D-MODULE QUANTIQUE DU CÔTÉ A

par

Samuel Boissière

Résumé. — Ce qui suit est le texte d'un exposé donné dans le cadre du groupe de travail “Symétrie(s) miroir(s) via D-modules” (Luminy, mars 2010) sur l'article d'Iritani [**2**]. L'exposé concerne la construction d'un fibré à connexion sur la cohomologie quantique, les solutions du D-module quantique, la fonction J de Givental et la définition du miroir d'une variété torique.

Dans tout ce qui suit, X désigne une variété propre et lisse sur $\mathbb{C}$, de dimension complexe n, et $H^*(X) := \bigoplus_{k\geq 0} H^{2k}(X)$ sa cohomologie *paire* à coefficients complexes. On fixe une fois pour toutes une base homogène $(\phi_k)_{k=0,\dots,N}$ de $H^*(X)$ telle que $\phi_0 = \mathbf{1}$ est l'élément neutre, et on note $(\phi^k)_k$ la base duale pour la dualité de Poincaré. On notera deg le degré cohomologique.

1. Cohomologie quantique

Soit $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$. On considère l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ dont les points géométriques sont les classes d'isomorphismes de triplets $(X, f, \underline{x})$ où C est une courbe nodale de genre 0, $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ sont n points distincts sur le lieu lisse de C, $f : C \to X$ est un morphisme tel que $f_*[C] = d$ et $\mathrm{Aut}(C, f, \underline{x})$ est fini. Cet espace de modules admet une structure d'orbifold complexe lisse et propre. Si d n'est pas la classe d'une courbe effective, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d) = \emptyset$. On note $\mathrm{Eff}_X \subset H_2(X,\mathbb{Z})$ le monoïde (associatif et commutatif) des classes de courbes effectives sur X. Les morphismes d'évaluation sont notés

$$\mathrm{ev}_i : \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d) \longrightarrow X, \quad (C, f, \underline{x}) \mapsto f(x_i).$$

On dispose de fibrés en droites universels $L_i \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)$ tels que $L_i\big|_{(C,f,\underline{x})} = T^*_{x_i}C$, dont on note $\psi_i := c_1(L_i)$ les premières classes de Chern.

Pour $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in H^*(X)$ et $i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}$, les invariants de Gromov–Witten en genre zéro avec descendants gravitationnels sont par définition

$$\langle \psi_1^{i_1}\gamma_1,\dots,\psi_n^{i_n}\gamma_n\rangle_{0,n,d} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}} \psi_1^{i_1}\,\mathrm{ev}_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \psi_n^{i_n}\,\mathrm{ev}_n^*(\gamma_n).$$

Rappelons que $\dim_{\mathbb{C}}[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}} = \dim_{\mathbb{C}} X + \int_d c_1(X) + n - 3$, qui est bien la dimension de l'espace de modules sous bonnes hypothèses (X convexe).

Ces invariants de Gromov–Witten vérifient une liste de propriétés axiomatiques, pour lesquelles nous renvoyons à Cox–Katz [**1**]. Rappelons seulement l'axiome du diviseur, qui sera explicitement utilisé dans certains calculs par la suite. Si $n \geq 1$ et $\gamma_n \in H^2(X, \mathbb{C})$:

– sans descendants gravitationnels :

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n \rangle_{0,n,d} = \int_d \gamma_n \cdot \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \rangle_{0,n-1,d}.$$

– avec descendants gravitationnels :

$$\begin{aligned}\langle \psi_1^{i_1}\gamma_1, \dots, \psi_{n-1}^{i_{n-1}}\gamma_{n-1}, \gamma_n \rangle_{0,n,d} &= \int_d \gamma_n \cdot \langle \psi_1^{i_1}\gamma_1, \dots, \psi_{n-1}^{i_{n-1}}\gamma_{n-1} \rangle_{0,n-1,d} \\ &\quad + \sum_j \langle \psi_1^{i_1}\gamma_1, \dots, \underbrace{\psi_j^{i_j-1}\gamma_j \cup \gamma_n}, \dots, \psi_{n-1}^{i_{n-1}}\gamma_{n-1} \rangle_{0,n-1,d}\end{aligned}$$

où la somme s'étend sur les indices j tels que $i_j \geq 1$.

1.1. Petite cohomologie quantique. — On n'utilise ici que les invariants à trois points. Pour $\alpha, \beta \in H^*(X)$, on définit

$$\alpha \star \beta := \sum_{d \in \mathrm{Eff}_X} \sum_k \langle \alpha, \beta, \phi_k \rangle_{0,3,d} \phi^k Q^d \in H^*(X) \otimes \mathrm{Eff}_X[[Q]].$$

Les axiomes des invariants de Gromov–Witten permettent de voir que ce produit est associatif, commutatif, de neutre $\mathbf{1}$. En $Q = 0$ on retrouve le cup-produit usuel.

1.2. Grande cohomologie quantique. — On utilise maintenant tous les invariants de Gromov–Witten. Le produit est paramétré par une classe $\tau \in H^*(X)$. Pour $\alpha, \beta \in H^*(X)$, on définit

$$\alpha \bullet_\tau \beta := \sum_{d \in \mathrm{Eff}_X} \sum_{n \geq 0} \sum_k \frac{1}{n!} \langle \alpha, \beta, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{n}, \phi_k \rangle_{0,n+3,d} \phi^k Q^d \in H^*(X) \otimes \mathrm{Eff}_X[[Q]].$$

De même, les axiomes des invariants de Gromov–Witten permettent de voir que ce produit est associatif, commutatif, de neutre $\mathbf{1}$. En $Q = 0$ on retrouve le cup-produit usuel (la construction similaire, faite à partir d'un orbifold, donne en $Q = 0$ le cup-produit orbifold). Il est pratique d'écrire ce produit à l'aide du *potentiel de Gromov–Witten en genre zéro*

$$\mathcal{F}(\tau) := \sum_{d \in \mathrm{Eff}_X} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \langle \tau^n \rangle_{0,n,d} Q^d,$$

en posant $\langle \tau^n \rangle := \langle \underbrace{\tau, \cdots, \tau}_{n} \rangle$. En décomposant dans la base $\tau = \sum_{k=0}^{N} t_k \phi_k$, on calcule $\tau^n = \sum_{\substack{\underline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \\ \alpha_0 + \cdots + \alpha_N = n}} \frac{t_0^{\alpha_0} \cdots t_N^{\alpha_N}}{\alpha_0! \cdots \alpha_N!} \phi_0^{\alpha_0} \cdots \phi_N^{\alpha_N}$ de telle sorte que

$$\langle \tau^n \rangle_{0,n,d} = \sum_{\underline{\alpha}} \frac{t^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \langle \underbrace{\phi_0, \dots, \phi_0}_{\alpha_0}, \dots, \underbrace{\phi_N, \dots, \phi_N}_{\alpha_N} \rangle_{0,n,d}.$$

