre les série gamma et la fonction I:

$$\phi_{(D_1,\ldots,D_m)}(\tau) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m \Gamma(D_i+1)}.I(\tau,1)$$

Remarque 11. Nous n'avons jamais parlé de la variable z dont dépend aussi la fonction I. Ceci sera l'objet d'un autre exposé.

References

[1] M. Saito, B. Sturmfelds, Takayama, "Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations", Berlin : Springer-Verlag, 2000.
[2] A. Adolphson, *Hypergeometric Functions and Rings generated by monomials*, Duke Math. J. Volume 73, Number 2 (1994), 269-290.
[3] L.M. Gelfand, A.V. Zelevinskii and M.M. Kapranov, *Hypergeometric functions and toral manifolds*, Functional Anal. Appl. 23 (1989), 81-129
[4] Jan Stienstra, *GKZ Hypergeometric Structures*, Notes for Summer School 'Algebraic Geometry and Hypergeometric Functions', Istanbul, June 2005, math/0511351