Equirépartition dans des multi-ensembles de $\mathbb{F}_p$

Soit $\varepsilon > 0$. Un multi-ensemble $A \subset \mathbb{F}_p$ de cardinal $|A|$ est dit ε-équiréparti modulo p si pour tout intervalle de $\mathbb{F}_p$ $I = \{ax + b \bmod p \mid 0 \leqslant x \leqslant |I| - 1\}$, où $a \in \mathbb{F}_p^*$ et $b \in \mathbb{F}_p$, on a $\left| \dfrac{|A \cap I|}{|A|} - \dfrac{|I|}{p} \right| < \varepsilon$.

En pratique, on utilise plutôt un autre critère : soit $\varepsilon' > 0$, un multi-ensemble est $S^1_{\varepsilon'}$-équiréparti modulo p si $\max\limits_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left| \sum\limits_{a \in A} \mathrm{e}^{\frac{2i\pi ax}{p}} \right| \leqslant \varepsilon' |A|$.

Cette notion a été étudiée par Bourgain Glibichuk et Konyagin (2006) dans le cas où A est un sous-groupe de $\mathbb{F}_p^*$, par Bourgain (2009) dans le cas où A est composé d'un intervalle de $\mathbb{F}_p$ et d'un sous-groupe G de $\mathbb{F}_p^*$ et par Hegyvári et Hennecart (2012), qui ont étendu le résultat de Bourgain dans le cas où $A = (f(I) \cdot G)$ avec $f \in \mathbb{F}_p[X]$, I un intervalle de $\mathbb{F}_p$ et G une partie de $\mathbb{F}_p^*$ et tel que $|G \cdot G| < 2|G|$. En plus de condition de structure, il faut imposer une condition sur la taille de G pour obtenir le résultat.

Nous présenterons ces conditions et deux résultats permettant d'étendre le résultat de Hegyvári et Hennecart.