On vérifie immédiatement que le produit quantique est caractérisé par

$$\phi_i \bullet_\tau \phi_j = \sum_k \frac{\partial^3 \mathcal{F}(\tau)}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} \phi^k.$$

En décomposant $\tau = \tau_2 + \tau'$ avec $\tau_2 \in H^2(X)$ et $\tau' \in \bigoplus_{k\neq 1} H^{2k}(X)$, en utilisant la linéarité des invariants de Gromov–Witten et l'axiome du diviseur sur la classe τ_2, un calcul (un peu long mais élémentaire) montre que

$$\alpha \bullet_\tau \beta := \sum_{d\in \mathrm{Eff}_X} \sum_{n\geq 0} \sum_k \frac{1}{n!} \langle \alpha, \beta, \underbrace{\tau', \ldots, \tau'}_{n}, \phi_k \rangle_{0,n+3,d}\, \mathrm{e}^{\int_d \tau_2} \phi^k Q^d.$$

En supposant que τ est tel que cette série converge en $Q = 1$ on obtient, en posant $\circ_\tau := \bullet_\tau |_{Q=1}$, une famille d'algèbres commutatives $(H^*(X), \circ_\tau)$. On fait l'hypothèse de convergence suivante : on suppose que le produit est convergent pour $\tau \in U \subset H^*(X)$ défini par

$$U := \left\{ \tau \in H^*(X) \,|\, \Re \left(\int_d \tau_2 \right) \leq -M \quad \forall d \in \mathrm{Eff}_X \setminus \{0\} \text{ et } ||\tau'|| \leq \mathrm{e}^{-M} \right\}$$

pour un certain M suffisamment grand, où $|| \cdot ||$ désigne une norme quelconque sur la cohomologie. En particulier, on peut prendre la *large radius limit*[(1)] du produit quantique

$$\Re \left(\int_d \tau_2 \right) \to -\infty, \quad \tau' \to 0.$$

La limite du produit $\circ_\tau$ en ce point est le cup-produit usuel (ou le cup-produit orbifold si l'on part d'un orbifold).

2. D-module quantique

Considérons le fibré vectoriel trivial $F := H^*(X) \times U \times \mathbb{C}^* \to U \times \mathbb{C}^*$. Notons $(\tau, z) \in U \times \mathbb{C}^*$ les coordonnées, avec $\tau = \sum_k t_k \phi_k$ et $((\partial_{t_k})_k, z\partial_z)$ la base des champs de vecteurs sur $U \times \mathbb{C}^*$ correspondant à ces coordonnées. Posons

$$E := c_1(X) + \sum_k \left(1 - \frac{1}{2} \deg \phi_k \right) t_k \phi_k$$

et $\mu \in \mathrm{End}(H^*(X))$ l'opérateur tel que $\mu(\phi_k) = \frac{1}{2} (\deg \phi_k - n)\, \phi_k$. La classe E est appelée le *champ d'Euler*, pour des raisons qui apparaîtront plus tard. L'endomorphisme μ est appelé *opérateur de graduation de Hodge*.

Exemple 2.1. — Sur $\mathbb{P}_5$, en prenant la base de cohomologie $(\mathbf{1}, h, h^2, h^3, h^4, h^5)$ où h est une classe hyperplane, la matrice de μ est la diagonale $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; remarquons que les valeurs propres sont symétriques par rapport à zéro.

On définit une connexion sur F par

$$\nabla_{\partial_{t_k}}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t_k}(\cdot) + \frac{1}{z} \phi_k \circ_\tau (\cdot)$$
$$\nabla_{z\partial_z}(\cdot) = z\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) - \frac{1}{z} E \circ_\tau (\cdot) + \mu(\cdot).$$

Si l'on oublie la direction ∂_z, on retrouve la connexion de Dubrovin sur $H^*(X) \times U$.

Proposition 2.1. — *La connexion ∇ est plate.*

1. Une bonne traduction française ?

Cette proposition est démontrée en §A.

Posons $\iota\colon (\tau,z)\mapsto(\tau,-z)$. On dispose d'un couplage non dégénéré

$$S^{\nabla}\colon \iota^*\Gamma(F)\times\Gamma(F)\to\mathcal{O}(U\times\mathbb{C}^*)$$

induit sur chaque fibre par le couplage de Poincaré

$$(\cdot,\cdot)\colon F_{(\tau,-z)}\times F_{(\tau,z)}=H^*(X)\times H^*(X)\to\mathbb{C}$$

défini par $S^{\nabla}(\phi_i,\phi_j)=(\phi_i,\phi_j)$ et étendu par tensorialité.

Proposition 2.2. — *Le couplage S^{∇} est ∇-plat.*

Cette proposition est démontrée en §B.

Le triplet $\mathrm{QDM}(X):=(F,\nabla,S^{\nabla})$ est appelé le *D-module quantique* de X. On cherche l'ensemble des solutions de l'équation différentielle quantique

$$\mathcal{S}(F,\nabla):=\{s\in\Gamma(U\times\mathbb{C}^*,F)\,|\,\nabla s=0\}\,.$$

En fait, on va regarder les sections *multi-valuées*, autrement dit, en notant $\widetilde{\mathbb{C}^*}\to\mathbb{C}^*$ le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$, on pose

$$\widetilde{\mathcal{S}}(F,\nabla):=\left\{s\in\Gamma(U\times\widetilde{\mathbb{C}^*},H^*(X)\times U\times\widetilde{\mathbb{C}^*})\,|\,\nabla s=0\right\}$$

(cela ne change rien à la connexion dans la direction $z\partial_z$).

3. Solutions de l'équation différentielle quantique

Posons, pour $\alpha\in H^*(X)$:

$$L(\tau,z)\alpha:=\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha-\sum_{\substack{d\in\mathrm{Eff}_X,n\geq 0\\(d,n)\neq(0,0)}}\sum_k\frac{1}{n!}\langle\phi_k,\underbrace{\tau',\dots,\tau'}_{n},\frac{\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha}{z+\psi}\rangle_{0,n+2,d}\,\mathrm{e}^{\int_d\tau_2}\,\phi^k$$

où le produit $\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha$ est le cup-produit usuel, et l'invariant de Gromov–Witten se comprend ainsi : on développe $\frac{1}{z+\psi}=\sum_{j\geq 0}(-1)^j\psi^j z^{-j-1}$ et on pose

$$\langle\phi_k,\underbrace{\tau',\dots,\tau'}_{n},\frac{\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha}{z-\psi}\rangle_{0,n+2,d}=\sum_{j\geq 0}(-1)^j z^{-j-1}\langle\phi_k,\underbrace{\tau',\dots,\tau'}_{n},\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\psi_{n+2}^j\rangle_{0,n+2,d}.$$

On contrôle que le terme en $(d,n)=(0,0)$ correspond au terme exponentiel qui a été sorti de la somme. La section $L(\tau,z)\alpha\in\Gamma(U\times\mathbb{C}^*,F)$ vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.1. — *Pour tout $\alpha\in H^*(X)$, on a*

1. $\nabla_{\partial_{t_k}}L(\tau,z)\alpha=0$.
2. $\nabla_{z\partial_z}L(\tau,z)\alpha=L(\tau,z)\left(\mu-\frac{1}{z}c_1(X)\right)\alpha$.
3. $S^{\nabla}(L(\tau,-z)\alpha,L(\tau,z)\beta)=(\alpha,\beta)$ *où $(\cdot,\cdot)$ désigne la dualité de Poincaré.*
4. *En posant $z^{-\mu}z^{c_1(X)}\alpha:=\mathrm{e}^{-\mu\log z}\,\mathrm{e}^{c_1(X)\log z}\,\alpha$, on a*
$$(z\partial_z+\mu-\frac{1}{z}c_1(X))(z^{-\mu}z^{c_1(X)}\alpha)=0.$$
5. *La section multivaluée $L(\tau,z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}\alpha$ est ∇-plate.*
6. $L(\tau,z)^{-1}=L(\tau,-z)^*$, *comme morphisme du fibré F où $(-)^*$ désigne l'adjoint pour le couplage S^{∇}.*

7. *La fonction $L(\tau, z)$ est caractérisée par son équivalent à la* large radius limit

$$L(\tau, z)\alpha \sim \mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha.$$

Cette proposition est démontrée en §C.

Remarque 3.1. — En fait, la caractérisation de la fonction $L(\tau, z)$ par son asymptotique est un problème de Cauchy mal posé. Pour dire les choses proprement, il faudrait faire un changement de variable (de type $q = \mathrm{e}^{\tau}$) pour se ramener à un problème — espérons-le — bien posé. Cela demande un peu de soin. Peut-on aussi dire plus simplement que cette asymptotique, et le fait que la fonction $L(\tau, z)$ (après changement de variable aussi) est sur le cône de Givental, monrent que $L(\tau, z)$ est ainsi caractérisée ?

Corollaire 3.2. — *On a une composition de morphismes de fibrés à connexion plate*

$$\begin{array}{c} \left(F, \nabla_{\partial_{t_k}} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle z^{-\mu} z^{c_1(X)}} \\ (F, \nabla_{\partial_{t_k}} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z} + \mu - \frac{1}{z}c_1(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle L(\tau,z)} \\ (F, \nabla) \end{array}$$

induisant une suite d'isomorphismes entre les espaces de solutions associés à ces D-modules :

$$\begin{array}{c} \mathcal{S}\left(F, \nabla_{\partial_{t_k}} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle z^{-\mu} z^{c_1(X)}} \\ \widetilde{\mathcal{S}}(F, \nabla_{\partial_{t_k}} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z} + \mu - \frac{1}{z}c_1(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle L(\tau,z)} \\ \widetilde{\mathcal{S}}(F, \nabla) \end{array}$$

Ce corollaire est démontré en §D.

On en déduit en particulier, puisqu'on a déjà trouvé $\dim_{\mathbb{C}} H^*(X)$ solutions indépendantes de $\widetilde{\mathcal{S}}(F, \nabla)$, et que les solutions de $\mathcal{S}\left(F, \nabla_{\partial_{t_k}} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z}\right)$ sont clairement les sections constantes, que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathcal{S}}(F, \nabla) = \dim H^*(X).$$

Dans les exposés à venir, on construira une structure entière (un réseau) sur $\widetilde{\mathcal{S}}(F, \nabla)$.

4. Fonction $\mathbb{J}$

Posons $\mathbb{J}(\tau, z) := L(\tau, z)^{-1}\mathbf{1} \in \Gamma(F)$.

En partant de l'équation $\nabla_{\partial_{t_j}}\mathbf{1} = \frac{1}{z}\phi_j$, les morphismes de fibrés à connexion donnent $\partial_{t_j}\mathbb{J}(\tau,z) = L(\tau,z)^{-1}\left(\frac{1}{z}\phi_j\right)$, puis de nouveau :

$$\begin{aligned}\partial_{t_i}\partial_{t_j}\mathbb{J}(\tau,z) &= \frac{1}{z}\partial_{t_i}L(\tau,z)^{-1}\phi_j\\ &= \frac{1}{z}L(\tau,z)^{-1}\nabla_{\partial_{t_i}}\phi_j\\ &= \frac{1}{z^2}L(\tau,z)^{-1}\phi_i\circ_\tau\phi_j\end{aligned}$$

ce qui signifie que l'on peut calculer le produit quantique par l'identité

$$\partial_{t_i}\partial_{t_j}z^2\mathbb{J}(\tau,z) = L(\tau,z)^{-1}\phi_i\circ_\tau\phi_j$$

en développant selon les puissances de z : en effet, on observe que $L(\tau,z)\alpha = \alpha + O(z^{-1})$ donc le premier terme dans dans le développement donnera le produit quantique.

Supposons que X est une variété de Fano ($-K_X$ est ample) torique lisse. Rappelons qu'il existe une fonction $I(\tau_2,z)$ définie combinatoirement à partir de l'éventail de X (la formule explicite n'est pas nécessaire dans cet exposé). Un théorème de Givental affirme que $I(\tau_2,z) = \mathbb{J}(\tau_2,z)$ (on pose ici $\tau' = 0$, ce qui fait qu'on calcule seulement la petite cohomologie quantique) : on peut donc calculer les invariants de Gromov–Witten à partir des informations combinatoires de l'éventail de X, en utilisant l'observation ci-dessus.

Remarque 4.1. — Peut-on déduire de la fonction $\mathbb{J}(\tau_2,z)$, soit avec $\tau'=0$, la fonction $\mathbb{J}(\tau,z)$? Autrement dit, déduire la grande cohomologie quantique de la petite cohomologie quantique ?

5. Miroir d'une variété torique

Dans les exposés suivants, nous allons comparer ce D-module "du côté A" à une construction similaire "du côté B". Le lien entre ces deux constructions passe par la construction du miroir d'une variété torique.

Soit X une variété torique lisse. Notons (N,Σ) ses données combinatoires (N est un réseau et Σ un éventail) et $\Sigma(1)$ l'ensemble des rayons, qui correspondent à des diviseurs $D_1,\dots,D_m$, avec $m = |\Sigma(1)|$. Notons $v_1,\dots,v_m$ les générateurs des rayons. Rappelons qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{D} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

où $\beta(e_i) = v_i$ et $D(d) = \sum_i \langle D_i, d\rangle e_i$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{C}^*)$ à cette suite exacte (rappelons que $\mathbb{C}^*$ est un $\mathbb{Z}$-module pour la loi $(k,z)\mapsto z^k$) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{C}^*) \longrightarrow Y := (\mathbb{C}^*)^m \xrightarrow{p} M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(X,\mathbb{Z}),\mathbb{C}^*) \longrightarrow 0.$$

Le *modèle de Landau–Ginzburg* associé à la variété torique X est par définition :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "W"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C} \\ M & \end{tikzcd}$$

où $W\colon Y \to \mathbb{C}$ est défini par $W(w_1,\dots,w_n) = w_1 + \cdots + w_n$.

Exemple 5.1. — Prenons $X = \mathbb{P}_2$. On a $N = \mathbb{Z}^2$ et l'éventail est donné par les rayons $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (-1,-1)$. Le noyau du morphisme β est donc engendré par $(1,1,1)$. On a $Y = (\mathbb{C}^*)^3$ et on calcule facilement que $M = \mathbb{C}^*$ et $p(w_1, w_2, w_3) = w_1 w_2 w_3$.

Annexe A
Démonstration de la proposition 2.1

Pour montrer la platitude de ∇, puisqu'on a une base de champs de vecteurs globaux commutant deux à deux, et en utilisant la tensorialité de la courbure $R^\nabla(X,Y)\sigma$ en X, Y, σ, il suffit de vérifier les équations $R^\nabla(\partial_{t_i}, \partial_{t_j})\phi_k = 0$ et $R^\nabla(\partial_{t_i}, z\partial_z)\phi_k = 0$ pour tous i, j, k. Ces équations se réduisent à :

$$(1) \quad [\nabla_{\partial_{t_i}}, \nabla_{\partial_{t_j}}]\phi_k = 0 \quad \forall i,j,k,$$
$$(2) \quad [\nabla_{\partial_{t_i}}, \nabla_{z\partial_z}]\phi_j = 0 \quad \forall i,j.$$

A.1. La première équation est élémentaire :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{t_i}} \nabla_{\partial_{t_j}} \phi_k &= \nabla_{\partial_{t_i}} (\frac{1}{z}\phi_j \circ_\tau \phi_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{1}{z}\phi_j \circ_\tau \phi_k\right) + \frac{1}{z^2}\phi_i \circ_\tau (\phi_j \circ_\tau \phi_k) \\
\nabla_{\partial_{t_j}} \nabla_{\partial_{t_i}} \phi_k &= \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{1}{z}\phi_i \circ_\tau \phi_k\right) + \frac{1}{z^2}\phi_j \circ_\tau (\phi_i \circ_\tau \phi_k).
\end{aligned}$$

L'égalité des seconds termes vient de l'associativité et de la commutativité du produit quantique. On calcule les premiers termes en utilisant le potentiel de Gromov–Witten :

$$\begin{aligned}
\phi_j \circ_\tau \phi_k &= \sum_\ell \frac{\partial^3 \mathcal{F}(\tau)}{\partial t_j \partial t_k \partial t_\ell}\phi^\ell \\
\frac{\partial}{\partial t_i}(\phi_j \circ_\tau \phi_k) &= \sum_\ell \frac{\partial^4 \mathcal{F}(\tau)}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k \partial t_\ell}\phi^\ell \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j}(\phi_i \circ_\tau \phi_k).
\end{aligned}$$

A.2. La seconde est plus délicate, car elle utilise les propriétés de E et μ. Il correspond naturellement à la classe E le champ de vecteurs

$$\mathcal{E} := \sum_k r_k \partial_{t_k} + \left(1 - \frac{1}{2}\deg\phi_k\right) t_k \partial_{t_k}$$

où l'on note $c_1(X) = \sum_k r_k \phi_k$, la somme portant sur les classes cohomologiques de degré deux (les autres coefficients r_k sont nuls). Commençons par établir le lemme suivant, qui explique le terme de *champ d'Euler* pour $\mathcal{E}$ (voir [**3**]) :

Lemme A.1. — *Le champ $\mathcal{E}$ satisfait les relations :*

1. $[\mathcal{E}, \partial_{t_i}] = \left(\frac{\deg\phi_i}{2} - 1\right)\partial_{t_i}$;
2. $\mathcal{E}\mathcal{F}(\tau) = (3-n)\mathcal{F}(\tau)$;

3. $\mathcal{E}\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau) = \left(\frac{\deg\phi_i}{2} + \frac{\deg\phi_j}{2} + \frac{\deg\phi_k}{2} - n\right)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)$.

Démonstration du lemme. —
1. Cette vérification est facile :

$$\begin{aligned}[\mathcal{E}, \partial_{t_i}] &= \left[\sum_k r_k\partial_{t_k} + \sum_k \left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right) t_k\partial_{t_k}, \partial_{t_i}\right] \\ &= \sum_k \left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right)[t_k\partial_{t_k}, \partial_{t_i}]\end{aligned}$$

Le résultat découle donc de l'observation

$$[t_k\partial_{t_k}, \partial_{t_i}] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ -\partial_{t_i} & \text{si } i = k \end{cases}.$$

2. Soit ϕ_k une classe de degré deux. Si $\alpha_k \geq 1$, l'axiome du diviseur donne

$$\partial_{t_k}\left(\frac{t_0^{\alpha_0}\cdots t_N^{\alpha_N}}{\alpha_0!\cdots\alpha_N!}\langle\phi_0^{\alpha_0}, \ldots, \phi_N^{\alpha_N}\rangle_{0,n,d}\right) = \int_d \phi_k \cdot \frac{t_0^{\alpha_0}\cdots t_k^{\alpha_k-1}\cdots t_N^{\alpha_N}}{\alpha_0!\cdots(\alpha_k-1)!\cdots\alpha_N!}\langle\phi_0^{\alpha_0}, \ldots, \phi_k^{\alpha_k-1}, \ldots, \phi_N^{\alpha_N}\rangle_{0,n,d}$$

d'où il découle, puisque $c_1(X) = \sum_{k|\deg(\phi_k)=2} r_k\phi_k$, la formule

$$\left(\sum_k r_k\partial_{t_k}\right)\mathcal{F}(\tau) = \int_d c_1(X)\cdot\mathcal{F}(\tau).$$

On calcule par ailleurs (avec des notations simplifiées) :

$$\begin{aligned}\left(\sum_k \left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right) t_k\partial_{t_k}\right)\mathcal{F}(\tau) &= \sum_{d,n,\underline{\alpha}}\sum_k \alpha_k\left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right)\frac{t^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\langle\phi^{\underline{\alpha}}\rangle \\ &= \sum_{d,n,\underline{\alpha}}\left(\left(\sum_k \alpha_k\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_k \deg\phi_k\right)\right)\frac{t^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\langle\phi^{\underline{\alpha}}\rangle\end{aligned}$$

Or, $\sum_k \alpha_k = n$ et $\sum_k \deg\phi_k = \dim_{\mathbb{C}}[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}$ sinon les invariants de Gromov–Witten concernés sont nuls (c'est l'axiome du degré), donc

$$\left(\sum_k \left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right) t_k\partial_{t_k}\right)\mathcal{F}(\tau) = (n - \dim_{\mathbb{C}}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}})\mathcal{F}(\tau).$$

En combinant ces deux formules avec la valeur connue de la dimension de l'espace de modules, on obtient la formule annoncée.
3. On utilise l'identité formelle (elle n'utilise aucune information sur les champs de vecteurs en cause)

$$\mathcal{E}\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau) = \partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{E}\mathcal{F}(\tau) + \partial_{t_i}\partial_{t_j}[\mathcal{E}, \partial_{t_k}]\mathcal{F}(\tau) + \partial_{t_i}[\mathcal{E}, \partial_{t_j}]\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau) + [\mathcal{E}, \partial_{t_i}]\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau).$$

En introduisant les résultats (1) et (2) on trouve le résultat attendu. □

Pour organiser les calculs, introduisons l'application $\mathcal{O}(U)$-linéaire

$$\Phi\colon \Gamma(U, TU) \to \mathrm{End}(H^*(X)), \quad \Phi(\partial_{t_i}) = \phi_i \circ_\tau (\cdot).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_{t_i}} &= \frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{1}{z}\Phi(\partial_{t_i}) \\ \nabla_{z\partial_z} &= z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}\Phi(\mathcal{E}) + \mu.\end{aligned}$$

On constate facilement que

$$\left[\nabla_{\partial_{t_i}}, \nabla_{z\partial_z}\right] = -\frac{1}{z}\left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \Phi(\mathcal{E})\right] + \left[\frac{1}{z}\Phi(\partial_{t_i}), z\frac{\partial}{\partial z}\right] - \frac{1}{z^2}\left[\Phi(\partial_{t_i}), \Phi(\mathcal{E})\right] + \frac{1}{z}\left[\Phi(\partial_{t_i}), \mu\right].$$

L'associativité et la commutativité du produit quantique montrent immédiatement que $[\Phi(\partial_{t_i}), \Phi(\mathcal{E})] = 0$. On vérifie aussi facilement que $\left[\frac{1}{z}\Phi(\partial_{t_i}), z\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi_j = \frac{1}{z}\phi_i \circ_\tau \phi_j$. Par ailleurs, $\left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \Phi(\mathcal{E})\right]\phi_j = \left(\frac{\partial}{\partial_{t_i}}\Phi(\mathcal{E})\right)\phi_j$ et l'on calcule

$$\frac{\partial}{\partial_{t_i}}\Phi(\mathcal{E}) = \frac{\partial}{\partial_{t_i}}\left(\sum_k r_k\Phi(\partial_{t_k}) + \left(1 - \frac{\deg\phi_k}{2}\right)t_k\Phi(\partial_{t_k})\right),$$

mais on a vu en A.1 (avec des écritures plus explicites) que $\frac{\partial}{\partial_{t_i}}\Phi(\partial_{t_k}) = \frac{\partial}{\partial_{t_k}}\Phi(\partial_{t_i})$, tous deux étant égaux à une dérivée quatrième du potentiel $\mathcal{F}(\tau)$. Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial_{t_i}}\Phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\Phi(\partial_{t_i}) + \left(1 - \frac{\deg\phi_i}{2}\right)\Phi(\partial_{t_i}).$$

On calcule alors en utilisant la troisième assertion du lemme :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\Phi(\partial_{t_i})\phi_j &= \mathcal{E}(\phi_i \circ_\tau \phi_j) \\ &= \mathcal{E}\left(\sum_k \partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k\right) \\ &= \sum_k\left(\frac{\deg\phi_i}{2} + \frac{\deg\phi_j}{2} + \frac{\deg\phi_k}{2} - n\right)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k \\ &= \left(\frac{\deg\phi_i}{2} + \frac{\deg\phi_j}{2}\right)\phi_i \circ_\tau \phi_j + \sum_k\left(\frac{\deg\phi_k}{2} - n\right)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial_{t_i}}\Phi(\mathcal{E})\phi_j = \left(1 + \frac{\deg\phi_j}{2}\right)\phi_i \circ_\tau \phi_j + \sum_k\left(\frac{\deg\phi_k}{2} - n\right)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k.$$

Enfin, on calcule le dernier commutateur :

$$\begin{aligned}\left[\Phi(\partial_{t_i}), \mu\right]\phi_j &= \phi_i \circ_\tau \mu(\phi_j) - \mu(\phi_i \circ_\tau \phi_j) \\ &= \frac{1}{2}(\deg\phi_j - n)\phi_i \circ_\tau \phi_j - \mu\left(\sum_k \partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k\right) \\ &= \frac{1}{2}(\deg\phi_j - n)\phi_i \circ_\tau \phi_j - \sum_k \frac{1}{2}(\deg\phi^k - n)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k.\end{aligned}$$

Mais par dualité, $\deg \phi^k - n = n - \deg \phi_k$ donc

$$[\Phi(\partial_{t_i}), \mu]\, \phi_j = \frac{1}{2}(\deg \phi_j - n)\phi_i \circ_\tau \phi_j + \sum_k \frac{1}{2}(\deg \phi_k - n)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k$$
$$= \frac{\deg \phi_j}{2}\phi_i \circ_\tau \phi_j + \sum_k \left(\frac{\deg \phi_k}{2} - n\right)\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F}(\tau)\phi^k.$$

On constate bien que les trois termes en discussion se compensent.

Annexe B
Démonstration de la proposition 2.2

La platitude du couplage S^∇ signifie par définition que pour tout champ de vecteurs X et toutes sections σ_1, σ_2 on a

$$(\star) \quad \partial_X S^\nabla(\sigma_1, \sigma_2) = S^\nabla(\nabla_X \sigma_1, \sigma_2) + S^\nabla(\sigma_1, \nabla_X \sigma_2).$$

On constate facilement que le couplage est $\mathcal{O}(U \times \mathbb{C}^*)$-bilinéaire au sens suivant : pour toute fonction $a(\tau, z) \in \mathcal{O}(U \times \mathbb{C}^*)$, on a

$$a(\tau, z)S^\nabla(\cdot, \cdot) = S^\nabla(a(\tau, -z)\cdot, \cdot) = S^\nabla(\cdot, a(\tau, z)\cdot).$$

L'identité $(\star)$ est donc tensorielle en X, et l'on constate facilement qu'elle est aussi tensorielle en σ_1, σ_2. Il suffit donc de vérifier les égalités

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t_k} S^\nabla(\phi_i, \phi_j) = S^\nabla(\nabla_{\partial_{t_k}}\phi_i, \phi_j) + S^\nabla(\phi_i, \nabla_{\partial_{t_k}}\phi_j),$$
$$(2) \quad z\frac{\partial}{\partial z} S^\nabla(\phi_i, \phi_j) = S^\nabla(\nabla_{z\partial_z}\phi_i, \phi_j) + S^\nabla(\phi_i, \nabla_{z\partial_z}\phi_j).$$

L'égalité (1) est facile à obtenir en utilisant l'identité aisément vérifiable (et essentielle)

$$(\phi_k \circ_\tau \phi_i, \phi_j) = (\phi_i, \phi_k \circ_\tau \phi_j).$$

Pour l'identité (2), on utilise aussi l'observation que l'adjoint de l'opérateur μ pour la dualité de Poincaré est $-\mu$.

Annexe C
Démonstration de la proposition 3.1

1. Avec $\tau = \sum_k t_k \phi_k$, définissons les *couplages gravitationnels en genre nul* par :

$$\langle\langle \psi^{i_1}\gamma_1, \ldots, \psi^{i_\ell}\gamma_\ell \rangle\rangle_{0,\ell} := \sum_{d \in \mathrm{Eff}_X} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \langle \psi^{i_1}\gamma_1, \ldots, \psi^{i_\ell}\gamma_\ell, \underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{\ell} \rangle_{0, n+\ell, d}$$

(on omet les indices inférieurs sur les classes ψ car ils sont automatiques). Un peu de travail (long) avec l'axiome du diviseur avec descendant gravitationnel montre que

$$L(\tau, z)\alpha = \alpha - \sum_k \phi^k \langle\langle \phi_k, \frac{\alpha}{z + \psi} \rangle\rangle_{0,2}.$$

On a ainsi simplifié la dépendance en le paramètre τ_2, en se débarrassant de l'exponentielle — ou plutôt en la faisant entrer dans les corrélateurs —, ce qui facilite le calcul des dérivations. Je renvoie pour ce calcul à la démonstration de [**1**, Proposition 10.2.3].

On a besoin de quelques propriétés de ces couplages. On constate facilement que

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\langle\langle\psi^{i_1}\gamma_1,\ldots,\psi^{i_\ell}\gamma_\ell\rangle\rangle_{0,\ell}=\langle\langle\phi_j,\psi^{i_1}\gamma_1,\ldots,\psi^{i_\ell}\gamma_\ell\rangle\rangle_{0,\ell+1}$$

(comme toujours, car quand on dérive seuls les termes qui contiennent ϕ_j survivent). On introduit le *potentiel de Gromov–Witten gravitationnel.* On pose $T:=\sum_{k,i}t_k^i\psi^i\phi_k$, où les $(t_k^i)_{i,k}$ sont des variables, et on définit

$$\mathcal{F}^{\mathrm{grav}}(T):=\sum_{d,n}\frac{1}{n!}\langle T^n\rangle_{0,n,d}$$

avec les conventions usuelles de convergence et les notations raccourcies d'usage. On constate bien que

$$\langle\langle\psi^{i_1}\phi_{k_1},\ldots,\psi^{i_\ell}\phi_{k_\ell}\rangle\rangle_{0,\ell}=\frac{\partial\mathcal{F}^{\mathrm{grav}}(T)}{\partial t_{k_1}^{i_1}\cdots\partial t_{k_\ell}^{i_\ell}}\bigg|_{t_k^i=0\text{ pour }i>0}.$$

En particulier, si $k_1=\cdots=k_\ell=0$ on tombe sur

$$\langle\langle\phi_{k_1},\ldots,\gamma_{k_\ell}\rangle\rangle_{0,\ell}=\frac{\partial\mathcal{F}(\tau)}{\partial t_{k_1}\cdots\partial t_{k_\ell}}$$

où $\mathcal{F}$ est le potentiel de Gromov–Witten ordinaire. On en déduit que

$$\phi_i\circ_\tau\phi_j=\sum_k\langle\langle\phi_i,\phi_j,\phi_k\rangle\rangle_{0,3}\phi^k.$$

On va aussi utiliser la relation dite de *topological recursion*, qui permet de déduire (uniquement en genre nul) les invariants de Gromov–Witten avec descendants gravitationnels à partir des invariants de Gromov–Witten ordinaires. Pour $i_1\geq 0$, cette relation s'écrit

$$\langle\langle\psi^{i_1+1}\phi_{k_1},\psi^{i_2}\phi_{k_2},\psi^{i_3}\phi_{k_3}\rangle\rangle_{0,3}=\sum_\ell\langle\langle\psi^{i_1}\phi_{k_1},\phi_\ell\rangle\rangle_{0,2}\cdot\langle\langle\phi^\ell,\psi^{i_2}\phi_{k_2},\psi^{i_3}\phi_{k_3}\rangle\rangle_{0,3}.$$

On calcule alors, tout d'abord pour les variables t_i telles que $\deg\phi_i>2$ (car les autres apparaissent dans τ_2, ce qui modifie le calcul) :

$$\frac{\partial}{\partial t_i}L(\tau,z)\alpha=-\sum_{k,j}(-1)^jz^{-j-1}\phi^k\langle\langle\phi_i,\phi_k,\psi^j\,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,3}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\phi_i\circ_\tau L(\tau,z)\alpha&=\frac{1}{z}\phi_i\circ_\tau\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha-\sum_{k,j}(-1)^jz^{-j-2}(\phi_i\circ_\tau\phi^k)\langle\langle\phi_k,\psi^j\,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,2}\\&=\frac{1}{z}\phi_i\circ_\tau\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha-\sum_{k,j,\ell}(-1)^jz^{-j-2}\langle\langle\phi_i,\phi^k,\phi_\ell\rangle\rangle_{0,3}\cdot\langle\langle\phi_k,\psi^j\,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,2}\phi^\ell\\&=\frac{1}{z}\phi_i\circ_\tau\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha-\sum_{j,\ell}(-1)^jz^{-j-2}\cdot\langle\langle\phi_i,\phi_\ell,\psi^{j+1}\,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,3}\phi^\ell\\&=\frac{1}{z}\phi_i\circ_\tau\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha+\sum_{j\geq1,\ell}(-1)^jz^{-j-1}\cdot\langle\langle\phi_i,\phi_\ell,\psi^j\,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,3}\phi^\ell\end{aligned}$$

On constate que $\frac{1}{z}\phi_i\circ\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha=\sum_\ell z^{-1}\langle\langle\phi_i,\phi_\ell,\mathrm{e}^{-\tau_2/z}\,\alpha\rangle\rangle_{0,3}\phi^\ell$, qui est le terme en $z^{-1}\psi^0$ qui manque dans la deuxième somme. En additionnant, on trouve l'opposé de $\frac{\partial}{\partial t_i}L(\tau,z)$, donc $\nabla_{t_i}L(\tau,z)=0$.

2. C'est surprenant, mais c'est presque évident, une fois qu'on a la platitude par rapport aux variables t_k, de déduire la platitude par rapport à la variable z. Ecrivons $L(\tau, z) = S(\tau, z) \circ \mathrm{e}^{-\tau_2/z}$. On vérifie facilement que S commute à la dérivation par z, à l'opérateur μ ainsi qu'au champ $\mathcal{E}$. Mais la platitude de L par rapport aux variables t_k montre — puisque $\mathcal{E}$ ne fait intervenir que ces variables — que S commute aussi au produit quantique par E. On conclut facilement.
3. Considérons $c_1(X)$ comme opérateur sur $H^*(X)$ pour le cup-produit usuel. On vérifie facilement la règle de commutation $[\mu, c_1(X)] = c_1(X)$, en écrivant $c_1(X) = \sum_k r_k \phi_k$, la somme portant sur les ϕ_k de degré deux. On a besoin de quelques relations générales : si $a, b \in \mathrm{End}(H^*(X))$, on a $\partial_z z^a = z^{-1} a z^a$ et si $[a, b] = b$, on a pour tout k, par récurrence, $a^k b = b(1 + a)^k$, donc $\mathrm{e}^a\, b = b\, \mathrm{e}^{a+1}$ et similairement $z^a b = b z^{a+1}$ et $(\frac{1}{z})^a b = b(\frac{1}{z})^{a+1}$, que l'on va utiliser sous la forme $z^{-\mu} c_1(X) = c_1(X) z^{-1} z^{-\mu}$. On calcule alors :

$$
\begin{aligned}
(z\partial_z + \mu - \frac{1}{z} c_1(X))(z^{-\mu} z^{c_1(X)} \alpha) =& z\partial_z(z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha) + \mu z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha - \frac{1}{z} c_1(X) z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha \\
=& -\mu z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha + z^{-\mu} c_1(X) z^{c_1(X)}\alpha \\
& + \mu z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha - \frac{1}{z} c_1(X) z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

4. L'équation $\nabla_{\partial_{t_k}}(L(\tau, z) z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha) = 0$ est immédiate avec la première assertion, tandis que l'équation $\nabla_{z\partial_z}(L(\tau, z) z^{-\mu} z^{c_1(X)}\alpha) = 0$ vient facilement avec les assertions (2) et (3).
5. 6. 7. Voir Iritani [**2**, Proposition 2.4].

Annexe D
Démonstration (rapide) du corollaire 3.2

Rappelons qu'un morphisme $\theta\colon (F, \nabla^1) \to (F, \nabla^2)$ est un morphisme de fibré à connexion si pour tout champ de vecteur X et toute section $s \in \Gamma(F)$ on a la relation

$$\nabla^2_X(\theta s) = \theta(\nabla^1_X s).$$

On voit facilement (c'est fait pour !) que le premier morphisme est compatible aux connexions : pour ∂_{t_k} c'est clair, et pour $z\partial_z$ cela vient de la relation

$$(z\partial_z + \mu - \frac{1}{z} c_1(X))(z^{-\mu} z^{c_1(X)}) = 0.$$

Pour le deuxième morphisme, en décomposant $s = \sum_i s_i(\tau, z)\phi_i$ et en utilisant les formules sur la fonction $L(\tau, z)$, on conclut sans difficulté.

Annexe E
Rappels sur les connexions

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle *tenseur* de type (k, ℓ) tout élément de $V^{k,\ell} := (V^*)^{\otimes k} \otimes V^{\otimes \ell}$.

Soit M une variété différentielle et $T^{k,\ell}M := \coprod_{x\in M}(T_x M)^{k,\ell}$. On appelle *champ de tenseurs* de type (k, ℓ) tout élément de $\Gamma(M, T^{k,\ell}M)$. En particulier les champs de tenseurs $X \in \Gamma(M, TM)$ sont appelés *champs de vecteurs*. Tous ces espaces sont des $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules pour la structure naturelle. On notera $\mathcal{X}(M) := \Gamma(M, TM)$.

Soit $\mathcal{D}(M)$ l'ensemble des dérivations sur M :

$$\mathcal{D}(M) := \{D\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) \mid D \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire et } D(fg) = fD(g) + D(f)g\}.$$

C'est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module et une algèbre de Lie pour le crochet $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. On a un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules

$$\mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M), \quad X \mapsto \partial_X \colon f \mapsto (x \mapsto d_x f.X(x)) =: (df.X)$$

qui munit $\mathcal{X}(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie : si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, le crochet $[X, Y]$ est défini par $\partial_{[X,Y]} = \partial_X \circ \partial_Y - \partial_Y \circ \partial_X$. On peut donner une formule explicite pour $[X, Y]$ à l'aide de la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs.

Proposition E.1. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{X}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \cong \Gamma(M, T^*M).$$

Autrement dit, on a un couplage $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire

$$\mathcal{X}(M) \times \Gamma(M, T^*M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad (X, \omega) \mapsto \omega(X) \colon x \mapsto \omega_x \cdot X(x)$$

dont on montre qu'il est non dégénéré. Cet isomorphisme signifie en fait plus qu'il n'y paraît : si $F\colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, alors la valeur $F(X)(x)$ en $x \in M$ ne dépend que de $X(x)$ et pas des valeurs que prend X dans un voisinage de x. Ainsi, F est un tenseur. Ce résultat se généralise à tout type d'application entre tenseurs, à valeurs dans un fibré vectoriel si besoin. Pour cette raison, la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité est souvent appelée *tensorialité*.

On appelle *connexion* sur un fibré différentiel E sur M toute application

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

notée $\nabla(X, \sigma) =: \nabla_X \sigma$, telle que :

(i) ∇ est $\mathbb{R}$-bilinéaire,

(ii) ∇ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en X : $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

(iii) on a la règle de Leibniz

$$\nabla_X(f\sigma) = (df.X)\sigma + f\nabla_X\sigma \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Notons $\Omega^p(E) := \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$ pour tout p. On associe à ∇ sa *dérivée covariante*

$$d^\nabla \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$$

définie de la façon suivante : pour tout $\sigma \in \Gamma(E)$ et pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$, on pose $\nabla_X\sigma = (d^\nabla\sigma)X$. En effet, à σ fixé l'application $X \mapsto \nabla_X\sigma$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, c'est donc un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{X}(M), \Gamma(E)) \cong \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(E)$ que l'on note $d^\nabla\sigma$. Par construction du couplage $\Gamma(T^*M \otimes E) \times \mathcal{X}(M) \to \Gamma(E)$, on a la formule donnée.

On étend $d^\nabla \colon \Omega^1(E) \to \Omega^2(E)$ [2] simplement en imposant la règle de Leibniz (avec signe) :

$$d^\nabla(\omega \cdot \sigma) = d\omega \otimes \sigma - \omega \wedge d^\nabla\sigma.$$

Le produit extérieur dans cette formule est défini comme suit. En décomposant $d^\nabla\sigma = \sum_j \alpha_j \otimes \sigma_j$ avec $\alpha_j \in \Gamma(T^*M)$ et $\sigma_j \in \Gamma(E)$, on pose

$$\omega \wedge d^\nabla\sigma := \sum_j (\omega \wedge \alpha_j) \otimes \sigma_j.$$

2. et d'ailleurs aussi bien de $\Omega^p(E)$ dans $\Omega^{p+1}(E)$

On constate que $d^\nabla \circ d^\nabla \colon \Gamma(E) \to \Omega^2(E)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire :

$$\begin{aligned}(d^\nabla \circ d^\nabla)(f\sigma) &= d^\nabla(df \otimes \sigma + f d^\nabla \sigma)\\ &= d^2 f \otimes \sigma - df \wedge d^\nabla \sigma + df \wedge d^\nabla \sigma + f(d^\nabla \circ d^\nabla)\sigma\\ &= f(d^\nabla \circ d^\nabla)\sigma.\end{aligned}$$

Ainsi, à $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ donnés, l'application $\sigma \mapsto (d^\nabla \circ d^\nabla)(\sigma).(X,Y)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, c'est donc un élément noté $R^\nabla(X,Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E))$. On a donc

$$(d^\nabla \circ d^\nabla)(\sigma) \cdot (X,Y) = R^\nabla(X,Y)\sigma.$$

L'application R^∇ est appelée la *courbure* de ∇. Un calcul local (en coordonnées) montre que R^∇ est donnée explicitement par :

$$R^\nabla(X,Y)\sigma = \nabla_X(\nabla_Y \sigma) - \nabla_Y(\nabla_X \sigma) - \nabla_{[X,Y]}\sigma.$$

La connexion ∇ est dite *plate* si sa courbure est nulle (ainsi d^∇ définit un complexe, dont on peut prendre la cohomologie...). Il est important de noter que R^∇, déjà $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en σ, est aussi $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire en X, Y (c'est donc un tenseur). En effet, on calcule par exemple :

$$\begin{aligned}R^\nabla(fX,Y) &= \nabla_{fX}\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[fX,Y]}\\ &= f\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y(f\nabla_X) - \nabla_{[fX,Y]}\\ &= f\nabla_X\nabla_Y - ((df.Y)\nabla_X + f\nabla_Y\nabla_X) - \nabla_{[fX,Y]}.\end{aligned}$$

Or, $[fX,Y]$ correspond à la dérivation

$$f\partial_X\partial_Y - \partial_Y(f\partial_X) = f\partial_X\partial_Y - (df.Y)\partial_X - f\partial_Y\partial_X,$$

donc $\nabla_{[fX,Y]} = \nabla_{f[X,Y]} - \nabla_{(df.Y)X} = f\nabla_{[X,Y]} - (df.Y)\nabla_X$, d'où $R^\nabla(fX,Y) = fR^\nabla(X,Y)$.

Références

[1] D. A. Cox & S. Katz – *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[2] H. Iritani – « An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds », `arXiv :0903.1463v3`.

[3] Y. I. Manin – *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

9 mars 2010

Samuel Boissière, Laboratoire J.A.Dieudonné UMR CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice • *E-mail :* `samuel.boissiere@unice.fr`
Url : `http://math.unice.fr/∼sb/`